Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras

小寺諒介
神戸大学 大学院理学研究科

1　イントロダクション

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純 Lie 代数とする．$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ の普遍中心拡大をトロイダル Lie 代数と呼ぶ．

トロイダル Lie 代数およびその q 変形の表現論の研究は 90 年代に始まり，頂点作用素による表現の構成（Moody-Eswara Rao-横沼 [MEY]，斉藤 [S1]），ダブルアファイン Hecke 代数との間の Schur-Weyl 型双対性（Varagnolo-Vasserot [VV]），箙多様体の同変 K 群への作用（中島 [Nak]）など，さまざまな結果が得られた．さらに，近年 AGT 対応や可積分系との関連（Feigin-神保-三輪-Mukhin [FJMM] など）で再び研究が活発になってきた（盛り上がっているのは主に q 変形の方だが）．

トロイダル Lie 代数の表現論を研究するにあたって，アファイン Lie 代数に対して成功を収めた理論をトロイダルの場合に拡張しようとするのは自然である．ここでは，Chari-Pressley [CP] による Weyl 加群の理論の拡張を考える．

Weyl 加群は，アファイン Lie 代数のある三角分解に関して最高ウェイト条件を満たし，可積分な表現の中で普遍的なものとして定義される．ここで，三角分解は通常の Kac-Moody Lie 代数としてのものではなく，単純 Lie 代数の三角分解をアファイン化したものを使う．同様の構成はトロイダルの場合にも可能で，Weyl 加群の定義自体はパラレルにできる．

[Ko] では，アファインの場合に知られている Weyl 加群のウェイト空間の有限性がトロイダルの場合にも成り立つことを示した．一般の Weyl 加群の構造をさらに詳しく解析することはできていないが，最高ウェイトがレベル 1 基本ウェイト Λ_0 の場合には，Weyl 加群を既知の表現と同定した．系として，この場合の Weyl 加群の指標がわかる．

Website: http://www2.kobe-u.ac.jp/~kryosuke/

アファインの場合，Weyl 加群の指標は Macdonald 多項式の特殊化や，格子模型に由来するフェルミ公式と関係している（Fourier-Littelmann [FL]，直井 [Nao]，Lenart-内藤-佐垣-Schilling-Shimozono [LNSSS]）．トロイダル Lie 代数の Weyl 加群の指標はそのアファイン版にあたり，特殊函数論や組合せ論的観点からも興味深い．（より正確には，カレント Lie 代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ の次数付き Weyl 加群の次数付き指標を考えた方がはっきりと関係がつく．[Ko] ではトロイダル Lie 代数のカレント版についても考察しているが，ここでは省略する）

2 トロイダル Lie 代数

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元単純 Lie 代数とし，$\mathfrak{g}$ 上の非退化な対称不変双線型形式 $(\ ,\ )$ を固定する．A を単位元を持つ可換 $\mathbb{C}$ 代数とする．$\mathfrak{g}$ と A の $\mathbb{C}$ 上のテンソル積 $\mathfrak{g} \otimes A$ を

$$[x \otimes a,\, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab \quad (x, y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A)$$

によって $\mathbb{C}$ 上の Lie 代数とみなし，その中心拡大を考える．Ω_A を A の微分加群，$d\colon A \to \Omega_A$ を微分とする．次の式で，$\mathfrak{g} \otimes A \oplus \Omega_A/dA$ に Lie 代数の構造を定義する．

$$[x \otimes a,\, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab + (x, y)\big((da)b \bmod dA\big) \quad (x, y \in \mathfrak{g},\ a, b \in A),$$

$$\Omega_A/dA \text{ は中心}$$

定理 1（Kassel [Ka]） $\mathfrak{g} \otimes A \oplus \Omega_A/dA$ は $\mathfrak{g} \otimes A$ の普遍中心拡大を与える．

以下では $A = \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ とし，Ω_A/dA において $\mathrm{mod}\ dA$ を省略する．

$$\Omega_A = \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]ds \oplus \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]dt$$

であり，Ω_A/dA において

$$ks^k t^l (s^{-1} ds) = -l s^k t^l (t^{-1} dt) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．Ω_A/dA の基底を固定しておく．$c_s := s^{-1}ds$, $c_t := t^{-1}dt$ とし，$(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して

$$c(k, l) := \begin{cases} s^k t^{l-1} dt & (k \neq 0), \\ s^{-1} t^l ds & (k = 0) \end{cases}$$

とすれば，c_s, c_t, $c(k,l)$ $((k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\})$ は Ω_A/dA の $\mathbb{C}$ 基底を与える．$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ の普遍中心拡大に，次を満たす元 d_s, d_t を付け加える．

$$[d_s, x \otimes s^k t^l] = kx \otimes s^k t^l, \quad [d_t, x \otimes s^k t^l] = lx \otimes s^k t^l,$$
$$[d_s, c(k,l)] = kc(k,l), \quad [d_t, c(k,l)] = lc(k,l),$$
$$[d_s, c_s] = [d_s, c_t] = [d_t, c_s] = [d_t, c_t] = [d_s, d_t] = 0$$

この Lie 代数

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t$$

をトロイダル Lie 代数と呼ぶ．次数作用素 d_t を除いた部分 Lie 代数を

$$\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s$$

とする．$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ は変数 s, t に関する二つのアファイン Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$, $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)}$ を部分 Lie 代数として含む．

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}d_s, \qquad \mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_t$$

である．次数作用素を除いたアファイン Lie 代数をそれぞれ

$$\left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}\right)' = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c_s, \qquad \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)}\right)' = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c_t$$

とする．$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ はこれらのアファイン Lie 代数のアファイン化とみなせる．つまり，ベクトル空間としては次のようになっている．

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} = \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}\right)' \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k \neq 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t \tag{1}$$

$$= \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)}\right)' \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ l \neq 0}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t \tag{2}$$

次節では (1) の見方を使って，$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ 加群から $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群をつくる方法を述べる．また，(1) と (2) は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の自己同型で移り合う．このことについては最後の節で述べる．

ここで，以降で使う概念と記号を導入しておく．アファイン Lie 代数 $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ の基本ウェイトを Λ_i $(i \in I_{\mathrm{aff}})$ とする．ドミナント整ウェイトは，ここでは

$$\Lambda = \sum_{i \in I_{\mathrm{aff}}} m_i \Lambda_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の形のものだけを考える．最高ウェイト Λ の既約な可積分最高ウェイト $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ 加群を $L(\Lambda)$ で表す．

3 表現の構成

この節では，庵原-斉藤-脇本 [ISW] と Eswara Rao [E] によるトロイダル Lie 代数の表現の構成を振り返る．（[ISW] の結果や動機に関しては，[S2], [S3] を参照してください）

D を $\delta(k)$ $(k \in \mathbb{Z}_{<0})$ で生成される多項式環とし，$\mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ を τ を変数とする Laurent 多項式環とする．D および $\mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ の次数付けを $\deg \delta(k) = k$ および $\deg \tau = 1$ によって定め，次数を量る作用素をそれぞれ $d^{(D)}$, $d^{(\tau)}$ とする．

$x \in \mathfrak{g}$ に対して，$x(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x \otimes s^k) u^{-k}$ とする．また，$\Delta_l(u)$ $(l \in \mathbb{Z})$ を

$$\Delta_l(u) = \exp\left(\sum_{k>0} \frac{l\delta(-k)}{k} u^k \right)$$

によって定義する．

定理 2（庵原-斉藤-脇本 [ISW] Lemma 2.1，Eswara Rao [E] Theorem 4.1） M をスムーズな $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ 加群とすれば，

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x \otimes s^k t^l) u^{-k} \mapsto x(u) \otimes \Delta_l(u) \otimes \tau^l \quad (x \in \mathfrak{g}),$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (s^{k-1} t^l ds) u^{-k} \mapsto c_s \otimes \Delta_l(u) \otimes \tau^l, \quad s^k t^{-1} dt \mapsto \begin{cases} \mathrm{id} \otimes \delta(k) \otimes \mathrm{id} & (k<0), \\ 0 & (k \geq 0), \end{cases}$$

$$d_s \mapsto d_s \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d^{(D)} \otimes \mathrm{id}, \quad d_t \mapsto \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes d^{(\tau)}$$

によって $M \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ は $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群となる．

注意 3 [ISW] は，より大きな空間 $M \otimes \tilde{D} \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ に，$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ よりも大きな Lie 代数の加群の構造を与えている．ここで $\tilde{D}$ は

$$\tilde{D} = \mathbb{C}[\delta_s(k) \ (k \in \mathbb{Z}_{<0})] \otimes \mathbb{C}[\delta_t(l) \ (l \in \mathbb{Z}_{<0})]$$

である．[ISW] では，$\tilde{D} \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ の部分が $\mathcal{F}_\varphi$ と書かれている．D の $\delta(k)$ を $\tilde{D}$ の $\delta_s(k)$ と対応させることで，$D \subset \tilde{D}$ とみなす．[ISW] で定義された作用を $M \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ に制限すると，上で述べたものになる．

もう少し補足すると，[ISW] では $\mathfrak{g}$ を ADE 型としているが，この仮定は上で述べた構成には不要である．実際，[E] は $\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の場合（および，あるクラスのスーパー Lie 代数の場合）に証明を与えている．ただし，[E] には [ISW] の結果との関係が書いていない．そのため，$\mathfrak{g}$ が単純 Lie 代数の場合，$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群を考える限り両者が同じであることに，しばらく気づかなかった．

4 Weyl 加群

$\mathfrak{g}$ の Chevalley 生成元を e_i, f_i, h_i $(i \in I)$ とし，これを延長した $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ の Chevalley 生成元を e_i, f_i, h_i $(i \in I_{\mathrm{aff}})$, d_s とする．I は $\mathfrak{g}$ の単純ルートの添字集合で，$I_{\mathrm{aff}} = I \sqcup \{0\}$ である．$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}, \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{aff}}, \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$ を

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{aff}} := \langle e_i \ (i \in I_{\mathrm{aff}}) \rangle, \quad \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{aff}} := \langle f_i \ (i \in I_{\mathrm{aff}}) \rangle, \quad \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}} := \langle h_i \ (i \in I_{\mathrm{aff}}), d_s \rangle$$

で定義する．$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ を Kac-Moody Lie 代数として見たときの三角分解は

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)} = \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}}$$

である．次に

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} = \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}\right)' \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k \neq 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t$$

の見方を元に，$\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ の三角分解をアファイン化して $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の三角分解を考える．$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の部分 Lie 代数 $\mathfrak{n}_{\mathrm{tor}}, \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{tor}}, \mathfrak{a}_{\mathrm{tor}}$ を

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{tor}} := \mathfrak{n}_{\mathrm{aff}} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k > 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}c(k,l), \quad \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{tor}} := \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{aff}} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k < 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}c(k,l),$$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{tor}} := \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{l \neq 0} \mathbb{C}c(0,l) \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t$$

で定義する．ベクトル空間として

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} = \bar{\mathfrak{n}}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{tor}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathrm{tor}}$$

である．この三角分解に関する最高ウェイト加群として，Weyl 加群を導入する．

定義 4　ドミナント整ウェイト $\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}^*$ に対し，最高ウェイト Λ の大域 Weyl 加群 $W_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ とは，v_Λ で生成され次の関係式で定義される $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群である．

$$\mathfrak{n}_{\mathrm{tor}} v_\Lambda = 0, \quad h v_\Lambda = \langle h, \Lambda \rangle v_\Lambda \ (h \in \mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}), \quad c_t v_\Lambda = d_t v_\Lambda = 0,$$

$$f_i^{\langle h_i, \Lambda \rangle + 1} v_\Lambda = 0 \ (i \in I_{\mathrm{aff}})$$

以下では，$\mathfrak{h}_{\mathrm{aff}}$ 作用の同時固有空間をウェイト空間として考える．$W_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ の各ウェイト空間は $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}}(W_{\mathrm{glob}}(\Lambda))$ 加群になる．

命題 5（小寺 [Ko] Proposition 3.6, 3.9）　(i) $\Lambda = \sum_{i \in I_{\mathrm{aff}}} m_i \Lambda_i$ $(m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とする．$\mathbb{C}$ 代数として

$$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}}(W_{\mathrm{glob}}(\Lambda)) \cong \bigotimes_{i \in I_{\mathrm{aff}}} \mathbb{C}[z_{i,1}^{\pm 1}, \ldots, z_{i,m_i}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{m_i}}$$

である．

(ii) $W_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ の各ウェイト空間は，$\mathrm{End}_{\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}}(W_{\mathrm{glob}}(\Lambda))$ 加群として有限生成である．

$A(\Lambda) := \mathrm{End}_{\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}}(W_{\mathrm{glob}}(\Lambda))$ の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して

$$W_{\mathrm{loc}}(\Lambda, \mathfrak{m}) := W_{\mathrm{glob}}(\Lambda) \otimes_{A(\Lambda)} (A(\Lambda)/\mathfrak{m})$$

を局所 Weyl 加群と呼ぶ．上の命題によって $W_{\mathrm{loc}}(\Lambda, \mathfrak{m})$ の各ウェイト空間は有限次元であることがわかり，指標が意味を持つ．

アファイン Lie 代数の Weyl 加群に対しては，命題 5 (i), (ii) は Chari-Pressley [CP] が証明した基本的な性質である．また，Chari-Le [CL] は $\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}$ を $c(k,l)$ $(k \neq 0, l \in \mathbb{Z})$ で生成されるイデアルで割った Lie 代数，すなわち

$$\left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}\right)' \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C} c_t \oplus \mathbb{C} d_s$$

に対して局所 Weyl 加群を導入し，ウェイト空間が有限次元であることを証明している．量子トロイダル代数の Weyl 加群に対しては，命題 5 (i), (ii) の性質は知られていない（と思う）．

Λ がレベル 1 基本ウェイト Λ_0 の場合には，Weyl 加群の構造が具体的にわかる．次が主結果である．

定理 6（小寺 [Ko] Theorem 4.10）　$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群として

$$W_{\mathrm{glob}}(\Lambda_0) \cong L(\Lambda_0) \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$$

である．さらに，左辺への $A(\Lambda_0) = \mathrm{End}_{\mathfrak{g}'_{\mathrm{tor}}}(W_{\mathrm{glob}}(\Lambda_0)) \cong \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ の作用は，右辺の $\mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$ に対応する．

特に，$W_{\mathrm{glob}}(\Lambda_0)$ の商として得られる局所 Weyl 加群は，ベクトル空間としては $L(\Lambda_0) \otimes D$ と同型で，その指標が具体的にわかる．

5 トロイダル Lie 代数の自己同型

前節では，トロイダル Lie 代数の二つの表示

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathrm{tor}} &= \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}\right)' \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k \neq 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_t \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t & (1) \\ &= \left(\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)}\right)' \otimes \mathbb{C}[s^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ l \neq 0}} \mathbb{C}c(k,l) \oplus \mathbb{C}c_s \oplus \mathbb{C}d_s \oplus \mathbb{C}d_t & (2) \end{aligned}$$

のうち (1) に基づいて Weyl 加群 $W_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ を定義した．この節では，この加群を改めて $W^{(s)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ と書き，(2) に基づいて定義した Weyl 加群を $W^{(t)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda)$ と書くことにする．ここで，本当は $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(s)}$ と $\mathfrak{g}_{\mathrm{aff}}^{(t)}$ のウェイトは違うものだが，区別せず同じ記号 Λ を使っている．

$\mathbb{C}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ には，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (s^k t^l) = s^{ak+bl} t^{ck+dl}$$

によって作用する．この作用は自然に $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の自己同型を誘導する．

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対応する自己同型を同じ記号 S で表すと，$\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ 加群の同型

$$W^{(s)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda) \cong S^* \left(W^{(t)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda)\right)$$

が存在する．

[Ko] では，Weyl 加群としては (2) の表示に基づいて $W^{(t)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda_0)$ を考え，主結果を

$$W^{(t)}_{\mathrm{glob}}(\Lambda_0) \cong (S^{-1})^* \left(L(\Lambda_0) \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]\right)$$

の形で述べた．この理由を説明しよう．

$\mathfrak{g}$ が ADE 型のとき，(2) の表示から Heisenberg 代数を読み取り，頂点作用素を使って $\mathfrak{g}_{\mathrm{tor}}$ の表現を構成すると（Moody-Eswara Rao-横沼 [MEY]），(1) の表示に関する最高ウェイト加群ができる．この表現を $\mathbb{V}(0)$ と書くと，具体的には

$$\mathbb{V}(0) \cong L(\Lambda_0) \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}]$$

となる．この構成は (2) の表示からスタートするため，Weyl 加群としては $W_{\mathrm{glob}}^{(t)}(\Lambda_0)$ をとるのが自然であり，二つの表現を比較すると

$$W_{\mathrm{glob}}^{(t)}(\Lambda_0) \cong (S^{-1})^* \mathbb{V}(0) \cong (S^{-1})^* \Big(L(\Lambda_0) \otimes D \otimes \mathbb{C}[\tau^{\pm 1}] \Big)$$

となる．

謝辞

ALTReT2019 での講演後，佐藤僚さんから Eswara Rao の論文 [E] について教えてもらい，続けて庵原-斉藤-脇本 [ISW] の結果との関係について議論したところ，主結果が ADE 型から任意の型に拡張できました．佐藤さんに感謝します．

筆者は科研費（課題番号：17H06127, 18K13390）のサポートを受けています．

参考文献

[CL] Vyjayanthi Chari and Thang Le, *Representations of double affine Lie algebras*, A tribute to C. S. Seshadri (Chennai, 2002), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2003, pp. 199–219.

[CP] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191–223 (electronic).

[E] Senapathi Eswara Rao, *A new class of modules for toroidal Lie superalgebras*, São Paulo J. Math. Sci. **6** (2012), no. 1, 97–115.

[FJMM] Boris Feigin, Michio Jimbo, Tetsuji Miwa, and Evgeny Mukhin, *Representations of quantum toroidal* $\mathfrak{gl}_n$, J. Algebra **380** (2013), 78–108.

[FL] Ghislain Fourier and Peter Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 566–593.

[ISW] Kenji Iohara, Yoshihisa Saito, and Minoru Wakimoto, *Hirota bilinear forms with 2-toroidal symmetry*, Phys. Lett. A **254** (1999), no. 1-2, 37–46.

[Ka] Christian Kassel, *Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra*, J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), no. 2-3, 265–275.

[Ko] Ryosuke Kodera, *Level one Weyl modules for toroidal Lie algebras*, arXiv:1908.07132.

[LNSSS] Cristian Lenart, Satoshi Naito, Daisuke Sagaki, Anne Schilling, and Mark Shimozono, *A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II. Alcove model, path model, and $P = X$*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 14, 4259–4319.

[MEY] Robert V. Moody, Senapathi Eswara Rao, and Takeo Yokonuma, *Toroidal Lie algebras and vertex representations*, Geom. Dedicata **35** (1990), no. 1-3, 283–307.

[Nak] Hiraku Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238.

[Nao] Katsuyuki Naoi, *Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type*, Adv. Math. **229** (2012), no. 2, 875–934.

[S1] Yoshihisa Saito, *Quantum toroidal algebras and their vertex representations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** (1998), no. 2, 155–177.

[S2] 斉藤 義久，トロイダル代数入門，「第 1 回 代数群と量子群の表現論 研究集会」報告集 (1998).

[S3] 斉藤 義久，トロイダル代数の対称性をもつ広田型双線形微分方程式について，「第 2 回 代数群と量子群の表現論 研究集会」報告集 (1999).

[VV] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *Schur duality in the toroidal setting*, Comm. Math. Phys. **182** (1996), no. 2, 469–483.