極限

千葉大学大学院理学研究科 松田茂樹

目次

1 序

1.1 概要

(1.1.1). この文章は千葉大の学生向けに書いた極限についての紹介文です。主に [Ta78], [Ka76] および [Mac98], を参考にしています。

(1.1.2). 集合論における, 部分集合の族の共通部分, 和集合, 直積や非連結和, ファイバー積, また, 加群の理論における核, 余核, 直積, 直和, 整数論に出てくる p 進整数環や, より一般に可換環の線形位相についての完備化, これらは全て, (圏における) 極限と呼ばれる概念を用いて定義することができる。従って, 極限を学ぶことで様々な概念を統一的に理解し, 扱えるようになる。またそれだけでなく, それらの間の関係を調べたり, これまでの手段では表現が難しかった対象をわかりやすく表現できるようになる。

(1.1.3). 極限 (逆極限, 順極限) の概念は, 歴史的には様々な形で現われた。当初はポセット (部分順序集合) を添字集合とする形で定式化され, 特にポセットが有向 (directed ないしは filtered) な場合に詳しくその性質が調べられたようである。そのため現在でもそのような仮定の下で定義されることも多い。その後, 有向とは限らない一般のポセットや, ポセットではなく小さい圏の上での極限として定式化されるようになった。この文章では, まずは直観的に扱いやすいポセット上の極限を一般的な圏の場合に説明する。次に, 環上の加群の極限について少し詳しく見た後, 圏の上の極限について極限を定式化しなおすことにする。また, 基本的に圏論の最低限の用語は知っていることを仮定している。

(1.1.4). 極限の呼び方についてだが, 歴史的には有向なポセット上の場合には, $\varprojlim$ は逆極限 (inverse limit) ないしは射影的極限 (projective limit), また $\varinjlim$ は順極限 (direct limit) ないしは帰納的極限 (inductive limit) のように呼ばれていたので, ここでもその用語を使う。ただし圏上の極限の節では, S. MacLane [Mac98] の用語に合わせて $\varprojlim$ は極限 (limit), $\varinjlim$ は余極限 (colimit) という用語を使う。

記号	$\varprojlim M_\lambda$	$\varinjlim M_\lambda$
呼び方	逆極限 (inverse limit)	順極限 (direct limit)
	射影的極限 (projective limit)	帰納的極限 (inductive limit)
	極限 (limit)	余極限 (colimit)

また, 逆極限, 順極限の両方を合わせて極限という呼び方もする (この文章のタイトルがそうである)。これだと 3 番目の呼び方の極限と重なるが, 誤解することはないだろう。

(1.1.5). 極限の概念は, 定義が抽象的なことや, またそのために具体例を計算するためにはいくつかの準備が必要になることがあることから, 最初は分かりにくく感じることがあるかもしれない。実際, 加群の場合に極限の計算がある程度自由にできるようになるためには, この文章で言えば, §3 のテンソル積との関係や完全列に関する性質を知る必要がある。しかし, そこで挙げられた計算例を見れば, 極限の重要性を感じることができるだろう。極限によって,「無限」的なもの, 例えば有限生成でない加群や, 完備な群や環などを扱う極めて有効な手段が手に入ることになる。

2　ポセット上の極限

2.1　ポセット

(2.1.1). 最初にポセット上の極限を説明する。そのため, ポセット (部分順序集合) の定義から復習することにする。

(2.1.2) 定義. S を集合とする。 S における関係 $\leq$ が**前順序** (**pre-order**) とは, 反射的 $(x \leq x)$ で, かつ推移的 $(x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $\Rightarrow x \leq z)$ であること。これが更に半対称 $(x \leq y \leq x \Rightarrow x = y)$ であれば **(部分) 順序** (**partial order**) という。(部分) 順序を持つ集合を **(部分) 順序集合** (**partially ordered set**), あるいは略して**ポセット** (**poset**) という。更に任意の $x, y \in S$ に対し, $x \leq y$ または $y \leq x$ の少なくとも一方が成立するときは**全順序** (**total order**) という。

(2.1.3) 補足. 英語での partial order は部分順序, subset は部分集合と訳される。つまり partial と sub が日本語ではどちらも部分と訳されてしまう。これでは, 部分順序集合 S の部分集合 A を, S の順序の制限によって部分順序集合とみなしたものを呼ぶときに, 部分部分順序集合となってしまい, どうも語呂が良くない。また単に部分順序集合と言う場合でも, それが部分順序の入った集合なのか, 順序集合の部分集合なのかが明確でない。(もっとも実際には, ほぼ前者の意味になると思って間違いはないが。) そこでこの文章では部分順序集合はポセットと呼び, その部分集合を部分順序集合とみたものは部分ポセットということにする。

(2.1.4). この文章では, 順序関係を図示する際には, 矢印を使うことが多い。つまり, $x \leq y$ であることを図では $x \longrightarrow y$ のように書く。この表記には, ポセットを圏とみなす際にイメージしやすいという利点もある。この場合, いくつかの矢印の合成でできる矢印は省略することが多い。そうでないと図が煩雑になってしまう。

(2.1.5) 定義. ポセット S が**有向** (**filtered** ないしは **directed**) とは, 任意の $x, y \in I$ に対し $x \leq z$ かつ $y \leq z$ となる $z \in I$ が存在することである。全順序であればもちろん有向である。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] x \arrow[dr] & \\ & z \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(2.1.6) 例. 自然数の集合 $\{1, 2, 3, \ldots\}$ を $\mathbb{N}$ とする。$\mathbb{N}$ と通常の大小関係 $\leq$ の組は全順序集合である。

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow$$

(2.1.7) 例. $\mathbb{N}$ に対し, $a \mid b$, つまり a が b の約数のときに $a \leq b$ と定めると, $\leq$ は全順序ではない順序になる。この場合も $(\mathbb{N}, \leq)$ は有向ポセットになる。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 4 \arrow[r] & {} \\ 1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[dr] & 6 & \\ & 5 & {} & \end{tikzcd}$$

(2.1.8) 例. X を集合, $S = 2^X$ を X の巾集合, 即ち部分集合全体のなす集合とする。$A, B \in S$ に対し, $B \supset A$ なら $B \leq A$ として順序を定めると, S はポセットである。例えば $X = \{0, 1\}$ であれば, 次の図のよう

なポセットができる。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \{0\} \arrow[dr] & \\ \{0,1\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \emptyset \\ & \{1\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(2.1.9) 例. X を位相空間, $\mathscr{O}$ を X の開集合全体のなす集合とする。$U, V \in \mathscr{O}$ に対し, $V \supset U$ のとき $V \leq U$ とすると, $\mathscr{O}$ は $\leq$ を順序とする有向ポセットである。

また, $x \in X$ とし, I を x の開近傍, つまり $x \in U$ なる $U \in \mathscr{O}$ の全体からなす集合とする。I に $\mathscr{O}$ の部分順序をいれると, I もまた有向ポセットである。

(2.1.10) 定義. $(S, \leq)$ をポセットとする。S の部分集合 A が S と共終 (**cofinal**) (resp. 共始 (**coinitial**)) であるとは, 任意の $x \in S$ に対し, ある $y \in A$ で $x \leq y$ (resp. $y \leq x$) なるものが存在することである。

(2.1.11) 補足. cofinal や coinitial の代わりに final, initial と言うこともある。[Mac98, IX, 3] 参照。

2.2 ポセット上の逆系, 順系

(2.2.1) 定義. $(\Lambda, \leq)$ をポセット, $\mathscr{C}$ を圏とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ なる λ, $\mu \in \Lambda$ の組に対し射 $\varphi_{\lambda\mu} : A_\mu \to A_\lambda$ が与えられ, 次を満たすとき, $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を逆系 (**inverse system**) ないしは射影系 (**projective system**) という。しばしば $\varphi_{\lambda\mu}$ を省略して (A_λ), ないしは $(A_\lambda)_\lambda$ のようにも書く。

(1) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $\varphi_{\lambda\lambda} = 1_{A_\lambda}$. $\quad A_\lambda \xrightarrow{1_{A_\lambda}} A_\lambda$

(2) $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なら $\varphi_{\lambda\nu} = \varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_{\mu\nu}$.

$$\begin{tikzcd} \nu & & \lambda \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & \mu \arrow[ul] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_\nu \arrow[rr, "\varphi_{\lambda\nu}"] \arrow[dr, "\varphi_{\mu\nu}"'] & & A_\lambda \\ & A_\mu \arrow[ur, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

(2.2.2) 定義. 射の向きを逆にすると順系が得られる。即ち, $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し射 $\varphi_{\mu\lambda} : A_\lambda \to A_\mu$ が与えられ, 次を満たすとき, $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ を順系 (**direct system**) ないしは帰納系 (**inductive system**) という。これも (A_λ), $(A_\lambda)_\lambda$ などのように省略して書くことも多い。

(1) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $\varphi_{\lambda\lambda} = 1_{A_\lambda}$. $\quad A_\lambda \xrightarrow{1_{A_\lambda}} A_\lambda$

(2) $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なら $\varphi_{\nu\lambda} = \varphi_{\nu\mu} \circ \varphi_{\mu\lambda}$.

$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[rr] \arrow[dr] & & \nu \\ & \mu \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[rr, "\varphi_{\nu\lambda}"] \arrow[dr, "\varphi_{\mu\lambda}"'] & & A_\nu \\ & A_\mu \arrow[ur, "\varphi_{\nu\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

(2.2.3) 定義 (逆系 (順系) の射). Λ をポセット, $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$, $(B_\lambda, \psi_{\lambda\mu})$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における逆系とする。このとき (A_λ) から (B_λ) への射とは $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ なる射の族 (f_λ) であって, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対し次が可換であるものを言う。

$$\begin{tikzcd} A_\mu \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda\mu}"'] & B_\mu \arrow[d, "\psi_{\lambda\mu}"] \\ A_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & B_\lambda \end{tikzcd}$$

また, $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$, $(B_\lambda, \psi_{\mu\lambda})$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における順系とするとき, (A_λ) から (B_λ) への射とはやはり

$f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ なる射の族 (f_λ) であって, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対し次が可換であるものを言う。

$$\begin{tikzcd}
A_\mu \arrow[r, "f_\mu"] & B_\mu \\
A_\lambda \arrow[u, "\varphi_{\mu\lambda}"] \arrow[r, "f_\lambda"] & B_\lambda \arrow[u, "\psi_{\mu\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

Λ 上の $\mathscr{C}$ における逆系全体, ないしは順系全体はこれらの射について明らかに圏をなす。

(2.2.4). Λ をポセットとするとき, 対象の集合を Λ, $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $\lambda \leq \mu$ なら $\theta_{\mu\lambda} : \lambda \to \mu$ という射がただ一つだけあり, そうでないときは λ から μ への射は存在しないと定める。$\lambda = \mu$ のときは $1_\lambda = \theta_{\lambda\lambda}$ とし, $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なら $\theta_{\nu\lambda} = \theta_{\nu\mu} \circ \theta_{\mu\lambda}$ によって合成を定めれば, Λ を圏とみなせる。

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\lambda, \mu) = \begin{cases} \{\theta_{\mu\lambda}\} & (\lambda \leq \mu) \\ \emptyset & (\lambda \not\leq \mu) \end{cases}$$

ポセット上の逆系や順系はこのような圏からの反変関手や共変関手とみなすことができる。圏上の極限では, この視点に立って概念を拡張することになる。(4.1.5) 参照。記号の節約のため, 以後, ポセットを圏とみなす際は, 特に必要な場合を除いていちいち $\theta_{\mu\lambda}$ などの記号は設定せず, $\lambda \to \mu$ と書けば唯一の射を表すものとする。

2.3 ポセット上の逆極限, 順極限

(2.3.1) 定義. ポセット Λ 上の, 圏 $\mathscr{C}$ における逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ の**逆極限** (**inverse limit**) ないしは**射影極限** (**projective limit**) とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varprojlim A_\lambda$ および, $\mathscr{C}$ の射の族 $\varphi_\lambda : \varprojlim A_\lambda \to A_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ の組 $(\varprojlim A_\lambda, \varphi_\lambda)$ で, 次の条件を満たすもののことである。

(1) $\lambda \leq \mu$ に対し $\varphi_{\lambda\mu} \circ \varphi_\mu = \varphi_\lambda$.
(2) 任意の $B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と任意の射の族 $f_\lambda : B \to A_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ で $\lambda \leq \mu$ に対し $\varphi_{\lambda\mu} \circ f_\mu = f_\lambda$ なるものに対して, $f_\lambda = \varphi_\lambda \circ f$ となる $f : B \to \varprojlim A_\lambda$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda & & B \arrow[ll, "f_\lambda"'] \arrow[dl, dotted, "\exists_1 f"] \\
& \varprojlim A_\lambda \arrow[ul, "\varphi_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

より詳しくイメージを描くと, 次のようになる。

$$\begin{tikzcd}
{} & \lambda \arrow[l] & \mu \arrow[l] & {} \arrow[l] \\
{} \arrow[r] & A_\lambda \arrow[r] & A_\mu \arrow[r] & {} \\
& & & B \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[dll, dotted] \\
& \varprojlim A_\lambda \arrow[uu] \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}$$

なお, Λ を明示したい場合は $\varprojlim_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, あるいは $\varprojlim_\Lambda A_\lambda$ などと表記する。φ_λ を省略して $\varprojlim A_\lambda$ を逆極限と呼ぶことも多い。また $\varphi_\lambda : \varprojlim A_\lambda \to A_\lambda$ を自然な射と呼んだりする。

(2.3.2) 補足. $\varprojlim A_\lambda$ と書いたときの λ は添字で Λ の要素を動くので, $\varprojlim A_\mu$ と書いても同じである。上の定義での $\varphi_\lambda : \varprojlim A_\lambda \to A_\lambda$ という表記では, この動く λ と固定した λ で同じ文字を使ってしまっているので, 本当は誤解を生じないよう $\varphi_\lambda : \varprojlim A_\mu \to A_\lambda$ のように書くべきなのかもしれないが, 節約のため同じ文字を使うことにする。

(2.3.3) 定義. 同様に, ポセット Λ 上の, $\mathscr{C}$ における順系 $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ の**順極限** (**direct limit**) ないしは**帰納的極限** (**inductive limit**) とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim A_\lambda$ および, $\mathscr{C}$ の射の族 $\varphi_\lambda : A_\lambda \to \varinjlim A_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ の組 $(\varinjlim A_\lambda, \varphi_\lambda)$ で, 次の条件を満たすもののことである。

(1) $\lambda \leq \mu$ に対し $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda} = \varphi_\lambda$.
(2) 任意の $B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ と任意の射の族 $f_\lambda : A_\lambda \to B$ $(\lambda \in \Lambda)$ で $\lambda \leq \mu$ に対し $f_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda} = f_\lambda$ なるものに対して, $f_\lambda = f \circ \varphi_\lambda$ なるような $f : \varinjlim A_\lambda \to B$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[rr, "f_\lambda"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"'] & & B \\ & \varinjlim A_\lambda \arrow[ur, dotted, "\exists_1 f"'] & \end{tikzcd}$$

これもより詳しくイメージを描くと, 次のようになる

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \lambda \arrow[r] & \mu \arrow[r] & {} \\ {} \arrow[r] & A_\lambda \arrow[r] \arrow[d] \arrow[drr] & A_\mu \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & {} \\ & \varinjlim A_\lambda \arrow[rr, dotted] & & B \end{tikzcd}$$

逆極限の場合と同様, Λ を明示したい場合は $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, あるいは $\varinjlim_\Lambda A_\lambda$ などと表記する。また, φ_λ を省略して $\varinjlim A_\lambda$ を順極限と呼んだり, $\varphi_\lambda : A_\lambda \to \varinjlim A_\lambda$ を自然な射と呼んだりする。

(2.3.4). 一般の圏では逆極限や順極限は常に存在するとは限らない。しかし, 存在したとすると, 次のように, 強い意味で同型の違いを除いて一意的に決まることがわかる。

(2.3.5) 命題. 逆極限や順極限は, 存在すれば一意的に定まる同型の違いを除いて一意的である。つまり, 逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ が与えられたとき, もし $(\varprojlim A_\lambda, \varphi_\lambda)$ と $(\overline{\varprojlim} A_\lambda, \overline{\varphi}_\lambda)$ が共に逆極限の定義の条件を満たすとすると, 同型射 $f : \overline{\varprojlim} A_\lambda \to \varprojlim A_\lambda$ で, 任意の λ に対し $\varphi_\lambda \circ f = \overline{\varphi}_\lambda$ となるようなものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} A_\lambda & & \overline{\varprojlim} A_\lambda \arrow[ll, "\overline{\varphi}_\lambda"'] \arrow[dl, "f"] \\ & \varprojlim A_\lambda \arrow[ul, "\varphi_\lambda"] & \end{tikzcd}$$

なおこの文章では, 「強い意味で」一意的であるという表現をこのように「同型射が一意的に決まる」という意味で使う。

(証明). 順極限の場合は逆極限の場合の双対なので, 逆極限の場合にのみ示せば良い。まず, $\varprojlim A_\lambda$ および

$\overline{\varprojlim} A_\lambda$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda & & \varprojlim A_\lambda \arrow[ll, "\varphi_\lambda"'] \arrow[d, "g"] \\
& & \overline{\varprojlim} A_\lambda \arrow[ull, "\overline{\varphi}_\lambda"] \arrow[dll, "f"] \\
\varprojlim A_\lambda \arrow[uu, "\varphi_\lambda"] & &
\end{tikzcd}$$

が可換になるような f, g が一意的に存在する。ここで $f \circ g$ 及び id が共に次の図式を可換にすることから, 一意性より $f \circ g = \mathrm{id}$ でなければいけない。

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda & & \varprojlim A_\lambda \arrow[ll, "\varphi_\lambda"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, bend left, "f \circ g"] \\
& \varprojlim A_\lambda \arrow[ul, "\varphi_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

全く同様に $g \circ f = \mathrm{id}$ も言えるので, f, g は互いの逆射で, 特に同型射。 $\square$

(2.3.6). Λ をポセット, $\mathscr{C}$ を圏とし, Λ 上の $\mathscr{C}$ の逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ から逆系 $(B_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ への射を (f_λ) とする (2.2.3). これらの逆系の極限が存在するなら, $(B_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ の普遍性から, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] & B_\lambda \\
\varprojlim A_\lambda \arrow[u] \arrow[r, "f"] & \varprojlim B_\lambda \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

が可換であるような $f : \varprojlim A_\lambda \to \varprojlim B_\lambda$ が一意的に存在する。この f を $\varprojlim f_\lambda$ と書く。これにより, もし Λ 上の逆系の極限が常に存在するなら, $\varprojlim$ は, 逆系のなす圏から $\mathscr{C}$ への関手とみなせる。同様のことが, 順極限についても言える。

(2.3.7). 上で注意したように, 逆極限や順極限は常に存在するとは限らないが, 以下の (2.3.8), (2.3.11), (2.3.12), (2.3.13) で見るように, 集合の圏や加群の圏ではどちらも必ず存在する。

(2.3.8) 命題. 集合の圏 $\mathscr{C} = (\mathrm{Set})$ においては, 任意の逆系に対し逆極限が存在する。実際, $(X_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ をポセット Λ 上の逆系とするとき,

$$\varprojlim X_\lambda = \left\{ (x_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \;\middle|\; \lambda \leq \mu \text{ なら } \varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda) = x_\mu \right\} \tag{2.3.8.1}$$

とし, また $\varprojlim X_\lambda \to \prod X_\lambda \to X_\lambda$ なる合成写像を φ_λ とすると, $(\varprojlim X_\lambda, \varphi_\lambda)$ は逆極限の普遍性を満たす。

(証明). 定義から (2.3.1) の (1) の条件を満たすことは明らかである。集合 Y と $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ を (2.3.1) の (2) のような条件を満たすものとする。これに対し, $f : Y \to \varprojlim X_\lambda$ を $f(y) = (f_\lambda(y))$ と定めれば, 次の図式は可換であるし, 逆にそうなるためには $f(y)$ を上のように定義するしかない。

$$\begin{tikzcd}
X_\lambda & & Y \arrow[ll, "f_\lambda"'] \arrow[dl, "f"] \\
& \varprojlim X_\lambda \arrow[ul, "\varphi_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

よって逆極限の普遍性が成立する。 $\square$

(2.3.9) 系. 逆極限の定義と上の構成から, Λ をポセット, $(X_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における逆系, $(\varprojlim X_\lambda, \varphi_\lambda)$ をその逆極限とするとき, $\mathscr{C}$ の対象 Y を変数とする次の関手の同型があることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \varprojlim X_\lambda) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X_\lambda) \\ f & \longmapsto & \varphi_\lambda \circ f \end{array}$$

同様に, Λ をポセット, $(X_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における順系, $(\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda)$ をその逆極限とするとき, $\mathscr{C}$ の対象 Y を変数とする次の関手の同型があることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim X_\lambda, Y) & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X_\lambda, Y) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi_\lambda \end{array}$$

(2.3.10) 補足. 極限の話ではもちろんその普遍性が重要ではあるが, 一方で集合の圏では (2.3.8.1) の形で逆極限が構成されることは, 極限のイメージをつかむ上でも実際の計算の上でも重要である。実際には環の圏, 加群の圏, 位相環, 位相群の圏などでも全く同様に逆極限が構成される。(2.3.12) や, (2.4.17), (2.4.11) などを参照。従って, このような圏の場合の逆極限しか扱わない場合は, (2.3.8.1) (に適切な代数構造や位相を入れたもの) を逆極限の定義としていることも多い。

(2.3.11) 命題. 集合の圏 $\mathscr{C} = (\mathrm{Set})$ においては, 任意の順系に対し順極限が存在する。

(証明). $(X_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ をポセット Λ 上の順系とする。$(\coprod X_\lambda, i_\lambda)$ (ただし $i_\lambda : X_\lambda \to \coprod X_\Lambda$ は自然な包含写像) を集合の非連結和とする。簡単のため $i_\lambda(X_\lambda)$ を X_λ と同一視して $i_\lambda(x)$ を x と書くことにしよう。$\coprod X_\lambda$ において, $x \in X_\lambda$, $y \in X_\mu$ に対し

$$xRy \Leftrightarrow \exists \nu \geq \lambda, \mu \text{ s.t. } \varphi_{\nu\lambda}(x) = \varphi_{\nu\mu}(y)$$

なる関係 R で生成される同値関係を $\sim$ とする。具体的には $x \in X_\lambda$, $y \in X_\mu$ に対し $x \sim y$ となるのは, ある $a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y$ なる $a_0, \ldots, a_n$ で $0 \leq i < n$ に対し $a_i R a_{i+1}$ または $a_{i+1} R a_i$ であるものが存在するときである。[*1] $\varinjlim X_\lambda$ を $\coprod X_\lambda$ をこの同値関係で割った商集合とする。

$$\varinjlim X_\lambda = \coprod X_\lambda / \sim .$$

φ_λ を $X_\lambda \to \coprod X_\lambda \to \varinjlim X_\lambda$ なる合成写像とすると, $(\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda)$ は順極限の普遍性を満たすことを示そう。まず任意の $\coprod X_\lambda$ の元は, $x \in X_\lambda$ と書けるので, $\varinjlim X_\lambda$ の任意の元も $\varphi_\lambda(x)$ $(x \in X_\lambda)$ の形に書けることに注意する。さて, Y と $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ $(\lambda \in \Lambda)$ が (2.3.3) の (2) のような条件を満たすとしよう。即ち $\lambda \leq \mu$ なら $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda}$ とする。このとき $\widetilde{f} : \coprod X_\lambda \to Y$ を, $x \in X_\lambda$ に対し $f(\varphi_\lambda(x)) = f_\lambda(x)$ と定めよう。すると, $x \in X_\lambda$, $y \in X_\mu$ に対し xRy なら, ある $\nu \geq \lambda, \mu$ に対し $\varphi_{\nu\lambda}(x) = \varphi_{\nu\mu}(y)$ であることから

$$\widetilde{f}(x) = f_\lambda(x) = f_\nu(\varphi_{\nu\lambda}(x)) = f_\nu(\varphi_{\nu\mu}(y)) = f_\mu(y) = \widetilde{f}(y)$$

である。これを繰り返し使うと, $x \sim y$ なら $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(y)$ であることが言えるので, $\widetilde{f}$ は $\varinjlim X_\lambda = \coprod X_\lambda / \sim$ を経由し, 次の図式を可換にするような f が存在する。

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"] & Y \\ \coprod X_\lambda \arrow[r] \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \varinjlim X_\lambda \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

[*1] 同値関係の共通部分は同値関係なので, 任意の関係に対し, それを含む最小の同値関係が存在する。

逆にこの図式を可換にするような f はこのように定めるしかないので, 普遍性が成立する。 $\square$

(2.3.12) 命題. A を可換環, $\mathscr{C}$ が A 加群の圏 (A-Mod) の場合を考える。$(M_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を (A-Mod) の逆系とすると,

$$\varprojlim M_\lambda = \left\{ (x_\lambda)_\lambda \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \;\middle|\; \lambda \leq \mu \text{ なら } \varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda) = x_\mu \right\}.$$

(証明). 証明は集合の圏の場合 (2.3.8) と同じなので省略する。 $\square$

(2.3.13) 命題. (2.3.12) と同じく A を可換環とするとき $(M_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ を (A-Mod) の順系とする。このとき

$$\varinjlim M_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \Big/ R$$

とおく。ただし R は $\lambda \leq \mu$ に対する $i_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda) - i_\lambda(x_\lambda)$ で生成される $\bigoplus M_\lambda$ の部分加群を表す。また $\varphi_\lambda : M_\lambda \to \varinjlim M_\lambda$ を標準的な単射 $i_\lambda : M_\lambda \to \bigoplus_\lambda M_\lambda$ と自然な全射 $\bigoplus M_\lambda \to \varinjlim M_\lambda$ の合成とする。このとき, $(\varinjlim M_\lambda, \varphi_\lambda)$ は順極限の普遍性を満たす。

(証明). 逆極限の場合と違い, 順極限では集合圏の場合と A 加群の圏の場合で構成の細部に違いがあるが, 証明の方針は集合の圏の場合とほぼ同じである。$(\varinjlim M_\lambda, i_\lambda)$ が (2.3.3) の (1) の条件を満たすことは明らかである。A 加群 N と $f_\lambda : M_\lambda \to N$ $(\lambda \in \Lambda)$ が (2.3.3) の (2) の条件を満たすとする。即ち, $\lambda \leq \mu$ なら $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda}$ とする。$\widetilde{f} : \bigoplus M_\lambda \to N$ を $\widetilde{f}((x_\lambda)) = \sum_\lambda f_\lambda(x_\lambda)$ となるように定める。x_λ は有限個の除いて 0 なので, 和が定義できることに注意。また $\widetilde{f} \circ i_\lambda = f_\lambda$ である。このとき $\widetilde{f}$ は準同型であり, また仮定から $x_\lambda \in M_\lambda$ および $\lambda \leq \mu$ に対し $f_\mu(\varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda)) = f_\lambda(x_\lambda)$ であるので,

$$\widetilde{f}(i_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda) - i_\lambda(x_\lambda)) = \widetilde{f} \circ i_\mu(\varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda)) - \widetilde{f} \circ i_\lambda(x_\lambda) = f_\mu(\varphi_{\mu\lambda}(x_\lambda)) - f_\lambda(x_\lambda) = 0$$

となる。つまり $\widetilde{f}$ は R の生成元を全て 0 に写すので $\widetilde{f}(R) = 0$ である。よって $\widetilde{f}$ は $\varinjlim M_\lambda = \bigoplus M_\lambda / R$ を経由するので, 次の図式を可換にするような f が存在する。

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "i_\lambda"'] \arrow[dr, "\varphi_\lambda"] & N \\
\bigoplus M_\lambda \arrow[r] \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] & \varinjlim M_\lambda \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

f は $\varphi_\lambda(x)$ $(x \in M_\lambda)$ の行き先で決まるので, f_λ から一意的に決まる。よって普遍性が成立する。 $\square$

2.4 ポセット上の極限の例

(2.4.1). 最初に比較的簡単な例をいくつか挙げよう。

(2.4.2) 例. S を集合, $\mathscr{C}$ を S の部分集合を対象とし, $A \subset B \subset S$ に対し包含写像 $A \to B$ を射とする圏とする。また $\mathbb{N}$ に通常の大小関係 $\leq$ を入れて全順序集合とみなす。このとき,

(1) $\mathbb{N}$ 上の逆系 (A_n, φ_{mn}) の極限は共通部分。つまり

$$\varprojlim(\cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1) = \bigcap A_n.$$

(2) $\mathbb{N}$ の上の順系 (A_n, φ_{mn}) の極限は和集合。つまり

$$\varinjlim(A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots) = \bigcup A_n.$$

(2.4.3) 例. 任意の $\lambda \neq \mu \in \Lambda$ に対し順序関係がない, つまり $\lambda \not\leq \mu$ であるようなポセット Λ 上の場合は, 圏 $\mathscr{C}$ における逆極限は, $\mathscr{C}$ における直積, 順極限は, 直和 (余積) になる。

$$\varprojlim X_\lambda = \prod X_\lambda \qquad (\text{直積})$$
$$\varinjlim X_\lambda = \coprod X_\lambda \qquad (\text{直和})$$

(2.4.4) 例. Λ が有限な全順序集合の場合, つまり, $M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n$ という系の場合,

$$\varprojlim M_i = M_1.$$
$$\varinjlim M_i = M_n.$$

従って, この場合に極限を考えてもあまり意味はない。

(2.4.5) 例. A を可換環として, A 加群の圏では,

$$\varprojlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] M \arrow[dr, "f"] & \\ & N \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) = \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{f} N), \qquad \varinjlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & N \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd}\right) = \mathrm{Cok}(M \xrightarrow{f} N).$$

また, N_1, $N_2 \subset M$ の場合は,

$$\varprojlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] N_1 \arrow[dr] & \\ & M \\ N_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) = N_1 \cap N_2, \qquad \varinjlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & M/N_2 \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr] & \\ & M/N_1 \end{tikzcd}\right) = M/(N_1 + N_2).$$

(2.4.6) 例. 一般の圏において,

$$\varprojlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] X \arrow[dr] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right) = X \times_Z Y. \qquad (\text{ファイバー積})$$

$$\varinjlim\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & B \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C \end{tikzcd}\right) = B \sqcup_A C. \qquad (\text{余ファイバー積})$$

ファイバー積を知らない人は, この極限をファイバー積の定義と思って構わない。また余ファイバー積というのは, ファイバー積の射を逆向きにした概念。例えば可換環の圏であれば, 余ファイバー積は可換環のテンソル積 $B \otimes_A C$ に他ならない。

(2.4.7). 次に数論において非常に良く使われる $\widehat{\mathbb{Z}}$ および p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ について少し詳しめに説明する。まず位相群や位相環についての説明から始める。

(2.4.8). G が**位相群** (**topological group**) とは, 群であって位相空間でもあり, かつ演算 $G \times G \to G$; $(x, y) \mapsto xy$ および逆元を取る写像 $G \to G,$; $x \mapsto x^{-1}$ が連続写像であるものを言う。($G \times G$ には積位相を入れる。) また, 位相群を対象とし, 連続準同型を射とする圏を位相群の圏という。位相群 G は, T_0 空間 (Kolmogorov 空間, 即ち $x, y \in G$, $x \neq y$ なら x または y の開近傍で他方を含まないものが存在する) であれば, T_2 空間 (Hausdorff 空間, 即ち $x, y \in G$, $x \neq y$ なら x の開近傍 U と y の開近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ なるもの

が存在する) である。位相群ではこの条件を仮定することが多い。G を位相群, e を単位元とするとき, $x \in G$ に対し, U が e の開近傍であることと, 同相写像 $\lambda_x : G \to G;\ y \mapsto xy$ による U の像 xU が x の開近傍であることとが同値なので, 位相は単位元の近傍から決まる。

(2.4.9). この文章では環と言えば積についての単位元を持つものとする。A が**位相環** (**topological ring**) とは, 環であって位相空間でもあり, かつ加法 $A \times A \to A;\ (a,b) \mapsto a+b$ と積 $A \times A \to A;\ (a,b) \mapsto ab$ がともに連続写像であるものを言う。位相環を対象とし, 連続準同型を射とする圏を位相環の圏という。ここでは (TopRng) と書くことにする。位相群の場合と同様, 位相環の位相は 0 の近傍から決まる。

(2.4.10) 補足. A の単数群, つまり可逆元全体のなす群 $A^\times$ は A の部分空間としての位相を入れると必ずしも位相群にならない。これは $A^\times \to A^\times;\ x \mapsto x^{-1}$ が必ずしも連続ではないことによる。

(2.4.11) 例 ($\widehat{\mathbb{Z}}$). 自然数の集合 $\mathbb{N}$ に $n \mid m$ なる関係で順序関係を入れ, ポセットとみなす。位相環の圏 (TopRng) における $\mathbb{N}$ 上の逆系 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_n$ を考える。ただし $n \mid m$ のとき, $\varphi_{nm} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $a \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ への像を $[a]_n$ と書くなら $\varphi_{nm}([a]_m) = [a]_n$ で定義する。これは $n \mid m$ より well-defined である。逆系のイメージは次の通り。

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[dr] & & & \\
{} \arrow[r] & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dr] & & \\
{} \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[dr] & \\
{} \arrow[r] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\
 & {} \arrow[r] & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[ur] & \\
 & & {} \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

ただし, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる。この逆極限は,

$$\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\middle|\; n \mid m \text{ なら } \varphi_{nm}(x_m) = x_n \right\}$$

および $\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と各 n に対する射影 $p_n : \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の合成 φ_n の組 $(\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_n)$ として構成できる。なお $\varphi_{nm}(x_m) = x_n$ なる条件は $x_m \equiv x_n \pmod{n}$ とも書ける。逆極限を上の組と同一視すると, その要素は

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[dr, mapsto] & & & \\
{} \arrow[r, mapsto] & x_4 \arrow[dr, mapsto] & & \\
{} \arrow[dr, mapsto] & & x_2 \arrow[dr, mapsto] & \\
{} \arrow[r, mapsto] & x_6 \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & x_1 \\
 & {} \arrow[r, mapsto] & x_3 \arrow[ur, mapsto] & \\
 & & {} \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

のような x_n の系列 (x_n) のことだと思える。この場合自然な射 $\varphi_n : \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $x = (x_n) \in \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し, $\varphi_n(x) = x_n$ となるものである。こうして定まる逆極限を

$$\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{2.4.11.1}$$

と書き, ゼットハットないしはズィーハットと呼ぶ。この位相環は古くは Prüfer (プリュファー) 環と呼ばれており, 数論では様々な場面に現れる。$\mathbb{Z}$ から $\widehat{\mathbb{Z}}$ への自然な射 $f : \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ は $f(x) = ([x]_n)$ なるものであ

る。[*2] $f(x)=0$ となるのは, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $[x]_n=0$, 即ち x が全ての自然数を約数に持つ場合だが, これは $x=0$ のときに限るので, $f:\mathbb{Z}\to\widehat{\mathbb{Z}}$ は単射である。

またこの環の位相は, 以下の (2.4.13) と同様に定まるものである。特に 0 の基本近傍系として, $\{n\widehat{\mathbb{Z}}\mid n\in\mathbb{N}\}$ が取れる。今の場合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は離散位相の入った有限集合なので, Hausdorff かつコンパクトであるから, 以下の (2.4.14) により $\widehat{\mathbb{Z}}$ も Hausdorff かつコンパクトであることがわかる。更に, $\widehat{\mathbb{Z}}$ は全不連結, 即ち任意の点 $x\in\widehat{\mathbb{Z}}$ に対し, その点を含む連結成分はその点だけからなる集合 $\{x\}$ となる。このことを示すには, $x,y\in\widehat{\mathbb{Z}}$ を互いに異なる点とするとき開かつ閉なる部分集合 $U,V\subset\widehat{\mathbb{Z}}$ で $x\in U$, $y\in V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ なるものが取れることを言えばよいが, $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ が互いに異なれば, ある m に対し $x_m\neq y_m$ である。ここで $U=\varphi_m^{-1}(\{x_m\})$, $V=\varphi_m^{-1}(\{y_m\})$ とおくと, $\{x_m\}$ や $\{y_m\}$ は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ において開かつ閉だから, U, V も開かつ閉であり, また明らかに $x\in U$, $y\in V$, $U\cap V=\emptyset$ であるから主張が言える。まとめると次が言える。

(1) $0\in\widehat{\mathbb{Z}}$ の近傍として, $\{n\widehat{\mathbb{Z}}\mid n\in\mathbb{N}\}$ が取れる。
(2) $\widehat{\mathbb{Z}}$ は Hausdorff, コンパクト, 全不連結な位相環。
(3) 自然な射 $\mathbb{Z}\to\widehat{\mathbb{Z}}$ は単射。

(2.4.12) 命題. $m\in\mathbb{N}$ に対し, $\widehat{\mathbb{Z}}/m\widehat{\mathbb{Z}}\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(証明). 以下, $\widehat{\mathbb{Z}}$ を $\varprojlim\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\subset\prod\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同一視して考える。自然な射 $\varphi_m:\widehat{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}\to\widehat{\mathbb{Z}}\to\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が全射であることから全射である。よって $\operatorname{Ker}\varphi_m=m\widehat{\mathbb{Z}}$ を示せば準同型定理より主張が言える。$m\widehat{\mathbb{Z}}\subset\operatorname{Ker}\varphi_m$ は明らか。逆に, $a=(a_n)\in\varprojlim\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\widehat{\mathbb{Z}}$ に対し, $\varphi_m(a)=a_m=0$ だったとする。このとき, $a_{mn}\in\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ に対し $a_{mn}\equiv a_m\equiv 0 \pmod{n\mathbb{Z}}$ より $a_{mn}\equiv mb_n \pmod{mn}$ なる $b_n \pmod{n}$ が一意的に存在する。そこで, $b=(b_n)\in\prod\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とおくと, $n\mid n'$ のとき, $a_{mn'}\equiv a_{mn} \pmod{mn}$ より $mb_{n'}\equiv mb_n \pmod{mn}$ であることから $b_{n'}\equiv b_n \pmod{n}$ なので, $b_n\in\varprojlim\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である。また $mb_n\equiv a_{mn}\equiv a_n \pmod{n}$ より $mb=a$ であることもわかる。よって $b\in m\widehat{\mathbb{Z}}$ となるので, $\operatorname{Ker}\varphi_m\subset m\widehat{\mathbb{Z}}$ も言える。 □

(2.4.13). $(X_\lambda,\varphi_{\lambda\mu})$ をポセット Λ 上の位相空間の圏 (Top) における逆系とすると, その逆極限は

$$\varprojlim X_\lambda=\left\{(x_\lambda)\in\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda\ \middle|\ \lambda\leq\mu \text{ なら } \varphi_{\lambda\mu}(x_\mu)=x_\lambda\right\}$$

および, 包含写像 $\varprojlim X_\lambda\to\prod X_\lambda$ と射影 $p_\lambda:\prod_\lambda X_\lambda\to X_\lambda$ の合成 φ_λ の組 $(\varprojlim X_\lambda,\varphi_\lambda)$ として構成できる。ただし, $\prod X_\lambda$ には直積位相, つまり自然な射影 $p_\lambda:\prod X_\lambda\to X_\lambda$ が任意の λ について連続であるような最弱の位相を入れる。この位相は具体的には, $B=\{p_\lambda^{-1}(U)\mid\lambda\in\Lambda,\ U \text{ は } X_\lambda \text{ の開集合 }\}$ を準基とする位相である。つまり, このような形の集合の有限個の共通部分で表される部分集合の和集合となるものを開集合とする位相である。(なお, 空なる族の共通部分は全体集合であることに注意。) そして $\varprojlim X_\lambda$ にはその部分空間としての相対位相を入れる。このように位相を定義することで, (2.3.8) で行った普遍性の証明が連続性を含めて成立し, 確かに上の組が位相空間としての逆極限の普遍性を満たすことがわかる。

(2.4.14) 命題. もし各 X_λ が Hausdorff かつコンパクトであれば, $\varprojlim X_\lambda$ も Hausdorff かつコンパクト。

(証明). Hausdorff 空間の直積は明らかに Hausdorff で, またチコノフ (Tikhonov) の定理からコンパクト空

[*2] 一般に任意の単位環 (積についての単位元を持つ環) R に対し, $\mathbb{Z}$ から R への準同型が, ただ一通りに存在することに注意。

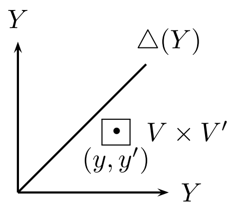
間の直積はコンパクトなので, $\prod X_\lambda$ も Hausdorff かつコンパクト。また, $\lambda \leq \mu$ なる組に対し $X_{\lambda\mu}$ を

$$X_{\lambda\mu} = \left\{ x \in \prod X_\lambda \;\middle|\; p_\lambda(x) = \varphi_{\lambda\mu} \circ p_\mu(x) \right\}$$

と定めると, $X_{\lambda\mu}$ は下の (2.4.16) より閉集合。すると $\varprojlim X_\lambda = \bigcap_{\lambda \leq \mu} X_{\lambda\mu}$ より $\varprojlim X_\lambda$ も $\prod X_\lambda$ の閉集合だから $\varprojlim X_\lambda$ はコンパクト。 $\square$

(2.4.15) 補題. Y を位相空間とする。Y が Hausdorff であることは, 対角埋め込み $\triangle : Y \to Y \times Y; y \mapsto (y, y)$ の像 $\triangle(Y)$ が $Y \times Y$ の閉集合であることと同値。

(証明). $\triangle(Y)$ が閉集合なら, $y, y' \in Y$, $y \neq y'$ に対し $(y, y') \notin \triangle(Y)$ より (y, y') の近傍 U で $U \cap \triangle(Y) = \emptyset$ なるものが存在する。$Y \times Y$ の位相は $V \times V'$ $(V, V'$ は Y の開集合$)$ の形の開集合を基本近傍系に持つので, $(y, y') \in V \times V' \subset U$ なる開集合 V, V' が存在するが, このとき $y \in V$, $y' \in V'$ であり, また $V \times V' \cap \triangle(Y) = \emptyset$ より $V \cap V' = \emptyset$ だから, Y は Hausdorff である。逆に Y が Hausdorff なら, $y \in V$, $y' \in V'$ かつ $V \cap V' = \emptyset$ なる開集合が取れるが, このとき $(y, y') \in V \times V'$ かつ $V \times V' \cap \triangle(Y) = \emptyset$ より $\triangle(Y)$ は閉集合。



$\square$

(2.4.16) 補題. $f,\ g : X \to Y$ をともに位相空間の連続写像で, Y は Hausdorff であるとする。このとき $Z = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X$ は X の閉部分集合。

(証明). $f \times g : X \times X \to Y \times Y;\ (x, x) \mapsto (f(x), g(x))$ なる写像は連続写像であり, Z は対角集合 $\triangle(Y) \subset Y \times Y$ の $f \times g$ による逆像である。Y が Hausdorff なら (2.4.15) より $\triangle(Y)$ は閉集合なので, その逆像 Z も $X \times X$ の閉集合。

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \times X \arrow[d, "f \times g"] \\ \triangle(Y) \arrow[r, hook] & Y \times Y. \end{tikzcd}$$

$\square$

(2.4.17) 例 (p 進整数環). p を素数とする。このとき, $\mathbb{N}$ に通常の大小関係による順序関係を入れ, ポセットとみなす。位相環の圏 (TopRng) における $\mathbb{N}$ 上の逆系 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_n$ を考える。逆系のイメージは次の通り。

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$\widehat{\mathbb{Z}}$ の時と同様, 各 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ には離散位相を入れる。この逆系の逆極限は

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n) \in \prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \;\middle|\; \forall n, m \in \mathbb{N},\ \ n \leq m \text{ なら } \varphi_{nm}(x_m) = x_n \right\}$$

と, $\varphi_n : \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \prod \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の組 $(\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_n)$ として構成できる。その元は次のようにイメージできる。

$$\cdots \longmapsto x_{n+1} \longmapsto x_n \longmapsto \cdots \longmapsto x_2 \longmapsto x_1$$

この位相環を

$$\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \tag{2.4.17.1}$$

と書き, p **進整数環**と呼ぶ。$\widehat{\mathbb{Z}}$ のときと全く同様に次が示せる。

(1) $0 \in \mathbb{Z}_p$ の基本近傍系として, $\{p^n\mathbb{Z}_p \mid n \in \mathbb{N}\}$ が取れる。
(2) $\mathbb{Z}_p$ は Hausdorff, コンパクト, 全不連結。
(3) 自然な射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ は単射。

$\mathbb{Z}_p$ は整域である。実際, $x, y \in \mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が共に 0 でないとする。$x_n = \varphi_n(x)$, $y_n = \varphi_n(y)$ と書くとき, m_0, n_0 を $x_{m_0} \neq 0$, $y_{n_0} \neq 0$ となる最小の自然数としよう。すると, $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ に対し x_m は $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ の中で p^{m_0} の倍数ではなく, また y_n は $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の中で p^{n_0} の倍数ではない。このとき $n > m_0 + n_0$ に対し, $\varphi_n(xy) = x_n y_n$ は $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の中で $p^{m_0+n_0}$ の倍数ではないので, 0 ではない。よって $xy \neq 0$ であるから, $\mathbb{Z}_p$ は整域である。$\mathbb{Z}_p$ の商体を $\mathbb{Q}_p$ と書き, p **進数体**と言う。

(2.4.18) 命題. $\mathbb{Q}_p \simeq \mathbb{Z}_p[1/p] \simeq \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

(証明). 証明は省略する。 □

(2.4.19). 一方, $\widehat{\mathbb{Z}}$ は整域ではない。実際, 次の同型がある。

(2.4.20) 命題. 位相環として, $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod \mathbb{Z}_p$. ただし右辺では p は全ての素数を動く。

(証明). 各素数 p に対し, 自然な射 $\widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ から $\widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_p$ なる射ができる。従って直積の普遍性から $f : \widehat{\mathbb{Z}} \to \prod \mathbb{Z}_p$ なる自然な射が定まる。逆に, 自然数 n が $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ と素因数分解されるとき, 中国剰余定理より $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}$ であることから,

$$\prod \mathbb{Z}_p \to \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}_{p_i} \to \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

として $g : \prod \mathbb{Z}_p \to \widehat{\mathbb{Z}}$ が定義できる。これらの射が互いに逆射であることは, 例えば次のような可換図式を考えれば普遍性により $g \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ g = \mathrm{id}$ となることからわかる。

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr] & \prod \mathbb{Z}_p \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} & \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \arrow[l] \arrow[r, dash, "\sim"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\prod \mathbb{Z}_p \arrow[r, "g"] \arrow[d] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \prod \mathbb{Z}_p \arrow[d] \\
\prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

極限は位相環の圏で考えているので, 位相環として同型。 □

(2.4.21). 次に順極限の具体的な例を少し挙げる。

(2.4.22) 例. $\mathbb{Q}$ を加法群とみなし, $\frac{1}{n}\mathbb{Z} = \{a/n \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$ を部分群とみなす。$\mathbb{N}$ に $a \mid b$ のとき $a \leq b$ とする順序を入れてポセットとみなすと, 次のアーベル群の同型がある。

$$\varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}.$$

(2.4.23) 例. 自然数 n に対し, $\mathbb{Z}[1/n] = \{a/n^k \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ を $\mathbb{Q}$ の部分環とみなす。$\mathbb{N}$ を (2.4.22) と同様な順序でポセットとみなすと, 次の環の同型がある。

$$\varinjlim \mathbb{Z}[1/n] \simeq \mathbb{Q}.$$

(2.4.24) 例. A を可換環, S を積閉集合とする。Λ を $f \in S$ で生成される単項イデアル (f) のなす集合, つまり $\Lambda = \{(f) \mid f \in S\}$ とする。$(f), (g) \in \Lambda$ に対して $(g) \subset (f)$ であるときに $(f) \leq (g)$ となるような順序を入れてポセットとみなす。$f \in S$ に対し, $A[1/f]$ で A の $\{f^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ による局所化を表す。$(f) \supset (g)$ なら $g = cf$ と書けるので, $A[1/f] \to A[1/g]; a/f^n \mapsto ac^n/g^n$ なる標準的な射が定まる。特に $(f) = (g)$ なら $A[1/f]$ と $A[1/g]$ を同一視できるので, $(A[1/f])_{(f)\in\Lambda}$ を Λ 上の逆系とみなせる。このとき, A の S による局所化 $S^{-1}A$ は,

$$S^{-1}A \simeq \varinjlim_{\Lambda} A[1/f]$$

のように書ける。記号の濫用になるが, この右辺の極限はしばしば $\varinjlim_{f\in S} A[1/f]$ のようにも書く。(実際には, S には自然な半対称な順序が入らないので, この節の定義での S 上の順極限にはなっていない。) 特に, P を A の素イデアル, $S = A - P$ の場合は, A の P における局所環 $A_P = S^{-1}A$ は次のように書いたりする。

$$A_P \simeq \varinjlim_{f \notin P} A[1/f].$$

$A = \mathbb{Z},\ S = \mathbb{Z} - \{0\}$ の場合が上の $\mathbb{Q} \simeq \varinjlim \mathbb{Z}[1/n]$ である。また, 素数 p に対し $\mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ p \nmid b\}$ とすると,

$$\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \varinjlim_{n \nmid p} \mathbb{Z}[1/n].$$

(2.4.25). 通常の数列の極限でも, 収束する数列の無限部分列は同じ値に収束した。類似の命題が逆系や順系の極限についても成立する。

(2.4.26) 定理. Λ を有向なポセットとし, Γ をその部分ポセットで Λ と共終 (2.1.10) なものとする。このとき, Λ 上の逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を Γ に制限して得られる逆系の逆極限が存在すれば, 元の Λ 上の逆極限も存在し両者は同型である。

(証明). $(\varprojlim_\Gamma A_\gamma, \varphi_\gamma)$ を Γ に制限した逆系の逆極限とする。仮定から任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $\lambda \leq \gamma$ なる $\gamma \in \Gamma$ が取れる。$\psi_\lambda = \varphi_{\lambda\gamma} \circ \varphi_\gamma$ として $\psi_\lambda : \varprojlim_\Gamma A_\gamma \to A_\lambda$ を定義すると, これは γ の取り方によらない。

$$\begin{tikzcd}
A_\lambda & & \varprojlim_\Gamma A_\gamma \arrow[ll, "\psi_\lambda"'] \arrow[dl, "\varphi_\gamma"] \\
& A_\gamma \arrow[ul, "\varphi_{\lambda\gamma}"] &
\end{tikzcd}$$

実際, $\lambda \leq \gamma$, $\lambda \leq \gamma'$ とするとき, 仮定から $\gamma \leq \gamma''$, $\gamma' \leq \gamma''$ なる γ'' が取れるので, 初めから $\gamma \leq \gamma'$ と仮定し

て構わない。このときは次の図式の可換性から言える。

$$\begin{tikzcd} A_\lambda & \varprojlim_\Gamma A_\gamma \arrow[l] \arrow[d] \arrow[dl] \\ A_\gamma \arrow[u] & A_{\gamma'} \arrow[l] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

ここで, (B, f_λ) を逆極限の定義 (2.3.1) の条件の (2) の仮定を満たすようなものとすると, λ が動く範囲を Γ に制限することで $\varprojlim_\Gamma A_\gamma$ からの射 f で下の図式の右側を可換にするものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} A_\lambda & A_\gamma \arrow[l, "\varphi_{\lambda\gamma}"'] & B \arrow[l, "f_\gamma"'] \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & \varprojlim_\Gamma A_\gamma \arrow[ul, "\psi_\lambda"] \arrow[u, "\varphi_\gamma"] & \end{tikzcd}$$

すると左側の図式は可換で, また $\varphi_{\lambda\gamma} \circ f_\gamma = f_\lambda$ であることから次の図式は可換。

$$\begin{tikzcd} A_\lambda & & B \arrow[ll, "f_\gamma"'] \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & \varprojlim_\Gamma A_\gamma \arrow[ul, "\psi_\lambda"] & \end{tikzcd}$$

よって $(\varprojlim_\Gamma A_\gamma, \psi_\lambda)$ が Λ の場合の普遍性を持つことから主張が言える。 □

(2.4.27) 定理. Λ を有向なポセットとし, Γ をその部分集合で Λ と共終 (2.1.10) なものとする。このとき, Λ 上の順系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を Γ に制限して得られる順系の順極限が存在すれば, 元の Λ 上の順極限も存在し, 次の標準的な射が同型になる。

$$\varinjlim_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \to \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

(証明). 上の双対命題である。 □

2.5　随伴関手としての見方

(2.5.1). この節では, Λ はポセット, $\mathscr{C}$ は圏を表す。ここでは, 逆極限や順極限を対角関手の随伴とみなす見方について説明する。この節の内容は, 圏上の極限のところで一般化された形で述べなおすことになるが, 次の節で使うこともあり, ここでも簡単に説明しておく。先に §4 を読むこともできるし, その場合はこの節の前半はとばしても構わない。ただし, 後半の例は見ておいて欲しい。

(2.5.2). (2.2.4) で述べたように, Λ 上の $\mathscr{C}$ の逆系や順系は, Λ を順序関係を射と思って圏とみなせば, Λ から $\mathscr{C}$ への反変関手や共変関手であるとみなせる。以下このように見なす。つまり, Λ は圏とみなし, 反変関手と逆系という用語を区別しないで用いる。

(2.5.3) 定義. Λ をポセット, $\mathscr{C}$ を圏とする。$\mathscr{C}$ の対象 B に対し, $\triangle(B) = (\triangle(B), 1_B)$ を, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, B を対応させ, 任意の $\lambda \leq \mu$ なる λ, $\mu \in \Lambda$ に対し, $1_B : B \to B$ を対応させることによって定まる逆系とする。これは圏論的には Λ から $\mathscr{C}$ への反変関手であり, 値 B の**定数関手**と呼ばれる。

(2.5.4) 定義. Λ から $\mathscr{C}$ への関手のなす圏を $\mathscr{C}^\Lambda$ と書く。すると, $\mathscr{C}$ の対象 B に $\triangle(B)$ を対応させ, $\mathscr{C}$ の射 $f : B \to C$ に対し, 自然変換 $\triangle(f) : \triangle(B) \to \triangle(C)$ を対応させる関手 $\triangle : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^\Lambda$ と書き, **対角関手**と呼ぶ。

(2.5.5). 逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を Λ から $\mathscr{C}$ への $G(\lambda) = A_\lambda$, $G(\mu \to \lambda) = \varphi_{\lambda\mu}$ なる関手と同一視する。もし全ての Λ 上の逆系の逆極限が存在するなら, $\varprojlim$ を $\mathscr{C}^\Lambda$ から $\mathscr{C}$ への関手とみなすことができる。以下, 逆極限は常に存在すると仮定しよう。この場合, $\lambda \le \mu$ のとき $\varphi_{\lambda\mu} \circ f_\mu = f_\lambda$ であるような射の族 $f_\lambda : B \to A_\lambda$ を与えることは, 値 B の定数関手 $(\triangle(B), 1_B)$ から, 逆系 $(A_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ への逆系の射を与えることに他ならない。

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \xleftarrow{\varphi_{\lambda\mu}} & A_\mu \\ {\scriptstyle f_\lambda}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle f_\mu} \\ B & \xleftarrow{1_B} & B \end{array}$$

これは $\triangle(B)$ から関手 G への自然変換を与えることと同じ。そして, $(\varprojlim A_\lambda, \varphi_\lambda)$ が普遍性を満たすことは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\Lambda}(\triangle(B), G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, \varprojlim A_\lambda) \tag{2.5.5.1}$$

なる B について関手的な全単射が存在することに他ならない。従って次が言える。

(2.5.6) 命題. $(A\text{-}\mathsf{Mod})$ から $(A\text{-}\mathsf{Mod})$ への圏として, $\varprojlim$ は $\triangle$ の右随伴関手, また $\triangle$ は $\varprojlim$ の左随伴関手になる。つまり $\triangle \dashv \varprojlim$.

(2.5.7). 同様に, Λ 上の順系 $(A_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ を $F(\lambda) = A_\lambda$, $F(\lambda \to \mu) = \varphi_{\mu\lambda}$ なる関手 F と同一視する。Λ 上の全ての順系の順極限が存在するなら, $\varinjlim$ を, F に $\varinjlim A_\lambda$ を対応させる $\mathscr{C}^\Lambda$ から $\mathscr{C}$ への関手とみなせる。以下, 順極限は常に存在すると仮定しよう。$\lambda \le \mu$ のとき $f_\lambda = f_\mu \circ \varphi_{\mu\lambda}$ となるような射の族 $f_\lambda : A_\lambda \to B$ を与えることは, 順系 $(A_\lambda, \varphi_\lambda)$ から値 B の定数関手 $\triangle(B)$ への順系の射を与えることに他ならない。

$$\begin{array}{ccc} A_\lambda & \xrightarrow{\varphi_{\lambda\mu}} & A_\mu \\ {\scriptstyle f_\lambda}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_\mu} \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

これは F から $\triangle(B)$ への自然変換を与えることと同じ。そして $(\varinjlim A_\lambda, \varphi_\lambda)$ が普遍性を満たすことは,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim A_\lambda, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\Lambda}(F, \triangle(B)) \tag{2.5.7.1}$$

なる B について関手的な全単射が存在することに他ならない。従って次が言える。

(2.5.8) 命題. $(A\text{-}\mathsf{Mod})$ から $(A\text{-}\mathsf{Mod})$ への関手として, $\varinjlim$ は $\triangle$ の左随伴関手, また $\triangle$ は $\varinjlim$ の右随伴函手になる。つまり $\varinjlim \dashv \triangle$.

(2.5.9). Hom と極限の可換性について見てみよう。(A_λ) を逆系とし, その逆極限 $\varprojlim A_\lambda$ が存在するとする。このとき, (2.5.5.1) と集合の圏での逆極限の構成から次の自然な全単射が得られる。

$$\mathrm{Hom}(B, \varprojlim A_\lambda) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(B, A_\lambda)$$

同様に, (A_λ) を順系とし, その順極限 $\varinjlim A_\lambda$ が存在するとする。このとき (2.5.7.1) と集合の圏での逆極限の構成から次の自然な全単射が得られる。

$$\mathrm{Hom}(\varinjlim A_\lambda, B) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(A_\lambda, B)$$

一方, 以下で説明するように, 上の状況で

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(A_\lambda, B) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim A_\lambda, B)$$
$$\varinjlim \mathrm{Hom}(B, A_\lambda) \to \mathrm{Hom}(B, \varinjlim A_\lambda)$$

なる射は存在するが, これらは全単射とは限らない。なお, 圏上での極限についても同様のことが成立する。(4.2.11) 参照。

(2.5.10). $\varphi_\lambda : \varprojlim A_\lambda \to A_\lambda$ より, $\mathrm{Hom}(A_\lambda, B) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim A_\lambda, B)$ が誘導されるので,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A_\lambda, B) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(\varprojlim A_\lambda, B) \\ & \varinjlim \mathrm{Hom}(A_\lambda, B) \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

なる可換図式から

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(A_\lambda, B) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim A_\lambda, B)$$

なる自然な射が存在することがわかる。次の例から, これは必ずしも全単射ではない。

(2.5.11) 例. K が体で, I を無限集合とするとき, K ベクトル空間の圏で $\prod_{i\in I} K$ を I を添字集合とする直積とする。$\varprojlim A_\lambda$ が $\prod K$ で, $B = K$ の場合の射

$$\bigoplus \mathrm{Hom}(K, K) \to \mathrm{Hom}(\prod K, K)$$

を考える。この場合, 全ての成分が 1 である元は $\bigoplus_{i\in I} K$ には含まれないので, $\bigoplus K \subsetneq \prod K$ である。$W = \mathrm{Cok}(\bigoplus K \to \prod K)$ とするとき, W から K への全射 $q : W \to K$ が存在する。(例えば $0 \neq v \in W$ を適当に選ぶと, $K \to W; x \mapsto xv$ なる単射ができるが, W/K は K 上射影的なので, $0 \to K \to W \to W/K \to 0$ なる完全列は分裂するから $q \circ i = \mathrm{id}$ なる射がある。このとき q は全射。) すると, $p : \prod K \to W \xrightarrow{q} K$ は $\bigoplus \mathrm{Hom}(K, K) \to \mathrm{Hom}(\prod K, K)$ の像には含まれない。実際, $p_i : \prod K \to K$ を $i \in I$ 成分への射影とし, $p'_i : \bigoplus K \to K$ も同様の射影とすると,

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus \mathrm{Hom}(K, K) \simeq \bigoplus K & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\prod K, K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigoplus K, K) \\ (a_i) & \longmapsto & \sum a_i p_i & \longmapsto & \sum a_i p'_i \end{array}$$

なる合成射は明らかに全単射。特に, $f \in \mathrm{Hom}(\prod K, K)$ が $\bigoplus \mathrm{Hom}(K, K)$ からの像に含まれるなら, $f \neq 0$ のとき, $\mathrm{Hom}(\bigoplus K, K)$ への像も 0 ではない。一方, $\bigoplus K \to \prod K \to W$ が 0 写像であることから,

$$\mathrm{Hom}(W, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\prod K, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\bigoplus K, K)$$

なる合成は 0 写像。よって $q \in \mathrm{Hom}(W, K)$ の像である $p \in \mathrm{Hom}(\prod K, K)$ の $\mathrm{Hom}(\bigoplus K, K)$ への像は 0 である。よって p は $\bigoplus \mathrm{Hom}(K, K)$ からの像には含まれない。

(2.5.12) 例. 位相群の圏において, $\varprojlim A_\lambda = \mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}_p$ の場合の射

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p)$$

を考えると, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = 0$ より左辺は 0. 一方, 右辺の方は

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p, \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \\ \simeq{}& \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

であるから, 単射ではない。

(2.5.13). $\varphi_\lambda : A_\lambda \to \varinjlim A_\lambda$ より, $\mathrm{Hom}(B, A_\lambda) \to \mathrm{Hom}(B, \varinjlim A_\lambda)$ が誘導されるので,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(B, A_\lambda) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(B, \varinjlim A_\lambda) \\ & \varinjlim \mathrm{Hom}(B, A_\lambda) \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

なる可換図式から

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(B, A_\lambda) \to \mathrm{Hom}(B, \varinjlim A_\lambda)$$

なる自然な射が存在することがわかる。これは次の例からわかるように全単射とは限らない。

(2.5.14) 例. アーベル群の圏で

$$\varinjlim_n \mathrm{Hom}\Big(\mathbb{Q}, \frac{1}{n}\mathbb{Z}\Big) \to \mathrm{Hom}\Big(\mathbb{Q}, \varinjlim_n \frac{1}{n}\mathbb{Z}\Big) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$$

は全射ではない。実際, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \frac{1}{n}\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$ であるから左辺は $\{0\}$ になってしまう。

(2.5.15). なお, A を可換環とするとき, A 加群の圏においては, M が有限表示であることと M が任意の有向順極限と可換, つまり $\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, M_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim M_\lambda)$ であることは同値。(3.3.11) 参照。

3 加群の圏における極限

3.1 概要

(3.1.1). この節では, A は可換環を表すものとする。ここでは可換環 A 上の加群の圏 (A-Mod) での極限の性質について説明する。特に, 完全列に関わる性質を中心に述べる。実際にはアーベル圏で成立するものも多い。

(3.1.2). (A-Mod) では任意の逆系の逆極限や順系の順極限が存在するので, (2.3.6) で注意したように, ポセット Λ を固定するとき, $\varprojlim$ や $\varinjlim$ を (A-Mod) における逆系や順系のなす圏から (A-Mod) への関手とみなせることを注意しておく。

3.2 テンソル積との可換性

(3.2.1) 命題. 順極限とテンソル積は可換。つまり, $(M_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ を A 加群の順系, $(\varinjlim M_\lambda, \varphi_\lambda)$ をその順極限, N を A 加群, $(\varinjlim(M_\lambda \otimes_A N), \psi_\lambda)$ を $(M_\lambda \otimes_A N, \varphi_{\mu\lambda} \otimes \mathrm{id})$ の順極限とするとき, 次の自然な同型がある。

$$\varinjlim_\lambda (M_\lambda \otimes_A N) \simeq (\varinjlim_\lambda M_\lambda) \otimes_A N.$$

(証明). 次の図式から, $f : \varinjlim(M_\lambda \otimes_A N) \to (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N$ なる自然な射が定まる。

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \otimes_A N \arrow[rr, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\psi_\lambda"'] & & (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \\ & \varinjlim(M_\lambda \otimes_A N) \arrow[ur, dotted, "\exists_1 f"'] & \end{tikzcd}$$

次に,

$$M_\lambda \times N \longrightarrow M_\lambda \otimes_A N \xrightarrow{\psi_\lambda} \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N)$$

なる合成写像を考える。$y \in N$ を固定して $M_\lambda \to \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N)$ なる射とみなすと, $\varinjlim M_\lambda$ の普遍性から, 次の (a) の部分を可換にする h が一意的に存在する。この h は元の ψ_λ が双線型なので, 双線型である。よって (b) の部分を可換にする g が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \times N \arrow[r] \arrow[dr] & M_\lambda \otimes_A N \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[d, phantom, "(a)"] & \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[d, phantom, "(b)"] \\
& \varinjlim M_\lambda \times N \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "h"] & (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \arrow[u, dotted, "\exists_1 g"']
\end{tikzcd}$$

構成から次の (c) の部分は可換。すると $M \otimes_A N$ の普遍性から, (d) の部分も可換である。そして g が (d) を可換にする唯一の射であることもわかる。

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \times N \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_\lambda \times \mathrm{id}"'] & M_\lambda \otimes_A N \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(c)"] & \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[d, phantom, "(d)"] \\
& \varinjlim M_\lambda \times N \arrow[r] & (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

ここでこれらの合成を考えると,

$$\begin{tikzcd}
& (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \\
M_\lambda \otimes_A N \arrow[r, "\psi_\lambda"] \arrow[ur, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"] & \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[u, "f"'] \\
M_\lambda \times N \arrow[u] \arrow[r] & (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

が可換であることから, $f \circ g = \mathrm{id}$ でなければならず, 同様な考察から

$$\begin{tikzcd}
& \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N) \\
M_\lambda \otimes_A N \arrow[r, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ur, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\psi_\lambda"] & (\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \arrow[u, "g"'] \\
M_\lambda \times N \arrow[u] \arrow[r] & \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

が可換になることも言えるので, $g \circ f = \mathrm{id}$ も言える。よって f, g は互いに逆写像で, 従って同型である。 $\square$

(3.2.2). 順極限とは違い, 逆極限とテンソル積とは必ずしも可換ではない。$(M_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ を A 加群の逆系とし, $(\varprojlim M_\lambda, \varphi_\lambda)$ をその逆極限とする。また, N を A 加群とし, $(\varprojlim (M_\lambda \otimes_A N), \psi_\lambda)$ を $(M_\lambda \otimes_A N, \varphi_{\lambda\mu} \otimes \mathrm{id})$ の逆極限とする。このとき

$$\begin{tikzcd}
M_\lambda \otimes_A N & & (\varprojlim M_\lambda) \otimes_A N \arrow[ll, "\varphi_\lambda \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dl, dotted] \\
& \varprojlim (M_\lambda \otimes_A N) \arrow[ul, "\psi_\lambda"] &
\end{tikzcd}$$

により, 次の自然な射が定義される。

$$(\varprojlim M_\lambda) \otimes_A N \to \varprojlim (M_\lambda \otimes_A N)$$

しかし, これは一般には単射でも全射でもない。例えば

$$(\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

において, 左辺は $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_p$ であるが (2.4.18), 右辺は $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq 0$ より 0 になるので, 単射ではない。また,

$$(\prod \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \prod (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$$

において, 左辺は $\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と同型だが右辺は $\prod \mathbb{Q}_p$ と同型である。この射は後で見るように全射ではない。(3.3.16) 参照。

3.3 完全性に関する命題

(3.3.1). A を環として, 左 A 加群の圏 (A-Mod) では任意の逆系の上の逆極限, 任意の順系の上の順極限が存在するので, $\varprojlim$ や $\varinjlim$ を逆系や順系のなす圏から A 加群の圏への関手とみなせる。これは明らかに加法的である。

(3.3.2) 命題. 逆極限は左完全, つまり, 同じ添字集合 Λ 上の逆系の列で各 λ に対し $0 \to M'_\lambda \to M_\lambda \to M''_\lambda$ が完全列であるものがあれば, 次も完全。

$$0 \to \varprojlim_\lambda M'_\lambda \to \varprojlim_\lambda M_\lambda \to \varprojlim_\lambda M''_\lambda$$

(証明). $\varprojlim$ は, $\triangle$ の右随伴関手であることからわかる。(極限の所の $\varinjlim \dashv \triangle \dashv \varprojlim$ を思い出そう。) □

(3.3.3) 例. $\varprojlim$ は, 必ずしも右完全ではない。例えば $\operatorname{Ker}(M \xrightarrow{f} N) = \varprojlim \begin{pmatrix} \begin{tikzcd}[row sep=small] M \arrow[dr, "f"] & \\ & N \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \end{pmatrix}$ より, 核 Ker は逆極限であるが, Ker は右完全ではない。例えば次の図式では, 下の 2 行は完全だが, $\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} f''$ にあたる $0 \to \mathbb{Z}$ は全射ではない。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

逆系の列で何が起こっているか見てみよう。

$$\begin{pmatrix} \begin{tikzcd}[row sep=tiny] \mathbb{Z} \arrow[dr] & \\ & \mathbb{Z} \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \begin{tikzcd}[row sep=tiny] \mathbb{Z} \arrow[dr] & \\ & 0 \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \end{pmatrix}$$

は各成分で全射であるが,

$$\begin{pmatrix} \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 1 \arrow[dr, "\times"] & \\ & 0 \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \begin{tikzcd}[row sep=tiny] 1 \arrow[dr] & \\ & 0 \\ 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \end{pmatrix}$$

において, 左辺の 1 は 0 には写されないので, 極限を取ると右辺の元に行く元がない。

(3.3.4) 定義. A を可換環, Λ をポセットとする。Λ 上の A 加群の逆系 $(M_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ が **Mittag-Leffler** の条件 (以下 (ML)) を満たすとは, 任意の λ に対し, ある $\lambda \leq \mu$ なる μ が存在し, 任意の $\mu \leq \nu$ なる ν に対して $\varphi_{\lambda\nu}(M_\nu) = \varphi_{\lambda\mu}(M_\mu)$ となることである。例えば, 任意の λ に対し, $\lambda \leq \mu$ なる μ が存在して任意の $\mu \leq \nu$ なる ν に対し $\varphi_{\mu\nu}$ が全て全射であれば, (ML) を満たす。

(3.3.5) 定理. Λ をポセットで, 可算な共終部分集合を持つものとする (cf. (2.1.10)). 従って特に, Λ は有向である。Λ 上の A 加群の逆系の短完全列, 即ち, 逆系の列で各 λ に対し

$$0 \longrightarrow M'_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda \xrightarrow{g_\lambda} M''_\lambda \longrightarrow 0$$

が完全列であるものがあるとする。このとき $(M'_\lambda)_\lambda$ が (ML) を満たせば, 次も完全。

$$0 \longrightarrow \varprojlim M'_\lambda \xrightarrow{f} \varprojlim M_\lambda \xrightarrow{g} \varprojlim M''_\lambda \longrightarrow 0$$

(略証). $(z_\lambda) \in \varprojlim M''_\lambda$ に対し, $N_\lambda = g_\lambda^{-1}(z_\lambda) \subset M_\lambda$ とおくと, (N_λ) は (集合の) 逆系をなし, 任意の λ に対し $N_\lambda \neq \emptyset$. このとき, (M'_λ) が (ML) を満たすことから, (N_λ) も (ML) を満たすことがわかる。このとき, Λ についての仮定の下では $\varprojlim N_\lambda \neq \emptyset$ であることが知られているので, 主張が言える。詳しくは例えば [EGA III, Chap. 0, Proposition (13.2.2)] を参照。 □

(3.3.6) 補足. なお, Λ が有向でないなら (ML) があっても命題は成立しない。例えば (3.3.3) が反例になっている。更に, たとえ有向であっても, 加算な共終部分集合を持たない場合は, やはり反例がある。Bourbaki の位相の第 3 章の章末の §7 の問題 4) 参照。なお, 有向で加算な共終部分集合を持たないポセットの例としては, 上の問題にもあるように, 非可算集合 X の有限部分集合全体が包含関係を順序としてなす順序集合 I がある。実際, もし可算な共終部分集合 F を持てば, 任意の有限部分集合 $A, B \subset X$ に対し, $A \subset C$, $B \subset C$ なる $C \in F$ がある。このとき $A \subset D = \bigcup F = \bigcup_{C \in F} C$ だから, 特に $X \subset D$ でなければならないが, D は可算だから矛盾。この場合に, I 上の逆系 $(X_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ で, 任意の $\alpha \in I$ に対し $X_\alpha \neq \emptyset$ かつ任意の $\varphi_{\alpha\beta}$ が全射にもかかわらず, 極限 $\varprojlim X_\alpha = \emptyset$ となる例が上の文献に載っている。

(3.3.7). Λ が $\mathbb{N}$ に通常の順序を入れた全順序集合なら, (ML) を満たす (集合の) 逆系 $(E_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ の逆極限 $\varprojlim X_\lambda$ が空でないことは次のように示せる。仮定から任意の λ に対し, $\lambda \leq \mu$ なる μ で $\mu \leq \nu$ なる任意の ν に対し, $\varphi_{\lambda\nu}(X_\nu) = \varphi_{\lambda\mu}(X_\mu)$ なるものが存在する。このような μ に対し, $Y_\lambda = \varphi_{\lambda\mu}(X_\mu) \subset X_\lambda$ と定めれば, Y_λ は μ に依存せずに決まり, また $\lambda \leq \mu$ なら $\varphi_{\lambda\mu}(Y_\mu) = Y_\lambda$ であることも簡単に確かめられる。特に $\varphi_{\lambda\mu}|_{Y_\mu} : Y_\mu \to Y_\lambda$ が全射であるので, $\Lambda = \mathbb{N}$ であることから, 帰納法により $\emptyset \neq \varprojlim Y_\lambda$ がわかる。よって $\varprojlim X_\lambda \supset \varprojlim Y_\lambda \neq \emptyset$. なお実際には左の包含関係は等号である。

(3.3.8) 定理. 有向順極限は完全関手。つまり, 同じ添字集合 Λ を持つ有向順系の完全列, 即ち順系の列で各 λ に対し $M'_\lambda \to M_\lambda \to M''_\lambda$ が完全列であるものがあれば, 次も完全。

$$\varinjlim_\lambda M'_\lambda \to \varinjlim_\lambda M_\lambda \to \varinjlim_\lambda M''_\lambda$$

(証明). (3.3.2) より右完全なので, 単射が単射に移ることを言えばよい。以下, $(y_\lambda)_\lambda$ で λ 成分が y_λ である元を表す。

$$\varinjlim_\lambda M_\lambda \simeq \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\Big) \Big/ \big\langle i_\mu(\varphi_{\mu\lambda}(y_\lambda)) - i_\lambda(y_\lambda) \;\big|\; \lambda \leq \mu,\ y_\lambda \in M_\lambda \big\rangle$$

とみなし, (M'_λ), (M_λ) を順系として $0 \to M'_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} M_\lambda$ が完全であるとする。$(x_\lambda) \in \varinjlim_\lambda M'_\lambda$ とすると, x_λ は有限個を除いて 0 である。有向順系であることから, x_{λ_0} 以外は 0 だとしてよい。$(f(x_\lambda)) \in \varinjlim_\lambda M_\lambda$ が 0 であれば, μ で $\varphi_{\mu_i\lambda_i}(f_{\lambda_0}(x_{\lambda_0})) = 0$ となるようなものが存在する。すると f_μ が単射であることから $\varphi'_{\mu\lambda_0}(x_{\lambda_0}) = 0$ なので, $(x_\lambda) = 0$. よって

$$0 \to \varinjlim_\lambda M'_\lambda \to \varinjlim_\lambda M_\lambda$$

も完全である。 □

(3.3.9) 例. 有向でない順極限は, 必ずしも完全ではない。例えば次のように, 余核は順極限である。

$$\varinjlim \left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & N \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right) = \mathrm{Cok}(M \xrightarrow{f} N)$$

しかし, 余核は左完全ではない。例えば次の図式において, 上の 2 行は完全で特に左の部分は単射だが, その余核の射 $\mathrm{Cok}\, f' \to \mathrm{Cok}\, f$ にあたる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ は単射ではない。

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & & \end{tikzcd}$$

極限の形で書いたときに何が起きているかを見てみよう。上の例の $\mathrm{Cok}\, f' \to \mathrm{Cok}\, f$ にあたる部分は次の順系の射を考えていることになる。

$$\left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right) \to \left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right)$$

これは各成分のところでは単射であるが, 順極限 $\varinjlim$ を取ると,

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

となって単射ではない。実際, 順系の射のレベルで

$$\left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right) \mapsto \left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right)$$

なる元を考えよう。これらの順極限への像を考えると, 左辺は 1 は $2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ の像に入らないことから 0 でない元を定めるが, 右辺では, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; 1 \mapsto 1$ だが, $\mathbb{Z} \to 0; 1 \mapsto 0$ なので,

$$\left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 1 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right) \sim \left(\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 0 \\ 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd} \right)$$

となって, 値は 0 になる。

(3.3.10) 定義. A を可換環とする。A 加群 M が**有限表示** (**of finite presentation**) であるとは, $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ なる完全列で L_0, L_1 が有限階数の自由 A 加群であるようなものが存在すること。このとき, このような列を M の有限表示 (finite presentation) と呼ぶ。

(3.3.11) 命題. A 加群 M について次は同値。

(1) M は有限表示 A 加群。

(2) M は有向順極限と可換。即ち $(M_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ をポセット Λ 上の A 加群の任意の有向順系とするとき, 次の自然な射は同型。

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, M_\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim M_\lambda).$$

(証明). (1⇒2) $M = A$ なら明らかに同型であるので, M が有限階数自由 A 加群の場合も同型であることがわかる。一般に $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ なる有限表示があるとき, 次の可換図式で右の 2 列は上の注意から同型なので, five lemma から左の列も同型。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, M_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim \mathrm{Hom}_A(L_0, M_\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & \varinjlim \mathrm{Hom}_A(L_1, M_\lambda) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, \varinjlim M_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(L_0, \varinjlim M_\lambda) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(L_1, \varinjlim M_\lambda)
\end{tikzcd}$$

(2⇒1) M が有向順極限と可換であるとする。Λ を M の有限部分集合全体とし, $E, F \in \Lambda$ に対し $E \subset F$ のとき $E \leq F$ であるような順序を入れる。すると Λ は有向なポセットである。ここで, $F \in \Lambda$ に対し $M_F = \sum_{x \in F} Ax \subset M$ と定めると, (M_F) は Λ 上の有向順系で, 明らかに $\varinjlim M_F \simeq M$ である。(包含写像 $M_F \to M$ から $\varinjlim M_F \to M$ なる単射準同型が存在するが, 任意の $x \in M$ に対し, $x \in F$ なる F に対し $M_F \to M$ の像が x を含むことから全射でもある。) よって仮定から

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, M_F) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M).$$

従って, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ は, ある F に対する $\mathrm{Hom}_A(M, M_F)$ からの像に含まれる。これは $\mathrm{id} : M \to M$ が $M_F \subset M$ を経由すること, 即ち $M_F = M$ を意味するので, M は有限生成。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dotted, "\exists"'] & & M \\
& M_F \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

よって, ある有限階数自由 A 加群 L から M への全射がある。その核を N とする。Γ を N の有限部分集合全体とし, M の時と同様に包含関係で順序を入れてポセットとみなす。$F \in \Gamma$ に対し $N_F = \sum_{x \in F} Ax \subset N$ とおけば, (N/N_F) は Γ 上の有向順系で, $\varinjlim N_F \simeq N$ である。ここで,

$$0 \to N_F \to L \to L/N_F \to 0$$

が完全であることから, (3.3.8) より $0 \to N \to L \to \varinjlim L/N_F \to 0$ も完全。よって $\varinjlim L/N_F \simeq L/N \simeq M$ がわかる。従って仮定から

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(M, L/N_F) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, M)$$

が同型であるから, $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Hom}_A(M, M)$ は, ある $F \in \Gamma$ に対する $\mathrm{Hom}_A(M, N/N_F)$ からの像に含まれる。これは

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[d, dotted, "\exists"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
0 \arrow[r] & N/N_F \arrow[r] & L/N_F \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

のように, $0 \to N/N_F \to L/N_F \to M \to 0$ なる完全列が分裂することを意味するので, $L/N_F \to N/N_F$ なる全射がある。すると N/N_F は有限生成なので, N_F が有限生成であることから N も有限生成。よって M は有限表示。 $\square$

(3.3.12). 完全列を用いることで, 極限の計算が見通しよくできる場合がしばしばある。例としてアーベル群の同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

を挙げよう。$\widehat{\mathbb{Z}}$ については (2.4.11) 参照。ここでは位相や環構造は忘れ, アーベル群とみなしている。実際, 次の (3.3.13) から左辺は $\varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$ と同型であるが, これは以下の (3.3.14) から右辺と同型になる。(3.3.14) の証明は完全列を用いると見通しよくできる。

(3.3.13) 命題. アーベル群として, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$.

(証明). $\mathbb{Q} \simeq \varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ に注意すれば, 次の計算よりわかる。2 番目の同型は (2.3.9) による。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\Big(\frac{1}{n}\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}) \simeq \varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}.$$

$\square$

(3.3.14) 命題. (2.4.11) のように, $\mathbb{N}$ に約数倍数による大小関係を入れる。このとき, アーベル群の逆系 $(\mathbb{Q}/n\mathbb{Z})_n$ の逆極限 $\varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z}$ について, 次の同型がある ($\widehat{\mathbb{Z}}$ もアーベル群とみていることに注意)。

$$\varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

(証明). 実際, m を自然数とすると, $0 \longrightarrow \frac{1}{m}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\frac{1}{m}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ なる完全列がある。このとき, $(\frac{1}{m}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_n$ を $\mathbb{N}$ 上の逆系とみなすと (ML) を満たし, また $\mathbb{N}$ は有向であるから, 逆極限を取ることで,

$$0 \longrightarrow \tfrac{1}{m}\widehat{\mathbb{Z}} \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}/\tfrac{1}{m}\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

を得る。($\frac{1}{m}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ であり, m の倍数全体は $\mathbb{N}$ と共終であることに注意すれば, 左の逆極限が確かに $\frac{1}{m}\widehat{\mathbb{Z}}$ であることがわかる。) 各項を m を添字とする $\mathbb{N}$ 上の順系とみなして順極限を取れば, 次より結論を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \varinjlim \frac{1}{m}\widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \varprojlim \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \varinjlim \mathbb{Q}/\frac{1}{m}\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\wr & & & & \| & & \\
 & & \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & & & & 0 & &
\end{array}$$

ただし, 左の同型は次の計算よりわかる。$\varinjlim \frac{1}{m}\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \varinjlim(\frac{1}{m}\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}) \simeq (\varinjlim \frac{1}{m}\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$. $\square$

(3.3.15) 命題. $\varprojlim \mathbb{Q}/p^m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}_p$.

(証明). 左の同型は上と全く同様に証明できる。2 番目の同型は (2.4.18) から。 $\square$

(3.3.16). 前の結果と合わせると, 次のような可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
\varprojlim_n \mathbb{Q}/n\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \prod_p \varprojlim_m \mathbb{Q}/p^m\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \prod_p \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\
\wr\downarrow & & & & \downarrow\wr \\
\widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\sim} & \Big(\prod_p \mathbb{Z}_p\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \hookrightarrow & \prod_p \mathbb{Q}_p
\end{array}$$

ここで上の水平方向の射は, $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \prod \mathbb{Z}_p$ の場合と異なり全射ではなく, したがって同型ではない。実際, $(1/p)_p \in \prod \mathbb{Q}_p$ なる元は $(\prod \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ からの射には含まれない。

4 圏上の極限

4.1 圏上の図式

(4.1.1). ここからは, 圏の上の極限の概念について説明する。

(4.1.2). 基本的には, 逆系, 順系や逆極限, 順極限などの概念はポセット上と圏上である違いを除いてはほぼ同じなので, 同じように定義することも可能だが, 折角なので, 圏や関手の言葉を用いて定式化しなおそう。まず, 逆系や順系に相当するものは対象全体および各対象の対に対する射全体が集合となるような圏からの関手とみなせる。これを図式 (diagram) と呼ぶ。続いて定数関手, 対角関手および錐を定義する。すると, 極限や余極限は普遍的な錐として定義できる。

(4.1.3) 定義 (図式). 小圏 I から圏 $\mathscr{C}$ への反変ないしは共変関手 $\mathscr{X} : I \to \mathscr{C}$ を I 上の $\mathscr{C}$ の図式 (**diagram**) という。

(4.1.4) 補足. 場合によっては上の意味での図式から I における射の合成で表される射や恒等射を省略したものも図式と呼ぶことがある。この場合, I はもはや圏ではなくなるが, 逆にそのようなものには恒等射や射の合成を補完して圏にできるので, 実質的には圏上の図式を考えれば十分である。

(4.1.5). ポセット上の逆系や順系との関係は次の通り。Λ をポセットとするとき, 対象の集合を Λ, $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $\lambda \leq \mu$ であるときのみ $\lambda \to \mu$ という射が一つだけあるとみなせば, Λ を圏とみなすことができる。ポセット上の逆系や順系はこのような圏からの図式のことである。したがって, ここで考えている図式はポセット上の逆系や順系の概念の拡張になっている。例えば逆系の場合を見てみよう。$F : \Lambda \to \mathscr{C}$ なる反変関手, つまり $F : \Lambda^\circ \to \mathscr{C}$ なる共変関手を考える。$\lambda \in \Lambda$ に対し, $X_\lambda = F(\lambda)$, $\lambda \leq \mu$ のときに唯一に定まる Λ の射 $\theta : \lambda \to \mu$ に対し $\varphi_{\lambda\mu} = F(\theta) : X_\mu \to X_\lambda$ と書くことにすれば, $(X_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ が前節で定義した逆系になっている。

$$\begin{array}{ccc} \lambda & & X_\lambda \\ \downarrow & \xrightarrow[F(f)]{\quad\sim\sim\sim\quad} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\lambda\mu}} \\ \mu & & X_\mu \end{array}$$

(4.1.6). ポセット上の極限と, 一般の図式との違いを説明する。例えばポセット Λ 上の順系 $(M_\lambda, \varphi_{\mu\lambda})$ においては λ, $\mu \in \Lambda$, $\lambda \leq \mu$ とするとき $\varphi_{\mu\lambda} : M_\lambda \to M_\mu$ は一つに決まった。したがって, $\lambda \leq \mu \leq \nu$ に対して定まる図式

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_\nu \\ & M_\mu \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

は常に可換だった。そのため極限も図的にイメージしやすい。一方で

$$M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} M$$

で f, g が異なるような場合の順極限を扱うことはできない。

I が一般の圏の場合には, $i, j \in I$ に対し $i \to j$ なる射は高々一つとは限らない。そのため, 図式は必ずしも可換とは限らないので注意が必要であるが, 逆に, 上のような図式も扱うことが可能になる。ただし, このような場合には $\varphi_{ji} : X_i \to X_j$ のように射を表すと, φ_{ij} が i, j のみから決まるわけではないので, 誤解が生じる。そこで, 少々記号の使い方を変える。

(4.1.7) 定義. I から $\mathscr{C}$ への反変関手ないしは共変関手全体のなす圏を $\mathscr{C}^I$ とする。$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ とする。任意の $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対し X を対応させ, 任意の I の射 $i \to j$ に対し id_X を対応させる反変関手ないしは共変関手 $\triangle(X) : I \to \mathscr{C}$ を X を値に取る**定数関手 (constant functor)** という。定数関手 $\triangle(X) : I \to \mathscr{C}$ も I 上の図式の一つである。

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d] \\ j \end{tikzcd} \quad \overset{\triangle(X)}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} X \\ X \arrow[u, "\mathrm{id}_X"'] \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\ X \end{tikzcd}$$

$\mathscr{C}$ の射 $f : X \to Y$ があるとき, $\triangle(X)$ から $\triangle(Y)$ への自然変換 $\triangle(f) : \triangle(X) \to \triangle(Y)$ が自然に定まる。これが関手的であることは簡単に示せる。したがって, $\triangle : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^I$ なる関手が定まる。これを**対角関手 (diagonal functor)** と呼ぶ。

(4.1.8) 定義 (錐). I を小圏, $\mathscr{C}$ を圏, $F : I \to \mathscr{C}$ を反変関手 (resp. 共変関手), つまり I 上の $\mathscr{C}$ の図式とする。$i \in \mathrm{Ob}\, I$ の F による像を X_i と書く。F への**錐 (cone)** とは, $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ と射の族 $\varphi_i : Y \to X_i$ ($i \in \mathrm{Ob}\, I$) の組 (Y, φ_i) であって任意の I の射 $\theta : i \to j$ に対し, $\varphi_i = F(\theta) \circ \varphi_j$ (resp. $\varphi_j = F(\theta) \circ \varphi_i$) なるものである。錐という名前は, この図式が Y を頂点とする錐のようであることから来ている。

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\theta"] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X_i \\ Y \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & X_j \arrow[u, "F(\theta)"'] \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & X_i \arrow[d, "F(\theta)"] \\ Y \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & X_j \end{tikzcd}$$

F への錐は, 定数関手 $\triangle(Y)$ から F への自然変換 $\varphi : \triangle(Y) \to F$ のこととも解釈できる。(F が反変ないしは共変かに応じて $\triangle(Y)$ も反変ないしは共変関手とする。) 以後はこれらを同一視し, $i \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し φ から定まる射 $Y \to X_i = F(i)$ を φ_i で表すことにする。共変関手の場合は次の通り。

$$\triangle(Y) \xrightarrow{\varphi} F$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\theta"] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & X_i \arrow[d, "F(\theta)"] \\ Y \arrow[r, "\varphi_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

同様に, 反変関手 (resp. 共変関手) F からの錐とは, $Y \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ と射の族 $\varphi_i : X_i \to Y$ ($i \in \mathrm{Ob}\, I$) の組 (Y, φ_i) であって任意の I の射 $\theta : i \to j$ に対し, $\varphi_j = \varphi_i \circ F(\theta)$ (resp. $\varphi_i = \varphi_j \circ F(\theta)$) なるものである。

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\theta"] \\ j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_i \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ & Y \\ X_j \arrow[uu, "F(\theta)"] \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd} \quad \text{resp.} \quad \begin{tikzcd} X_i \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[dd, "F(\theta)"'] & \\ & Y \\ X_j \arrow[ur, "\varphi_j"'] & \end{tikzcd}$$

これも F から定数関手への関手の射 $F \to \triangle(Y)$ を定めることと同等なので, 今後はこれらを同一視し,

$i \in \operatorname{Ob} I$ に対し, φ から定まる $X_i = F(i) \to Y$ を φ_i と書くことにする。これも共変関手なら次の通り。

$$F \xrightarrow{\varphi} \triangle(Y)$$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "\theta"] & X_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "F(\theta)"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ j & X_j \arrow[r, "\varphi_j"'] & Y \end{tikzcd}$$

4.2　圏上の極限と余極限

(4.2.1). 次に極限および余極限の定義を述べる。これらは, ポセット上では逆極限および順極限と呼んでいたものと同じものだが, この節ではこのように呼ぶことにする。ここではまずポセット上の場合と同様な形で定義し, 後から圏論的に定義を言い直すことにする。錐という概念を定義したおかげで, 定義は少しすっきり書くことができる。

(4.2.2) 定義. $F : I \to \mathscr{C}$ を小さい圏 I から圏 $\mathscr{C}$ への関手, 即ち $\mathscr{C}$ の図式とする。このとき, F の**極限** (**limit**) とは, F への錐 $(\varprojlim F, \varphi_i)$ で普遍的なものを言う。つまり, $i \in \operatorname{Ob} I$ に対し $X_i = F(i)$ と書くことにすれば,

(1) $(\varprojlim F, \varphi_i)$ は F への錐。
(2) 任意の F への錐 (Y, ψ_i) $(\psi_i : Y \to X_i)$ に対し, $\varphi_i \circ f = \psi_i$ が全ての $i \in \operatorname{Ob} I$ に対し成立するような $f : Y \to \varprojlim F$ が一意的に存在する。

という普遍性を満たすものである。

$$\begin{tikzcd} X_i & & Y \arrow[ll, "\forall\psi_i"'] \arrow[dl, dotted, "\exists! f"] \\ & \varprojlim F \arrow[ul, "\varphi_i"] & \end{tikzcd}$$

(4.2.3). 上の定義を圏論的に見てみよう。I から $\mathscr{C}$ への共変関手のなす圏 $\operatorname{Hom}(I, \mathscr{C})$ を $\mathscr{C}^I$ と書く。Y から F への錐を, 定数関手 $\triangle(Y)$ から F の自然変換 $\psi : \triangle(Y) \to F$ と同一視し, 同様に, 錐 $(\varprojlim F, \varphi_i)$ も $\varphi : \triangle(\varprojlim F) \to F$ と同一視する。すると, 上の普遍性は任意の Y に対し

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \varprojlim F) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^I}(\triangle(Y), F) \\ f & \longmapsto & \varphi \circ \triangle(f) \end{array}$$

が全単射であることを意味する。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, dotted, "\exists! f"'] & & F & & \triangle(Y) \arrow[ll, "\forall\psi"'] \arrow[dl, dotted, "\triangle(f)"] \\ \varprojlim F & & & \triangle(\varprojlim F) \arrow[ul, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

これは, 圏論的には $T(Y) = \operatorname{Hom}(\triangle(Y), F)$ なる集合の圏への関手 $T : \mathscr{C} \to (\mathsf{Set})$ が $(\varprojlim F, \varphi)$ によって表現可能であることを意味する。従って, 極限 $(\varprojlim F, \varphi)$ を関手 T を表現する関手として定義することもできる。

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \xrightarrow{\quad T \quad} & (\mathrm{Set}) \\ Y & \longmapsto & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}^I}(\triangle(Y), F) \end{array}$$

(4.2.4). I 上の全ての図式 $F : I \to \mathscr{C}$ が極限を持つとする。この場合, $\varphi : \triangle(\varprojlim F) \to F$ の普遍性より $\varprojlim$ は関手になる。つまり $\eta : F \to F'$ を $\mathscr{C}^I$ の射, 即ち自然変換とするとき, $\varprojlim \eta : \varprojlim F \to \varprojlim F'$ が定義され, 関手の性質を満たす。またこれにより

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(\triangle(Y), F) &\longleftarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \varprojlim F) \\
\varphi \circ \triangle(f) &\longleftarrow\!\!\!\!\!\!\longleftarrow\!\!\dashv f
\end{aligned}
$$

は, Y と F について関手的で, 従って $\mathscr{C}^\circ \times \mathscr{C}^I \to \mathsf{(Set)}$ なる集合の圏への関手の自然同型を定める。故に, $\varprojlim : \mathscr{C}^I \to \mathscr{C}$ は $\triangle$ の右随伴関手になっている。

$$\triangle \dashv \varprojlim$$

従って, $\varprojlim$ を $\triangle$ の右随伴関手として定義することもできる。

(4.2.5) 定義. $F : I \to \mathscr{C}$ を小さい圏 I から圏 $\mathscr{C}$ への関手, 即ち $\mathscr{C}$ の図式とする。このとき, F の**余極限** (**colimit**) とは, F からの錐 $(\varinjlim F, \varphi_i)$ で普遍的なものを言う。つまり, $i \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し $X_i = F(i)$ と書くことにすれば,

(1) $(\varinjlim F, \varphi_i)$ は F からの錐。
(2) 任意の F からの錐 (Y, ψ_i) $(\psi_i : X_i \to Y)$ に対し, $f \circ \varphi_i = \psi_i$ が全ての $i \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し成立するような $f : \varinjlim F \to Y$ が一意的に存在する。

という普遍性を満たすものである。

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\forall \psi_i"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & Y \\
& \varinjlim F \arrow[ur, dotted, "\exists! f"'] &
\end{tikzcd}
$$

(4.2.6). ポセット上の極限のところでも注意したように, I や $\mathscr{C}$ によっては必ずしも極限は存在するとは限らない。が, 存在すれば, 一意的な同型の違いを除いて, つまり強い意味で一意的であることが言える。

(4.2.7). こちらも圏論的に言い換えてみよう。F から Y への錐を, F から定数関手 $\triangle(Y)$ への自然変換 $\psi : F \to \triangle(Y)$ と同一視し, 同様に, 錐 $(\varinjlim F, \varphi_i)$ も $\varphi : F \to \triangle(\varinjlim F)$ と同一視する。すると, 上の普遍性は任意の Y に対し

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim F, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(F, \triangle(Y)) \\
f &\longmapsto \triangle(f) \circ \varphi
\end{aligned}
$$

が全単射であることを意味する。

$$
\begin{tikzcd}
Y \\
\varinjlim F \arrow[u, dotted, "\exists! f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[rr, "\forall \psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \triangle(Y) \\
& \triangle(\varinjlim F) \arrow[ur, dotted, "\triangle(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

これは, 圏論的には $U(Y) = \mathrm{Hom}(F, \triangle(Y))$ なる集合の圏への関手 $U : \mathscr{C} \to \mathsf{(Set)}$ が $(\varinjlim F, \varphi)$ によって表現可能であることを意味する。従って, 極限 $(\varinjlim F, \varphi)$ を関手 U を表現する関手として定義することもできる。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C} &\xrightarrow{\quad U \quad} \mathsf{(Set)} \\
Y &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(F, \triangle(Y))
\end{aligned}
$$

(4.2.8). I 上の全ての図式 $F : I \to \mathscr{C}$ について, $\varinjlim F$ が存在したとする。この場合, $\varphi : F \to \triangle(\varinjlim F)$ の普遍性から $\varinjlim$ は関手になる。即ち $\eta : F \to F'$ を $\mathscr{C}^I$ の射, つまり自然変換とするとき, $\varinjlim \eta : \varinjlim F \to \varinjlim F'$ が定義され, 関手の性質を満たす。これにより

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim F, Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(F, \triangle(Y)) \\ f &\longmapsto \triangle(f) \circ \varphi \end{aligned}$$

は, Y と F について関手的で, 従って $\mathscr{C}^\circ \times \mathscr{C}^I \to (\mathsf{Set})$ なる関手の自然同型を定めていることがわかる。即ち $\varinjlim : \mathscr{C}^I \to \mathscr{C}$ は $\triangle$ の左随伴関手になっている。

$$\varinjlim \dashv \triangle$$

従って, $\varinjlim$ を対角関手 $\triangle$ の左随伴関手として定義することもできる。

(4.2.9). まとめると, I 上の全ての図式 F が極限および余極限を持てば, $\varinjlim : \mathscr{C}^I \to \mathscr{C}$, $\varprojlim : \mathscr{C}^I \to \mathscr{C}$, $\triangle : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^I$ について

$$\varinjlim \dashv \triangle \dashv \varprojlim$$

なる関係が成立する。

(4.2.10) 命題. 集合の圏においては任意の図式の極限および余極限が存在する。

(証明). 基本的に (2.3.8) や (2.3.11) の証明と同様である。I を小圏, $F : I \to (\mathrm{Set})$ を集合の圏における I 上の図式とする。$i \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し, $F(i) = X_i$ と書くことにする。このとき

$$\varprojlim F = \left\{ (x_i)_i \in \prod X_i \;\middle|\; \forall i, \forall j \in \mathrm{Ob}\, I, \forall f \in \mathrm{Hom}(i,j),\ F(f)(x_i) = x_j \right\},$$

とし, $\varprojlim F \to \prod X_i$ と X_i への射影の合成 $\varphi_i : \varprojlim F \to X_i$ の族を $\varphi = (\varphi_i)$ とする。このとき, $(\varprojlim F, \varphi)$ は逆極限の普遍性を満たす。

同様に, 集合の直和 $\coprod X_i$ において, $x \in X_i$, $y \in X_j$ に対し

$$xRy \Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Hom}(i,j),\ \text{s.t. } F(f)(x) = y$$

なる関係 R で生成される同値関係を $\sim$ とする。具体的には $x \sim y$ となるのは, ある $a_0 = x, a_1, \ldots, a_n = y$ なる a_i で $a_i R a_{i+1}$ または $a_{i+1} R a_i$ が成立するものが存在するときである。このとき次の集合と自然な射 $\varphi_i : X_i \to \varinjlim F$ の族 (φ) は順極限の条件を満たす。

$$\varinjlim F = \coprod X_i / \sim .$$

□

(4.2.11). $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(-))$ を, $i \in I$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(i)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X_i)$ を対応させ, $f : i \to j$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X_j)$ を対応させる関手とみなす。同様に, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(-), Y)$ も I から (Set) への関手とみなす。集合の圏における極限を用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(\triangle(Y), F) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(-)), \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^I}(F, \triangle(Y)) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(-), Y) \end{aligned}$$

のように書き換えられるので, 結果として次が成立する。

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \varprojlim F) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, F(-))$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim F, Y) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(-), Y)$$

(4.2.12). 一方, $\varphi_i : \varprojlim F \to X_i$ から, $\mathrm{Hom}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim F, Y)$ なる (Set) における錐ができるので, これより

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}(\varprojlim F, Y)$$

なる射が誘導される。これは全単射とは限らない。(2.5.11) 参照。

(4.2.13). 同様に, $\varphi_i : X_i \to \varinjlim F$ から, $\mathrm{Hom}(Y, F(-)) \to \mathrm{Hom}(Y, \varprojlim F)$ なる (Set) における錐ができるので, これより

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(Y, F(-)) \to \mathrm{Hom}(Y, \varinjlim F)$$

なる射が誘導される。こちらも全単射とは限らない。(2.5.14) 参照。

(4.2.14). 次に, ポセット上の逆極限や順極限には現れなかったタイプの極限の例として, イコライザやコイコライザを説明しよう。これらは圏論的に重要な概念である。

(4.2.15) 定義 (イコライザ). $\mathscr{C}$ において $u, v : X \to Y$ をともに X から Y への射とする。このとき (u, v) の**イコライザ (equalizer)** ないしは**差核 (difference kernel)** とは, $f : Z \to X$ なる射で次の普遍性を満たすもののこと。

(1) $u \circ f = v \circ f$.
(2) 任意の射 $g : W \to X$ で, $u \circ g = v \circ g$ を満たすものに対し, $h : W \to Z$ で $g = f \circ h$ であるようなものが一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, dotted, "\exists_1 h"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ Z \arrow[r, "f"'] & X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

(4.2.16) 定義 (コイコライザ). $\mathscr{C}$ において $u, v : X \to Y$ をともに X から Y への射とする。このとき (u, v) の**コイコライザ (coequalizer)** ないしは**差余核 (difference cokernel)** とは, $f : Y \to Z$ なる射で

(1) $f \circ u = f \circ v$.
(2) 任意の射 $g : Y \to W$ で, $g \circ u = g \circ v$ を満たすものに対し, $h : Z \to W$ で $g = h \circ f$ であるようなものが一意的に存在する。

という普遍性を満たすもののこと。

$$\begin{tikzcd} & & W \\ X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & Z \arrow[u, dotted, "\exists_1 h"'] \end{tikzcd}$$

(4.2.17). 簡単な図式追跡により, $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ のイコライザは $\varprojlim\big(X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y \big)$, と同一視でき, また $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y$ のコイコライザは $\varinjlim\big(X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y \big)$ と同一視できることがわかる。このような極限は, ポセット上の極限としては実現できないことに注意。

(4.2.18) 例. S を集合, R を S の同値関係とする。このとき, S を R で割った商集合 S/R は圏 (Set) 上のコイコライザ, 従って順極限として特徴付けられることを説明しよう。同値関係は $R \subset S \times S$ であって

(1) $\forall a \in S$, $(a, a) \in R$.
(2) $\forall (a, b) \in R$, $(b, a) \in R$.
(3) $\forall (a, b), (b, c) \in R$, $(a, c) \in R$.

を満たすものとみなせる。$p_1, p_2 : S \times S \to S$ をそれぞれ第 1 成分, 第 2 成分への射影とし, 包含写像 $j : R \to S \times S$ と p_1, p_2 との合成を q_1, q_2 とする。また, $\varphi : S \to S/R$ を標準的な写像とする。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend left, "q_1"] \arrow[rr, bend right, "q_2"'] & S \times S \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & S \arrow[r, "\varphi"] & S/R \end{tikzcd}$$

商集合 $\varphi : S \to S/R$ は,

(1) aRb なら $\varphi(a) = \varphi(b)$.
(2) φ は全射。

という性質を持つが, このことから,

(1) $\varphi \circ q_1 = \varphi \circ q_2$.
(2) 任意の射 $\psi : S \to T$ で $\psi \circ q_1 = \psi \circ q_2$ なるものに対し, $f : S/R \to T$ で $\psi = f \circ \varphi$ なるものが一意的に存在する

という普遍性を持ち, 逆に商集合はこの普遍性によって同型を除いて一意的に定まる。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "q_1"] \arrow[r, shift right, "q_2"'] & S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & S/R \arrow[d, dotted, "f"] \\ & & T \end{tikzcd}$$

つまり, S/R は $R \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} S$ のコイコライザである。

(4.2.19). 極限 (resp. 余極限) を直積とイコライザ (resp. 直和とコイコライザ) を用いて構成してみよう。

(4.2.20). まず例として, A 加群の圏 (A-Mod) で考える。$F : I \to (A\text{-Mod})$ を小さな圏の上での逆系とする。$i \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し, $M_i = F(i)$ と書く。また $i, j \in \mathrm{Ob}\, I$, $\theta \in \mathrm{Hom}(i, j)$ に対し $\mathrm{s}(\theta) = i$, $\mathrm{t}(\theta) = j$ と書く (s は source, t は target の頭文字)。

$$P = \prod_{i \in \mathrm{Ob}\, I} M_i, \qquad Q = \prod_{i,j \in \mathrm{Ob}\, I,\ \theta \in \mathrm{Hom}(i,j)} M_{\mathrm{s}(\theta)}$$

とおこう。集合の場合 (4.2.10) と同様, 極限は $x = (x_i)_i \in P$ で, 任意の $i, j \in \mathrm{Ob}\, I$, 任意の $\theta \in \mathrm{Hom}(i, j)$ に対し, $F(\theta)(x_j) = x_i$ を満たす元全体のなす P の部分 A 加群として構成できた (F は反変関手であることに注意)。上の条件は, 任意の θ に対し $x_{\mathrm{s}(\theta)} = F(\theta)(x_{\mathrm{t}(\theta)})$ となるということだから, ψ_{s}, $\psi_{\mathrm{t}} : P \to Q$ を $\psi_{\mathrm{s}}\big((x_i)_i\big) = (x_{\mathrm{s}(\theta)})_\theta$, $\psi_{\mathrm{t}}\big((x_i)_i\big) = (F(\theta)(x_{\mathrm{t}(\theta)}))_\theta$, で定めれば, 上の条件は $\psi_{\mathrm{s}}(x) = \psi_{\mathrm{t}}(x)$ とも言える。したがって極限は ψ_{s}, $\psi_{\mathrm{t}} : P \to Q$ のイコライザになっている。

(4.2.21). 上の構成は容易に一般化できる。$\mathscr{C}$ を常に直積とイコライザが存在する圏とする。$F: I \to \mathscr{C}$ を逆系, つまり反変関手とし, $i \in \operatorname{Ob} I$ に対し, $X_i = F(i)$ と書く。また

$$P = \prod_{i \in \operatorname{Ob} I} X_i, \qquad Q = \prod_{i,j \in \operatorname{Ob} I,\ \theta \in \operatorname{Hom}(i,j)} X_{\mathrm{s}(\theta)}$$

とする。$i \in \operatorname{Ob} I$ に対し $\pi_i : P \to X_i$ を P の射影, $i, j \in \operatorname{Ob} I$, $\theta \in \operatorname{Hom}(i,j)$ に対し $\pi_\theta : Q \to X_{\mathrm{s}(\theta)}$ を Q の射影として ψ_{s}, ψ_{t} を

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\psi_{\mathrm{s}}"] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{s}(\theta)}"'] & Q \arrow[d, "\pi_\theta"] \\ & X_{\mathrm{s}(\theta)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\psi_{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{t}(\theta)}"'] & Q \arrow[d, "\pi_\theta"] \\ X_{\mathrm{t}(\theta)} \arrow[r, "F(\theta)"'] & X_{\mathrm{s}(\theta)} \end{tikzcd}$$

が可換になる写像とする。このとき $\varprojlim F$ は ψ_{s}, ψ_{t} のイコライザとなることが普遍性からわかる。

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F \arrow[r] & P \arrow[r, shift left, "\psi_{\mathrm{s}}"] \arrow[r, shift right, "\psi_{\mathrm{t}}"'] & Q \end{tikzcd}$$

実際 $K \to P$ を ψ_{s}, ψ_{t} のイコライザとすると, $Y \in \operatorname{Ob} \mathscr{C}$, $g \in \operatorname{Hom}(Y, P)$ に対し, $\psi_{\mathrm{s}} \circ g = \psi_{\mathrm{t}} \circ g$ なる条件は任意の $i, j \in \operatorname{Ob} I$, 任意の $\theta \in \operatorname{Hom}(i,j)$ に対し $\pi_{\mathrm{s}(\theta)} \circ g = F(\theta) \circ \pi_{\mathrm{t}(\theta)} \circ g$ となることと同値。$g_i = \pi_i \circ g$ とすると,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P = \prod_i X_i \arrow[dl, "\pi_{\mathrm{t}(\theta)}"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{s}(\theta)}"] \\ X_{\mathrm{t}(\theta)} \arrow[r, "F(\theta)"'] & X_{\mathrm{s}(\theta)} \end{tikzcd}$$

よりこれはまさに $g_{\mathrm{s}(\theta)} = F(\theta) \circ g_{\mathrm{t}(\theta)}$ なる条件に他ならないから,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, K) &\simeq \{ g \in \operatorname{Hom}(Y, P) \mid \psi_{\mathrm{s}} \circ g = \psi_{\mathrm{t}} \circ g \} \\ &\simeq \{ g \in \operatorname{Hom}(Y, P) \mid \forall i, j \in \operatorname{Ob} I,\ \theta \in \operatorname{Hom}(i,j),\ g_{\mathrm{s}(\theta)} = F(\theta) \circ g_{\mathrm{t}(\theta)} \} \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, \varprojlim F) \end{aligned}$$

より $K = \varprojlim F$.

(4.2.22). 余極限についても同様である。(A-Mod) を A 加群の圏, $F : I \to$ (A-Mod) を, 小さな圏の上での順系とする。$i \in \operatorname{Ob} I$ に対し $M_i = F(i)$ と書く。また $i, j \in \operatorname{Ob} I$, $\theta \in \operatorname{Hom}(i,j)$ に対し $\mathrm{s}(\theta) = i$, $\mathrm{t}(\theta) = j$ と書く

$$R = \bigoplus_{i,j \in \operatorname{Ob} I,\ \theta \in \operatorname{Hom}(i,j)} M_{\mathrm{s}(\theta)}, \qquad L = \bigoplus_{i \in \operatorname{Ob} I} M_i$$

とおき, $\varphi_{\mathrm{s}}, \varphi_{\mathrm{t}} : R \to L$ を $\varphi_{\mathrm{s}}\big((x_\theta)_\theta\big) = \big(\sum_{\mathrm{s}(\theta)=i} x_\theta\big)_i$, $\varphi_{\mathrm{t}}\big((x_{\mathrm{s}(\theta)})_\theta\big) = \big(\sum_{\mathrm{t}(\theta)=j} F(\theta)(x_\theta)\big)_j$ で定める。$\varphi_{\mathrm{s}} - \varphi_{\mathrm{t}} : R \to L$ の像は, 任意の $i, j \in \operatorname{Ob} I$, 任意の $\theta \in \operatorname{Hom}(i,j)$ に対する $\iota_j \circ \theta(x) - \iota_i(x)$ で生成される部分群だから $\varinjlim F$ は φ_{s}, φ_{t} のコイコライザとなる。

(4.2.23). より一般に, $\mathscr{C}$ を直和とコイコライザが常に存在する圏, $F : I \to \mathscr{C}$ を, 小さな圏 I 上の $\mathscr{C}$ の順系とする。$i \in \operatorname{Ob} I$ に対し $X_i = F(i)$ と書く。また $i, j \in \operatorname{Ob} I$, $\theta \in \operatorname{Hom}(i,j)$ に対し $\mathrm{s}(\theta) = i$, $\mathrm{t}(\theta) = j$ と書く。

$$R = \coprod_{i,j \in \operatorname{Ob} I,\ \theta \in \operatorname{Hom}(i,j)} X_{\mathrm{s}(\theta)}, \qquad L = \coprod_{i \in \operatorname{Ob} I} X_i$$

とおく。$\theta \in \mathrm{Hom}(i,j)$ に対し $\iota_\theta : X_i = X_{\mathrm{s}(\theta)} \to R$ を R の包含写像, $i \in I$ に対し, $\iota_i : X_i \to L$ を L の包含写像とする。φ_{s} を $R = \coprod X_{\mathrm{s}(\theta)}$ の普遍性から $(\iota_{\mathrm{s}(\theta)} : X_{s(\theta)} \to L)_\theta$ により定まる唯一の射とし, また φ_{t} を同じく $(\iota_{\mathrm{t}(\theta)} \circ F(\theta) : X_{s(\theta)} \to L)_\theta$ により定まる唯一の射とする。つまり $\varphi_{\mathrm{s}}, \varphi_{\mathrm{t}}$ は

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{s}}"] & L \\ X_{\mathrm{s}(\theta)} \arrow[u, "\iota_\theta"] \arrow[ur, "\iota_{\mathrm{s}(\theta)}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{t}}"] & L \\ X_{\mathrm{s}(\theta)} \arrow[u, "\iota_\theta"] \arrow[r, "F(\theta)"'] & X_{\mathrm{t}(\theta)} \arrow[u, "\iota_{\mathrm{t}(\theta)}"'] \end{tikzcd}$$

が可換になる写像。すると, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $g \in \mathrm{Hom}(L,Y)$ に対し, $g \circ \varphi_{\mathrm{s}} = g \circ \varphi_{\mathrm{t}}$ なる条件は, 任意の $i,j \in \mathrm{Ob}\,I$, 任意の $\theta \in \mathrm{Hom}(i,j)$ に対し $g \circ \iota_{\mathrm{s}(\theta)} = g \circ \iota_{\mathrm{t}(\theta)} \circ F(\theta)$ となることと同値。$g_i = g \circ \iota_i$ と書くことにすると,

$$\begin{tikzcd} Y & L = \coprod_i X_i \arrow[l, "g"'] \\ X_{\mathrm{t}(\theta)} \arrow[u] \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{t}(\theta)}"'] & X_{\mathrm{s}(\theta)} \arrow[l, "F(\theta)"] \arrow[u, "\pi_{\mathrm{s}(\theta)}"'] \end{tikzcd}$$

よりこれはまさに $g_{\mathrm{t}(\theta)} = g_{\mathrm{s}(\theta)} \circ F(\theta)$ なる条件に他ならないから, C を $\varphi_{\mathrm{s}}, \varphi_{\mathrm{t}}$ のコイコライザとするとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,Y) &\simeq \{g \in \mathrm{Hom}(L,Y) \mid g \circ \varphi_{\mathrm{s}} = g \circ \varphi_{\mathrm{t}}\} \\ &\simeq \{g \in \mathrm{Hom}(L,Y) \mid \forall i,j \in \mathrm{Ob}\,I,\ \theta \in \mathrm{Hom}(i,j),\ g_{\mathrm{s}(\theta)} = g_{\mathrm{t}(\theta)} \circ F(\theta)\} \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\varinjlim F, Y) \end{aligned}$$

より $\varinjlim F$ は $\varphi_{\mathrm{s}}, \varphi_{\mathrm{t}}$ のコイコライザとなる。

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\varphi_{\mathrm{s}}"] \arrow[r, shift right, "\varphi_{\mathrm{t}}"'] & L \arrow[r] & \varinjlim F \end{tikzcd}$$

4.3 有向的圏

(4.3.1). ここでは, ポセットにおける有向という概念 (2.1.5) を圏の場合に拡張する。

(4.3.2) 定義. 以下では圏は小さい圏を表すものとする。空でない圏 I が**擬有向的** (**pseudofiltered**) とは, 次の (PF1), (PF2) の条件が成立することである。

(PF1) 任意の図式 $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & j \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & j' \end{tikzcd}$ は $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & j \arrow[dr] & \\ i \arrow[ur] \arrow[dr] & & k \\ & j' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ という図式に埋め込まれる。

(PF2) 任意の図式 $i \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} j$ に対し, 射 $j \xrightarrow{w} k$ で $wu = wv$ となるものが存在する。

$$i \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} j \qquad \Rightarrow \qquad i \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{w} k$$

I がポセットから定まる圏の場合は, $u = v$ でなければならないため, (PF2) の条件は自動的に成立する。したがってこの場合は (PF2) は不要であることに注意する。

(4.3.3) 定義. 空でない圏 I が**連結**であるとは, 任意の i, i' に対して

$$i \to j \leftarrow i_1 \to j_1 \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow i'$$

のような図式が存在することである。(例えば $i=j$ でも構わないので, 射の向きは重要ではない。)

(4.3.4) 補足. 空圏は, 連結であると見なすべきではない。

(4.3.5) 定義. 空でない圏 I が擬有向的であり, かつ連結であるとき, I は**有向的** (**filtered**) という。これは次の (F1) および (PF2) が成立することと同値である。

(F1) $\forall i, i' \in \mathrm{Ob}\, I$ に対し, 図式 $\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix} \rightrightarrows j$ が存在する。

(4.3.6). この場合も I がポセットから決まる圏の場合には, (PF2) の条件は自動的に成立するため不要で, したがって, (F1) が成立すれば有向的であることに注意。

(4.3.7) 定義. 同様に, 空でない圏 I に対し, その逆圏が有向である場合, **余有向的** (**cofiltered**) と呼ばれる。これは次の 2 つの条件が成立することと同値。

(CF1) $\forall i, i' \in I$ に対し, 図式 $j \rightrightarrows \begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix}$ が存在する。

(CF2) 任意の図式 $j \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} i$ に対し, 射 $k \xrightarrow{w} j$ で $uw = vw$ となるものが存在する。

$$j \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} i \qquad \Rightarrow \qquad k \xrightarrow{w} j \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} i$$

(4.3.8) 補題. ファイバー積と終集合を持つ圏 I は余有向的。

(証明). 実際, 終集合とファイバー積の存在より (CF1) は自明である。また $j \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} i$ に対して $(u,1) : j \to i \times j$, $(v,1) : j \to i \times j$ という射を考え, $k = j_{(u,1)} \times_{i \times j (v,1)} j$ とおく。すると, $j \to i \times j \to j$ などが恒等写像であることから対応する 2 つの射影 $k \to j$ は等しい。これを w とすると

$$\begin{tikzcd} & j \arrow[dr, "(v,1)"] \arrow[drr, bend left, "v"] & & \\ k \arrow[ur, "w"] \arrow[dr, "w"'] & & i \times j \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"'] & i \\ & j \arrow[ur, "(u,1)"'] \arrow[urr, bend right, "u"'] & & \end{tikzcd}$$

なる可換図式を得る。従って, (CF2) も成立する。 $\square$

(4.3.9). ここからは (2.4.26), (2.4.27) などの定理の圏論的な一般化について述べる。

(4.3.10). $L : I \to J$ を小圏の間の関手, $F : J \to \mathscr{C}$ を J 上の $\mathscr{C}$ の図式とする。このとき $FL : I \to \mathscr{C}$ も図式になる。ここで $(\varinjlim FL, \psi)$ および $(\varinjlim F, \phi)$ が存在するなら, 両者の間に

$$\varinjlim FL \xrightarrow{\mu} \varinjlim F$$

なる射 μ がある。実際, $\phi_j : F(j) \to \varinjlim F$ を標準的な射とするとき, $j = L(i)$ の場合から $\psi_i : FL(i) \to \varinjlim F$ が作れるので, $(\varinjlim FL, \psi)$ の普遍性から, 次を可換にする μ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} FL(i) \arrow[rr, "\phi_{L(i)}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & \varinjlim F \\ & \varinjlim FL \arrow[ur, dotted, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(4.3.11). $L : I \to J$ を関手とする。$j \in \mathrm{Ob}\, J$ に対し, $i \in \mathrm{Ob}\, I$ と $f : j \to L(i)$ の組全体 (i, f) を対象とし, $(i, f : j \to L(i))$ から $(i', f' : j \to L(i'))$ への射を I における射 $g : i \to i'$ で, $L(g) \circ f = f'$, 即ち次が可換であるようなものとして定まる圏を $(j \downarrow L)$ と書く。これは, comma category と呼ばれるものの特殊な場合である。

$$\begin{tikzcd} & i' \\ j \arrow[ur, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & i \arrow[uu, "L(g)"'] \end{tikzcd}$$

L が **final** であるとは, 次の条件を満たすこと。

(1) 任意の $j \in \mathrm{Ob}\, J$ に対し, $(j \downarrow L)$ は空でない。つまりある $i \in \mathrm{Ob}\, I$ と射 $f : j \to L(i)$ が存在する。
(2) $(j \downarrow L)$ は連結。つまり任意の (i, f), (i', f') に対し $(i_0, f_0) = (i, f)$, $(i_t, f_t) = (i', f')$ となるような列 $(i_0, f_0), (i_1, f_1), \ldots, (i_{2n}, f_{2n})$ と次のような射が存在すること。

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, equal] \arrow[d] & j \arrow[r, equal] \arrow[d] & j \arrow[r, equal] \arrow[d] & \cdots\cdots \arrow[r, equal] & j \arrow[r, equal] \arrow[d] & j \arrow[d] \\ L(i_0) \arrow[r] & L(i_1) & L(i_0) \arrow[l] \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & L(i_{2n-1}) & L(i_{2n}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(4.3.12). 次に述べる定理は, (2.4.27) の拡張になっている。

(4.3.13) 定理. $L : I \to J$ を小圏の間の final な関手とする。このとき J 上の $\mathscr{C}$ の図式 $F : J \to \mathscr{C}$ に対し, $FL : I \to \mathscr{C}$ の余極限 $(\varinjlim FL, \psi)$ が存在すれば, $(\varinjlim F, \phi)$ も存在し, (4.3.10) の標準的な射 μ は同型。

$$\varinjlim FL \xrightarrow{\mu} \varinjlim F$$

(証明). 実際, この仮定の下では, $j \in \mathrm{Ob}\, J$ に対し, $f : j \to L(i)$ なる $i \in \mathrm{Ob}\, I$ と f が取れる。このとき, $\lambda_j : F(j) \to \varinjlim FL$ を,

$$F(j) \xrightarrow{F(f)} FL(i) \xrightarrow{\psi_i} \varinjlim FL$$

なる合成で定義する。このとき, もし $f : j \to L(i)$, $f' : j \to L(i')$ に対し $g : i \to i'$ で $f' = L(g) \circ f$ なるものがあれば, 次の図式が可換になる。

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(f')"'] & FL(i) \arrow[dl, "FL(g)"] \arrow[d, "\psi_i"] \\ FL(i') \arrow[r, "\psi_{i'}"'] & \varinjlim FL \end{tikzcd}$$

一般には連結性の仮定から, 任意のこのような組 (i, f), (i', f') をこのような射の列で結べるので, $\lambda_j : F(j) \to \varinjlim FL$ は (i, f) の取り方によらず一意的に決まる。すると, $(\varinjlim FL, \lambda_j)$ は F からの錐になる。ここで,

(Y, σ_j) を J 上の F からの錐としよう。すると $(\sigma L)_i : FL(i) \to Y$ なる I 上の錐ができるので, $\varinjlim(FL)$ の普遍性から錐の射 $\varinjlim(FL) \to Y$ が一意的に決まる。すると $f : j \to L(i)$ に対し $\psi_i \circ F(f) = \lambda_j$ より $F(j) \to FL(i)$

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & FL(i) \arrow[r, "(\sigma L)_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & Y \\ & \varinjlim FL \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

は可換で, また (Y, σ_j) が錐であることから $(\sigma L)_i \circ F(f) = \sigma_j$ なので,

$$\begin{tikzcd} F(j) \arrow[rr, "\sigma_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & & Y \\ & \varinjlim FL \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

なる可換図式を得る。$j = L(i)$ の場合を考えれば $\varinjlim FL \to Y$ は一意的なので, 極限 $\varinjlim F$ が存在して $\varinjlim(FL)$ と同型であることがわかる。μ が同型であることもこのことから分かる。 □

(4.3.14). $L : I \to J$ を小さい圏の間の関手, $F : J \to \mathscr{C}$ を J 上の $\mathscr{C}$ の図式とする。このとき, FL は I 上の $\mathscr{C}$ の図式。ここで $(\varprojlim FL, \psi)$, $(\varprojlim F, \phi)$ がどちらも存在すれば, 普遍性から両者の間に

$$\varprojlim F \xrightarrow{\mu} \varprojlim FL$$

なる射がある。実際, $\phi_j : \varprojlim F \to F(j)$ において $j = L(i)$ の場合から $\psi_i : \varprojlim FL \to FL(i)$ が作れるので, $(\varprojlim FL, \psi)$ の普遍性から, 次を可換にする射 μ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} FL(i) & & \varprojlim F \arrow[ll, "\phi_{L(i)}"'] \arrow[dl, dotted, "\mu"] \\ & \varprojlim FL \arrow[ul, "\psi_i"] & \end{tikzcd}$$

(4.3.15) 定義. $L : I \to J$ を小さい圏の関手とする。$j \in \operatorname{Ob} J$ に対し, $i \in \operatorname{Ob} I$ と $f : L(i) \to j$ の組全体を対象とし, (i', f') から (i, f) への射を, 射 $g : i' \to i$ で $f' = L(g) \circ f$ なるようなもの全体として定めた圏を $(L \downarrow j)$ と書く。L が **initial** であるとは, 次が成立することである。

(1) 任意の $j \in \operatorname{Ob} J$ に対し, $(L \downarrow j)$ は空でない。
(2) 任意の $j \in \operatorname{Ob} J$ に対し, $(L \downarrow j)$ は連結。

(4.3.16) 定理. $L : I \to J$ を小さい圏の間の関手, $F : J \to \mathscr{C}$ を J 上の $\mathscr{C}$ の図式で, $L : I \to J$ が initial だとする。このときもし $(\varprojlim FL, \psi)$ が存在するなら, $(\varprojlim F, \phi)$ も存在し, (4.3.14) の射 μ は同型である。

(証明). 余極限の場合の双対命題なので証明は不要だが, 簡単にこの場合の構成を述べる。まず $j \in \operatorname{Ob} J$ に対し, $f : L(i) \to j$ が取れる。これに対し $\lambda_j : \varprojlim FL \to F(j)$ を,

$$\varprojlim FL \xrightarrow{\psi_i} FL(i) \xrightarrow{F(f)} F(j)$$

なる合成で定義すると, 仮定からこれは (i, f) の取り方にはよらないことが示せる。よって $(\varprojlim FL, \lambda_j)$ は F への錐。ここで (Y, σ_j) を J 上の F への錐とすると, $(\sigma L)_i : Y \to FL(i)$ なる I 上の錐ができるので, 普遍性

より $Y \to \varprojlim FL$ が一意的に決まる。すると $f: L(i) \to j$ に対し $F(f) \circ \psi_i = \lambda_j$ より

$$\begin{tikzcd}
F(j) & FL(i) \arrow[l, "F(f)"'] & Y \arrow[l, "(\sigma L)_i"'] \arrow[dl, dotted] \\
& \varinjlim FL \arrow[ul, "\lambda_j"] \arrow[u, "\psi_i"] &
\end{tikzcd}$$

は可換で, また (Y, σ_j) が錐であることから $F(f) \circ (\sigma L)_i = \sigma_j$ なので,

$$\begin{tikzcd}
F(j) & & Y \arrow[ll, "\sigma_j"'] \arrow[dl, dotted] \\
& \varinjlim(FL) \arrow[ul, "\lambda_j"] &
\end{tikzcd}$$

となって $(\varprojlim FL, \lambda_j)$ が F の極限の普遍性を満たすことが言えるわけである。 □

4.4 極限の交換

(4.4.1). I, J を小圏とし, $G: I \times J \to \mathscr{C}$ を関手とする。$(i,j) \in \mathrm{Ob}\, I \times \mathrm{Ob}\, J$ に対し, $G(i,j) = X_{ij}$ が対応し, $f: i \to i'$, $g: j \to j'$ に対し, $G(f,g): X_{ij} \to X_{i'j'}$ なる射が対応するものとする。このとき, G は I から関手の圏 $\mathrm{Hom}(J, \mathscr{C})$ への関手を定義する。実際, $i \in I$ に対し, 関手 $G(i,-): J \to \mathscr{C}$ が

(1) $j \in \mathrm{Ob}\, J$ に対し $G(i,j) = X_{ij} \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$ を対応させ,
(2) J 内の射 $g: j \to j'$ に対し, $G(1_i, g): X_{ij} \to X_{ij'}$ を対応させる

ことで決まる。また, $f: i \to i'$ なる射に対して自然変換 $\varphi: G(i,-) \to G(i',-)$ が

$$\begin{tikzcd}
X_{ij} \arrow[r, "G(1_i,g)"] \arrow[d, "\varphi_j"'] & X_{ij'} \arrow[d, "\varphi_{j'}"] \\
X_{i'j} \arrow[r, "G(1_{i'},g)"'] & X_{i'j'}
\end{tikzcd}$$

によって定まる。ここで, もし各 i に対し $\varinjlim_J G(i,-)$ が存在するなら, これは, I から $\mathscr{C}$ への関手を定める。従って, $\varinjlim_I(\varinjlim_J G(i,-))$ を考えることができる。これを $\varinjlim_I \varinjlim_J G$ と書く。全く同様に, G は J から $\mathrm{Hom}(I, \mathscr{C})$ への関手 $j \mapsto G(-,j)$ を定義し, このとき, 各 $j \in \mathrm{Ob}\, J$ に対し $\varinjlim G(-,j)$ が存在するなら $\varinjlim_J(\varinjlim_I G(-,j))$ を考えることができる。これを $\varinjlim_J \varinjlim_I G$ と書く。

(4.4.2). 順極限同士や逆極限同士は (存在すれば) 交換可能である。即ち, I, J を小圏とし, $G: I \times J \to \mathscr{C}$ を関手とするとき, $\varinjlim_I \varinjlim_J G$, $\varinjlim_J \varinjlim_I G$, $\varinjlim_{I \times J} G$ のいずれも存在するなら, 次の同型がある。

$$\varinjlim_I \varinjlim_J G \simeq \varinjlim_{I \times J} G \simeq \varinjlim_J \varinjlim_I G.$$

全く同様に, (極限の存在の仮定の下で) 次の同型が存在する。

$$\varprojlim_I \varprojlim_J G \simeq \varprojlim_{I \times J} G \simeq \varprojlim_J \varprojlim_I G.$$

(証明). 証明は, 面倒ではあるものの普遍性を使った単純な議論からわかる。 □

(4.4.3). I, J を小圏とし, $G : I \times J^{\circ} \to \mathscr{C}$ を関手とすると, 次の射が存在する。

$$\varinjlim_{I} \varprojlim_{J} G \to \varprojlim_{J} \varinjlim_{I} G$$

これは下の図式のどちらからでも存在が確かめられる。なお結果的にはどちらの場合にも同じ射が得られる。

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \varprojlim_J G \arrow[rr, dotted] & & \varprojlim_J \varinjlim_I G \arrow[d] \\
\varprojlim_J G \arrow[u] \arrow[urr, "\varprojlim"] \arrow[d] & & \varinjlim_I G \\
G \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\varinjlim_I \varprojlim_J G \arrow[rr, dotted] \arrow[drr, "\varinjlim"] & & \varprojlim_J \varinjlim_I G \arrow[d] \\
\varprojlim_J G \arrow[u] \arrow[drr] & & \varinjlim_I G \\
& & G \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(4.4.4) 定理. 上で $\mathscr{C}$ が集合の圏 (Set) である場合を考える。このとき, もし I が有向的圏で J の対象および射の集合が有限なら, 上の射は同型である。

$$\varinjlim_{I} \varprojlim_{J} G \simeq \varprojlim_{J} \varinjlim_{I} G$$

(証明). 証明はそれほど難しいわけではないが省略する。[SGA4, tom.1.1, Prop.2.8]. □

(4.4.5) 補足. なお同様の定理が A 加群の圏についても成立する。

(4.4.6) 例. I を対象の集合が $\mathrm{Ob}\, I = \{0, 1\}$ で, 射が恒等射の他には $\mathrm{Hom}(0, 1) = \{u, v\}$, $(u \neq v)$ であるような圏とする。また J を $\mathbb{N}$ に通常の順序を入れた順序集合を圏と見なしたものとする。$m \in \mathbb{N}$, p を m と互いに素な素数とする。このとき $I \times J^{\circ}$ 上の図式 $((M_{ij}), f_{\alpha\beta})$ を $M_{0j} = M_{1j} = \mathbb{Z}$ $(j \in \mathbb{N})$, $f_{u\, \mathrm{id}_j}$ $(j \in \mathbb{N})$ は p 倍写像, $f_{v\, \mathrm{id}_j}$ $(j \in \mathbb{N})$ は 0 写像, $f_{\mathrm{id}_0\, j}$ は m 倍写像となるように定める。一般の $f_{\alpha\beta}$ はこれらの合成で得られることに注意。恒等射や合成に対応する射を省略して書けば, この図式は次のようなものである。

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "m"] & \vdots \arrow[d, "m"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "m"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "0"'] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "m"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

この場合,

$$\varinjlim \left(\mathbb{Z} \overset{p}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z} \right) \simeq \mathrm{Cok}(\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

および

$$\begin{aligned}
\varprojlim \mathbb{Z} &= \varprojlim(\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \cdots) = 0 \\
\varprojlim \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &= \varprojlim(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \cdots) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "m"] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "p"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

なる図式より

$$
\begin{aligned}
&\varinjlim_i \varprojlim_n M_{in} \simeq \varinjlim_i (\varprojlim \mathbb{Z} \overset{p}{\underset{0}{\rightrightarrows}} \varprojlim \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Cok}(0 \to 0) \simeq 0, \\
&\varprojlim \varinjlim M_{in} \simeq \varprojlim (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{m} \cdots) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

よって

$$\varinjlim \varprojlim M_{in} \not\simeq \varprojlim \varinjlim M_{in}$$

がわかる。

参考文献

[Ka76] 河田敬義, ホモロジー代数 I, II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店 1976.

[Ta78] 竹内外史, 層・圏・トポス — 現代的集合像を求めて —, 日本評論社, 1978.

[EGA III] A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique III*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, vol. 11, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1961.

[Mac98] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, and J.L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, SGA 4, Lecture Notes in Math., vol. 269, 270, 305, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1972,1973.

記号

索引