Braid group action on affine Yangian

小寺諒介
神戸大学 大学院理学研究科

概要

ヤンギアンへのブレイド群作用を導入しその性質を調べる．アファイン A 型の場合の evaluation 写像への応用についても述べる．

1 ヤンギアンへのブレイド群作用

$\mathfrak{g}$ を対称化可能 Kac-Moody Lie 代数とし，その Chevalley 生成元を e_i, f_i, h_i $(i \in I)$ とする．

$$T_i = \exp \operatorname{ad} e_i \circ \exp \operatorname{ad}(-f_i) \circ \exp \operatorname{ad} e_i$$

によって $\mathfrak{g}$ の自己同型を定義すると，$\{T_i\}_{i \in I}$ はブレイド群の関係式を満たす．

$\mathfrak{g}$ の Cartan 行列を $(a_{ij})_{i,j \in I}$ とし，$d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ を満たす整数列 $(d_i)_{i \in I}$ を固定する．ヤンギアン $Y(\mathfrak{g})$ は $x^+_{i,r}, x^-_{i,r}, h_{i,r}$ $(i \in I,\, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ で生成され次の関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数である．

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \quad [x^+_{i,r}, x^-_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,r}] = \pm d_i a_{ij} x^{\pm}_{j,r},$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm d_i a_{ij} \frac{\hbar}{2} (h_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} h_{i,r}),$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm d_i a_{ij} \frac{\hbar}{2} (x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{j,s} + x^{\pm}_{j,s} x^{\pm}_{i,r}),$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x^{\pm}_{i,r_{w(1)}}, [x^{\pm}_{i,r_{w(2)}}, \dots, [x^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, x^{\pm}_{j,s}] \dots]] = 0 \quad (i \neq j)$$

ここで $\hbar \in \mathbb{C}$ はパラメータである．

$$e_i := d_i^{-1/2} x^+_{i,0}, \quad f_i := d_i^{-1/2} x^-_{i,0}, \quad h_i := [e_i, f_i] = d_i^{-1} h_{i,0}$$

Website: http://www2.kobe-u.ac.jp/˜kryosuke/

とおけば，e_i, f_i, h_i $(i \in I)$ は $U(\mathfrak{g})$ と同型な部分代数を生成し，Chevalley 生成元と同一視される．これを使って，$Y(\mathfrak{g})$ の自己同型 T_i を先と同じ式で定義する．

命題 1.1（**[K1] Proposition A.1**）　$\{T_i\}_{i\in I}$ はブレイド群の関係式を満たす．

証明は，$\{T_i\}_{i\in I}$ を $\mathfrak{g}$ の自己同型と見た場合と全く同じである．これを $a_{ij}=0$ の場合に説明する．ブレイド関係式は $T_iT_j = T_jT_i$ なので，$T_iT_jT_i^{-1} = T_j$ を示せばよい．

$$T_iT_jT_i^{-1} = \exp \operatorname{ad} T_i(e_j) \circ \exp \operatorname{ad} T_i(-f_j) \circ \exp \operatorname{ad} T_i(e_j)$$

であり，$\mathfrak{g}$ の関係式によって $T_i(e_j) = e_j$, $T_i(f_j) = f_j$ である．他のブレイド関係式も，$\mathfrak{g}$ の関係式だけを使って証明される．

2　余積との整合性

$\mathfrak{g}$ が有限型およびアファイン型（但し $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ は除く）の場合，$Y(\mathfrak{g})$ は余積 Δ を持つ．（定義は [GNW] を見よ）

命題 2.1（**[K1] Proposition A.4**）　$\Delta \circ T_i = (T_i \otimes T_i) \circ \Delta$ が成り立つ．

証明は，Δ の具体形と次を使った計算による．

$$T_i(x_{j,1}^+) = \begin{cases} -x_{i,1}^- + \dfrac{\hbar}{2}(h_{i,0}x_{i,0}^- + x_{i,0}^- h_{i,0}) & (i=j) \\ (\operatorname{ad} d_i^{-1/2} x_{i,0}^+)^{(-a_{ij})}(x_{j,1}^+) & (a_{ij}<0) \\ x_{j,1}^+ & (a_{ij}=0) \end{cases}$$

3　evaluation 写像への応用

以降，$N \geq 3$ とし，$(a_{ij})_{0\leq i,j\leq N-1}$ は $A_{N-1}^{(1)}$ 型 Cartan 行列とする．この場合，2 パラメータ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$ を持つヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ が次で定義される．

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \quad [x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \quad [h_{i,0}, x_{j,r}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,r}^{\pm},$$

$$[h_{i,r+1}, x_{j,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm a_{ij}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}(h_{i,r}x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm}h_{i,r}) - m_{ij}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}[h_{i,r}, x_{j,s}^{\pm}],$$

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm a_{ij}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}(x_{i,r}^{\pm}x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm}x_{i,r}^{\pm}) - m_{ij}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}[x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}],$$

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x_{i,r_{w(1)}}^{\pm}, [x_{i,r_{w(2)}}^{\pm}, \dots, [x_{i,r_{w(1-a_{ij})}}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}]\dots]] = 0 \quad (i \neq j)$$

但し $m_{ij}=\delta_{i,j+1}-\delta_{i,j-1}$ とする．

$\hbar=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ とおく．上の関係式で $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ としたものが 1 節で導入した $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の関係式である．2 パラメータの場合にも T_i が同様に定義でき，命題 1.1 と 2.1 が $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ に対しても成り立つ．

$\hat{\mathfrak{gl}}_N=\mathfrak{gl}_N\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}c$ を $\mathfrak{gl}_N$ に付随するアファイン Lie 代数とする．c は中心元である．$\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の元 $X\otimes t^s$ $(X\in\mathfrak{gl}_N)$ を $X(s)$ と略記する．また，$E_{i,j}$ を (i,j) 成分が 1 で他が 0 の $N\times N$ 行列とし，$\mathfrak{gl}_N$ の元と見なす．

Guay によって，次のような代数準同型写像が導入された．

定理 3.1（Guay [G], [K2] Theorem 3.8） K,α を複素数とする．パラメータに関する条件 $K\hbar=-N\varepsilon_1$ の下で，ヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ から $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)/(c-K)$ の完備化への代数準同型写像 ev_α^+ が以下によって定まる．

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(x_{i,0}^+)=e_i,\quad \mathrm{ev}_\alpha^+(x_{i,0}^-)=f_i,\quad \mathrm{ev}_\alpha^+(h_{i,0})=h_i,$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(x_{i,1}^+)=\begin{cases}(\alpha-N\varepsilon_1)e_0+\hbar\displaystyle\sum_{s\geq 0}\sum_{k=1}^{N}E_{N,k}(-s)E_{k,1}(s+1) & (i=0),\\ (\alpha-i\varepsilon_1)e_i \\ \quad +\hbar\displaystyle\sum_{s\geq 0}\Big(\sum_{k=1}^{i}E_{i,k}(-s)E_{k,i+1}(s)+\sum_{k=i+1}^{N}E_{i,k}(-s-1)E_{k,i+1}(s+1)\Big) \\ \hfill (i\neq 0),\end{cases}$$

$$\mathrm{ev}_\alpha^+(x_{i,1}^-)=\begin{cases}(\alpha-N\varepsilon_1)f_0+\hbar\displaystyle\sum_{s\geq 0}\sum_{k=1}^{N}E_{1,k}(-s-1)E_{k,N}(s) & (i=0),\\ (\alpha-i\varepsilon_1)f_i \\ \quad +\hbar\displaystyle\sum_{s\geq 0}\Big(\sum_{k=1}^{i}E_{i+1,k}(-s)E_{k,i}(s)+\sum_{k=i+1}^{N}E_{i+1,k}(-s-1)E_{k,i}(s+1)\Big) \\ \hfill (i\neq 0),\end{cases}$$

$$
\mathrm{ev}_\alpha^+(h_{i,1}) = \begin{cases} (\alpha - N\varepsilon_1)h_0 - \hbar E_{N,N}(E_{1,1} - K) \\ \quad + \hbar \displaystyle\sum_{s \geq 0} \sum_{k=1}^{N} \Big(E_{N,k}(-s)E_{k,N}(s) - E_{1,k}(-s-1)E_{k,1}(s+1) \Big) \quad (i = 0), \\ \\ (\alpha - i\varepsilon_1)h_i - \hbar E_{i,i}E_{i+1,i+1} \\ \quad + \hbar \displaystyle\sum_{s \geq 0} \Big(\sum_{k=1}^{i} E_{i,k}(-s)E_{k,i}(s) + \sum_{k=i+1}^{N} E_{i,k}(-s-1)E_{k,i}(s+1) \\ \qquad - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} E_{i+1,k}(-s)E_{k,i+1}(s) - \sum_{k=i+1}^{N} E_{i+1,k}(-s-1)E_{k,i+1}(s+1) \Big) \\ \hfill (i \neq 0) \end{cases}
$$

定理 3.2（[K1] Theorem 4.18） $\varepsilon_1 \neq 0$ のとき ev_α^+ の像は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_N)$ を含む．特に，$\hat{\mathfrak{gl}}_N$ の既約表現を ev_α^+ によって引き戻したものはまた既約である．

ev_α^+ の定義により，その像は $U(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ を含むので，残りの Heisenberg 代数の部分が像に含まれることを示す．そのために，ブレイド群作用を使って具体的にヤンギアンの元を構成する．詳しくは [K1] を見よ．

注意 3.3 [K1] では，ev_α^- というもう一つの evaluation 写像（の $\alpha = 1$ の場合）について定理を証明した．二つの写像がある反自己同型で移りあうことから，ev_α^+ についても同じ主張が成り立つ．

参考文献

[G] Nicolas Guay, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 436–484.

[GNW] Nicolas Guay, Hiraku Nakajima, and Curtis Wendlandt, *Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras*, arXiv:1701.05288.

[K1] Ryosuke Kodera, *Braid group action on affine Yangian*, arXiv:1805.01621.

[K2] ———, *On Guay's evaluation map for affine Yangians*, arXiv:1806.09884.