変形理論, ホモトピー代数と弦理論

京都大学 基礎物理学研究所　梶浦 宏成

March 10, 2006

概 要

変形量子化とは, ポアソン代数が与えられた時, それに付随したある非可換環を構成することである. その非可換環はもとのポアソン代数の可換な積構造の形式的な変形であり, 形式的変形パラメーターを零とおくとその可換環に一致するようにつくられる. ポアソン多様体上の変形量子化の存在は, M. Kontsevich によって肯定的に解決された [15]. その議論の特徴は, 変形量子化問題をホモトピー代数の枠組でとらえることにあったが, さらにその背後には弦理論の構造があった (cf. [4]). このような観点から, 弦理論の示唆するホモトピー代数構造とその変形理論への応用について, 主に [11, 12] に基づいて議論する.

1　変形理論とホモトピー代数

変形理論は一般に, ある次数付き微分リー環 (DGLA) L のホモトピー類によって記述される (Schlessinger-Shasheff [20] とその中の参考文献参照).

L を次数付きベクトル空間, $d: L \to L$ を微分 $d^2 = 0$ として, L が次数を保つ積構造 $\circ: L \otimes L \to L$ を持つとする. $p \in L$ による d の変形は

$$(d+p)^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad D(p) + \frac{1}{2}[p,p] = 0, \qquad d(p) := dp + pd. \tag{1}$$

と表される. 積 $\circ$ が結合的, あるいは少なくとも準リー (pre-Lie) 構造を持つ時, 積 $\circ$ に関する交換子 $[\ ,\ ]$ はリー積を定義し, $(L, D, [\ ,\ ])$ は DGLA を成し, (1) はその DGLA のモーラー・カルタン方程式（Maurer-Cartan equation）と呼ばれる.

注意 1.1 p は d と同じ次数を持つべきであるので, p の DGLA の次数は $\deg(p) = 1$ である.

つまり, 微分 d の変形は, DGLA のモーラー・カルタン方程式の解空間 (versal deformation と呼ばれる) $\mathcal{MC}(L)$ として定義された.

DGLA に対して定義されるゲージ変換は, ゲージ変換で移り合うものとして L の要素の間の同値関係 $\sim$ を定め, 特にゲージ変換は $\mathcal{MC}(L)$ の元を保つ. よって, $\mathcal{MC}(L)$ の同値関係 $\sim$ による商空間は well-defined である.

$$\mathcal{M}(L) := \mathcal{MC}(L)/\sim .$$

（微分 d の）変形のモジュライ空間はこの $\mathcal{M}(L)$ として定義される. 特に, $\mathcal{M}(L)$ は DGLA L のホモトピー同値類（一般にホモトピーリー代数 (L_∞ 代数)[16]）によらない. このように, 一般に変形理論は DGLA のホモトピー類によって制御される.

1.1 結合的代数 (A, m) の変形 (Gerstenhaber [5, 6])

A を $k(=\mathbb{C})$ 上のベクトル空間とする. $\mathrm{Hom}(A) = \mathrm{Hom}_k(A)$, $\mathrm{Hom}_k(A) := \{C : A^{\otimes k} \to A, \text{ multi-linear}\}$ として, $C \in \mathrm{Hom}_k(A)$, $C' \in \mathrm{Hom}_{k'}(A)$ に対して積 $C \circ C' \in \mathrm{Hom}_{k+k'-1}(A)$ を

$$\begin{aligned}
&C \circ C'(a_1, \cdots, a_{k+k-1'}) \\
&= \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r(k'-1)} C(a_1, \cdots, a_r, C'(a_{r+1}, \cdots, a_{r+k'}), a_{r+k'+1}, \cdots, a_{k+k'-1})
\end{aligned}$$

で定義する. これは非結合的であるが, その交換子

$$[C, C'] = C \circ C' - (-1)^{(k-1)(k'-1)} C' \circ C$$

は次数付リー積を定義する．この交換子は**ゲルステンハーバー括弧（Gerstenhaber bracket）**と呼ばれる．[5, 6]

これを使って, 実は代数 (A, m) が結合的であるという条件は

$$[m, m] = 0$$

と書ける．つまり,（$[\ ,\ ]$ のヤコビ律から）$D = [m,\ ] : \mathrm{Hom}_k(A) \to \mathrm{Hom}_{k+1}(A)$ は微分: $D^2 = 0$ となる．

さらに, 結合的な積 m の変形は

$$D(C) + \frac{1}{2}[C, C] = 0$$

を満たす $m + C$, $C \in \mathrm{Hom}_2(A)$ によって記述される．つまり, DGLA $(\mathrm{Hom}(A), D, [\ ,\ ])$ のモーラー・カルタン方程式によって記述される．

正確には, $\mathrm{Hom}_k(A)$ の DGLA としての次数は $k-1$ なので今 $\mathrm{Hom}_k(A) = \mathrm{Hom}_k^{k-1}(A)$ と書き直しておく．（つまり, $\deg(m) = 1$.）

注意 1.2 以上の議論を, $\mathrm{Hom}(A)$ を適切な部分リー代数に制限して考えると様々な具体的な問題が考えられる．特に, 多重微分作用素から成る多重線形写像に制限した時が変形量子化 [2, 3]（解説として [18]）となる．

1.2　一般化

ベクトル空間 A を次数付きベクトル空間 $V := \oplus_{r\in\mathbb{Z}} V^r$ に拡張する．この時, 多重線形写像として,

$$\mathrm{Hom}(V) = \oplus_{k,r}\mathrm{Hom}_k^r(V), \qquad \mathrm{Hom}_k^r(V) := \{C : V^{\otimes k} \to V,\ \text{multi-linear} \mid \deg(C) = r\},$$

つまり次数 $r\in\mathbb{Z}$ と $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が独立なものすべてを考える. 上の結合的代数は, $A=V^{-1}$, $r=k-1$ の場合に対応する.

今, 上のゲルステンハーバー括弧の自然な拡張としてリー括弧

$$[\ ,\ ]:\mathrm{Hom}_k^r(V)\otimes\mathrm{Hom}_{k'}^{r'}(V)\to\mathrm{Hom}_{k+k'-1}^{r+r'}(V)$$

が定義できる.

（$o_1,...,o_{k+k'-1}\in V$ として $[m,m']\in\mathrm{Hom}_{k+k'-1}^{r+r'}$ の定義は

$[m,m']=m\circ m'-(-1)^{r\cdot r'}m'\circ m$,

$m\circ m'(o_1,\cdots,o_{k+k'-1})=\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{r'(o_1+\cdots+o_i)}m(o_1,\cdots,o_i,m'(o_{i+1},\cdot\cdot,o_{i+k'}),o_{i+k'+1},\cdots,o_{k+k'-1})$.

て与えられる.）

この時, やはり $(\mathrm{Hom}(V),[\ ,\ ])$ は次数付きリー環を成す. [5, 6, 23]

さて, 結合代数の時と同様, 次数 1 の $m\in\oplus_k\mathrm{Hom}_k^1(V)$ なる元で

$$[m,m]=0$$

を満たすものを考えよう. 実はこの時, (A,m) は, もともと基点付きループ空間に定まる構造として導入されたホモトピー結合代数 (A_∞ 代数) [21, 22] を成す [23]. （**注意**: $m\in\oplus_k\mathrm{Hom}_k^1(V)$ は, $m_k\in\mathrm{Hom}_k^1(V)$ として $m=\oplus_{k\geq 0}m_k$ と書ける. 特に $m_0=0$ の (V,m) がもともと [21, 22] で定義された A_∞ 代数であり, $m_0\neq 0$ の時 (V,m) を弱 A_∞ 代数と呼んで区別することもある.）

そして, この A_∞ 構造 m の変形 $m+C$, $C\in\oplus_k\mathrm{Hom}_k^1(V)$ は再び DGLA $(\mathrm{Hom}(V),D=[m,\ ],[\ ,\ ])$ のモーラー・カルタン方程式によって記述される.（$\mathrm{Hom}_k^r(V)$ の DGLA の次数は r によって定義される.）

ここで, 以下のような一般的な問題が考えられる.

問題 1.1 このような代数に付随する構造の変形は何によって記述されるのであろうか?

（変形量子化の場合は, 結合的代数の変形はポアソン構造と '1 : 1' であった.）

さて, このような変形のモジュライ空間はホモトピー不変であるので, もし別のある L_∞ 代数 L から DGLA $(\mathrm{Hom}(V), D, [\ ,\ ])$ へホモトピー同値写像（L_∞ 写像で, コホモロジーに同型を誘導するもの）が存在すれば, その変形問題は L_∞ 代数 L についての問題に帰着できる. より一般に, もしある L_∞ 代数 L から DGLA $(\mathrm{Hom}(V), D, [\ ,\ ])$ への L_∞ 写像が存在すれば, $D = [m,\ ]$ のある変形は L_∞ 代数 L のモーラーカルタン方程式の解から構成できる. つまり, 全く異なる由来から定義される DGLA や L_∞ 代数の間にもし L_∞ 写像が存在すれば, その L_∞ 写像はそれらの DGLA や L_∞ 代数の間の驚くべき関係を与えることとなる.

一般にはこの L_∞ 写像の存在を示すのは非常に困難な問題である. しかし, L_∞ 写像の存在がある意味「保証」されているような DGLA と L_∞ 代数の組がある. 以下それについて説明する.

2　ホモトピー代数と弦理論

上で述べた, L_∞ 写像の存在が「保証」されている DGLA と L_∞ 代数の組を導く主なアイデアとなる弦理論の, ある側面からの「定義」から始めよう.

弦は 1 次元の物体であるが, その軌跡はリーマン面によって記述される. 弦理論において最も基本的な量は散乱振幅である. 散乱振幅は, リーマン面上の場の理論と, それに適した点付きリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化を決めることにより得られ, そのコンパクト化されたモジュライ空間上のある積分として与えられる. 最も一般の点付きリーマン面は, 種数, 境界 S^1 を複数持ち, リーマン面の内部及びその境界 S^1 上に点を持

つものであり, 内部, 境界上の点はそれぞれ閉弦, 開弦の状態の挿入に対応する. これらの散乱振幅から定まる代数構造は, 点付きリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化の stratification に付随した特別な性質, 一般に位相的オペラッドの構造に支配されている.

定義 2.1 (弦理論) 種数, 境界を持つ点付きリーマンのモジュライ空間のコンパクト化を一つ決め, そのコンパクト化されたモジュライ空間の成すオペラッドとその上の表現の組のことを弦理論と呼ぶ.

注意 2.1 特に, 場の理論としてリーマン面からある多様体 M への写像を場とするもの（シグマ模型）を考えると, それから得られるオペラッド上の表現は M の幾何の情報を持つこととなる.

さて, 前説の問題 1.1 に戻ろう.

A_∞ 代数 (V,m) は, A_∞ オペラッド $\mathcal{A}_\infty$ と呼ばれる次数付き微分オペラッド (DG オペラッド) の V 上の表現として得られる (cf. [19, 10]). つまり, DGLA $(\mathrm{Hom}(V), D, [\ ,\ ])$ によって制御される (V,m) の変形は, A_∞ オペラッド $\mathcal{A}_\infty$ の, 固定した V 上の表現の変形である.

一方, この A_∞ オペラッド $\mathcal{A}_\infty$ は, 点付きディスク（ディスクの境界上の点の配意空間）のモジュライ空間の適切なコンパクト化の持つ構造である. つまり, A_∞ 代数 (V,m) は tree の開弦として実現される (cf. [10, 17]).

さらに一方, 一般に tree の閉弦の理論として, 点付き S^2 のモジュライ空間の実コンパクト化は L_∞ オペラッド $\mathcal{L}_\infty$ の構造を持ち, その $\mathcal{L}_\infty$ の L 上の表現として L_∞ 代数 L が得られる [7, 13] (cf. [10]).

ここで, リーマン面上の場の理論を一つ固定して tree の開弦の理論と tree の閉弦の理論を考える. すると, 一般に我々は開弦に対して A_∞ 代数 (V,m) とその変形を記述する

DGLA $(\mathrm{Hom}(V), D, [\ ,\ ])$, 閉弦に対して L_∞ 代数 L が得られることが期待できる．さらに, tree の開弦と閉弦の混在した系（対応するリーマン面は内部と境界に点を持つディスク（+ 点付き S^2））を考えると, それに付随した, A_∞ 代数 (V, m) と L_∞ 代数 L を '含む' ような $L \oplus V$ 上の代数構造が得られる．これを Open-closed ホモトピー代数 (OCHA) と呼ぶ [11, 12]．さらに,

定理 2.1 ([11, 12]) OCHA $(L \oplus V)$ が与えられることと L_∞ 写像 $L \to (\mathrm{Hom}(V), D = [m,\ ], [\ ,\ ])$ が与えられることは等価である．

このことから, tree の open-closed の適切な弦理論を考えること, つまり tree の open-closed のリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化の成すオペラッド（open-closed オペラッド $\mathcal{OC}_\infty$ [11]）上の表現を与えることがある L_∞ 代数, DGLA とその間の非自明な L_∞ 写像の存在を保証することが分かった．

Kontsevich の変形量子化がこの描像の一つの例であり ([12]), さらに tree の閉弦の成す L_∞ 代数としては, 複素構造の（拡張）変形に付随する DGLA [1],（弦理論において B 模型と呼ばれる理論 (cf. [12])）, さらに generalized complex structure の変形に付随する DGLA [8] などを考えることができ, 対応する A_∞ 構造の変形の存在が保証される．

ミラー対称性などを扱う状況においては, tree の閉弦の成す L_∞ 代数は自明となり, つまり, 対応する A_∞ 構造の変形が非障害的となっている（[12] を見よ）．そのような状況においては, A_∞ 代数の変形は, 通常の幾何学の変形を記述する L_∞ 代数 L の理論の, 代数的, あるいはホモロジー理論的な記述とみることができる（例えば Kontsevich によるホモロジー的ミラー対称性 [14] を見よ）．（変形量子化の場合の $*$ 積のように）, このような A_∞ 代数の変形を具体的に記述することは現在とても興味深い問題の一つとなっている．

3 終わりに

本文では変形理論への応用の観点から OCHA の解説をした. OCHA の, 対応する点付きリーマン面のモジュライ空間のコンパクト化との関係については [10] で解説されている. そこではホモトピー代数の典型例である A_∞ 代数の, それと関係する A_∞ 空間, A_∞ オペラッドなどを含む解説に始まり, L_∞ 代数, OCHA について同様の解説がされている. さらに詳しい tree の open-closed のモジュライ空間のコンパクト化については [9] で議論されている.

このようなホモトピー代数と物理（弦理論）における弦の場の理論の間には密接な関係があり, 特に Zwiebach による open-closed の弦の場の理論 [24] と OCHA の関係については [12] で説明されている.

参考文献

[1] S. Barannikov and M. Kontsevich. Frobenius manifolds and formality of lie algebras of polyvector fields. `alg-geom/710032`, 1997.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures. *Ann. Physics*, 111(1):61–110, 1978.

[3] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. II. Physical applications. *Ann. Physics*, 111:111–151, 1978.

[4] A. Cattaneo and G. Felder. A path integral approach to the Kontsevich quantization formula. `math.QA/9902090`, 1999.

[5] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Ann. Math.*, 78:267–288, 1963.

[6] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. of Math.*, 79:59–103, 1964.

[7] V. Ginzburg and M. Kapranov. Koszul duality for operads. *Duke Math. J.*, 76:203–272, 1994.

[8] M. Gualtieri. Generalized complex geometry. Oxford University DPhil thesis, math.DG/0401221.

[9] E. Hoefel. Geometric aspects of OCHA. in preparation.

[10] H. Kajiura. On homotopy algebras and their applications to string theory. talk given at NIT (2005), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/˜kajiura/research.html.

[11] H. Kajiura and J. Stasheff. Homotopy algebras inspired by classical open-closed string field theory. preprint, 2004. `math.QA/0410291` , to appear in Comm. Math. Phys.

[12] H. Kajiura and J. Stasheff. Open-closed homotopy algebra in mathematical physics. *J. Math. Phys.*, 47:023506, 2006.

[13] T. Kimura, J. Stasheff, and A. A. Voronov. On operad structures of moduli spaces and string theory. *Commun. Math. Phys.*, 171:1–25, 1995. hep-th/9307114.

[14] M. Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, volume 184, pages 120–139. Birkhäuser, 1995.

[15] Maxim Kontsevich. Deformation quantization of Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 66(3):157–216, 2003.

[16] T. Lada and J.D. Stasheff. Introduction to sh Lie algebras for physicists. *Intern'l J. Theor. Phys.*, 32:1087–1103, 1993.

[17] M. Herbst C. I. Lazaroiu and W. Lerche. Superpotentials, a(infinity) relations and WDVV equations for open topological strings. *JHEP*, 0502:071, 2005.

[18] 前田 吉昭, 梶浦 宏成, （高村亮 記）, "変形量子化入門," 東京大学数理科学セミナリーノート No. 20, 178pp, 2002 年 5 月.

[19] Martin Markl, Steve Shnider, and Jim Stasheff. *Operads in Algebra, Topology and Physics*, volume 96 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[20] M. Schlessinger and J. Stasheff. Rational homotopy theory – obstructions and deformations. In *Proc. Conf. on Algebraic Topology, Vancouver*, pages 7–31, 1977. LMM 673.

[21] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:293–312, 1963.

[22] J. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108:313–327, 1963.

[23] J. D. Stasheff. The intrinsic bracket on the deformation complex of an associative algebra. *JPAA*, 89:231–235, 1993. Festschrift in Honor of Alex Heller.

[24] B. Zwiebach. Oriented open-closed string theory revisited. *Ann. Phys.*, 267:193–248, 1998. `hep-th/9705241`.