On algebraic models for morse homotopy and their noncommutative deformations

梶浦宏成　(京都大学 · 数理解析研究所)

２つのカラビヤウ多様体の間の双対性であるミラー対称性のホモロジー的, あるいは圏論的設定として Kontsevich はホモロジー的ミラー対称性予想を定式化した [17]. それは, カラビヤウ多様体 M の（複素化された）シンプレクティック構造 ω に対して定まる深谷圏と, ミラー双対なカラビヤウ多様体 $\hat{M}$ の複素構造に対して定まる正則ベクトル束, あるいはより一般に連接層の成す圏の, A_∞ 圏としての同値性として定式化される. Kontsevich-Soibelman [18], Fukaya [6] ではこのホモロジー的ミラー対称性予想を, Strominger-Yau-Zaslow (SYZ) による提案, つまりミラー対称性をカラビヤウ多様体 M, $\dim_{\mathbb{C}}(M)=n$ を（一般には特異ファイバーを持つ）トーラスファイブレーション $M\to B$ として記述し, そのファイバー T^n の双対トーラス（弦理論における T 双対）としてミラー対称性を理解しようという提案に基づいたアプローチによって議論した.

これらのアプローチにおいて重要な道具/事実のひとつとして, シンプレクティック側が $M=T^*B$ の場合の深谷 A_∞ 圏と, Fukaya-Oh [7] によるモースホモトピー論において定められる A_∞ 圏の等価性がある. これを, T^*B のファイバー $\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ で割ることによりトーラスファイブレーションに拡張する. さらに, [18] ではこのモースホモトピー A_∞ 圏に対して, それと A_∞ 圏として等価なある次数つき微分圏 (DG 圏) を考えた. 特に, その DG 圏は, B 上の微分形式から構成され, つまり, 幾何学的に定式化されるモースホモトピー論の代数的模型とみなすことができる. この DG 圏は, ミラー双対側の複素多様体上の正則ベクトル束, あるいは連接層のなす DG 圏と' 同じ形 'をしているため, この DG 圏とモースホモトピー A_∞ 圏の等価性がホモロジー的ミラー対称性の鍵であると言える.

この DG 圏とモースホモトピー A_∞ 圏の等価性は, Gugenheim, Lambe, Stasheff, Kadeishivili, Huebschmann らによって発展させられた A_∞ 構造に対するホモロジー的摂動理論（Homological perturbation theory, [12] の参考文献など参照）によって関係付けられる. 特に, その DG 圏における鎖複体に対して, 別の複体と適切なホモトピー作用素を選ぶことにより, その新しい複体の上に A_∞ 構造が誘導される. Kontsevich-Soibelman [18] のアイデアは, その A_∞ 構造がモースホモトピーに対して定義される A_∞ 構造と一致することであった.

一方, 非可換幾何学において, 非可換空間というものを理解するために, まず非可換環を考え, それをある非可換空間上の関数環とみなす. つまり, 空間を非可換化するにあたり, まずはその上の何らかの代数構造が必要とされる. このことから, 深谷圏, あるいはモースホモトピー A_∞ 圏を非可換化するにあたり, まずそれと等価な代数的模型である DG 圏を非可換化することを考える. しかし, そのような代数の非可換化で終わることなく, この場合の非可換変形を幾何学にまで戻って理解したい. それは例えば適切なホモトピー作用素を選び, ホモロジー的摂動理論によって誘導される A_∞ 構造として非可換変形されたホースホモトピー論, あるいは深谷圏を定式化することによって達成されるかもしれない. このようなひとつの目標に関して, 本稿ではトーラスファイブレーションがトーラス（アーベル多様体）の場合, あるいはその被覆空間の $\mathbb{R}^{2n}$ の場合についてできている部分について紹介する.

圏の非可換変形を考える動機としては, Barannikov-Kontsevich [1] による複素構造の拡張変形空間というもの（あるいは Gualtieri [9]）がある. その拡張変形は, A_∞ 圏の変形と一対一であり, むしろ拡張変形が A_∞ 圏の変形によって表現されるであろうと信じられている. しかし,

本原稿で取り扱う非可換変形は, A. Schwarz による非可換複素トーラス [21] に基づいたものであり, [1, 9] などの設定との正確な関係は分かっていない.

1 A_∞-structure

まず, これらの議論の枠組みである A_∞ 圏の定義から始める.

定義 1 (A_∞ 代数 (Stasheff [22])) $(V, \mathfrak{m} := \{m_k\}_{k\geq 1})$ が A_∞ 代数であるとは, $\mathbb{Z}$ (又は $\mathbb{Z}_2$) 次数つきベクトル空間 $V = \oplus_{r\in\mathbb{Z}} V^r$ とその上の次数 $(2-n)$ の多重線形写像 $m_n : V^{\otimes n} \to V$, $n = 1, 2, ...$ の集まりであって, 以下の関係式

$$0 = \sum_{k+l=n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \pm\, m_k(v_1, \cdots, v_j, m_l(v_{j+1}, \cdots, v_{j+l}), v_{j+l+1}, \cdots, v_n)\ , \tag{1}$$

を $n = 1, 2, ...$ について満たすものとする. ここで, $v_1, ..., v_n$ はそれぞれ次数について斉次の V の元とし, それらの次数を $|v_i|$, $i = 1, ..., n$ と表すと, m_n の次数が $(2-n)$ であるとは, $m_n(v_1, ..., v_n)$ の次数が $(2-n) + |v_1| + \cdots + |v_n|$ であることを意味する.

関係式の中の符号 $\pm$ など, 符号の問題については適切に定義/決定されるが本稿では省略する ([13] などを見よ).

$m_1 = d$, $m_2 = \cdot$ と書き直して, 関係式 (1) を $n = 1, 2, 3$ の場合について書き下してみると以下のようになる. $x, y, z \in V$ として,

$$\begin{aligned} i) &\quad d^2 = 0\ , \\ ii) &\quad d(x\cdot y) = d(x)\cdot y + (-1)^{|x|} x\cdot d(y)\ , \\ iii) &\quad (x\cdot y)\cdot z - x\cdot(y\cdot z) = d(m_3)(x, y, z). \end{aligned}$$

$i)$ は d が微分を定義し, (V, d) が鎖複体をなすことを意味する. そして $ii)$ より, 微分 d が積 $\cdot$ に対してライプニッツ則を満たし, $iii)$ より積 $\cdot$ がホモトピー結合的である. ここで $d(m_3) := m_1 m_3 + m_3(m_1 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes m_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes m_1)$ とし, m_3 が２種類の積 $(x\cdot y)\cdot z$, $x\cdot(y\cdot z)$ の間のホモトピーを定義する. （高次の積 $m_4, m_5, ...$ は高次のホモトピーと呼ばれる.）特に, $m_3 = 0$ の時, 積 $\cdot$ は結合的となり, $m_3 = m_4 = \cdots = 0$ となる A_∞ 代数を次数つき微分環（DG 環）と呼ぶ.

二つの A_∞ 代数が与えられた時, その間の写像として自然な定義がある.

定義 2 (A_∞ 写像) $(V, \mathfrak{m})$, $(V', \mathfrak{m}')$ を二つの A_∞ 代数とする. このとき, 次数 $(1-k)$ の多重線形写像 $f_k : V^{\otimes k} \to V'$, $k \geq 1$ であって以下の関係式

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_{k_1+\cdots+k_n=n} \pm m_i(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_i})(v_1, ..., v_n) \\ &= \sum_{i+1+j=k} \sum_{i+l+j=n} \pm f_k(\mathbf{1}^{\otimes i} \otimes m_l \otimes \mathbf{1}^{\otimes j})(v_1, ..., v_n) \end{aligned} \tag{2}$$

を $n = 1, 2, ...$ について満たすものを A_∞ 写像 $\mathfrak{f} := \{f_k\}_{k\geq 1} : (V, \mathfrak{m}) \to (V', \mathfrak{m}')$ と呼ぶ.

$n = 1$ についての上の関係式より, $f_1 : V \to V'$ は鎖複体 $f_1 : (V, \mathfrak{m}) \to (V', \mathfrak{m}')$ をなす.

定義 3 A_∞ 写像 $\mathfrak{f}:(V,\mathfrak{m})\to(V',\mathfrak{m}')$ であって, $f_1:(V,m_1)\to(V',m_1')$ が二つの鎖複体のコホモロジーの間の同型を誘導する時, $\mathfrak{f}$ を A_∞ 擬同型写像と呼ぶ.

A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f}:(V,\mathfrak{m})\to(V',\mathfrak{m}')$ に対して, 常に逆の A_∞ 擬同型写像 $\mathfrak{f}:(V',\mathfrak{m}')\to(V,\mathfrak{m})$ が存在するため（例えば [12]）, A_∞ 擬同型写像は A_∞ 代数の間の（ホモトピー）同値を定義する.

我々に必要なのは, このようなホモトピー代数の枠組みの圏版である.

定義 4 (A_∞ 圏 [3]) A_∞ 圏 $\mathcal{C}$ とは, 対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})=\{a,b,\cdots\}$, 任意の二つの対象に対して, $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間 $V_{ab}:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ があり, 次数 $(2-n)$ の多重線形写像 m_n の集まり

$$\mathfrak{m}:=\{m_n:V_{a_1a_2}\otimes\cdots\otimes V_{a_na_{n+1}}\to V_{a_1a_{n+1}}\}_{n\geq 1}$$

が A_∞ 構造を定める, つまり A_∞ 代数の関係式 (1) を満たすものとする.

特に, $m_3=m_4=\cdots=0$ の時, $\mathcal{C}$ を DG 圏と呼ぶ.

定義 5 (A_∞ 関手) A_∞ 圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ に対して, $\mathfrak{f}:=\{f,f_1,f_2,...\}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ が A_∞ 関手であるとは, 対象の間の写像 $f:\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\to\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ と, 次数 $(1-k)$ の多重線形写像

$$f_k:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a_1,a_2)\otimes\cdots\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a_k,a_{k+1})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(f(a_1),f(a_{k+1}))$$

の集まりで A_∞ 写像の定義式 (2) を満たすものとする. 特に, $f:\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\to\mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ が双射で, 任意の $a,b\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し $f_1:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(f(a),f(b))$ がコホモロジーの間の同型を誘導する時, その A_∞ 関手をホモトピー同値と呼ぶ.

2 深谷圏とその deRham 模型

2.1 $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^{2n}$ の場合

まず, $\mathbb{R}^2$ 上の深谷 A_∞ 圏を部分的に, 以下の条件 1, 2 によって定義する.

正の整数 N を固定し, $\mathbb{R}$ 上の N 個の２次以下の関数の組 $\{f_1,...,f_N\}$ を考える. （A_∞ 関手の f_k とは関係ない. ）f_a, $a=1,...,N$ はそれぞれ

$$L_a: y=t_ax+s_a\ , \qquad t_a,s_a\in\mathbb{R}$$

によって, 座標を (x,y) とする $\mathbb{R}^2$ の中の直線を定義する. このような N 個の直線の組で, 以下の（多少テクニカルな）条件を満たすものを $\mathfrak{F}_N:=\{f_1,...,f_N\}$ とおく.

- 任意の異なる $a,b\in\{1,...,N\}$ に対し, $t_a\neq t_b$.
- どの３つ以上の直線も $\mathbb{R}^2$ の中の一点で交わることはない.

以下, f_a のラベルの集合 $\{1,...,N\}$ と $\mathfrak{F}_N$ を同一視する.

条件 1 任意の異なる $a,b\in\mathfrak{F}_N$ に対し, 次数付きベクトル空間 V_{ab} を

- ◦ $t_a<t_b$ の時は $V_{ab}^0=\mathbb{R}\cdot[v_{ab}]$, $V_{ab}^1=0$,
- ◦ $t_a>t_b$ の時は $V_{ab}^0=0$, $V_{ab}^1=\mathbb{R}\cdot[v_{ab}]$

と定める．ここで，$[v_{ab}]$ は f_a と f_b によって定められる２つの直線の交点 $v_{ab}(=v_{ba})$ によってラベルされた次数付きベクトル空間の基底とする．

条件 2 次に，$n\geq 2$ を固定し，互いに異なる $\mathfrak{F}_N$ の元 $a_1,...,a_{n+1},a_{n+2}=a_1\in\mathfrak{F}_N$

に対して次数 $(2-n)$ の多重線形写像 $m_n: V_{a_1a_2}\otimes\cdots\otimes V_{a_ka_{k+1}}\to V_{a_1a_{k+1}}$ を以下で定義する:

$$m_n([v_{a_1a_2}],...,[v_{a_na_{n+1}}])=c_{a_1\cdots a_{n+1}}[v_{a_1a_{n+1}}]\in V_{a_1a_{n+1}},\qquad c_{a_1\cdots a_{n+1}}\in\mathbb{R}.$$

ここで，構造定数 $c_{a_1\cdots a_k}$ は，もし頂点 $\vec{v}:=(v_{a_1a_2},...,v_{a_ka_{k+1}})$ が時計回りに凸 $(n+1)$ 角形を成す時，$Area(\vec{v})$ をその $(n+1)$ 角形の面積として，

$$c_{a_1\cdots a_k}=\pm e^{-Area(v)}$$

と定義し（図 1; 符号については [16]），そうでない場合は $c_{a_1\cdots a_k}=0$ とおく．

また，任意の $a\neq b$ に対し，$m_1: V_{ab}\to V_{ab}$ を $m_1=0$ とおく．

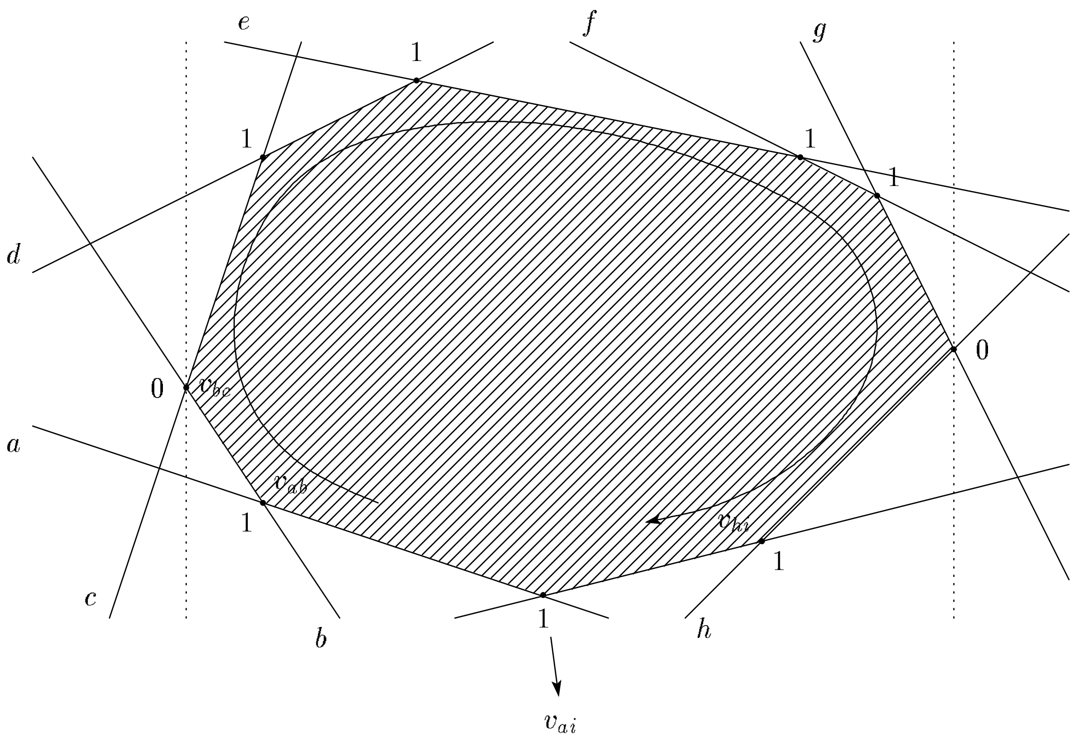

図 1: $m_8(v_{ab},v_{bc},v_{cd},v_{de},v_{ef},v_{fg},v_{gh},v_{hi})$ に関する図．$[v_{ab}],[v_{bc}],...,[v_{hi}],[v_{ia}]$ に，対応する次数（0 又は 1）を表示した．（これより，m_n の次数が $(2-n)$ であることと，頂点 $v_{ab},...$ が凸多角形を成すことの対応が分かる．）

一方，同じ対象の集合 $\mathfrak{F}_N$ を持つ DG 圏 $\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R},\mathfrak{F}_N)$ を以下で定義する．

定義 6 ($\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R},\mathfrak{F}_N)$)

- 対象の集合: $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R},\mathfrak{F}_N))=\mathfrak{F}_N$;
- 任意の $a,b\in\mathfrak{F}_N$ に対し，次数付きベクトル空間: $\mathrm{Hom}(a,b)=\oplus_{\nu=0,1}\Omega^\nu_{ab}(\mathbb{R})$, $\Omega^0_{ab}:=\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\Omega^1_{ab}:=\mathcal{S}(\mathbb{R})\cdot dx$, ここで，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ はシュワルツ関数の空間とし，dx は $\mathbb{R}$ 上の１形式の基底;

◦ 微分 $d_{ab}:\Omega^0_{ab}\to\Omega^1_{ab}$: $d_{ab}:=d-df_{ab}\wedge$, ここで d は外微分作用素で, $f_{ab}:=f_a-f_b$;

◦ 積 $\Omega^{\nu_{ab}}_{ab}\otimes\Omega^{\nu_{bc}}_{bc}\to\Omega^{\nu_{ab}+\nu_{bc}}_{ac}$: 微分形式の外積 $\wedge$.

定理 7 ([16]) ある A_∞-category $\mathcal{C}(\mathfrak{F}_N)$ で, 以下の条件を満たすものが存在する:

◦ $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}(\mathfrak{F}_N))=\mathfrak{F}_N$;

◦ 任意の $a\neq b\in\mathfrak{F}_N$ に対し, 射の空間 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathfrak{F}_N)}(a,b)$ が条件 1 を満たす;

◦ $\mathcal{C}(\mathfrak{F}_N)$ の A_∞ 構造 $\{m_k\}_{k\geq 1}$ が条件 2 を満たす;

◦ $\mathcal{C}(\mathfrak{F}_N)$ が $\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R},\mathfrak{F}_N)$ とホモトピー同値である.

この証明は, ホモロジー的摂動理論（[12] の参考文献）と Harvey-Lawson[10] の議論を組み合わせるという Kontsevich-Soibelman [18] のアイデアに基づいた議論によって得られ, ホモロジー的ミラー対称性の本質的な部分を明快に理解できる楽しい部分であるがここでは省略する [16].

この $\mathbb{R}^2$ の場合の高次元化として $\mathbb{R}^{2n}$ の場合について同様のことを考えることができる. この時, $\mathbb{R}^n$ の座標を $(x^1,...,x^n)$ とし, $(x^1,...,x^n)$ の二次以下の, その二次の部分が対称な多項式 f_a, $a=1,...,N$ をとり, それらを対象とする DG 圏 $\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R}^n,\mathfrak{F}_N)$ は, 射の空間を $\mathrm{Hom}(a,b):=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\langle dx^1,...,dx^n\rangle$, 積を外積, 微分を $d_{ab}=d-df_{ab}\wedge$ で与えることにより構成される. それに対して, ホモロジー的摂動理論を適応することにより直接得られるものは $\mathbb{R}^n$ 上のウェイト付きホースホモトピー A_∞ 圏と呼ぶべきものであり（[18] を見よ）, それと $\mathbb{R}^{2n}$ 上に定義される深谷圏の一致（ホモトピー同値より強く, 同型）が示せる. この時, f_a に対応する深谷圏の対象は, $y^i=\partial f_a/\partial x^i$ によって定義される, 座標を $(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)$ とする $\mathbb{R}^{2n}$ の中の n 次元アファイン空間であり, $\mathbb{R}^{2n}$ 上のシンプレクティック形式 $\omega=\sum_{i=1}^n dx^i\wedge dy^i$ に関するラグランジアン部分多様体とみなされる.

2.2 可換, 非可換トーラスの場合

次に, この DG 圏 $\mathcal{C}_{deRham}(\mathbb{R}^n,\mathfrak{F}_N)$ の T^{2n} の場合への拡張を考えたい. これを, そうしてできるべき DG 圏と（正準的に）同型な, ミラー双対な複素トーラス $\hat{T}^{2n}$ 上の正則直線束の成す DG 圏を非可換トーラスの枠組みで, その非可換性をゼロとおいたものとして構成し, そのあと実際に非可換化した場合についてコメントする.

d 次元非可換トーラス $\mathcal{A}^d_\theta$ はユニタリーな生成子 $U_1,\cdots,U_d$ と関係式

$$U_iU_j=e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta_{ij}}U_jU_i\ ,\qquad \theta_{ij}=-\theta_{ji}\in\mathbb{R}\ ,\qquad i,j=1,\cdots,d \tag{3}$$

によって定義される. 一般の $\mathcal{A}^d_\theta$ の元は $\sum_{(i_1,...,i_d)\in\mathbb{Z}^d}u_{i_1\cdots i_d}U_1^{i_1}\cdots U_d^{i_d}$ と表されるが, その係数 $\{u_{i_1\cdots i_d}\in\mathbb{C}\}$ はシュワルツ空間 $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ の元とする.

ここで $\theta=0$ とおき, $2n$-次元の（可換）トーラス $\mathcal{A}^{2n}:=\mathcal{A}^{2n}_{\theta=0}$ を考える. つまり, $\mathcal{A}^{2n}$ は $2n$ 次元の（可換）トーラス上の関数環とみなされる.

トーラス上のベクトル束として, ハイゼンベルグ加群と呼ばれる以下のような $\mathcal{A}^{2n}$ 上の有限生成射影加群を考えよう.

非退化対称行列 $A_a\in Mat_n(\mathbb{Z})$ を固定し, $\mathcal{A}^{2n}$ 上の加群を

$$E_{A_a}:=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{Z}^n/A_a\mathbb{Z}^n))$$

で定義する．ここで, $\mathcal{A}^{2n}$ の（左）作用は, 生成子の $\xi_a \in E_{A_a}$ への作用

$$\begin{aligned} (U_i\xi_a)(x;\mu) &= e^{2\pi\sqrt{-1}(x_i+(A_a^{-1}\mu)_i))}\xi_a(x;\mu)\ , \\ (U_{n+i}\xi_a)(x;\mu) &= \xi_a(x+A_a^{-1}t_i;\mu-t_i)\ , \qquad i=1,\cdots,n\ , \end{aligned} \tag{4}$$

によって定義する．ここで, $x := (x_1\cdots x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ (^{t} は転置) とし, $\mu \in \mathbb{Z}^n/A_a\mathbb{Z}^n$, また $t_i \in \mathbb{R}^n$ は $(t_1\cdots t_n) = \mathbf{1}_n$ によって定義する．

ハイゼンベルグ加群は定数曲率接続を持つことが知られている．E_{A_a} 上には定数曲率接続 $\nabla_a := \{\nabla_{a,i} : E_{A_a} \to E_{A_a}\}_{i=1,\cdots,2n}$,

$$\nabla_{a,i} := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla_{a,i+n} = -2\pi\sqrt{-1}(A_a x)_i, \qquad i=1,...,n$$

が定まる．この曲率 $F_a := \{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\nabla_{a,i},\nabla_{a,j}]\}_{i,j=1,\cdots,2n}$ は

$$F_a := \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & A_a \\ -A_a & \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

（定数）となる．この E_{A_a} とその上の接続 ∇_a の組を $E_a := (E_{A_a},\nabla_a)$ とする．

今, 二つの定数曲率接続付きのハイゼンベルグ加群 E_a, E_b で $A_{ab} := A_b - A_a$ が非退化なものが与えられているとする．このとき, $\mathrm{Hom}(E_a,E_b)$ を再びシュワルツ空間 $\mathrm{Hom}(E_a,E_b) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{Z}^n/A_{ab}\mathbb{Z}^n))$ として定義する．任意の元 $\xi_{ab} \in \mathrm{Hom}(E_a,E_b)$ に対し, $\mathcal{A}^{2n}$ の左作用, 右作用は, それぞれその生成子を $\{U_i\}_{i=1,...,2n}$, $\{Z_i\}_{i=1,...,2n}$ として,

$$\begin{aligned} (U_i\xi_{ab})(x;\mu) &= e^{2\pi\sqrt{-1}(x_i+(A_{ab}^{-1}\mu)_i))}\,\xi_{ab}(x;\mu)\ , \qquad (U_{n+i}\xi_{ab})(x;\mu) = \xi_{ab}(x+A_{ab}^{-1}t_i;\mu-t_i)\ , \\ (\xi_{ab}Z_i)(x;\mu) &= \xi_{ab}(x;\mu)\,e^{2\pi\sqrt{-1}(x_i+(A_{ab}^{-1}\mu)_i))}\ , \qquad (\xi_{ab}Z_{n+i})(x;\mu) = \xi_{ab}(x+A_{ab}^{-1}t_i;\mu-t_i)\ , \end{aligned}$$

で与える． ここで $\mu \in \mathbb{Z}^n/A_{ab}\mathbb{Z}^n$ とした． この上に定数曲率接続 $\nabla_{ab,i} : \mathrm{Hom}(E_a,E_b) \to \mathrm{Hom}(E_a,E_b)$, $i=1,\cdots,2n$ が ∇_a, ∇_b から自然に誘導される:

$$\nabla_{ab,i} := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nabla_{a,i+n} = -2\pi\sqrt{-1}(A_{ab}x)_i, \qquad i=1,...,n$$

このような $E_a, E_b, ...$ の間に, さらにある双線形写像 $m : \mathrm{Hom}(E_a,E_b)\otimes\mathrm{Hom}(E_b,E_c) \to \mathrm{Hom}(E_a,E_c)$ で結合的なものが定まる．特に, 最も一般的な,A_a, A_b, A_c の内のすべての二つの差が非退化な時は, その双線形写像 m は $\xi_{ab} \in \mathrm{Hom}(E_a,E_b)$, $\xi_{bc} \in \mathrm{Hom}(E_b,E_c)$ に対し

$$m(\xi_{ab},\xi_{bc})(x,\rho) = \sum_{u\in\mathbb{Z}^n}\xi_{ab}(x+A_{ab}^{-1}(u-A_{bc}A_{ac}^{-1}\rho),-u+\rho)\cdot\xi_{bc}(x-A_{bc}^{-1}(u-A_{bc}A_{ac}^{-1}\rho),u) \tag{6}$$

で与えられる．

これらを $\hat{T}^{2n}$ の直線束とその間の写像とみなし, 次にこのトーラス $\hat{T}^{2n}$ を n 次元 複素トーラス $\hat{T}^{2n} := \mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n\oplus\sqrt{-1}\mathbb{Z}^n)$ と見よう．つまり, $\mathcal{A}^{2n}$ の生成子 U_i, $i=1,...,2n$ の添え字 i に対して, $\hat{T}^{2n}$ の被覆空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の座標を x^i, $i=1,...,n$, $\hat{y}^{i-n}$, $i=n+1,...,2n$ とし, $\hat{T}^{2n}$ の複素構造を $z^i = x^i + \sqrt{-1}\hat{y}^i$, $i=1,...,n$ で与えることに相当することを考える．$E_a = (E_{A_a},\nabla_a)$ に正則構造 $\bar{\nabla}_{a,i} : E_{A_a} \to E_{A_a}$, $i=1,\cdots,n$ を

$$\bar{\nabla}_{a,i} = \nabla_{a,i} + \sqrt{-1}\nabla_{a,n+i}$$

で定める．実際 $[\bar\nabla_{a,i},\bar\nabla_{a,j}]=0$ より，$\bar\nabla_{a,i}(\xi_a)=0,\ i=1,...,n$ によって E_{A_a} の正則断面が定義できる．これより E_a,E_b に対し，正則構造 $\bar\nabla_{ab,i}:\mathrm{Hom}(E_a,E_b)\to\mathrm{Hom}(E_a,E_b),\ i=1,\cdots,n$ が誘導される:

$$\bar\nabla_{ab,i}:=\nabla_{ab,i}+\sqrt{-1}\nabla_{ab,n+i}\ ,\qquad i=1,\cdots,n\ .$$

この正則ハイゼンベルグ加群の，$T^{2n}=\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ 上の正則ベクトル束の切断の空間との対応は以下のように与えられる（[15] を見よ）．$\hat T^{2n}$ 上の，(5) 式で与えられた曲率を持つベクトル束の断面の一般形が

$$\tilde\xi_a(x,y):=\sum_{w\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^n/A_a\mathbb{Z}^n}\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\hat y^t\left(-A_a\left(x+w\right)+\mu\right)\right)\xi_a^\mu\left(x+w-A_a^{-1}\mu\right)\ ,\ \ \xi_a^\mu\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

で与えられる．つまり，$\xi_a^\mu(x)=:\xi_a(x,\mu),\ \xi_a\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\otimes(\mathbb{Z}^n/A_a\mathbb{Z}^n))=E_{A_a}$ とし，上の式における $\tilde{}$ は同型射$\tilde{}$: $E_{A_a}\to\tilde E_{A_a},\ \xi_a\mapsto\tilde\xi_a$ と見ることができる．これと両立する定数曲率接続 $\{\nabla_{a,i}:\tilde E_{A_a}\to\tilde E_{A_a}\}_{i=1,\cdots,2n}$ は

$$\nabla_{a,i}:=\frac{\partial}{\partial x^i}+2\pi\sqrt{-1}(A_a\hat y)_i,\quad \nabla_{a,i+n}=\frac{\partial}{\partial\hat y^i},\qquad i=1,...,n$$

で与えられる．そして，正則直線束の切断が $\nabla_{a,i}(\tilde\xi_a)=0,\ i=1,...,n$ によって定義される．

一方，非可換トーラスにおけるハイゼンベルグ加群による正則ベクトル束の記述の技術的に便利な点は，それがすでにミラー双対なシンプレクティックトーラス上の深谷圏の deRham 模型とすでにほぼ同じ形をしていることである．実際，$E_a,E_b,E_c,...$ を対象とし，E_a,E_b に対し，次数付きベクトル空間を V_{ab} を，次数１の生成子 $d\bar z^1,...,d\bar z^n$ で張られるグラスマン代数 $\Lambda:=\langle d\bar z^1,...,d\bar z^n\rangle$ を $\mathrm{Hom}(E_a,E_b)$ に $\otimes_{\mathbb{C}}$ することによって定め，微分 $d_{ab}:V_{ab}\to V_{ab}$ を $d_{ab}:=\sum_{i=1}^n d\bar z^i\bar\nabla_{ab,i}$，積 $m:V_{ab}\otimes V_{bc}\to V_{ac}$ を，$m:\mathrm{Hom}(E_a,E_b)\otimes\mathrm{Hom}(E_b,E_c)\to\mathrm{Hom}(E_a,E_c)$ を Λ 上の外積によって自然に持ち上げたものとして定義することによって，DG 圏を得ることができる [14].

そして，$f_a:=2\pi x^tA_ax,\ f_{ab}:=f_a-f_b$ とおくことにより，微分 $d_{ab}:V_{ab}\to V_{ab}$ は $d_{ab}=d-df_{ab}\wedge$ と表される．ここで $d:=\sum_{i=1}^n d\bar z^i(\partial/\partial x^i)$ としたが，代数的には純粋に $d\bar z^i$ を dx^i と読みかえ，$\mathbb{R}^n$ 上の微分形式の外微分とみなせばよい．対応する深谷圏は，この $\mathbb{R}^n$ の余接空間 $T^*\mathbb{R}^n\ \simeq\ \mathbb{R}^{2n}$ を被覆空間とする $2n$ 次元シンプレクティックトーラス T^{2n} 上定義され，$\pi:\mathbb{R}^{2n}\to T^{2n}$ をその自然な射影とし，$(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)$ を $\mathbb{R}^{2n}$ の座標とすると，E_a に対応する対象は，$y^i=\partial f_a/\partial x^i,\ i=1,...,n$ によって定義される $\mathbb{R}^{2n}$ の中の n 次元アファイン部分空間の π による射影によって得られる n 次元部分トーラスである．この T^{2n} 上の議論をその被覆空間 R^{2n} 上で記述することは，大雑把に言うと前節の $\mathbb{R}^{2n}$ の議論と比べて $\pi^{-1}\circ\pi$ の操作の分異なり，そこに注意すると，自然に T^{2n} の場合の deRham 模型，あるいはそれと等価な上で構成された $\hat T^{2n}$ 上の DG 圏の（射の空間とその合成の）定義にたどり着く．

2.3 非可換化

このような複素トーラス上の正則ベクトル束のなす DG 圏の非可換変形として，同様の構成を $\mathcal{A}^{2n}$ の代わりに $\theta\neq0$ の場合の $\mathcal{A}_\theta^{2n}$ の場合について考えたい．つまり，ハイゼンベルグ加群 $E_{A_a}:=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{Z}^n/A_a\mathbb{Z}^n))$ 上の $\mathcal{A}_\theta^{2n}$ の左作用 (4) を θ によって変形したものとして，非可換トーラスの関係式 (3) と両立するように構成し，その結果，定数曲率接続 ∇_a も θ による変更を受ける．このとき，同様の議論により，DG 圏ではなく弱 DG（curved DG とも呼ばれる）圏が得られる．ここで，弱 DG 圏とは，DG 圏と同じように，対象 $a,b,...$ と，二つの対象 a,b に対し

て次数付きベクトル空間 V_{ab} を考え, その上に次数を保つ結合的な積 m と, それに関してライプニッツ則を満たす次数１の線形写像 $d_{ab}: V_{ab} \to V_{ab}$ があるが, それが微分を定義せず, それぞれの対象 a に対してある次数２の元 $w_a \in V_{aa}$ が存在して $(d_{ab})^2 = -m(w_a \otimes \mathbf{1}) + m(\mathbf{1} \otimes w_b)$ を満たすものとして定義される. [14] では, $\hat{T}^{2n}$ の座標を $x^1, ..., x^n, \hat{y}^1, ..., \hat{y}^n$ と書いたとき, i) $[x^i, x^j] \neq 0$, ii) $[x^i, \hat{y}^j] \neq 0$, $[\hat{y}^i, \hat{y}^j] \neq 0$ の３つの場合に対応する非可換性について弱 DG 圏を構成した. このとき, それぞれの対象（定数曲率接続を持つハイゼンベルグ加群）a について $w_a \in \Lambda \subset V_{aa}$ となるため, その弱 DG 圏の, 対象 $a, b, ...$ で $w_a = w_b = \cdots$ となるものの成す充満部分圏を考えるとそれは DG 圏となる.

2.4 コホモロジー上の積構造とテータ関数の和公式

さて, まず可換トーラスの場合について, 得られた DG 圏のコホモロジー, 特に０次のコホモロジーを考えよう. 二つの対象 E_a, E_b について, もし A_{ab} 正定値である時, $H^0(V_{ab}) := \cap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\bar{\nabla}_i : \mathrm{Hom}(E_a, E_b) \to \mathrm{Hom}(E_a, E_b))$ は $\det(A_{ab})$ 次元ベクトル空間をなす. 特に, その基底 e_{ab}^μ, $\mu \in \mathbb{Z}^n / A_{ab}\mathbb{Z}^n$ は（実際には非可換トーラスの場合に定義された）A. Schwarz のテータベクトル [21] と呼ばれるものであり, それは本質的にはガウシアンである:

$$e_{ab}^\mu(x, \rho) = \delta_{[A_{ab}]_\rho}^{\ \mu} \exp\left(-\pi x^t A_{ab} x\right) \ .$$

ここで, $\delta_{[A_{ab}]_\rho}^{\ \mu}$ は $\mu - \rho \in A_{ab}\mathbb{Z}^n$ の時は 1, そうでない時は 0 とする. $\mathcal{V} := \oplus_{a,b} H^0(V_{ab})$ は, その上に m から誘導される積 $H^0(m)$ に関して閉じている. つまり, $\mathcal{V}$ は次数付き環を成す. トーラス上の正則ベクトル束, あるいはそれらの間の射は一般にテータ関数によって記述されるため, テータベクトルはそれぞれテータ関数の別の記述と見なすことができる. 特に, 実２次元トーラスの場合に [17, 20] で議論されたように, テータベクトルの積

$$H^0(m)(e_{ab}^\mu, e_{bc}^\nu) = \sum_\rho c_{abc,\rho}^{\mu\nu} e_{ac}^\rho, \qquad c_{abc,\rho}^{\mu\nu} \in \mathbb{R}$$

は（高次元）テータ関数の和公式を定義する. この次数付き環 $\mathcal{V}$ の構造は, ミラー双対なシンプレクティックトーラス T^{2n} 側の深谷圏の積構造に対応し, 構造定数 $c_{abc,\rho}^{\mu\nu}$ は $y^i = \partial f_a / \partial x^i$, $y^i = \partial f_b / \partial x^i$, $y^i = \partial f_c / \partial x^i$ とその $\pi^{-1} \circ \pi$, $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to T^{2n} = \mathbb{R}^{2n} / \mathbb{Z}^{2n}$ による像による被覆空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の中の n 次元アファイン空間を境界とする三角形のシンプレクティック面積を数え上げることにより得られる. [1]

さて, 前節の i),ii),iii) の非可換性による非可換トーラス上の弱 DG 圏の場合, 前節で述べたように, その充満部分圏として DG 圏を考えることができ, 同様にその（ゼロ次の）コホモロジーをとることができる. [14] では, これらの場合について $\mathcal{V}$ の構造を議論し, それらが実際に非可換性 θ によって変形されることをみた. より正確には ii) の場合, $[x^i, \hat{y}^j] \neq [x^j, \hat{y}^i]$ となる $i, j = 1, ..., n$ がある時のみ非可換変形する. ２次元非可換トーラスの場合に関しては [11, 19, 13] などで議論されていたが, この時は, $i = 1$ （１成分しかない）より自明に $[x^1, \hat{y}^1] = [x^1, \hat{y}^1]$ となることに対応して, 構造定数 $c_{abc,\rho}^{\mu\nu}$ が非可換変形を受けない. これは, より正確には, DG 圏から得られる導来圏が非可換性によらないことを意味する [19]. 一方, i) の非可換変形は対応する deRham 模型において, 積をモーヤル $*$ 積に変形したものとして実現され, [15] ではそれに対応するテータ関数の和公式の非可換変形の具体的な表示を得ている.

[1] これらについては, 2.2 節の設定における具体的な説明が [15] にある. より一般的な記述/枠組みにおいてはすでに [4] で議論されている.

2.5 非可換モースホモトピー?

$\hat{T}^{2n}$ 上の DG 圏のコホモロジーをとる代わりに, それぞれの複体 (V_{ab}, d_{ab}), $a \neq b$ に関して, そのコホモロジーへの射影 $P_{ab} : V_{ab} \to H(V_{ab}) \subset V_{ab}$ と, $d_{ab}h_{ab} + h_{ab}d_{ab} = \mathbf{1} - P_{ab}$ と満たすホモトピー作用素 $h_{ab} : V_{ab}^r \to V_{ab}^{r-1}$ として適切なものを選び, ホモロジー的摂動理論を適用することにより, 対応するモースホモトピー A_∞ 圏, あるいはそれと同型な深谷圏を構成できる.

一方, その非可換化に対しても, $\mathcal{A}_\theta^{2n}$ 上の弱 DG 圏が得られ, その充満部分圏として DG 圏をとることができることを述べた. よって, 同様にして, ホモトピー作用素を決めるごとにホモロジー的摂動理論によって別の A_∞ 圏が得られる. ここで, ホモトピー作用素して何をとれば, そうして得られる A_∞ 圏が「よい」モースホモトピー A_∞ 圏, 非可換深谷圏を定義するであろうか？これについてはまだできていないが, 可換な場合, ホモトピー作用素は, モースホモトピー A_∞ 圏や深谷圏の点（臨界点）を, その点上のデルタ関数として代数的模型である DG 圏の中に実現するように選ばれる. （より正確には, デルタ関数ではシュワルツ関数にならないので, それをガウシアンなどで近似して, 最後にデルタ関数となる極限をとる）. 非可換変形に関しては, 特に i) のタイプのものを考えると, $\mathbb{R}^n$ 上関数環の通常の可換積がモーヤル $*$ 積に置き換えられる. この時, 物理において GMS ソリトン（非可換ソリトン）と呼ばれるもの [8] と同様, デルタ関数の代わりに非可換性に対応する分幅を持ったガウシアンを考えるのが自然であるかも知れない.

3 終わりに

本稿では, ホモロジー的ミラー対称性に関する本質的な現象を具体的な設定において議論した. それを「よい」非可換変形された圏の定式化を探るための「実験道具」とすることをひとつの目的としているが, 一方, より一般的に扱うことのできる様々な部分についてかなりのことを省略した.

正則構造, 対応するシンプレクティック構造に関しては, 最も単純なものについての場合に話を限ったが, より一般の場合への拡張は容易である. あと, 2.2 節で導入した定数曲率接続には, より一般に, その接続のモジュライに対応する定数項を加えることができる. その定数項の半分は $\mathbb{R}^2$ の場合では考慮した n 次元アファイン部分空間の平行移動の自由度に対応し, もう半分は n 次元アファイン部分空間上の平坦接続と関係するものである. 非可換２次元トーラスの場合, [11, 19, 13] ではこれらはすべて取り入れた形で議論されている. さらに２次元の場合, ベクトル束の分類が簡単であるため, 任意のランクと一次のチャーン類を持つベクトル則に対応するハイゼンベルグ加群が取り扱われている.

本稿で触れなかった構造として, A_∞ 構造の持つサイクリック構造がある. 本稿で取り扱った対象においてはほぼ常に, 付加的にサイクリック構造を持つ（例えば [4, 19, 13]）. （しかし, $\mathbb{R}^{2n}$ の場合と T^{2n} の場合で多少性質が異なるので注意が必要である. ）横断性の問題に関しても本稿では触れることを避けた. これは, 深谷圏において高次の積まで定める時に避けられない問題である. $\mathbb{R}^2$ の場合に関しては, それは V_{aa} （V_{ab} で $a = b$ の場合）の定義と, それらを含む高次の積構造 m_n の決定の問題であり, [16] ではその詳細まで述べる予定である.

最後に, ホモロジー的ミラー対称性の設定と関係するトーラスの場合における非可換変形の試みの別のアプローチとしては例えば [5, 2] がある.

参考文献

[1] S. Barannikov and M. Kontsevich, "Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields," Internat. Math. Res. Notices 1998, 201–215.

[2] O. Ben-Bassat, J. Block and T. Pantev, "Non-commutative tori and Fourier-Mukai duality," math.AG/0509161.

[3] K. Fukaya, "Morse homotopy, A^{∞}-category, and Floer homologies," Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993), 1–102, Lecture Notes Ser., 18, Seoul Nat. Univ., Seoul, 1993.

[4] K. Fukaya, "Mirror symmetry of abelian varieties and multi theta functions," J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 3, 393–512.

[5] K. Fukaya, "Floer homology of Lagrangian foliation and non-commutative mirror symmetry," Preprint 98-08, Kyoto University, 1998, available at http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~fukaya/fukaya.html.

[6] K. Fukaya, "Asymptotic Analysis, Multivalued Morse theory, and Mirror symmetry," Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, 205–278, Proc. Sympos. Pure Math., 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[7] K. Fukaya and Y. G. Oh, "Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy," Asian J. Math. **1** (1997) 96-180.

[8] R. Gopakumar, S. Minwalla and A. Strominger, "Noncommutative Solitons," JHEP **0005** (2000) 020.

[9] M. Gualtieri, "Generalized complex geometry," Oxford University DPhil thesis, math.DG/0401221.

[10] F. R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., "Finite volume flows and Morse theory," Ann. of Math. **153** (2001) 1–25.

[11] H. Kajiura, "Kronecker foliation, D1-branes and Morita equivalence of noncommutative two-tori," JHEP **0208** (2002) 050.

[12] H. Kajiura, "Noncommutative homotopy algebras associated with open strings," Reviews in Math. Phys. **19** (2007) 1–99, arXiv:math.QA/0306332, a revised version at http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~kajiura/research.html.

[13] H. Kajiura, "Homological mirror symmetry on noncommutative two-tori," arXiv:hep-th/0406233.

[14] H. Kajiura, "Categories of holomorphic line bundles over higher dimensional noncommutative complex tori," arXiv:hep-th/0510119.

[15] H. Kajiura, "Star product formula of theta functions," Lett. in Math. Phys. **75** (2006) 279 –292.

[16] H. Kajiura, "An A_{∞}-structure for lines in a plane," Talk given at Differential and Topology seminar at Kyoto Univ., in preparation.

[17] M. Kontsevich, "Homological algebra of mirror symmetry," Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[18] M. Kontsevich and Y. Soibelman, "Homological mirror symmetry and torus fibrations," Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pp.203–263, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001, math.SG/0011041.

[19] A. Polishchuk and A. Schwarz, "Categories of holomorphic vector bundles on noncommutative two-tori," Commun. Math. Phys. **236** (2003) 135.

[20] A. Polishchuk and E. Zaslow, "Categorical mirror symmetry: the elliptic curve," Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), 443–470.

[21] A. Schwarz, "Theta functions on noncommutative tori," Lett. Math. Phys. **58** (2001), 81–90.

[22] J. D. Stasheff, "On the homotopy associativity of H-spaces, I, II," Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963) 275, 293.