Higher level Fock spaces and affine Yangian

小寺諒介
京都大学 大学院理学研究科

1 イントロダクション

Uglov [U] は高レベル Fock 空間へのヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の作用を構成した．一方，竹村-Uglov [TU] は高レベル q-Fock 空間への量子アファイン代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ のレベル 0 作用を構成し，その作用が量子トロイダル代数に拡張されることを証明した．従って Uglov の構成したヤンギアンの作用はアファインヤンギアンに拡張されると自然に期待できるが，90 年代当時はアファインヤンギアンの定義が知られていなかったため，この問題は考えられなかったのだと思われる．本稿では，高レベル Fock 空間へのアファインヤンギアンの作用について，論文 [K1] の内容を紹介する．

2 高レベル Fock 空間

本稿を通じて 1 以上の整数 L を固定する．また，N を 3 以上の整数とする．

まず分割に関する用語や記号を準備する．非負整数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ で有限個を除いて $\lambda_i = 0$ となるものを分割と呼び，分割全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す．$\lambda_i \neq 0$ となる最大の i を分割 λ の長さと呼び，$l(\lambda)$ で表す．分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ を $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の部分集合

$$\{(x, y) \mid x = 1, \ldots, l(\lambda),\, y = 1, \ldots, \lambda_x\}$$

（Young 図形）と同一視する．$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の元をセルと呼ぶ．

L 個の整数の組 $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_L) \in \mathbb{Z}^L$ を固定し，各 $s = 1, \ldots, L$ ごとにセル $\square = (x, y) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の N-residue を

$$c_s + y - x \mod N \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

Website: https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~rkodera/index-j.html

と定め, N-residue が i であるセルを i セルと呼ぶ．L 個の分割の組 $\underline{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(L)}) \in \mathcal{P}^L$ に対して，i セル $\square = (x, y)$ が「$\square \in \lambda^{(s)}$ かつ $\lambda^{(s)} \setminus \square$ がまた分割となる」とき，removable であるという．また，「$\square \notin \lambda^{(s)}$ かつ $\lambda^{(s)} \cup \square$ が分割となる」とき，addable であるという．$R_{\underline{\lambda},i}$ と $A_{\underline{\lambda},i}$ でそれぞれ removable な i セルの集合，addable な i セルの集合を表す．

各 $\underline{c} \in \mathbb{Z}^L$ に対して，$\mathcal{P}^L$ で添字づけられた基底 $\{|\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle \mid \underline{\lambda} \in \mathcal{P}^L\}$ を持つ $\mathbb{C}$ ベクトル空間を

$$F(\underline{c}) = \bigoplus_{\underline{\lambda} \in \mathcal{P}^L} \mathbb{C} \, |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle$$

とする．$F(\underline{c})$ は，次で定義されるアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の作用を持つ（例えば [L, 2.3] を見よ）．

$$X_i^+ \, |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle = \sum_{\substack{\underline{\mu} = \underline{\lambda} \setminus \square \\ \square \in R_{\underline{\lambda},i}}} |\underline{\mu}, \underline{c}\rangle \,, \quad X_i^- \, |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle = \sum_{\substack{\underline{\mu} = \underline{\lambda} \cup \square, \\ \square \in A_{\underline{\lambda},i}}} |\underline{\mu}, \underline{c}\rangle \,,$$

$$H_i \, |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle = (\# A_{\underline{\lambda},i} - \# R_{\underline{\lambda},i}) \, |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle$$

但し X_i^+, X_i^-, H_i $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ は $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の Chevalley 生成元である．$F(\underline{c})$ を多重チャージ $\underline{c}$ に付随するレベル L Fock 空間と呼ぶ．

3　ウェッジ空間を用いた構成

$$V = \mathbb{C}^N = \bigoplus_{a=1}^{N} \mathbb{C} v_a, \quad W = \mathbb{C}^L = \bigoplus_{b=1}^{L} \mathbb{C} w_b$$

を $\mathfrak{gl}_N$ 及び $\mathfrak{gl}_L$ のベクトル表現とする．

$$U = \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \otimes W \otimes V$$

とし，$\mathbf{u}_k \in U \, (k \in \mathbb{Z})$ を

$$z^m \otimes w_b \otimes v_a = \mathbf{u}_{a - N(b + Lm)}$$

で定めれば，$\{\mathbf{u}_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ は U の基底を与える．

整数 c を固定し，$n < m$ に対して $\mathbb{C}$ 線型写像 $\bigwedge^n U \to \bigwedge^m U$ を

$$v \mapsto v \wedge \mathbf{u}_{c-n} \wedge \mathbf{u}_{c-n-1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{u}_{c-m+1}$$

で定義すると，これは帰納系を定める．$F(c) = \varinjlim_n \bigwedge^n U$ と定義する．

$$\mathcal{M} = \left\{ \underline{k} = (k_1, k_2, \ldots) \;\middle|\; \begin{array}{l} k_i \in \mathbb{Z},\ k_i > k_{i+1} (\forall i), \\ \text{有限個の } i \text{ を除いて } k_i = c - i + 1 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

とすれば，$\{\mathbf{u}_{\underline{k}} = \mathbf{u}_{k_1} \wedge \mathbf{u}_{k_2} \wedge \cdots \mid \underline{k} \in \mathcal{M}\}$ は $F(c)$ の基底を与える．$\underline{k} \in \mathcal{M}$ に対して分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \mathcal{P}$ を

$$k_i = c + \lambda_i - i + 1$$

で定める．この写像は $\mathcal{M}$ と $\mathcal{P}$ の間の全単射を与える．この対応を用いて $|\lambda, c\rangle = \mathbf{u}_{\underline{k}}$ と定義する．

以下では [L, 2.3.3] に従って全単射

$$\begin{gathered} \mathcal{P} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^L \times \mathbb{Z}^L \\ (\lambda, c) \mapsto (\underline{\lambda}, \underline{c}) \end{gathered}$$

を構成し，それを用いて $F(c)$ をレベル L Fock 空間の直和に分解する．

$(\lambda, c) \in \mathcal{P} \times \mathbb{Z}$ に対して，$|\lambda, c\rangle = \mathbf{u}_{\underline{k}}$ によって対応する $\underline{k} \in \mathcal{M}$ をとる．$\mathbf{u}_k$ の定義より各 i に対して

$$\mathbf{u}_{k_i} = z^{m_i} \otimes w_{b_i} \otimes v_{a_i}$$

と表せる．各 $s = 1, \ldots, L$ に対して $j_1^{(s)} < j_2^{(s)} < \cdots$ を

$$s = b_{j_1^{(s)}} = b_{j_2^{(s)}} = \cdots$$

を満たす添字とし，$a_i^{(s)} = a_{j_i^{(s)}}$, $m_i^{(s)} = m_{j_i^{(s)}}$, $k_i^{(s)} = a_i^{(s)} - N m_i^{(s)}$ と定義する．ある整数 c_s が存在して，有限個の i を除いて

$$k_i^{(s)} = c_s - i + 1$$

が成り立つことがわかる．また，$c_1 + \cdots + c_L = c$ が成り立つ．$\underline{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(L)}) \in \mathcal{P}^L$ を

$$k_i^{(s)} = c_s + \lambda_i^{(s)} - i + 1$$

によって定めると，対応 $(\lambda, c) \mapsto (\underline{\lambda}, \underline{c})$ は全単射 $\mathcal{P} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{P}^L \times \mathbb{Z}^L$ を与える．この対応により，$\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型

$$F(c) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \bigoplus_{\substack{\underline{c} \in \mathbb{Z}^L \\ c_1 + \cdots + c_L = c}} F(\underline{c}), \quad |\lambda, c\rangle \mapsto |\underline{\lambda}, \underline{c}\rangle$$

を得る．

4 アファインヤンギアンの作用

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{C}$ をパラメータとし，$\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とする．

定義 4.1 $N \geq 3$ とする．A 型アファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は，$x^{\pm}_{i,r}, h_{i,r}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を生成元とし，次の関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数である：

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,r}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = 0 \ (i \neq j, j \pm 1)$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{i,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{i,s+1}] = \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h_{i,r} x^{\pm}_{i,s} + x^{\pm}_{i,s} h_{i,r})$$

$$[h_{i,r+1}, x^{+}_{i-1,s}] - [h_{i,r}, x^{+}_{i-1,s+1}] = -\varepsilon_1 h_{i,r} x^{+}_{i-1,s} - \varepsilon_2 x^{+}_{i-1,s} h_{i,r}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{+}_{i+1,s}] - [h_{i,r}, x^{+}_{i+1,s+1}] = -\varepsilon_2 h_{i,r} x^{+}_{i+1,s} - \varepsilon_1 x^{+}_{i+1,s} h_{i,r}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{-}_{i-1,s}] - [h_{i,r}, x^{-}_{i-1,s+1}] = \varepsilon_2 h_{i,r} x^{-}_{i-1,s} + \varepsilon_1 x^{-}_{i-1,s} h_{i,r} \quad (\text{訂正 } 1)$$

$$[h_{i,r+1}, x^{-}_{i+1,s}] - [h_{i,r}, x^{-}_{i+1,s+1}] = \varepsilon_1 h_{i,r} x^{-}_{i+1,s} + \varepsilon_2 x^{-}_{i+1,s} h_{i,r} \quad (\text{訂正 } 2)$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = 0 \ (i \neq j, j \pm 1)$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{i,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{i,s+1}] = \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x^{\pm}_{i,r} x^{\pm}_{i,s} + x^{\pm}_{i,s} x^{\pm}_{i,r})$$

$$[x^{+}_{i,r+1}, x^{+}_{i-1,s}] - [x^{+}_{i,r}, x^{+}_{i-1,s+1}] = -\varepsilon_1 x^{+}_{i,r} x^{+}_{i-1,s} - \varepsilon_2 x^{+}_{i-1,s} x^{+}_{i,r}$$

$$[x^{+}_{i,r+1}, x^{+}_{i+1,s}] - [x^{+}_{i,r}, x^{+}_{i+1,s+1}] = -\varepsilon_2 x^{+}_{i,r} x^{+}_{i+1,s} - \varepsilon_1 x^{+}_{i+1,s} x^{+}_{i,r}$$

$$[x^{-}_{i,r+1}, x^{-}_{i-1,s}] - [x^{-}_{i,r}, x^{-}_{i-1,s+1}] = \varepsilon_2 x^{-}_{i,r} x^{-}_{i-1,s} + \varepsilon_1 x^{-}_{i-1,s} x^{-}_{i,r} \quad (\text{訂正 } 3)$$

$$[x^{-}_{i,r+1}, x^{-}_{i+1,s}] - [x^{-}_{i,r}, x^{-}_{i+1,s+1}] = \varepsilon_1 x^{-}_{i,r} x^{-}_{i+1,s} + \varepsilon_2 x^{-}_{i+1,s} x^{-}_{i,r} \quad (\text{訂正 } 4)$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x^{\pm}_{i,r_{w(1)}}, [x^{\pm}_{i,r_{w(2)}}, \dots, [x^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, x^{\pm}_{j,s}] \dots]] = 0 \ (i \neq j)$$

但し

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & i = j \pm 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．

訂正　昨年（2015 年）の本研究集会の報告集 [K2] 及び RIMS 講究録 [K3] において，アファインヤンギアンの定義関係式が**間違っていました．**間違っていたのは $j = i \pm 1$ のときの $h_{i,r}$ と $x_{j,s}^-$ との関係式 (訂正 1,2) と，$x_{i,r}^-$ と $x_{j,s}^-$ との関係式 (訂正 3,4) です．

注意 4.2　2 パラメータを持つ A 型アファインヤンギアンは Guay [G] によって導入された．そこで定義された代数は λ, β をパラメータとし，生成元 $X_{i,r}^{\pm}, H_{i,r}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},$ $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を持つ．上で定義した $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ とは，パラメータの対応

$$\lambda = \hbar, \quad \beta = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

と，$i \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{r \geq 0} X_{i,r}^{\pm} u^{-r-1} &= \sum_{r \geq 0} x_{i,r}^{\pm}(u - \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1} \\ \sum_{r \geq 0} H_{i,r} u^{-r-1} &= \sum_{r \geq 0} h_{i,r}(u - \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}\end{aligned}$$

及び $i = 0$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{r \geq 0} X_{0,r}^{\pm} u^{-r-1} &= \sum_{r \geq 0} x_{0,r}^{\pm}(u - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1} \\ \sum_{r \geq 0} H_{0,r} u^{-r-1} &= \sum_{r \geq 0} h_{0,r}(u - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}\end{aligned}$$

という生成元の対応によって同型となる．

Guay の生成元のうち $i = 0$ を除いた $X_{i,r}^{\pm}, H_{i,r}$ $(i = 1, \ldots, N-1,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は A 型ヤンギアン $Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}_N)$ の定義関係式を満たし，$X_{i,0}^{\pm}, H_{i,0}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ はアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の定義関係式を満たす．

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}] \otimes W^{\otimes n}$ への作用を

$$s_{ij} \mapsto -K_{ij} \otimes P_{ij}$$

によって定め（但し s_{ij} は互換，K_{ij} は z_i と z_j の入れ換え，P_{ij} はテンソル成分の入れ換え），$V^{\otimes n}$ への作用をテンソル成分の入れ換えで定めると，$\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型

$$\begin{aligned}\bigwedge^n U &= \bigwedge^n \mathbb{C}[z^{\pm 1}] \otimes W \otimes V \\ &\cong \left(\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}] \otimes W^{\otimes n}\right) \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}\end{aligned}$$

を得る．$\mathbb{C}[z_1^{\pm 1},\dots,z_n^{\pm 1}]\otimes W^{\otimes n}$ には退化ダブルアファイン Hecke 代数が作用する（Uglov [U, Proposition 2.8]）．Guay [G] による Schur-Weyl 型函手をこの表現に適用し，$\bigwedge^n U$ へのアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用が定義される．$\mathbb{C}[z_1^{\pm 1},\dots,z_n^{\pm 1}]\otimes W^{\otimes n}$ への退化ダブルアファイン Hecke 代数の作用は L 個のパラメータを持つため，ここで構成した $\bigwedge^n U$ へのアファインヤンギアンの作用も L 個のパラメータを持つ．

Uglov [U] は，A 型ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の $\bigwedge^n U$ への作用が極限 $F(c)=\varinjlim_n \bigwedge^n U$ に拡張されることを証明した．高レベル Fock 空間 $F(\underline{c})$ は $F(c)$ の直和因子と思うことができたが，ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の作用が $F(\underline{c})$ を保つことは容易にわかる．

次が主定理である．

定理 4.3（**[K1]**） アファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ とヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の高レベル Fock 空間 $F(\underline{c})$ への作用はアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ に拡張される．

5 主定理の証明

主定理は，竹村-Uglov [TU] による量子トロイダル代数の高レベル q-Fock 空間への作用の退化版であり，作用の構成の方針は [TU] と同様である．アファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は，アファイン A 型 Dynkin 図形の自己同型 $i\mapsto i-1$ に対応する代数自己同型 ρ を持つ．表現の側にも，対応する全単射線型写像 $T_\infty\colon F(c)\to F(c+L)$ を定義し（[TU] では対応する写像は ψ_∞ と書かれている），これを用いてアファインヤンギアンの作用を構成する．

まず $\bigwedge^n U$ 上の全単射線型写像 T を

$$\begin{aligned}T&\left((z^{m_1}\otimes w_{b_1}\otimes v_{a_1})\wedge\cdots\wedge(z^{m_n}\otimes w_{b_n}\otimes v_{a_n})\right)\\&=(z^{m_1-\delta_{a_1,N}}\otimes w_{b_1}\otimes v_{a_1+1})\wedge\cdots\wedge(z^{m_n-\delta_{a_n,N}}\otimes w_{b_n}\otimes v_{a_n+1})\end{aligned}$$

で定義する．$F(c)=\varinjlim_n \bigwedge^n U$ より，$F(c)$ の元は $v\wedge\mathbf{u}_{c-n}\wedge\mathbf{u}_{c-n-1}\wedge\cdots$ $(v\in\bigwedge^n U, n\gg 0)$ と表せる．$c-n$ が NL の整数倍となるように十分大きい n をとり，$c-n=-mNL$ を満たす $m\in\mathbb{Z}$ を定める．$T_\infty\colon F(c)\to F(c+L)$ を

$$\begin{aligned}T_\infty&(v\wedge\mathbf{u}_{c-n}\wedge\mathbf{u}_{c-n-1}\wedge\cdots)\\&=T\left(v\wedge(z^m\otimes w_1\otimes v_N)\wedge(z^m\otimes w_2\otimes v_N)\wedge\cdots\wedge(z^m\otimes w_L\otimes v_N)\right)\\&\qquad\wedge\mathbf{u}_{c-n}\wedge\mathbf{u}_{c-n-1}\wedge\cdots\end{aligned}$$

で定義する．Guay [G, Lemma 3.5] によって定義された代数自己同型 ρ は，$i=0$ に対する生成元 $X^{\pm}_{0,r}, H_{0,r}$ に関しては

$$\rho(X^{\pm}_{0,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \beta^{r-s} X^{\pm}_{N-1,s}, \quad \rho(H_{0,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \beta^{r-s} H_{N-1,s}$$

という形を持つ．$F(c-L)$ 上に定義されたヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の作用を用いて，$X^{\pm}_{0,r}, H_{0,r}$ の $F(c)$ への作用を

$$\begin{aligned} X^{\pm}_{0,r} &\mapsto T_\infty \circ \rho(X^{\pm}_{0,r}) \circ T_\infty^{-1}, \\ H_{0,r} &\mapsto T_\infty \circ \rho(H_{0,r}) \circ T_\infty^{-1} \end{aligned}$$

によって定義すると，これはアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の $F(c)$ への作用を定める．この作用が $F(\underline{c})$ を保つことは容易にわかり，主定理を得る．

参考文献

[G] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.

[K1] Ryosuke Kodera, *Higher level Fock spaces and affine Yangian*, arXiv:1607.03237.

[K2] ———, *Affine Yangian action on the Fock space*, Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015 報告集.

[K3] ———, *Affine Yangian action on the Fock space*, RIMS 研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」講究録.

[L] Bernard Leclerc, *Fock space representations of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$*, Geometric methods in representation theory, I, Sémin. Congr., vol. 24, Soc. Math. France, Paris, 2012, pp. 343–385.

[TU] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *Representations of the quantum toroidal algebra on highest weight modules of the quantum affine algebra of type $\mathfrak{gl}_N$*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **35** (1999), no. 3, 407–450.

[U] Denis Uglov, *Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$*, arXiv:9802048, 1998.