Extensions between finite-dimensional simple modules over a generalized current Lie algebra

小寺諒介

東京大学大学院数理科学研究科

1 導入

k を標数 0 の代数閉体とする．k 上の有限次元半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と有限生成可換 k 代数 A に対して k 上のテンソル積 $A \otimes \mathfrak{g}$ を考えると，これには自然に k 上の Lie 代数の構造が入る．この Lie 代数を一般化されたカレント Lie 代数と呼ぶ．筆者は [Ko] において，一般化されたカレント Lie 代数の有限次元既約表現に対し，それらの間の 1 次の Ext 群を完全に求めた．本稿ではその結果について解説する．

主定理を述べよう．支配的整ウェイト λ を最高ウェイトに持つ $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $V(\lambda)$ と A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，$V_{\mathfrak{m}}(\lambda)$ で $V(\lambda)$ の $\mathfrak{m}$ における evaluation 表現（定義は 3 節で与える）をあらわす．また，$\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ を A の $\mathfrak{m}$ における導分のなす k ベクトル空間とする．

定理 1.1 V, V' を $A \otimes \mathfrak{g}$ の有限次元既約表現とする．

(i) $\mathrm{Ext}^1(V, V') \neq 0$ ならば，ある非負整数 r と A の極大イデアル $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ 及び $\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイト $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda'_r$ が存在して

$$V \cong V_{\mathfrak{m}_1}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathfrak{m}_{r-1}}(\lambda_{r-1}) \otimes V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda_r)$$

かつ

$$V' \cong V_{\mathfrak{m}_1}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathfrak{m}_{r-1}}(\lambda_{r-1}) \otimes V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda'_r)$$

である．

E-mail address: kryosuke@ms.u-tokyo.ac.jp

(ii)
$$V = V_{\mathfrak{m}_1}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathfrak{m}_{r-1}}(\lambda_{r-1}) \otimes V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda_r)$$

かつ
$$V' = V_{\mathfrak{m}_1}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes V_{\mathfrak{m}_{r-1}}(\lambda_{r-1}) \otimes V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda'_r)$$

とする．このとき，$\lambda_r \neq \lambda'_r$ ならば
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(V, V') &\cong \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda_r), V_{\mathfrak{m}_r}(\lambda'_r)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda_r), V(\lambda'_r)) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}_r)\end{aligned}$$

であり，$\lambda_r = \lambda'_r$ ならば
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(V, V') &\cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_i}(\lambda_i), V_{\mathfrak{m}_i}(\lambda_i)) \\ &\cong \bigoplus_{i=1}^{r} \bigl(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda_i), V(\lambda_i)) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}_i)\bigr)\end{aligned}$$

である．

$\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ はアファインスキーム $\mathrm{Spec}\, A$ の点 $\mathfrak{m}$ における接空間とみなすことができるから，この結果は $\mathrm{Spec}\, A$ の幾何的性質と $A \otimes \mathfrak{g}$ の表現論の間に関係があることを示唆している．とはいっても，もともとこの Lie 代数の研究は $\mathrm{Spec}\, A$ との関係を念頭において始まったので，関係があること自体は新しい発見というわけではない．具体的な関係がひとつ明らかになった，ということである．

本論に入る前に，一般化されたカレント Lie 代数に関するこれまでの研究の状況を簡単に振り返っておこう．

A が 1 変数 Laurent 多項式環 $k[t, t^{-1}]$ のとき $A \otimes \mathfrak{g}$ はループ Lie 代数と呼ばれ，重要な無限次元 Lie 代数として比較的古くから研究されている（ちなみに，A が 1 変数多項式環 $k[t]$ の場合はカレント Lie 代数と呼ばれており，「一般化されたカレント Lie 代数」という名前はそこからとった．Feigin-Loktev [FL] は「$\mathrm{Spec}\, A$ 上のカレントのなす Lie 代数」と呼んでいる）．この場合は Chari [C] 及び Chari-Pressley [CP1] の結果により有限次元既約表現の分類が与えられた．しかし，一般に有限次元表現は完全可約ではないため，表現論をより深く理解するには何かしらホモロジー代数的な性質の研究が必要となる．そうした方向でのおそらく最初の研究として，Fialowski-Malikov [FM] は evaluation 表現の間の 1 次の Ext 群を決定した．その後，量子ループ代数の表現論への応用の観点から，Chari-Pressley [CP2] によって Weyl 加群と呼ばれる直既約だが一般には既約でない表現

が導入された．それまで完全可約ではない表現でうまく扱えるものはほとんど知られていなかったので，Weyl 加群の導入はループ Lie 代数の表現論に新しい視点を提供したといえる．Chari-Moura [CM] は，この Weyl 加群の性質を用いてループ Lie 代数の有限次元表現の圏のブロックを決定した．また，Weyl 加群の研究とは別の流れとして，任意の有限次元既約表現の間の 1 次の Ext 群が Chari-Greenstein [CG] によって計算された．筆者の得た結果は Chari-Greenstein の結果の拡張とみなすことができるが，証明に用いる議論は Chari-Moura が行った議論を精密化，一般化したものが多く，彼らの論文から着想を得たところが大きい．

ループ Lie 代数及びカレント Lie 代数の自然な一般化として，A を多変数の（Laurent）多項式環に拡張する研究は早くから行われてきたが，一般の A に対する研究を初めて行ったのは Feigin-Loktev [FL] だと思われる．彼らは，上で述べた Weyl 加群の概念を一般の場合に拡張し，その性質を調べた．Weyl 加群はその後 Chari-Fourier-Khandai [CFK] によって引き続き研究されたが，ループ Lie 代数の場合でもその構造が十分わかっているとは言い難い．Weyl 加群の構造を理解することは重要な課題だと思われる．

一般の A で成り立つ性質を調べるのとは別の方向として, 個別の A についてより深い理解を得ようという立場も当然考えられる．特に A が正則でないとき, $A \otimes \mathfrak{g}$ の表現論は, A が正則なときに較べて本質的に難しいことが知られている．例えば, Weyl 加群の次元の計算は，A が正則なときは結局多変数の多項式環の場合に帰着されることが Feigin-Loktev [FL] によって示されているのだが（それでも次元が高い場合は十分難しく，未解決である），正則でないときはそうはなっていない．$\operatorname{Spec} A$ が特異点を持つとその特異点の状況に応じて表現論が複雑になるのである．桑原 [Ku] は，$A = k[x,y]/(xy)$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(k)$ の場合にある特殊な Weyl 加群の構造を調べ，特にその次元を求めた．正則でないような A に対して行われた研究はそれ以外にはないようである．今後，A の特異性が $A \otimes \mathfrak{g}$ の表現論に及ぼす影響がより正確に理解されるようになればおもしろいだろう．

2　一般化されたカレント Lie 代数

k を標数 0 の代数閉体とし，$\mathfrak{g}$ を k 上の有限次元半単純 Lie 代数，A を有限生成可換 k 代数とする．テンソル積 $A \otimes \mathfrak{g}$ は

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes [x,y] \quad (a,b \in A,\ x,y \in \mathfrak{g})$$

によって k 上の Lie 代数の構造を持つ．この Lie 代数を一般化されたカレント Lie 代数と呼ぶ．

3 有限次元既約表現の分類

この節では，Chari-Fourier-Khandai [CFK] による $A\otimes\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の分類について述べる．$\mathfrak{g}$ の支配的整ウェイトのなす集合を P^+ とし，$\lambda\in P^+$ を最高ウェイトに持つ $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現を $V(\lambda)$ であらわす．A の極大イデアルのなす集合を $\operatorname{Specm} A$ とする．

$\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとする．A は有限生成であるから自然な k 代数の同型 $A/\mathfrak{m}\cong k$ がある．射 $A\to A/\mathfrak{m}\cong k$ による $a\in A$ の像を $a_{\mathfrak{m}}$ であらわす．

Lie 代数の準同型写像 $\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}}\colon A\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を

$$\mathrm{ev}_{\mathfrak{m}}(a\otimes x)=a_{\mathfrak{m}}x \quad (a\in A, x\in\mathfrak{g})$$

によって定める．任意に $\mathfrak{g}$ 加群 V が与えられたとき，この射で引き戻すことで V 上に $A\otimes\mathfrak{g}$ 加群の構造が定義できる．特に $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現 $V(\lambda)$ のこの射による引き戻しを $V_{\mathfrak{m}}(\lambda)$ であらわし，$\mathfrak{m}$ における evaluation 表現と呼ぶ．

$\mathcal{P}=\{\pi\colon \operatorname{Specm} A\to P^+ \mid \#\operatorname{supp}\pi<\infty\}$ とおき，$\pi\in\mathcal{P}$ に対し

$$\mathcal{V}(\pi)=\bigotimes_{\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\pi}V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))$$

とおく．

定理 3.1 (Chari-Fourier-Khandai) $\{\mathcal{V}(\pi)\mid\pi\in\mathcal{P}\}$ は $A\otimes\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現の同型類の完全代表系を与える．

4 主結果

$D\in\operatorname{Hom}_k(A,A/\mathfrak{m})$ で

$$D(ab)=aD(b)+bD(a)$$

を満たすものを A の $\mathfrak{m}$ における導分と呼び，その全体を $\operatorname{Der}(A,A/\mathfrak{m})$ であらわす．まず，evaluation 表現の間の Ext 群が次のように記述できる．

命題 4.1

$$\operatorname{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\lambda),V_{\mathfrak{m}}(\mu))\cong\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes V(\lambda),V(\mu))\otimes\operatorname{Der}(A,A/\mathfrak{m})$$

略証　右辺から左辺への射の与え方のみ紹介する．$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes V(\lambda), V(\mu))$ 及び $D \in \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ を与えると，$\mathfrak{g}$ 加群 $E = V(\lambda)\oplus V(\mu)$ 上に $A\otimes\mathfrak{g}$ 加群の構造を

$$(a\otimes x)(u,v) = (a_{\mathfrak{m}}xu, a_{\mathfrak{m}}xv + D(a)\varphi(x\otimes u)) \quad (a\in A,\ x\in\mathfrak{g},\ u\in V(\lambda),\ v\in V(\mu))$$

によって定めることができる．これにより $A\otimes\mathfrak{g}$ 加群の完全列

$$0 \longrightarrow V_{\mathfrak{m}}(\mu) \longrightarrow E \longrightarrow V_{\mathfrak{m}}(\lambda) \longrightarrow 0$$

を得て，この拡大の同値類は左辺 $\mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu))$ の元を定める．この対応が同型を与える．詳細については [Ko, Proposition 3.1] を見よ．（終）

一般の有限次元既約表現の間の Ext 群の計算は，上で得た evaluation 表現に関する結果に帰着させる．その際に鍵になるのが次の補題である．

補題 4.2　(i) $\mathrm{supp}\,\pi \cap \mathrm{supp}\,\pi' = \varnothing$ なる $\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ に対して，$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) \neq 0$ ならば $\pi = 0$ または $\pi' = 0$ である．

(ii) $\#\,\mathrm{supp}\,\pi \neq 1$ ならば $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(0)) = 0$ かつ $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(0), \mathcal{V}(\pi)) = 0$ である．

略証　(i) の証明は省略する．主張自体は，パラメータ π, π' が大きく異なる場合は非自明な拡大がない，ということを言っており，納得しやすいのではないかと思う．主定理の前半では，非自明な拡大が存在するためのより強い必要条件（パラメータがほとんど一致していないと非自明な拡大がない）を主張しているが，後で見るように，この一見強い形の主張は（次に示す (ii) を間にはさむことで）(i) から容易に従う．(i) の証明には，[CP2] でループ Lie 代数の場合に導入され，[FL] で一般の A の場合に拡張された Weyl 加群の性質を用いる．詳しくは [Ko, Lemma 3.3] を見よ．

(i) を仮定したうえで (ii) の証明を述べる．$\#\,\mathrm{supp}\,\pi = 0$ すなわち $\pi = 0$ の場合は，命題 4.1 より

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(0), \mathcal{V}(0)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes V(0), V(0)) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$$

であり，

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}\otimes V(0), V(0)) = 0$$

だからよい．$\#\,\mathrm{supp}\,\pi \geq 2$ とする．$\mathfrak{m} \in \mathrm{supp}\,\pi$ をとり，$\pi' \in \mathcal{P}$ を

$$\pi'(\mathfrak{m}') = \begin{cases} \pi(\mathfrak{m}') & \mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m} \text{ のとき} \\ 0 & \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．すると $\mathcal{V}(\pi) \cong V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})) \otimes \mathcal{V}(\pi')$ だから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(0)) &\cong \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi'), V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))^*) \\ &\cong \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi'), V_{\mathfrak{m}}(-w_0\pi(\mathfrak{m})))\end{aligned}$$

である．ここで w_0 は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長元である．$\pi' \neq 0$ かつ $\operatorname{supp}\pi' \cap \{\mathfrak{m}\} = \varnothing$ だから，(i) よりこれは 0 である．$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(0), \mathcal{V}(\pi)) = 0$ も同様である． （終）

主定理を（1 節とは一見異なる形で）述べ直すと，次のようになる．

定理 4.3　$\pi, \pi' \in \mathcal{P}$ とする．

(i) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) \neq 0$ ならば $\#\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} \leq 1$ である．

(ii) $\#\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} = 1$ のとき, $\{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} = \{\mathfrak{m}_0\}$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) &\cong \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_0}(\pi(\mathfrak{m}_0)), V_{\mathfrak{m}_0}(\pi'(\mathfrak{m}_0))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\pi(\mathfrak{m}_0)), V(\pi'(\mathfrak{m}_0))) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}_0)\end{aligned}$$

であり，$\pi = \pi'$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) &\cong \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp}\pi} \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})), V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))) \\ &\cong \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \operatorname{supp}\pi} \big(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\pi(\mathfrak{m})), V(\pi(\mathfrak{m}))) \otimes \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})\big)\end{aligned}$$

である．

証明を紹介する前に，簡単な例を見ておこう．

例）$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(k), A = k[t, t^{-1}]$

このとき

$$P^+ \cong \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

$$\operatorname{Specm} A \cong k^\times,$$

$$\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}) \cong k \ (\forall \mathfrak{m})$$

である．$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$V(m)$ は $m+1$ 次元の既約表現である．定理によれば, Ext^1 の次元を知るには任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(m), V(n))$ の次元がわ

かればよい．そのためには $\mathfrak{g} \otimes V(m)$ の既約分解がわかればよいが，今の場合 $\mathfrak{g} \cong V(2)$ であり，

$$V(2) \otimes V(m) \cong \begin{cases} V(2) & m = 0 \text{ のとき} \\ V(3) \oplus V(1) & m = 1 \text{ のとき} \\ V(m+2) \oplus V(m) \oplus V(m-2) & m \geq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である．従って $m = 0$ のとき

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(m), V(n)) = \begin{cases} 1 & n = 2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

であり，$m \geq 1$ のとき

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(m), V(n)) = \begin{cases} 1 & n = m+2, m, m-2 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

である．有限次元既約表現 V, V' に対して，$\operatorname{Ext}^1(V, V') \neq 0$ のとき $V \longrightarrow V'$ と矢印を描くことにして，それらの間の拡大の様子を見てみよう．自明表現 $\mathcal{V}(0)$ を含むブロックの一部（$V_a(m) \otimes V_b(n)$ $(a \neq b \in k^\times)$ という形の既約表現からなる部分，のさらに一部分）を描くと次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, leftrightarrow] & \vdots \arrow[d, leftrightarrow] & \vdots \arrow[d, leftrightarrow] & \\
V_b(4) \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & V_a(2) \otimes V_b(4) \arrow[loop below, "\bigstar"] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & V_a(4) \otimes V_b(4) \arrow[loop below, "\bigstar"] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \\
V_b(2) \arrow[loop left] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & V_a(2) \otimes V_b(2) \arrow[loop below, "\bigstar"] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & V_a(4) \otimes V_b(2) \arrow[loop below, "\bigstar"] \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \cdots \\
\mathcal{V}(0) \arrow[r, leftrightarrow] & V_a(2) \arrow[loop below] \arrow[r, leftrightarrow] & V_a(4) \arrow[loop below] \arrow[r, leftrightarrow] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$\bigstar$ のところは拡大が 2 次元あり，他は 1 次元である．

定理の略証　(i) の証明を述べる．$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{supp} \pi \cap \operatorname{supp} \pi', \\ T &= \operatorname{supp} \pi \setminus S, \\ T' &= \operatorname{supp} \pi' \setminus S \end{aligned}$$

とおく．また，

$$V(\pi(\mathfrak{m}))\otimes V(\pi'(\mathfrak{m}))^* \cong \bigoplus_{j_\mathfrak{m}} V(\nu_{j_\mathfrak{m}})$$

を $\mathfrak{g}$ 加群 $V(\pi(\mathfrak{m}))\otimes V(\pi'(\mathfrak{m}))^*$ の既約分解とする．このとき

$$V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^* \cong \bigoplus_{j_\mathfrak{m}} V_\mathfrak{m}(\nu_{j_\mathfrak{m}})$$

である．これより

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi),\mathcal{V}(\pi'))\\
&\cong \mathrm{Ext}^1(\bigotimes_{\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\pi} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m})), \bigotimes_{\mathfrak{m}\in\operatorname{supp}\pi'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m})))\\
&\cong \mathrm{Ext}^1(\bigotimes_{\mathfrak{m}\in S}(V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*)\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*,\mathcal{V}(0))\\
&\cong \bigoplus_{(j_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}\in S}} \mathrm{Ext}^1(\bigotimes_{\mathfrak{m}\in S} V_\mathfrak{m}(\nu_{j_\mathfrak{m}})\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*,\mathcal{V}(0))
\end{aligned}$$

を得る．仮定よりある $(j_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}\in S}$ があって

$$\mathrm{Ext}^1(\bigotimes_{\mathfrak{m}\in S} V_\mathfrak{m}(\nu_{j_\mathfrak{m}})\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*,\mathcal{V}(0))\neq 0$$

であるが，補題 4.2 (ii) よりテンソル積

$$\bigotimes_{\mathfrak{m}\in S} V_\mathfrak{m}(\nu_{j_\mathfrak{m}})\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*$$

における非自明な因子はちょうどひとつだけ存在する．ここで $\nu_{j_\mathfrak{m}}=0\Rightarrow\pi(\mathfrak{m})=\pi'(\mathfrak{m})$ であることに注意すると，次のいずれかが成り立つことがわかる．

(a) 高々ひとつを除き全ての $\mathfrak{m}\in S$ に対して $\pi(\mathfrak{m})=\pi'(\mathfrak{m})$ であり，$T=T'=\varnothing$ である．

(b) 全ての $\mathfrak{m}\in S$ に対して $\pi(\mathfrak{m})=\pi'(\mathfrak{m})$ であり，$\#T=1$ かつ $T'=\varnothing$ である．

(c) 全ての $\mathfrak{m}\in S$ に対して $\pi(\mathfrak{m})=\pi'(\mathfrak{m})$ であり，$T=\varnothing$ かつ $\#T'=1$ である．

(a) からは $\#\{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm}A\mid\pi(\mathfrak{m})\neq\pi'(\mathfrak{m})\}\leq 1$ が，(b) 及び (c) からは $\#\{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm}A\mid\pi(\mathfrak{m})\neq\pi'(\mathfrak{m})\}=1$ が従う．これで (i) が示された．

さらに詳しく

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi),\mathcal{V}(\pi'))\\
&\cong \bigoplus_{(j_\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}\in S}} \mathrm{Ext}^1(\bigotimes_{\mathfrak{m}\in S} V_\mathfrak{m}(\nu_{j_\mathfrak{m}})\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T} V_\mathfrak{m}(\pi(\mathfrak{m}))\otimes\bigotimes_{\mathfrak{m}\in T'} V_\mathfrak{m}(\pi'(\mathfrak{m}))^*,\mathcal{V}(0))
\end{aligned}$$

を見れば (ii) が証明できるのであるが，ここではそれは省略し（[Ko, Theorem 3.6] を見よ），代わりに同型

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) \cong \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_0}(\pi(\mathfrak{m}_0)), V_{\mathfrak{m}_0}(\pi'(\mathfrak{m}_0)))$$

及び

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi)) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \mathrm{supp}\, \pi} \mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})), V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})))$$

を与える射を具体的に記述することにしよう．まず $\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}\, A \mid \pi(\mathfrak{m}) \neq \pi'(\mathfrak{m})\} = \{\mathfrak{m}_0\}$ とする．

$$M = \bigotimes_{\mathfrak{m} \in \mathrm{supp}\, \pi \setminus \{\mathfrak{m}_0\}} V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))$$

とおけば

$$\mathcal{V}(\pi) \cong M \otimes V_{\mathfrak{m}_0}(\pi(\mathfrak{m}_0)),$$
$$\mathcal{V}(\pi') \cong M \otimes V_{\mathfrak{m}_0}(\pi'(\mathfrak{m}_0))$$

である．完全函手 $M \otimes -$ は k 線型写像

$$\mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}_0}(\pi(\mathfrak{m}_0)), V_{\mathfrak{m}_0}(\pi'(\mathfrak{m}_0))) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi'))$$

を定めるが，この射が同型を与える．$\pi = \pi'$ のときも状況は同様で，各 $\mathfrak{m} \in \mathrm{supp}\, \pi$ に対して

$$M = \bigotimes_{\mathfrak{m}' \in \mathrm{supp}\, \pi \setminus \{\mathfrak{m}\}} V_{\mathfrak{m}'}(\pi(\mathfrak{m}'))$$

とおけば函手 $M \otimes -$ が単射

$$\mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m})), V_{\mathfrak{m}}(\pi(\mathfrak{m}))) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi))$$

を定め，これらの射から同型が得られる． （終）

主定理の系として，例えば次のようなことがわかる．

系 4.4 (i) $\pi \neq \pi'$ のとき $\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi'))$ は 0 または $\dim \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}_0)$ に等しい．

(ii)

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi)) = \sum_{\mathfrak{m} \in \mathrm{supp}\, \pi} \#\{i \in I \mid \langle h_i, \pi(\mathfrak{m})\rangle \neq 0\} \dim \mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$$

である．但し $\{h_i \mid i \in I\}$ は $\mathfrak{g}$ の単純コルート，I はその添字集合である．

(iii)

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi), \mathcal{V}(\pi')) = \dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{V}(\pi'), \mathcal{V}(\pi))$$

証明 (i) $\mathfrak{g}$ の各ルート空間は 1 次元だから，$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\pi(\mathfrak{m}_0)), V(\pi'(\mathfrak{m}_0)))$ の次元は高々 1 である．これから従う．

(ii) 一般に $\lambda \in P^+$ に対して

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda), V(\lambda)) = \#\{i \in I \mid \langle h_i, \lambda \rangle \neq 0\}$$

であることは容易にわかり，これから従う．

(iii) 一般に $\lambda, \mu \in P^+$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda), V(\mu)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, V(\mu) \otimes V(\lambda)^*),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\mu), V(\lambda)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}, V(\lambda) \otimes V(\mu)^*)$$

である．$\mathfrak{g}$ 加群として $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ であることから

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda), V(\mu)) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\mu), V(\lambda))$$

となり，これから従う． （終）

また，主定理を用いて有限次元 $A \otimes \mathfrak{g}$ 加群の圏のブロック分解を求めることができる（[Ko, Theorem 4.4]）．

5 今後の課題

1 節でも触れたように，Fialowski-Malikov [FM] はループ Lie 代数の場合に evaluation 表現の間の Ext 群の記述

$$\mathrm{Ext}^1(V_{\mathfrak{m}}(\lambda), V_{\mathfrak{m}}(\mu)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} \otimes V(\lambda), V(\mu))$$

を与えた．ここで右辺に $\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ の因子がないのは，もちろん，$A = k[t, t^{-1}]$ のときは導分の空間が 1 次元だからである．彼らの用いた手法は，Hochschild-Serre スペクトル系列と，ループ Lie 代数のホモロジーに関する Garland の結果を組み合わせる，よりホモロジー代数的なもので，実は彼らは Ext^1 だけでなく高次の Ext 群も計算している（筆者は，論文を書いてからこの結果を知った）．この手法が一般の A の場合にも適用できれば，命題 4.1 の別証明及び高次の Ext 群に関する結果が得られる．また，$\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m}) \cong \mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m})$ であるから，その計算の過程においては $\mathrm{Der}(A, A/\mathfrak{m})$ の因子は $\mathrm{Ext}^1_A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m})$ の形で自然に現れるだろう．今回得られた結果をこのように別の視点から理解することは今後の課題である．

参考文献

[C] Vyjayanthi Chari, *Integrable representations of affine Lie algebras*, Invent. Math. **85** (1986), no. 2, 317–335.

[CFK] Vyjayanthi Chari, Ghislain Fourier, and Tanusree Khandai, *A categorical approach to Weyl modules*, preprint arXiv:0906.2014.

[CG] Vyjayanthi Chari and Jacob Greenstein, *An application of free Lie algebras to polynomial current algebras and their representation theory*, Infinite-dimensional aspects of representation theory and applications, Contemp. Math., vol. 392, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, pp. 15–31.

[CM] Vyjayanthi Chari and Adriano Moura, *Spectral characters of finite-dimensional representations of affine algebras*, J. Algebra **279** (2004), no. 2, 820–839.

[CP1] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley, *New unitary representations of loop groups*, Math. Ann. **275** (1986), no. 1, 87–104.

[CP2] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191–223 (electronic).

[FL] Boris Feigin and Sergei Loktev, *Multi-dimensional Weyl modules and symmetric functions*, Comm. Math. Phys. **251** (2004), no. 3, 427–445.

[FM] Alice Fialowski and Fyodor Malikov, *Extensions of modules over loop algebras*, Amer. J. Math. **116** (1994), no. 5, 1265–1281.

[Ko] Ryosuke Kodera, *Extensions between finite-dimensional simple modules over a generalized current Lie algebra*, to appear in Transformation Groups.

[Ku] Toshiro Kuwabara, *Symmetric coinvariant algebras and local Weyl modules at a double point*, J. Algebra **295** (2006), no. 2, 426–440.