A generalization of adjoint crystals for the quantized affine algebras of type $A_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$

小寺 諒介

東京大学大学院数理科学研究科

1 序

adjoint crystal はアファイン量子展開環のある有限次元表現の crystal base で, Benkart-Frenkel-Kang-Lee [1] によってその性質が研究された．アファイン量子展開環の有限次元表現はいつも crystal base を持つとは限らず, また, たとえ抽象的に crystal base の存在が証明されたとしてもその具体的な構造を記述することは一般には難しい．adjoint crystal は, すべての型のアファイン量子展開環に対して統一的に構造が記述できる貴重な例を与える．その自然な一般化として, Kirillov-Reshetikhin 加群と呼ばれる有限次元既約表現の族を用いて adjoint crystal を含む crystal の系列を構成することができる．本稿では $A_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_{n+1}^{(2)}$ 型の場合にこれらの crystal の構造の帰納的な記述を紹介する．

以下では $\mathfrak{g}$ をアファイン Lie 環（簡単のため $A_{2n}^{(2)}$ 型ではないとする）とし, $\mathfrak{g}_0$ を $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形から頂点 0 を取り除いたものに対応する有限次元単純 Lie 環とする．$\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ および $\mathfrak{g}_0$ の量子展開環をそれぞれ $U_q'(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{g}_0)$ で表す．また, $\mathfrak{g}$ の Cartan 行列の index set を I とし, $i \in I$ に対する simple root を α_i とする．

2 Adjoint crystal

この節では adjoint crystal の構成を説明する．adjoint crystal は, 2 つの $U_q(\mathfrak{g}_0)$-crystal $B(\theta)$ と $B(0)$ の直和に適当に柏原作用素 $\tilde{f}_0$ の作用を定めることで定義される．

まず $B(\theta)$, $B(0)$ について説明しよう．θ を $\mathfrak{g}$ が untwisted 型のとき $\mathfrak{g}_0$ の最高 root, $\mathfrak{g}$ が twisted 型のとき $\mathfrak{g}_0$ の最高短 root とする．最高 weight が θ の有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群を $V(\theta)$, その crystal base を $B(\theta)$ とする．$\mathfrak{g}$ が untwisted 型のときは, $V(\theta)$ は $U_q(\mathfrak{g}_0)$ の adjoint 表現と呼ばれている．次のように記号を定義する．

$$\Delta = \begin{cases} \mathfrak{g}_0 \text{の root 全体} & \mathfrak{g} \text{ が untwisted 型のとき} \\ \mathfrak{g}_0 \text{の短 root 全体} & \mathfrak{g} \text{ が twisted 型のとき} \end{cases}$$

集合としては

$$B(\theta) = \Delta \sqcup \{z_i \mid \alpha_i \in \Delta\}$$

とかける．z_i は weight が 0 の元である．crystal graph は次のようになる．

$$\alpha \xrightarrow{i} \beta \qquad \alpha, \beta \in \Delta \text{ が } \alpha = \beta + \alpha_i \text{ を満たすとき}$$

$$\alpha_i \xrightarrow{i} z_i \xrightarrow{i} -\alpha_i$$

$B(0)$ は自明表現の crystal base でただひとつの元（$\varnothing$ で表すことにする）からなる.

$$B(0) = \{\varnothing\}$$

$U_q(\mathfrak{g}_0)$-crystal $B(\theta) \oplus B(0)$ に次のように $\tilde{f}_0$ の作用を定めて, $U_q'(\mathfrak{g})$-crystal B^{ad} を定義する.

$$\begin{aligned} \alpha \xrightarrow{0} \beta \qquad & \alpha, \beta \in \Delta \text{ が } \alpha + \theta = \beta \text{ を満たすとき} \\ -\theta \xrightarrow{0} \varnothing \xrightarrow{0} \theta & \end{aligned}$$

定理 2.1 (Benkart-Frenkel-Kang-Lee [1])**.** B^{ad} は level 1 の perfect crystal である.

perfect crystal の定義はここでは省略し, その重要な性質を述べる（定義は [4, Chapter 10] を参照）.

B を $U_q'(\mathfrak{g})$-crystal とする. $b \in B$ に対して

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\},$$
$$\varphi_i(b) = \max\{n \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\},$$
$$\varepsilon(b) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i(b) \Lambda_i,$$
$$\varphi(b) = \sum_{i \in I} \varphi_i(b) \Lambda_i$$

と定義する. 但し, Λ_i は $\mathfrak{g}$ の fundamental weight である.

c を $\mathfrak{g}$ の標準的な中心元, P_{cl}^+ を $\mathfrak{g}_0$ の dominant weight の集合とする. $l = \min\{\langle c, \varepsilon(b) \rangle \mid b \in B\}$ に対して

$$B_{\min} = \{b \in B \mid \langle c, \varepsilon(b) \rangle = l\},$$
$$(P_{\mathrm{cl}}^+)_l = \{\lambda \in P_{\mathrm{cl}}^+ \mid \langle c, \lambda \rangle = l\}$$

とすれば ε, φ は $B_{\min}$ から $(P_{\mathrm{cl}}^+)_l$ への写像を与える. B が perfect crystal であることの定義のうちで重要なのが次の条件である.

$$\varepsilon, \varphi \text{ は全単射である.}$$

$\lambda \in P_{\mathrm{cl}}^+$ に対し, $B(\lambda)$ を最高 weight が λ の既約 $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群の crystal base とする.

定理 2.2 (Kang-Kashiwara-Misra-Miwa-Nakashima-Nakayashiki [7])**.** B を level l の perfect crystal とする. このとき任意の $\lambda \in (P_{\mathrm{cl}}^+)_l$ に対して $U_q'(\mathfrak{g})$-crystal としての同型

$$B(\lambda) \simeq B(\varepsilon \circ \varphi^{-1}(\lambda)) \otimes B$$

がある.

この同型を繰り返し用いることで, $B(\lambda)$ を B の無限個のテンソル積の中に実現することができる.

3 Adjoint crystal の一般化

$k \in I_0$ ($\mathfrak{g}_0$ の Cartan 行列の index set) と非負整数 l に対する Kirillov-Reshetikhin 加群を $W^{k,l}$ とする. Kirillov-Reshetikhin 加群は crystal base を持つと予想されており, 非例外型のアファイン量子展開環に対しては肯定的に解決されている（詳細については Okado-Schilling [15] を参照）. 各 l に対して $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群 V_l を

$$V_l = \begin{cases} W^{1,l} \otimes W^{n,l} & A_n^{(1)} \text{型のとき} \\ W^{1,2l} & C_n^{(1)} \text{型のとき} \\ W^{i_0,l} & \text{他の型のとき} \end{cases}$$

で定義する．但し, i_0 は $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形において頂点 0 と辺で結ばれた頂点に対応する index とする．V_l は次の性質を持つ．

(i) V_l は crystal base B_l を持つ．

(ii) $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群として

$$V_l\mid_{U_q(\mathfrak{g}_0)} \simeq \bigoplus_{k=0}^{l} V(k\theta)$$

と分解する．ここで $V(k\theta)$ は最高 weight が $k\theta$ の有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群である．

(iii) B_1 は adjoint crystal B^{ad} と一致する．

(i) については, B_l が [8, Proposition 3.4.5] において与えられた crystal base を持つ十分条件を満たすことが簡単に確かめられる．(ii) の分岐則は untwisted 型の場合は Chari [2], twisted 型の場合は Hernandez [3] によって証明された．(iii) は B_1 の具体的な実現（例えば Hernandez-Nakajima [13] による単項式を用いた実現）によって確認することができる．

B_l の構造の記述については, 例えば以下に挙げる研究がある．

- $C_n^{(1)}$ 型　Kang-Kashiwara-Misra [6]
- $D_n^{(1)}$ 型　Schilling-Sternberg [16]
- $D_{n+1}^{(2)}$ 型　Kang-Kashiwara-Misra-Miwa-Nakashima-Nakayashiki [8]
- $G_2^{(1)}$ 型　Yamane [18]
- $D_4^{(3)}$ 型　Kashiwara-Misra-Okado-Yamada [10]

4　$A_n^{(1)}$ 型の場合

この節では $\mathfrak{g}$ を $A_n^{(1)}$ 型として $U_q'(\mathfrak{g})$-crystal $B_l = B^{1,l} \otimes B^{n,l}$ の構造を調べる．但し $B^{1,l}$, $B^{n,l}$ はそれぞれ Kirillov-Reshetikhin 加群 $W^{1,l}$, $W^{n,l}$ の crystal base である．$B^{1,l}$, $B^{n,l}$ の構造は次のようにかける (Kashiwara-Nakashima [11], Shimozono [17])．

$$B^{1,l} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n+1} \mid \sum_j x_j = l\}$$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \xrightarrow{i} (\ldots, x_i - 1, x_{i+1} + 1, \ldots),$$

$$B^{n,l} = \{(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{n+1} \mid \sum_j y_j = l\}$$

$$(y_1, \ldots, y_{n+1}) \xrightarrow{i} (\ldots, y_i + 1, y_{i+1} - 1, \ldots).$$

よく知られている crystal のテンソル積の規則によって B_l の構造は簡単に計算することができる．

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき} \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき} \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき} \end{cases}$$

前節で述べた V_l の分岐則によれば, B_l は $U_q(\mathfrak{g}_0)$-crystal として

$$B_l\mid_{U_q(\mathfrak{g}_0)} \simeq \bigoplus_{k=0}^{l} B(k\theta)$$

と分解する. $B(k\theta)$ は $V(k\theta)$ の crystal base である. この分解により, $B(k\theta)$ を B_l の部分集合とみなす. 以下では, B_l への $\tilde{f}_0$ の作用を用いて B_{l+1} への作用を帰納的に記述することを考える. $j=1,\ldots,n+1$ を fix し, 次のように写像 Θ_j を定義する.

$$\begin{aligned} \Theta_j \colon B_l &\to B_{l+1} \\ b_1 \otimes b_2 &\mapsto b_1' \otimes b_2' \end{aligned}$$

但し

$$b_1 = (x_1, \ldots, x_{n+1})$$

$$b_2 = (y_1, \ldots, y_{n+1})$$

に対して

$$b_1' = (\ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots)$$

$$b_2' = (\ldots, y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, \ldots)$$

とする.

写像 Θ_j は次の性質を持つ.

命題 4.1. (i) $i \neq 0$ のとき Θ_1 は $\tilde{f}_i$ と可換である.
(ii) $\tilde{f}_0 b \neq 0$ であれば $\Theta_1(\tilde{f}_0 b) = \tilde{f}_0 \Theta_1(b)$ である.
(iii) $\Theta_1(B(k\theta)) = B(k\theta)$.

命題 4.2. $j = 2, \ldots, n+1$ とする.

(i) $i \neq 0$ のとき, $\tilde{f}_i b \neq 0$ であれば $\Theta_j(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \Theta_j(b)$ である.
(ii) Θ_j は $\tilde{f}_0$ と可換である.
(iii) $\Theta_j(B(k\theta)) \subset B((k+1)\theta)$.

以上の命題から次のことが分かる.

- B_l は(Θ_1 によって)B_{l+1} の full subgraph である.
- $\tilde{f}_0$ の $\bigcup_{j=2}^{n+1} \mathrm{Im}\,\Theta_j \subset B_{l+1}$ への作用は B_l への作用から決定できる.

あとは $\tilde{f}_0$ の $B_l \setminus \bigcup_{j=2}^{n+1} \mathrm{Im}\,\Theta_j$ への作用を記述できればよい. 次の命題は, $\bigcup_{j=2}^{n+1} \mathrm{Im}\,\Theta_j$ の weight による特徴づけを与える.

命題 4.3.

$$\bigcup_{j=2}^{n+1} \Theta_j(B(k\theta)) = \{ b \in B((k+1)\theta) \subset B_{l+1} \mid \mathrm{wt}\, b \in \mathrm{wt}\, B(k\theta) \}.$$

さらに weight の重複度について次のことが分かる.

命題 4.4. $B_{l+1} \setminus \bigcup_{j=2}^{n+1} \mathrm{Im}\,\Theta_j$ における weight の重複度は 1 以下である.

従って, $B_l \setminus \bigcup_{j=2}^{n+1} \operatorname{Im}\Theta_j$ の元はその weight を与えれば一意に決まる．そこで, $\tilde{f}_0$ の作用が weight のみによって記述できるのではないかと期待できる．

補題 4.5. $b \in B(k\theta)$ が $\operatorname{wt} b \in \operatorname{wt} B(k\theta) \setminus \operatorname{wt} B((k-1)\theta)$ を満たすとする．このとき次のうちどれかが成り立つ．

- $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B((k+1)\theta) \setminus \operatorname{wt} B(k\theta)$.
- $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B(k\theta) \setminus \operatorname{wt} B((k-1)\theta)$.
- $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B((k-1)\theta) \setminus \operatorname{wt} B((k-2)\theta)$.

次の定理で述べるように, $\tilde{f}_0$ の $B_l \setminus \bigcup_{j=2}^{n+1} \operatorname{Im}\Theta_j$ への作用は, 作用する元の weight によって完全に決まってしまう．

定理 4.6. $b \in B(k\theta) \subset B_{l+1}$, $b \notin \bigcup_{j=2}^{n+1} \operatorname{Im}\Theta_j$ とする．

(i) $\tilde{f}_0 b = 0 \iff k = l+1$ かつ $\operatorname{wt} b + \theta \notin \operatorname{wt} B((l+1)\theta)$.
(ii) $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B((k+1)\theta) \setminus \operatorname{wt} B(k\theta) \Rightarrow \tilde{f}_0 b \in B((k+1)\theta) \subset B_{l+1}$.
(iii) $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B(k\theta) \setminus \operatorname{wt} B((k-1)\theta) \Rightarrow \tilde{f}_0 b \in B(k\theta) \subset B_{l+1}$.
(iv) $\operatorname{wt} b + \theta \in \operatorname{wt} B((k-1)\theta) \setminus \operatorname{wt} B((k-2)\theta) \Rightarrow \tilde{f}_0 b \in B((k-1)\theta) \subset B_{l+1}$.

どの場合においても, $\tilde{f}_0 b$ はその weight だけで決まる．

5 $C_n^{(1)}$ 型, $D_{n+1}^{(2)}$ 型の場合

$C_n^{(1)}$ 型, $D_{n+1}^{(2)}$ 型の場合の結果を簡単に述べる．B_l の構造の記述は $C_n^{(1)}$ 型の場合は [6], $D_{n+1}^{(2)}$ 型の場合は [8] において与えられた．ここでは柏原作用素の作用の記述は省略する．[14] に具体的な公式があるのでそちらを参照してほしい．

$\mathfrak{g} = C_n^{(1)}$ の場合は, B_l は集合としては次のように記述できる．

$$B(k\theta) = \{(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_1) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2n} \mid \sum_j (x_j + \bar{x}_j) = 2k\},$$

$$B_l = \bigoplus_{k=0}^{l} B(k\theta).$$

各 $j = 1, \dots, n$ に対して写像 $\Phi_j \colon B_l \to B_{l+1}$ を

$$\Phi_j(x_1, \dots, \bar{x}_1) = (\dots, x_j + 1, \dots, \bar{x}_j + 1, \dots)$$

で定義する．

定理 5.1. (i) B_l は B_{l+1} の full subgraph である．
(ii) Φ_j $(j = 1, \dots, n)$ は $\tilde{f}_0$ と可換である．
(iii)

$$\bigcup_{j=1}^{n} \Phi_j(B(k\theta)) = \{b \in B((k+1)\theta) \subset B_{l+1} \mid \operatorname{wt} b \in \operatorname{wt} B(k\theta)\}$$

で, $B_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{Im}\Phi_j$ における weight の重複度は 1 以下である．
(iv) $b \in B_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{Im}\Phi_j$ であれば $\tilde{f}_0 b$ はその weight だけで決まる．

$\mathfrak{g} = D_{n+1}^{(1)}$ の場合は, B_l は次のように記述できる.

$$B(k\theta) = \{(x_1, \dots, x_n, x_0, \bar{x}_n, \dots, \bar{x}_1) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{2n+1} \mid x_0 = 0 \text{ または } 1,\ \sum_j (x_j + \bar{x}_j) + x_0 = k\},$$

$$B_l = \bigoplus_{k=0}^{l} B(k\theta).$$

各 $j = 1, \dots, n-1$ に対して写像 $\Psi_j \colon B_{l-1} \to B_{l+1}$ を

$$\Psi_j(x_1, \dots, \bar{x}_1) = (\dots, x_j + 1, \dots, \bar{x}_j + 1, \dots)$$

で, $\Psi_n \colon B_l \to B_{l+1}$ を

$$\Psi_n(x_1, \dots, \bar{x}_1) = \begin{cases} (\dots, x_n, x_0 + 1, \bar{x}_n, \dots) & x_0 = 0 \text{ のとき} \\ (\dots, x_n + 1, x_0 - 1, \bar{x}_n + 1, \dots) & x_0 = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する.

定理 5.2. (i) B_l は B_{l+1} の full subgraph である.

(ii) Ψ_j $(j = 1, \dots, n)$ は $\tilde{f}_0$ と可換である.

(iii)

$$\bigcup_{j=1}^{n-1} \Psi_j(B((k-1)\theta)) \cup \Psi_n(B(k\theta)) = \{b \in B((k+1)\theta) \subset B_{l+1} \mid \mathrm{wt}\, b \in \mathrm{wt}\, B(k\theta)\}$$

で, $B_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Im}\,\Psi_j$ における weight の重複度は 1 以下である.

(iv) $b \in B_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Im}\,\Psi_j$ であれば $\tilde{f}_0 b$ はその weight だけで決まる.

参考文献

[1] G. Benkart, I. Frenkel, S.-J. Kang, and H. Lee, *Level 1 perfect crystals and path realizations of basic representations at $q = 0$*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 10312, 28pp.

[2] V. Chari, *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Int. Math. Res. Not. (2001), no. 12, 629–654.

[3] D. Hernandez, *Kirillov-Reshetikhin conjecture: the general case*, preprint arXiv:0704.2838.

[4] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[6] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and K. C. Misra, *Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras*, Compositio Math. **92** (1994), no. 3, 299–325.

[7] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Infinite Analysis, Part A, B (Kyoto, 1991), Adv. Ser. Math. Phys., vol. 16, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992, pp. 449–484.

[8] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima, and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math. J. **68** (1992), no. 3, 499–607.

[9] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 465–516.

[10] M. Kashiwara, K. C. Misra, M. Okado, and D. Yamada, *Perfect crystals for* $U_q(D_4^{(3)})$, J. Algebra **317** (2007), no. 1, 392–423.

[11] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q-analogue of classical Lie algebras*, J. Algebra **165** (1994), no. 2, 295–345.

[12] R. Kodera, *A generalization of adjoint crystals for the quantized affine algebras of type* $A_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ *and* $D_{n+1}^{(2)}$, preprint arXiv:0802.3964.

[13] D. Hernandez and H. Nakajima, *Level 0 monomial crystals*, Nagoya Math. J. **184** (2006), 85–153.

[14] M. Okado, $X = M$ *conjecture*, Combinatorial aspect of integrable systems, MSJ Mem., vol. 17, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, pp. 43–73.

[15] M. Okado and A. Schilling, *Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types*, Represent. Theory **12** (2008), 186–207.

[16] A. Schilling and P. Sternberg, *Finite-dimensional crystals* $B^{2,s}$ *for quantum affine algebras of type* $D_n^{(1)}$, J. Algebraic Combin. **23** (2006), no. 4, 317–354.

[17] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 151–187.

[18] S. Yamane, *Perfect crystals of* $U_q(G_2^{(1)})$, J. Algebra **210** (1998), no. 2, 440–486.