

On Kirillov-Reshetikhin crystals for type A

小寺 諒介*

東京大学大学院数理科学研究科

城崎新人セミナーに参加させていただきどうもありがとうございました。いろいろな分野の人たちと話ができて、有意義な4日間でした。素晴らしい環境を提供してくださった運営委員の方々と参加者のみなさんに感謝いたします。

1 Kac-Moody Lie 環と量子展開環

この節では、有限次元半単純 Lie 環の一般化である Kac-Moody Lie 環と、その普遍展開環の q 変形である量子展開環の定義を述べる。Kac-Moody Lie 環については [Kac]、量子展開環については [HK] を参照せよ。

$C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能 Cartan 行列、すなわち次を満たす正方行列とする。

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 2 \quad \forall i \in I, \\ c_{ij} &\in \mathbb{Z}_{\leq 0} \quad \forall i \neq j \in I, \\ c_{ij} = 0 &\Leftrightarrow c_{ji} = 0 \quad \forall i, j \in I, \end{aligned}$$

\exists 対角行列 $D = \text{diag}(d_i)_{i \in I}$ s.t. DC が対称行列。

次を満たす3つ組 $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I})$ を Cartan 行列 C の realization と呼ぶ。

- \mathfrak{h} : 有限次元 \mathbb{C} ベクトル空間,
- $\alpha_i \in \mathfrak{h}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$,
- $h_i \in \mathfrak{h}$,
- $\langle h_i, \alpha_j \rangle = c_{ij} \quad \forall i, j \in I$.

定義 1.1. $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i \in I}, \{h_i\}_{i \in I})$ に付随した Kac-Moody Lie 環 \mathfrak{g} とは次の生成元と関係式で定義される \mathbb{C} 上の Lie 環である。

生成元: e_i, f_i ($i \in I$), \mathfrak{h} .

関係式:

- (i) $[h, h'] = 0$ ($h, h' \in \mathfrak{h}$),
- (ii) $[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i$ ($h \in \mathfrak{h}, i \in I$),
- (iii) $[h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i$ ($h \in \mathfrak{h}, i \in I$),
- (iv) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ ($i, j \in I$),
- (v) $(\text{ad } e_i)^{1-c_{ij}} e_j = 0$ ($i \neq j \in I$),
- (vi) $(\text{ad } f_i)^{1-c_{ij}} f_j = 0$ ($i \neq j \in I$).

Cartan 行列 C は、その対称化 DC が正定値のとき有限型、半正定値かつ corank 1 のとき affine 型であるという。そのとき対応する Kac-Moody Lie 環もそれぞれ有限型、affine 型という。

* kryosuke@ms.u-tokyo.ac.jp

例 1.2 (有限型 Kac-Moody Lie 環の例). A_n 型 Cartan 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(index set は $\{1, \dots, n\}$) に対してその realization を

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}h_i$$

となるようにとれば, 対応する Kac-Moody Lie 環は

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \text{Mat}_{n+1}(\mathbb{C}) \mid \text{tr } X = 0\}$$

と同型になる.

例 1.3 (affine 型 Kac-Moody Lie 環の例). $A_n^{(1)}$ 型 Cartan 行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(index set は $\{0, 1, \dots, n\}$ で, 右下の $n \times n$ 部分が A_n 型になっている) に対してその realization を

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{C}h_i \oplus \mathbb{C}d,$$

$$\langle d, \alpha_i \rangle = \delta_{i0} \quad (0 \leq i \leq n)$$

をとる. このとき対応する Kac-Moody Lie 環は

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$$

と同型になる. 但し $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}(\mathbb{C})$ の Lie 環としての構造は

$$\begin{aligned} [X \otimes t^m, Y \otimes t^{m'}] &= [X, Y] \otimes t^{m+m'} + m\delta_{m+m', 0} \text{tr}(XY)c, \\ [d, X \otimes t^m] &= mX \otimes t^m, \\ [c, X \otimes t^m] &= [c, d] = 0 \\ (X, Y \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}), m, m' \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

で与える. また, 同じ $A_n^{(1)}$ 型 Cartan 行列に対して realization を

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{C}h_i$$

をとれば, 対応する Kac-Moody Lie 環は

$$\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{sl}}'_{n+1}(\mathbb{C}) &= [\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}(\mathbb{C}), \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}(\mathbb{C})] \\ &= \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \end{aligned}$$

と同型になる.

Kac-Moody Lie 環 \mathfrak{g} に対して

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle h_i, \lambda \rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I\},$$

$$P^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$$

とおく.

次に, 量子展開環を定義する. q を \mathbb{Q} 上の不定元とし, 以下の記号を用いる.

$$q_i = q^{d_i}, \quad [k]_i = \frac{q_i^k - q_i^{-k}}{q_i - q_i^{-1}},$$

$$[k]_i! = \prod_{r=1}^k [r]_i, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_i = \frac{[n]_i!}{[k]_i! [n-k]_i!}.$$

定義 1.4. \mathfrak{g} に対応する量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ とは次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{Q}(q)$ 上の結合代数である.

生成元: e_i, f_i ($i \in I$), q^h ($h \in P^\vee$).

関係式:

- (i) $q^0 = 1, q^h q^{h'} = q^{h+h'} \quad (h, h' \in P^\vee)$,
- (ii) $q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i \quad (h \in P^\vee, i \in I)$,
- (iii) $q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i \quad (h \in P^\vee, i \in I)$,
- (iv) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{q^{d_i h_i} - q^{-d_i h_i}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (i, j \in I)$,
- (v) $\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_i e_i^k e_j e_i^{1-c_{ij}-k} = 0 \quad (i \neq j \in I)$,
- (vi) $\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix}_i f_i^k f_j f_i^{1-c_{ij}-k} = 0 \quad (i \neq j \in I)$.

$U_q(\mathfrak{g})$ には然るべく coproduct, counit, antipode が定義され, Hopf 代数の構造を持つ. 従って表現のテンソル積, 自明表現, 反傾表現を考えることができる.

2 Crystal base

この節では, 量子展開環の表現の crystal base を定義しその基本的な性質を紹介する. この節で述べる crystal base に関する定理は [Kas] において証明された.

まず, crystal base を考えることのできる $U_q(\mathfrak{g})$ 加群のクラスを定義しよう. $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M が次の条件を満たすとき可積分であるという.

- $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$,
- e_i, f_i ($i \in I$) の作用は局所冪零.

但し

$$M_\lambda = \{m \in M \mid q^h m = q^{\langle h, \lambda \rangle} m \quad \forall h \in P^\vee\}$$

である.

$i \in I$ を fix すると, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論により可積分加群 M は次のように分解することがわかる.

$$M = \bigoplus_{0 \leq n \leq \langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(n)}(\text{Ker } e_i \cap M_\lambda).$$

ここで $f_i^{(n)} = f_i^n / [n]_i!$ である. この分解を用いて, 柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i を $f_i^{(n)}u$ ($u \in \text{Ker } e_i \cap M_\lambda$) に対して

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i(f_i^{(n)}u) &= f_i^{(n-1)}u, \\ \tilde{f}_i(f_i^{(n)}u) &= f_i^{(n+1)}u\end{aligned}$$

と定義する. 端的にいうと, crystal base とは柏原作用素の可積分加群への作用の $q = 0$ での様子を記述するものである. しかし量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{Q}(q)$ 上定義されているので, そのままでは $q = 0$ の状態を考えることはできない. 若干の工夫が必要である.

$q = 0$ で極を持たない有理関数全体のなす $\mathbb{Q}(q)$ の部分環を A とする. すなわち

$$\begin{aligned}A &= \mathbb{Q}[q]_{(q)} \quad (\text{素イデアル } (q) \text{ による局所化}) \\ &= \{f/g \in \mathbb{Q}(q) \mid g(0) \neq 0\}\end{aligned}$$

である. A は離散付値環 (つまり PID かつ局所環) で極大イデアルは qA , 剰余体は $A/qA \simeq \mathbb{Q}$ である.

定義 2.1. M を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群とする. 次の条件を満たす (L, B) を M の crystal base と呼ぶ.

- (i) L は $M \simeq L \otimes_A \mathbb{Q}(q)$ を満たす M の自由 A 部分加群.
- (ii) B は \mathbb{Q} 上のベクトル空間 $L/qL \simeq L \otimes_A \mathbb{Q}$ の基底.
- (iii) $L_\lambda = L \cap M_\lambda$ とおくと $L = \bigoplus_\lambda L_\lambda$ が成り立つ.
- (iv) $B_\lambda = B \cap (L_\lambda/qL_\lambda)$ とおくと $B = \bigsqcup_\lambda B_\lambda$ が成り立つ.
- (v) 各 $i \in I$ に対して $\tilde{e}_i L \subset L, \tilde{f}_i L \subset L$. これにより \tilde{e}_i, \tilde{f}_i が L/qL に作用する.
- (vi) 各 $i \in I$ に対して $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}, \tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$.
- (vii) $\forall b, b' \in B$ に対して $b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$ が成り立つ.

ここでは (vi) の条件に注目してほしい. $i \in I$ を fix し, 分解

$$M = \bigoplus_{0 \leq n \leq \langle h_i, \lambda \rangle} f_i^{(n)}(\text{Ker } e_i \cap M_\lambda)$$

に即して基底をとる. するとこの基底は柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i によって保たれるが, i を別のものに変えれば当然基底の取り方も変わってしまう. しかし, “ $q = 0$ ” ではすべての i に対して compatible な “基底” (M そのものの基底ではない) が存在する (ことがある) というのが crystal base の理論のポイントである.

ではどのような $U_q(\mathfrak{g})$ 加群が crystal base を持つのだろうか? 完全な答えは知られていないが, crystal base を持つ代表的な例として可積分最高ウェイト加群がある.

$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M が次の条件を満たす元 m_λ を持つとき, 最高ウェイト加群と呼ぶ.

- $m_\lambda \in M_\lambda \setminus \{0\}$,
- $e_i m_\lambda = 0 \quad \forall i \in I$,
- $M = U_q(\mathfrak{g})m_\lambda$.

λ を M の最高ウェイト, m_λ を最高ウェイトベクトルと呼ぶ. 各 $\lambda \in P$ に対し最高ウェイト λ の既約最高ウェイト加群が同型を除いて唯一存在し, これを $V(\lambda)$ であらわす. 次の事実が知られている.

定理 2.2. (i) $V(\lambda)$ が可積分 $\Leftrightarrow \lambda \in P^+ = \{\lambda \in P \mid \langle h_i, \lambda \rangle \geq 0 \quad \forall i \in I\}$.

(ii) 可積分最高ウェイト加群は既約.

最高ウェイト $\lambda \in P^+$ の既約最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ に対しその最高ウェイトベクトル v_λ (スカラー倍を除

いて unique) を fix し,

$$L(\lambda) = \sum_{l, i_1, \dots, i_l} A \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} v_\lambda,$$

$$B(\lambda) = \{ \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} v_\lambda \pmod{qL(\lambda)} \mid l, i_1, \dots, i_l \} \setminus \{0\}$$

とおく.

定理 2.3. $(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base である.

$(L_1, B_1), (L_2, B_2)$ をそれぞれ M_1, M_2 の crystal base とする. このとき $(L_1 \oplus L_2, B_1 \sqcup B_2)$ は $M_1 \oplus M_2$ の crystal base になることが簡単にわかる. さらに表現のテンソル積については次のことが知られている.

定理 2.4. $(L_1 \otimes L_2, B_1 \times B_2)$ は $M_1 \otimes M_2$ の crystal base で, 柏原作用素の作用は

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき,} \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2) & \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2 & \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき,} \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2) & \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる. 但し

$$\varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\},$$

$$\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\}$$

である.

crystal base (L, B) から crystal graph と呼ばれる有向 graph を次のようにして定める. 頂点集合は B とし, $b, b' \in B$ が $b' = \tilde{f}_i b$ という関係にあるとき

$$b \xrightarrow{i} b'$$

と矢印をかく. crystal graph が記述できれば, crystal base の構造がわかったことになる. こうして, 量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論の研究が crystal graph という組合せ論的な対象を調べることに帰着されるのである.

例 2.5. A_1 型 Cartan 行列に対応する量子展開環 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を考える. この場合 $P^+ \simeq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, 非負整数 n に対して可積分最高ウェイト加群 $V(n)$ が定まる. $V(n)$ の最高ウェイトベクトル u_0 をとると

$$V(n) = \bigoplus_{j=0}^n \mathbb{Q}(q) f^{(j)} u_0$$

となり, $(f^{(j)} u_0)_{0 \leq j \leq n}$ が $V(n)$ の基底を与える. さらに

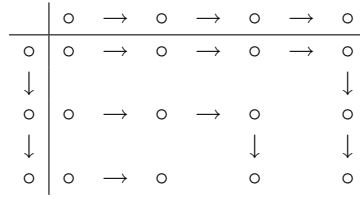
$$L(n) = \bigoplus_{j=0}^n A f^{(j)} u_0,$$

$$B(n) = \{ f^{(j)} u_0 \pmod{qL(n)} \mid 0 \leq j \leq n \}$$

である. $b_j = f^{(j)} u_0 \pmod{qL(n)}$ とおけば, $B(n)$ の crystal graph は次のようになる.

$$b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow \cdots \rightarrow b_n$$

次の図は $B(3)$ と $B(2)$ のテンソル積を表したものである.



crystal graph の連結成分への分解は, 表現の既約分解

$$V(3) \otimes V(2) \simeq V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$$

に対応している.

3 A 型 crystal の組合せ論

以下では A 型の場合だけを扱う. $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}' = \widehat{\mathfrak{sl}}'_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ とし, 対応する量子展開環をそれぞれ $U_q(\mathfrak{g})$, $U'_q(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{g}_0)$ であらわす. 特に興味があるのは, $U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元加群 (最高ウェイト加群ではない) が crystal base を持つ場合である. $k \in \{1, \dots, n\}$ と $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して Kirillov-Reshetikhin 加群と呼ばれる有限次元既約 $U'_q(\mathfrak{g})$ 加群 $W^{k,l}$ が定義され, 次の性質を満たすことが知られている.

- (i) $W^{k,l}$ は部分代数 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ に制限しても既約.
- (ii) $W^{k,l}$ は crystal base $B^{k,l}$ を持つ.

注意 3.1. Kirillov-Reshetikhin 加群はすべての型の affine 量子展開環 $U'_q(\mathfrak{g})$ に対して定義される. A 型以外の場合は, $U_q(\mathfrak{g}_0)$ への制限は一般には既約ではない. また, すべての Kirillov-Reshetikhin 加群は crystal base を持つと予想されているが, 一般には未解決である.

$B^{k,l}$ の構造は semistandard Young tableau を用いて記述することができる ([KN], [S]). この記述について説明しよう. 集合としては

$$B^{k,l} = \left\{ \begin{array}{l} \text{型が } (l^k) \text{ の Young 図形に } 1, \dots, n+1 \text{ の文字を書き込んで} \\ \text{得られる semistandard tableau 全体} \end{array} \right\}$$

と同一視される. 但し semistandard tableau とは次の条件を満たす tableau のことである.

$$b = \begin{array}{|cccc|} \hline b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kl} \\ \hline \end{array}$$

$$b_{ij} \in \{1, \dots, n+1\}$$

$$b_{ij} \leq b_{i,j+1}$$

$$b_{ij} < b_{i+1,j}$$

次に柏原作用素の作用を説明する. まず $\tilde{f}_i b$ ($i = 1, \dots, n$) は次のようにして計算できる.

- (i) $b = (b_{ij})$ の entry を, 最も右の列を上から下に読み, 次に右から 2 番目の列を上から下に読み, ... と続けていって word をつくる (b の Japanese reading word). 式でかくと

$$b \text{ の Japanese reading word} = c_l c_{l-1} \cdots c_1 \quad (c_j = b_{1j} b_{2j} \cdots b_{kj})$$

である.

- (ii) (i) でつくった word から $i, i + 1$ 以外の文字を取り除く.
- (iii) $(i, i + 1)$ という隣り合うペアが word の中にあれば, それがなくなるまで取り除く.
- (iv) 最終的に $(i + 1)^{s_i t}$ という形の word が得られるので, 最も左にある i を $i + 1$ に変える.
- (v) 取り除いた文字を元の場所に戻し, 得られた tableau が $\tilde{f}_i b$ である.

例 3.2. $n = 3, k = 3, l = 4$

$$\tilde{f}_1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = ?$$

- (i) Japanese reading word は 234 134 134 123.
- (ii) 234134134123 から文字 1 と 2 以外を取り除く. \rightarrow 21112
- (iii) 21112 から $(1, 2)$ というペアを取り除く. \rightarrow 211
- (iv) \tilde{f}_1 は最も左の 1 を 2 に変える ($211 \rightarrow 221$).

$$\therefore \tilde{f}_1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

\tilde{f}_0 の作用は

$$\tilde{f}_{i+1} \sigma = \sigma \tilde{f}_i \quad \forall i \pmod{n+1}$$

なる性質を持つ全単射写像 $\sigma: B^{k,l} \rightarrow B^{k,l}$ を用いて

$$\tilde{f}_0 = \sigma^{-1} \tilde{f}_1 \sigma$$

によって計算することができる. σ の作用は次のようになる.

- (i) $b_{kl} = n + 1$ ならば, その文字を取り除いて右下の角の箱を空にする. $b_{kl} \neq n + 1$ ならば, (iv) に進む.
- (ii) tableau 中の文字のない箱に左隣もしくは上隣の箱の文字を slide する. その際, 結果が semistandard tableau になるように slide する.
- (iii) (ii) を繰り返して, 左上の角の箱が空になったら $b_{11} = 0$ とする. (i) に戻る.
- (iv) すべての entry に 1 を加える.

例 3.3. $n = 3, k = 3, l = 4$

$$\sigma \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = ?$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & \mathbf{3} & 3 & 3 \\ \hline 3 & & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{2} & & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$\tilde{f}_0 = \sigma^{-1} \tilde{f}_1 \sigma$ を用いて

$$\tilde{f}_0 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}$$

を計算すると

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\sigma} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\tilde{f}_1} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\sigma^{-1}} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \therefore \tilde{f}_0 & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

となる.

4 $B^{1,l}$ と $B^{n,l}$ とのテンソル積

この節では, $V_l = W^{1,l} \otimes W^{n,l}$ の crystal base $B_l = B^{1,l} \times B^{n,l}$ の構造について筆者が得た結果を紹介する ([Ko]). crystal B_l は, [BFKL] において定義された adjoint crystal の A 型の場合の一般化にあたる.

まず B_l の $U_q(\mathfrak{g}_0)$ -crystal としての構造を調べよう. crystal graph の言葉で言うと, B_l から 0-arrow を取り去ったときに graph がどのように分解するか, ということである. $b_1 \in B^{1,l}$, $b_2 \in B^{n,l}$ とする. 第3節に従って b_1, b_2 をそれぞれ型 (l) , (l^n) の semistandard tableau と思い, 次のように定義をする.

$$m = \min \{ b_1 \text{ に含まれる } 1 \text{ の数}, b_2 \text{ に含まれる } \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \hline n+1 \\ \hline \end{array} \text{ という列の数} \},$$

$$k = l - m,$$

$\tilde{b}_1 \in B^{1,k}$: b_1 から m 個の 1 を取り除いて得られる型 (k) の semistandard tableau,

$\tilde{b}_2 \in B^{n,k}$: b_2 から m 個の列 $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \hline n+1 \\ \hline \end{array}$ を取り除いて得られる型 (k^n) の semistandard tableau,

$\tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2$: 次の図のように \tilde{b}_1 と \tilde{b}_2 をつなげてできる型 $(2k, k^{n-1})$ の semistandard tableau.

$$\begin{array}{|c|} \hline \tilde{b}_1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \tilde{b}_2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \tilde{b}_2 & \tilde{b}_1 \\ \hline \end{array}$$

θ を $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ の最高ルート (\mathfrak{g}_0 を adjoint 作用によって \mathfrak{g}_0 加群と思ったときの最高ウェイト) とする. 非負整数 k に対して, 最高ウェイト $k\theta$ の既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群 $V(k\theta)$ の crystal base $B(k\theta)$ は集合としては型 $(2k, k^{n-1})$ の semistandard tableau 全体と同一視される.

$$B(k\theta) = \{ \text{型 } (2k, k^{n-1}) \text{ の semistandard tableau} \}.$$

crystal としての構造は、最高ウェイトが長方形 Young 図形に対応する場合 (第 3 節) と同様の方法で記述することができる。

命題 4.1. 全単射写像

$$B^{1,l} \times B^{n,l} \rightarrow \bigsqcup_{k=0}^l B(k\theta)$$

$$b_1 \otimes b_2 \mapsto \tilde{b}_1 \cdot \tilde{b}_2$$

は柏原作用素 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i ($i = 1, \dots, n$) と可換で $U_q(\mathfrak{g}_0)$ -crystal としてのウェイトを保つ。

この命題により B_l の $U_q(\mathfrak{g}_0)$ -crystal としての構造はわかった。あとは \tilde{f}_0 の作用がわかればよい。以下では、 B_{l-1} への \tilde{f}_0 の作用を用いて B_l への作用を帰納的に記述することを考える。

$j = 1, \dots, n+1$ を fix し、次のように写像 Θ_j を定義する。

$$\Theta_j: B_{l-1} \rightarrow B_l$$

$$b_1 \otimes b_2 \mapsto b'_1 \otimes b'_2$$

但し

b'_1 : b_1 に j を 1 つ加えてできる semistandard tableau,

$$b'_2: b_2 \text{ に } \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline j-1 \\ \hline j+1 \\ \hline \vdots \\ \hline \end{array} \text{ を 1 つ加えてできる semistandard tableau}$$

とする。主定理は次のとおりである。

定理 4.2. (i) B_{l-1} の crystal graph は Θ_1 によって B_l の subgraph とみなせる。

(ii) Θ_j ($j = 2, \dots, n+1$) と柏原作用素 \tilde{f}_0 は可換。

(iii) $\bigcup_{j=2}^{n+1} \text{Im } \Theta_j = \bigsqcup_{k=0}^l \{b \in B(k\theta) \subset B_l \mid \text{wt } b \in \text{wt } B((k-1)\theta)\}$.

(iv) $b \in B_l \setminus \bigcup_{j=2}^{n+1} \text{Im } \Theta_j \Rightarrow \tilde{f}_0 b$ は $\text{wt } b + \theta$ だけによって定まる。

定理の (ii) により、 B_{l-1} への \tilde{f}_0 の作用がわかれば $\bigcup_{j=2}^{n+1} \text{Im } \Theta_j \subset B_l$ への作用は記述できる。(iii) は $\bigcup_{j=2}^{n+1} \text{Im } \Theta_j$ がどのような集合なのかを言っており、(iv) によってその外側の部分ではウェイトを見るだけで \tilde{f}_0 の作用がわかるという仕組みになっている。

参考文献

- [BFKL] G. Benkart, I. Frenkel, S.-J. Kang, and H. Lee, *Level 1 perfect crystals and path realizations of basic representations at $q = 0$* , Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 10312, 28pp.
- [HK] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [Kac] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, third ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- [Kas] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 2, 465–516.
- [KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras*, J. Algebra **165** (1994), no. 2, 295–345.
- [Ko] R. Kodera, *A generalization of adjoint crystals for the quantized affine algebras of type $A_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ and $D_{n+1}^{(2)}$* , preprint.
- [S] M. Shimozono, *Affine type A crystal structure on tensor products of rectangles, Demazure characters, and nilpotent varieties*, J. Algebraic Combin. **15** (2002), no. 2, 151–187.