# Affine Yangian action on the Fock space

小寺諒介
京都大学数理解析研究所

## 1　イントロダクション

Uglov [U] は（レベル 1）Fock 空間へのヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の作用を構成し，Gelfand-Zetlin 部分代数と呼ばれる可換な部分代数に関する同時固有ベクトルとその同時固有値を求めた．このヤンギアン作用の $q$ 変形として，竹村-Uglov [TU] は $q$-Fock 空間への量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_N)$ の作用を構成した．その後，次の二つの結果が得られている．

(A) 竹村-Uglov の作用は量子トロイダル代数の作用に拡張される（Varagnolo-Vasserot [VV1]，斉藤-竹村-Uglov [STU]）．
(B) (A) で得られた量子トロイダル代数の表現は，Varagnolo-Vasserot [VV2] が箙多様体の同変 K 群上に構成した表現と同型である（長尾 [N]）．

(A)(B) の退化版として次の主張が自然に期待される．

(a) Uglov のヤンギアン作用はアファインヤンギアンの作用に拡張される．
(b) (a) で得られたアファインヤンギアンの表現は，Varagnolo [V] が箙多様体の同変ホモロジー群上に構成した表現と同型である．

本稿では，筆者が得たこの退化版の結果について紹介する．

## 2　分割に関する準備

本節では分割に関する用語や記号を準備する．

非負整数の非増加列 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$ で有限個を除いて $\lambda_a = 0$ となるものを分割と呼ぶ．分割全体の集合を $\mathcal{P}$ で表し，$<$ を $\mathcal{P}$ 上のドミナンス半順序とする．

E-mail address: kodera@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\lambda_a \neq 0$ となる最大の $a$ を分割 $\lambda$ の長さと呼び，$l(\lambda)$ で表す．また，$N \geq 2$ に対し $l_N(\lambda) = \#\{a \mid \lambda_a \neq 0,\ \lambda_a \equiv 0 \bmod N\}$ と定める．$\lambda \in \mathcal{P}$ を $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ と表示したとき $z_\lambda = \prod_i i^{m_i} m_i!$ と定める．$\lambda \in \mathcal{P}$ に対して $j(\lambda)_a \in \{1, \dots, N\}$ と $m(\lambda)_a \in \mathbb{Z}$ を

$$\lambda_a - a + 1 = j(\lambda)_a - N m(\lambda)_a$$

によって定める．

$\lambda \in \mathcal{P}$ を $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の部分集合

$$\{(x, y) \mid x = 0, \dots, l(\lambda) - 1, y = 0, \dots, \lambda_{x+1} - 1\}$$

と同一視する．$(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の元をセルと呼び，セル $s = (x, y) \in \lambda$ に対して

$$\begin{aligned} a_\lambda(s) &= \lambda_{x+1} - (y + 1) \\ l_\lambda(s) &= {}^t\lambda_{y+1} - (x + 1) \\ h_\lambda(s) &= a_\lambda(s) + l_\lambda(s) + 1 \end{aligned}$$

と定義する．但し ${}^t\lambda$ は $\lambda$ の転置である．

セル $(x, y) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の $N$-residue を

$$y - x \mod N \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$$

と定め，$N$-residue が $i$ であるセルを $i$ セルと呼ぶ．$\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，$s \in \lambda$ となる $i$ セル $s$ の数を $v_i(\lambda)$ とし，$\mathbf{v}(\lambda) = (v_i(\lambda)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$ とする．

$\lambda \in \mathcal{P}$ に対して，$(x, y) \in \lambda$ かつ $(x + 1, y), (x, y + 1) \notin \lambda$ のときセル $(x, y)$ は removable であるという．また，$(x, y) \notin \lambda$ かつ $(x - 1, y), (x, y - 1) \in \lambda$，または $(x, y) = (0, \lambda_1), (l(\lambda), 0)$ のときセル $(x, y)$ は addable であるという．$R_{\lambda,i}$ と $A_{\lambda,i}$ でそれぞれ removable な $i$ セルの集合，addable な $i$ セルの集合を表す．$(x, y) \in R_{\lambda,i}$ に対して

$$\begin{aligned} R^l_{\lambda,i,(x,y)} &= \{(x', y') \in R_{\lambda,i} \mid x' < x\} \\ R^r_{\lambda,i,(x,y)} &= \{(x', y') \in R_{\lambda,i} \mid x < x'\} \end{aligned}$$

と定義し，同様に $(x, y) \in A_{\lambda,i}$ に対して

$$\begin{aligned} A^l_{\lambda,i,(x,y)} &= \{(x', y') \in A_{\lambda,i} \mid x' < x\} \\ A^r_{\lambda,i,(x,y)} &= \{(x', y') \in A_{\lambda,i} \mid x < x'\} \end{aligned}$$

と定義する．

## 3 Fock 空間と Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数

本稿では基礎体は 2 変数有理函数体 $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とする．また，$\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とおく．整数 $N \geq 2$ を固定する（アファインヤンギアンに関する部分は，$N \geq 3$ を仮定する）．

Schur 対称函数 $s_\lambda$ を基底とするベクトル空間 $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) s_\lambda$ は次で定義されるアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の作用を持つ（例えば [L] を見よ）．

$$X_i^+ s_\lambda = \sum_{s \in R_{\lambda,i}} s_{\lambda \setminus s}$$

$$X_i^- s_\lambda = \sum_{s \in A_{\lambda,i}} s_{\lambda \cup s}$$

$$H_i s_\lambda = (\#A_{\lambda,i} - \#R_{\lambda,i}) s_\lambda$$

$F$ を（レベル 1）Fock 空間と呼ぶ．

$F$ 上の対称双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle_F$ を

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_F = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda (-\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{l_N(\lambda)}$$

によって定義する．$p_\lambda$ は冪和対称函数である．次を満たす $F$ の基底 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ が一意的に存在する．

- $P_\lambda \in s_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) s_\mu$
- $\lambda \neq \mu$ ならば $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_F = 0$

$P_\lambda$ を Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数と呼ぶ．この名称はこの函数を導入した Uglov [U] によるものである．Belavin-Bershtein-Tarnopolsky [BBT] や柳田 [Y] は Uglov 対称函数と呼んでいる．

Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数 $P_\lambda$ は Macdonald 対称函数のある種の退化と思うことができる．Macdonald 対称函数 $P_\lambda(q,t)$ は，次で定義される対称双線型形式

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{a=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_a}}{1 - t^{\lambda_a}}$$

に関して同様の直交性による特徴づけを持つ．$\gamma = -\varepsilon_1/\varepsilon_2$ とし，$\omega_N$ を 1 の原始 $N$ 乗根とすれば，$\langle\ ,\ \rangle_F$ は $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}$ において $q = p\,\omega_N$, $t = p^\gamma \omega_N$ として $p \to 1$ の極限をとったものである．従って

$$P_\lambda = \lim_{p \to 1} P_\lambda(p\,\omega_N, p^\gamma \omega_N)$$

である．（本稿では $N \geq 2$ としているが）$N=1$ のときは Jack 対称函数の定義と一致する．また，$\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1$ にパラメータを特殊化すると Schur 対称函数になる．

Macdonald 対称函数のノルム公式の極限として次が知られている [U, (9.46)]．

$$\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_F = \prod_{\substack{s \in \lambda \\ h_\lambda(s) \equiv 0 \bmod N}} \frac{\varepsilon_1 l_\lambda(s) - \varepsilon_2(a_\lambda(s)+1)}{\varepsilon_1(l_\lambda(s)+1) - \varepsilon_2 a_\lambda(s)}$$

# 4 ヤンギアンの Fock 空間への作用

**定義 4.1** A 型ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ は，$X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ $(i = 1, \ldots, N-1,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を生成元とし，次の関係式で定義される $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 代数である：

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0$$

$$[X^{+}_{i,r}, X^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} H_{i,r+s}$$

$$[H_{i,0}, X^{\pm}_{j,s}] = \pm a_{ij} X^{\pm}_{j,s}$$

$$[H_{i,r+1}, X^{\pm}_{j,s}] - [H_{i,r}, X^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{1}{2}\hbar a_{ij}(H_{i,r}X^{\pm}_{j,s} + X^{\pm}_{j,s}H_{i,r})$$

$$[X^{\pm}_{i,r+1}, X^{\pm}_{j,s}] - [X^{\pm}_{i,r}, X^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{1}{2}\hbar a_{ij}(X^{\pm}_{i,r}X^{\pm}_{j,s} + X^{\pm}_{j,s}X^{\pm}_{i,r})$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [X^{\pm}_{i,r_{w(1)}}, [X^{\pm}_{i,r_{w(2)}}, \ldots, [X^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, X^{\pm}_{j,s}] \ldots ]] = 0 \ (i \neq j)$$

但し

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & i = j \pm 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．

Uglov [U] は，ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の $F$ への作用を構成した．$P_\lambda$ は $H_{i,r}$ $(i = 1, \ldots, N-1,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の同時固有ベクトルになる．

基底 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ に関するヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の生成元の作用は次のようになる．

**定理 4.2**（[K1], Theorem 3.4）

$$
\begin{aligned}
X^+_{i,r} P_\lambda = &\sum_{(x,y)\in R_{\lambda,i}} \left(\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i)+\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i)\right)^r \\
&\times \prod_{(x',y')\in A^r_{\lambda,i,(x,y)}} \frac{\varepsilon_1(x-x'+1)+\varepsilon_2(y-y'+1)}{\varepsilon_1(x-x')+\varepsilon_2(y-y')} \\
&\times \prod_{(x',y')\in R^r_{\lambda\backslash(x,y),i,(x,y)}} \frac{\varepsilon_1(x-x'-1)+\varepsilon_2(y-y'-1)}{\varepsilon_1(x-x')+\varepsilon_2(y-y')} P_{\lambda\backslash(x,y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X^-_{i,r} P_\mu = &\sum_{(x,y)\in A_{\mu,i}} \left(\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i)+\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i)\right)^r \\
&\times \prod_{(x',y')\in A^l_{\mu\cup(x,y),i,(x,y)}} \frac{\varepsilon_1(x-x'+1)+\varepsilon_2(y-y'+1)}{\varepsilon_1(x-x')+\varepsilon_2(y-y')} \\
&\times \prod_{(x',y')\in R^l_{\mu,i,(x,y)}} \frac{\varepsilon_1(x-x'-1)+\varepsilon_2(y-y'-1)}{\varepsilon_1(x-x')+\varepsilon_2(y-y')} P_{\mu\cup(x,y)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big(1+\hbar\sum_{r\geq 0} H_{i,r}u^{-r-1}\Big)P_\lambda = &\prod_{(x,y)\in A_{\lambda,i}} \frac{u-\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i-1)-\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i-1)}{u-\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i)-\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i)} \\
\times &\prod_{(x,y)\in R_{\lambda,i}} \frac{u-\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i+1)-\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i+1)}{u-\varepsilon_1(x+\frac{1}{2}i)-\varepsilon_2(y-\frac{1}{2}i)} P_\lambda
\end{aligned}
$$

# 5 アファインヤンギアン

**定義 5.1** $N \geq 3$ とする．A 型アファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は，$x^\pm_{i,r}, h_{i,r}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を生成元とし，次の関係式で定義される $\mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 代数である：

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0$$

$$[x^+_{i,r}, x^-_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}$$

$$[h_{i,0}, x^\pm_{j,r}] = \pm a_{ij} x^\pm_{j,r}$$

$$[h_{i,r+1}, x^\pm_{j,s}] - [h_{i,r}, x^\pm_{j,s+1}] = 0 \ (i \neq j, j\pm 1)$$

$$[h_{i,r+1},x^{\pm}_{i,s}]-[h_{i,r},x^{\pm}_{i,s+1}]=\pm(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h_{i,r}x^{\pm}_{i,s}+x^{\pm}_{i,s}h_{i,r})$$

$$[h_{i,r+1},x^{+}_{i-1,s}]-[h_{i,r},x^{+}_{i-1,s+1}]=-\varepsilon_1 h_{i,r}x^{+}_{i-1,s}-\varepsilon_2 x^{+}_{i-1,s}h_{i,r}$$

$$[h_{i,r+1},x^{+}_{i+1,s}]-[h_{i,r},x^{+}_{i+1,s+1}]=-\varepsilon_2 h_{i,r}x^{+}_{i+1,s}-\varepsilon_1 x^{+}_{i+1,s}h_{i,r}$$

$$[h_{i,r+1},x^{-}_{i-1,s}]-[h_{i,r},x^{-}_{i-1,s+1}]=\varepsilon_2 h_{i,r}x^{-}_{i-1,s}+\varepsilon_1 x^{-}_{i-1,s}h_{i,r}$$

$$[h_{i,r+1},x^{-}_{i+1,s}]-[h_{i,r},x^{-}_{i+1,s+1}]=\varepsilon_1 h_{i,r}x^{-}_{i+1,s}+\varepsilon_2 x^{-}_{i+1,s}h_{i,r}$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1},x^{\pm}_{j,s}]-[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{j,s+1}]=0\ (i\neq j,j\pm1)$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1},x^{\pm}_{i,s}]-[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{i,s+1}]=\pm(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x^{\pm}_{i,r}x^{\pm}_{i,s}+x^{\pm}_{i,s}x^{\pm}_{i,r})$$

$$[x^{+}_{i,r+1},x^{+}_{i-1,s}]-[x^{+}_{i,r},x^{+}_{i-1,s+1}]=-\varepsilon_1 x^{+}_{i,r}x^{+}_{i-1,s}-\varepsilon_2 x^{+}_{i-1,s}x^{+}_{i,r}$$

$$[x^{+}_{i,r+1},x^{+}_{i+1,s}]-[x^{+}_{i,r},x^{+}_{i+1,s+1}]=-\varepsilon_2 x^{+}_{i,r}x^{+}_{i+1,s}-\varepsilon_1 x^{+}_{i+1,s}x^{+}_{i,r}$$

$$[x^{-}_{i,r+1},x^{-}_{i-1,s}]-[x^{-}_{i,r},x^{-}_{i-1,s+1}]=\varepsilon_2 x^{-}_{i,r}x^{-}_{i-1,s}+\varepsilon_1 x^{-}_{i-1,s}x^{-}_{i,r}$$

$$[x^{-}_{i,r+1},x^{-}_{i+1,s}]-[x^{-}_{i,r},x^{-}_{i+1,s+1}]=\varepsilon_1 x^{-}_{i,r}x^{-}_{i+1,s}+\varepsilon_2 x^{-}_{i+1,s}x^{-}_{i,r}$$

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_{1-a_{ij}}}[x^{\pm}_{i,r_{w(1)}},[x^{\pm}_{i,r_{w(2)}},\dots,[x^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}},x^{\pm}_{j,s}]\dots]]=0\ (i\neq j)$$

但し

$$a_{ij}=\begin{cases}2 & i=j\text{ のとき}\\ -1 & i=j\pm1\text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とする．

**注意 5.2** 2 パラメータを持つ A 型アファインヤンギアンは Guay [G] によって導入された．そこで定義された代数は $\lambda,\beta$ をパラメータとし，生成元 $X^{\pm}_{i,r},H_{i,r}$ $(i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{Z}_{\geq0})$ を持つ．上で定義した $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ とは，パラメータの対応

$$\lambda=\hbar,\quad \beta=\frac{1}{2}\hbar-\frac{1}{4}N(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

と，$i\neq0$ に対して

$$\sum_{r\geq0}X^{\pm}_{i,r}u^{-r-1}=\sum_{r\geq0}x^{\pm}_{i,r}(u-\frac{1}{2}i(\varepsilon_1-\varepsilon_2))^{-r-1}$$

$$\sum_{r\geq0}H_{i,r}u^{-r-1}=\sum_{r\geq0}h_{i,r}(u-\frac{1}{2}i(\varepsilon_1-\varepsilon_2))^{-r-1}$$

及び $i=0$ に対して

$$\sum_{r\geq 0} X^{\pm}_{0,r} u^{-r-1} = \sum_{r\geq 0} x^{\pm}_{0,r} (u - \frac{1}{4} N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$
$$\sum_{r\geq 0} H_{0,r} u^{-r-1} = \sum_{r\geq 0} h_{0,r} (u - \frac{1}{4} N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$

という生成元の対応によって同型となる．

$N=2$ の場合にもアファインヤンギアンは定義されるが，定義関係式が定義 5.1 とは異なる．その場合にも以下で述べる定理 5.3 と定理 6.1 が成立することを期待しているが，定理 5.3 の証明に用いる Guay の結果が $N \geq 3$ でしか証明されていないため，チェックできていない．

Guay の生成元のうち $i=0$ を除いた $X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ $(i = 1, \ldots, N-1,\, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は A 型ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の定義関係式を満たすので，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の生成元と同一視して同じ記号を用いる．また，$X^{\pm}_{i,0}, H_{i,0}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ はアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の定義関係式を満たす．

Fock 空間 $F$ にはアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ とヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ が作用するので，二つの代数を含むアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ が作用することが期待される．実際，$q$-Fock 空間への量子トロイダル代数の作用は Varagnolo-Vasserot [VV1] と斉藤-竹村-Uglov [STU] によって既に知られており，その手法を修正することで次を示すことができる．

**定理 5.3**（[**K2**]） アファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ とヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の Fock 空間 $F$ への作用はアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ に拡張される．

## 6 箙多様体と Fock 空間

まず，$A^{(1)}_{N-1}$ 型箙多様体について簡単にまとめる．$I = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ を $A^{(1)}_{N-1}$ 型 Cartan 行列の添字集合とする．$\mathbf{v} = (v_i), \mathbf{w} = (w_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^I$ に対して，$\dim V_i = v_i$, $\dim W_i = w_i$ となる次数付きベクトル空間 $V$, $W$ を固定する．

$$\begin{aligned} M(\mathbf{v},\mathbf{w}) = &\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, V_{i+1}) \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, V_{i-1}) \\ &\oplus \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(W_i, V_i) \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W_i) \end{aligned}$$

とおく．$M(\mathbf{v},\mathbf{w})$ の元を，各成分ごとに $(B=(B_i),\bar{B}=(\bar{B}_i),a=(a_i),b=(b_i))$ とかく．モーメント写像 $\mu\colon M(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\bigoplus_{i\in I}\operatorname{End}(V_i)$ が

$$\mu((B,\bar{B},a,b))=\sum_{i\in I}\left(B_{i-1}\bar{B}_i-\bar{B}_{i+1}B_i\right)+\sum_{i\in I}a_ib_i$$

によって定義される．$V$ が零でない $(B,\bar{B})$ 不変部分空間で $\operatorname{Ker}b$ に含まれるものを持たないとき，$\mu^{-1}(0)$ の元 $(B,\bar{B},a,b)$ は安定であるという．$\mu^{-1}(0)^s$ を安定な元からなる $\mu^{-1}(0)$ の部分集合とすると，群 $G_{\mathbf{v}}=\prod_{i\in I}GL(V_i)$ の $\mu^{-1}(0)^s$ への作用は固定点を持たない．$\mu^{-1}(0)^s$ の $G_{\mathbf{v}}$ による商

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mu^{-1}(0)^s/G_{\mathbf{v}}$$

を箙多様体と呼ぶ．これは非特異な準射影的代数多様体となる．$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ にはトーラス $T=(\mathbb{C}^\times)^2$ が

$$(t_1,t_2)[B,\bar{B},a,b]=[t_1B,t_2\bar{B},t_1t_2a,b]$$

によって作用する．

以下では

$$w_i=\begin{cases}1 & i=0\text{ のとき}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

とし，$\mathfrak{M}(\mathbf{v})=\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ とかく．

$\mathfrak{M}(\mathbf{v})$ の $T$ 作用による固定点集合は $\{\lambda\in\mathcal{P}\mid\mathbf{v}(\lambda)=\mathbf{v}\}$ によって自然にパラメトライズできる．従って

$$\bigsqcup_{\mathbf{v}}\mathfrak{M}(\mathbf{v})^T\cong\mathcal{P}$$

となる．以下では二つの集合を同一視し，固定点を分割で表す．固定点 $\lambda$ の接空間 $T_\lambda\mathfrak{M}(\mathbf{v})$ は $T$ 加群として次のようになる．

$$T_\lambda\mathfrak{M}(\mathbf{v})=\bigoplus_{\substack{s\in\lambda\\ h_\lambda(s)\equiv 0\bmod N}}\left(t_1^{l_\lambda(s)+1}t_2^{-a_\lambda(s)}\oplus t_1^{-l_\lambda(s)}t_2^{a_\lambda(s)+1}\right)$$

但し $t_1,t_2$ は $T$ の自然な 1 次元表現である．

$H_*^T(\mathfrak{M}(\mathbf{v}))$ を $\mathbb{C}$ 係数の $T$ 同変 Borel-Moore ホモロジー群とする．$H_*^T(\mathfrak{M}(\mathbf{v}))$ は 1 点の同変コホモロジー環 $H_T^*(\mathrm{pt})=\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 上の加群となる．$\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ の商体による局所化

$$H_*^T(\mathfrak{M}(\mathbf{v}))\otimes_{\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]}\mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

を考え，すべての $\mathbf{v}$ に関する直和 $\bigoplus_{\mathbf{v}} H_*^T(\mathfrak{M}(\mathbf{v})) \otimes_{\mathbb{C}[\varepsilon_1,\varepsilon_2]} \mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ を $H$ とおく．$i\colon \mathfrak{M}(\mathbf{v})^T \to \mathfrak{M}(\mathbf{v})$ を埋め込みとし，$[\lambda] = i_*(1_\lambda) \in H_*^T(\mathfrak{M}(\mathbf{v}))$ とおく．局所化定理により，$\{[\lambda]\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ は $H$ の $\mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 基底をなす．$H$ 上の対称双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle_H$ を

$$\langle \alpha, \beta\rangle_H = (-1)^{(1/2)\dim\mathfrak{M}(\mathbf{v})} p_*(i_*^{-1}\alpha \cap i_*^{-1}\beta)$$

によって定める．ここで $p\colon \mathfrak{M}(\mathbf{v})^T \to \{\mathrm{pt}\}$ は 1 点への射影である．接空間の表示から次がわかる．

$$\langle [\lambda], [\mu]\rangle_H = \delta_{\lambda\mu} \prod_{\substack{s\in\lambda \\ h_\lambda(s)\equiv 0 \bmod N}} \bigl(\varepsilon_1(l_\lambda(s)+1) - \varepsilon_2 a_\lambda(s)\bigr)\bigl(\varepsilon_1 l_\lambda(s) - \varepsilon_2(a_\lambda(s)+1)\bigr)$$

この式と Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数のノルム公式を見比べると，

$$b'_\lambda = \left( \prod_{\substack{s\in\lambda \\ h_\lambda(s)\equiv 0 \bmod N}} \frac{1}{\varepsilon_1(l_\lambda(s)+1) - \varepsilon_2 a_\lambda(s)} \right) [\lambda]$$

のノルムは $P_\lambda$ のノルムと一致することがわかる．従って，$H$ と $F$ は基底の対応 $b'_\lambda \mapsto P_\lambda$ によって計量ベクトル空間として同型である．

$H$ にはアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ が作用し（Varagnolo [V]），基底 $\{[\lambda]\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ に関する生成元 $x_{i,r}^{\pm}, h_{i,r}$ の作用の公式を組合せ論的に書き下すことができる．その公式と定理 4.2 の式を見比べると，$H$ の基底 $\{b'_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ への作用と $F$ の基底 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{P}}$ への作用は，符号を除いて一致することがわかる．符号のずれを調整するために次のような量を導入する．$\lambda \in \mathcal{P}$ に対して $d$ を $l(\lambda) < Nd$ を満たす最小の奇数とし，

$$\varepsilon_\lambda = \#\{(a,b) \mid 1 \le a < b \le Nd,\ j(\lambda)_a \ge j(\lambda)_b\}$$

とおく．この $\varepsilon_\lambda$ を用いて

$$b_\lambda = (-1)^{\varepsilon_\lambda} b'_\lambda$$

とおけば，符号のずれが解消し次の定理を得る（詳しくは [K1, 5.2] を見よ）．

**定理 6.1（[K1], Theorem 5.8）** $H$ と $F$ の間の計量ベクトル空間の同型

$$b_\lambda = (-1)^{\varepsilon_\lambda} \left( \prod_{\substack{s\in\lambda \\ h_\lambda(s)\equiv 0 \bmod N}} \frac{1}{\varepsilon_1(l_\lambda(s)+1) - \varepsilon_2 a_\lambda(s)} \right) [\lambda] \mapsto P_\lambda$$

はアファインヤンギアンの表現としての同型を与える．

**注意 6.2**　• [K1] を書いたときは，Uglov のヤンギアン作用がアファインヤンギアンに拡張されること（本稿の定理 5.3）をチェックしていなかったので，[K1, Theorem 5.8] ではアファイン Lie 代数とヤンギアンの表現としての同型のみを主張している．アファインヤンギアンはこの二つの部分代数で生成されるので，アファインヤンギアンが作用することが分かればその作用と整合的であることは直ちに従う．

• 定理 6.1 は量子トロイダル代数に関する長尾の結果 [N] のアファインヤンギアン版である．

# 参考文献


[BBT] Alexander A. Belavin, Mikhail A. Bershtein, and Grigory M. Tarnopolsky, *Bases in coset conformal field theory from AGT correspondence and Macdonald polynomials at the roots of unity*, J. High Energy Phys. (2013), no. 3, 019, front matter+35pp.

[G] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.

[K1] Ryosuke Kodera, *Affine Yangian action on the Fock space*, arXiv:1506.01246.

[K2] 小寺 諒介, *Affine Yangian action on the Fock space*, RIMS 研究集会「表現論および関連する調和解析と微分方程式」報告集.

[L] Bernard Leclerc, *Fock space representations of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Geometric methods in representation theory, I, Sémin. Congr., vol. 24, Soc. Math. France, Paris, 2012, pp. 343–385.

[N] Kentaro Nagao, *K-theory of quiver varieties, q-Fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 3, 877–907.

[STU] Yoshihisa Saito, Kouichi Takemura, and Denis Uglov, *Toroidal actions on level 1 modules of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Transform. Groups **3** (1998), no. 1, 75–102.

[TU] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *Level-0 action of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ *on the q-deformed Fock spaces*, Comm. Math. Phys. **190** (1998), no. 3, 549–583.

[U] Denis Uglov, *Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and basic modules of the affine Lie algebra* $\hat{\mathfrak{sl}}_N$, Quantum many-body problems and representation theory, MSJ Mem., vol. 1, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998, pp. 183–241.

[V] Michela Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

[VV1] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), no. 1, 133–159.

[VV2] ———, *On the $K$-theory of the cyclic quiver variety*, Int. Math. Res. Not. (1999), no. 18, 1005–1028.

[Y] Shintarou Yanagida, *Singular vectors of $N = 1$ super Virasoro algebra via Uglov symmetric functions*, arXiv:1508.06036.