

SGC75 八面体公理 (Tr5) – page 92 に関する訂正

(Tr5) 射 $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$, その合成 $v \circ u : X \rightarrow Z$ に対して, 対応する完全三角系列

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow T(X) \\ Y &\xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow T(Y) \\ X &\xrightarrow{v \circ u} Z \rightarrow Y' \rightarrow T(X) \end{aligned}$$

を含む以下の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} & & T^{-1}(X') & \xlongequal{\quad} & T^{-1}(X') & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\ id_X & & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & & \end{array} \quad (1)$$

と書きましたが, まず図式 (1) に可換図式がひとつ抜けているのを以下の図式 (2) に訂正しなければなりません. そして, 図 (1) にある縦の $T^{-1} \rightarrow Z' \rightarrow Y' \rightarrow X'$ も完全三角系列なので, 文章も以下のように直す必要があります.

(Tr5-訂正版) 射 $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$, その合成 $v \circ u : X \rightarrow Z$ に対して, 対応する完全三角系列

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{u} Y \rightarrow Z' \rightarrow T(X) \\ Y &\xrightarrow{v} Z \rightarrow X' \rightarrow T(Y) \\ X &\xrightarrow{v \circ u} Z \rightarrow Y' \rightarrow T(X) \end{aligned}$$

を考えたとき, 完全三角系列 $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow T^{-1}$ が存在し, これらの4つの完全三角系列を含む以下の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc} & & T^{-1}(X') & \xlongequal{\quad} & T^{-1}(X') & & \\ & & \downarrow u' & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & TX \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & & \parallel \\ id_X & & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & TX \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow T(u) \\ & & X' & \xlongequal{\quad} & X' & \xrightarrow{T(u')} & TY \end{array} \quad (2)$$

図式で加わった部分は右下の部分です. ということかというのと, 図 (1) で作った可換図式でさらに左上の

$$\begin{array}{ccc} & T^{-1}(X') & \\ & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

の部分の T によるシフトと右下の

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow & & \\ X' & & \end{array}$$

の部分でつくられる

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & TX \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \longrightarrow & TY \end{array} \quad (3)$$

がまた可換となる, ということです.
 実際, 八面体の形で書かれた図式

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ Z' & & & & X' \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & X & & Z \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & Y & & \end{array} \quad (4)$$

$T(s)ot (+1)$ (top edge), $+1$ (edge $Z'X'$), $t (+1)$ (edge XZ), s (edge XZ'), $v \circ u$ (edge XZ), u (edge XY), v (edge YZ)

をみると, 八面体に含まれる (八面体を真っ二つにする) 4 角形は 3 つありますがそのうちのひとつ

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xleftarrow{T(s)ot (+1)} & X' \\ \downarrow & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{v \circ u} & Z \end{array}$$

の部分は矢印の向きの的に可換図式をつくらないので考えなくてよく, 残りの 2 つが図 (2) 中の真ん中の

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y' \end{array} \quad (5)$$

と, 上の図 (3) です.

ついでにいうと, 図 (4) において, 八面体の面は 8 個の 3 角形であるが, それらの 3 角形の辺のつくる図式をみると 4 つは完全三角系列を定め, 残りの 4 つは射の合成を表していることが分かる. 4 つの射の合成は図 (1) では真ん中の図 (5) 以外の, $=$ を含む 4 角形に対応していることが分かる.

p92 以降も八面体公理に関する議論ではこの可換性について忘れがちなので以下修正部分をあげていきます. (基本的には図 (1) が書かれている部分において忘れられている可換図式 (3) を付け加えればいいです.)

1 p97, 図式 (5.3)

ここも文章をそのままにして図 (5.3) (つまり図 1) に可換図式 (3) を加えればよいです. しかし, 図 (5.3) の上の行の説明でさらに誤植がありまして,

「そのとき $Y'' = Y$ となるようにとると」

は正しくは

「そのとき $Y'' = Y'$ となるようにとると」

です.

その変更後の該当部分の説明と同じことですが, 以下もう少し分かりやすく言い直しておきます.

まず射 $u : X \rightarrow Y$, $v : Y \rightarrow Z$ に対して, (Tr2) によって (同型を除いて一意的に) 決まる三角系列 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} T(X)$, $T^{-1}(X') \xrightarrow{u'} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X'$ を考える. このとき, 合成 $v \circ u$, $v' \circ u'$ に対して (Tr2) の定める三角系列 $X \xrightarrow{v \circ u} Z \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{f} T(X)$, $T^{-1}(X') \xrightarrow{v' \circ u'} Z' \xrightarrow{g'} Y'' \xrightarrow{f'} X'$ において $Y' \simeq Y''$ となり, それらを $Y'' = Y'$ となるようにとると

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & TX \\
 \downarrow v & & \downarrow g' & & \parallel \\
 Z & \xrightarrow{g} & Y' & \xrightarrow{f} & TX \\
 \downarrow w & & \downarrow f' & & \downarrow T(u) \\
 X' & \xlongequal{\quad} & X' & \xrightarrow{T(u')} & TY
 \end{array}$$

が可換となる (新しく可換となる部分だけを書いた).

このあと, [p97, line -2] においても

可換図式 (5.3) を可換にする

という文がありますが, これも (5.3) を上のように修正したものとして読んでください.

2 p97, line -1

ここで「八面体の対称性」より可換図式 (5.3) を (5.4) に書き換えていますが, これはもともとの八面体の図式 (4) を考えてできるもので, 修正しないままの図式 (5.3) からはできません.

そして (5.4) では可換図式 (3) が含まれているかわりに今度はもともとあった可換図式 (5) に対応するものがなくなってしまっているのを (5.4) の図の右下 (あるいは左上) に加えてください.

説明はそのままで大丈夫です.

3 p98, 図式 (5.5)

これも同様に可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 X_{23} & \longrightarrow & X_3 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 TX_1 & \longrightarrow & TX_{12}
 \end{array}$$

を付け加えてください. ただしここでの射 $X_3 \rightarrow TX_{12}$, $TX_1 \rightarrow TX_{12}$ もそれぞれ, (5.4) 式の左上の射 $T^{-1}X_3 \rightarrow X_{12}$, $X_1 \rightarrow X_{12}$ の T によるシフトです.

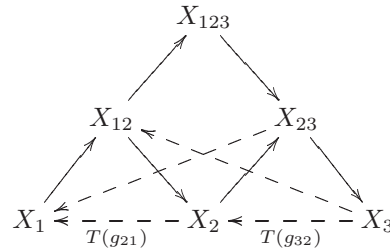
具体的に, $(\tilde{g}_{21}, \tilde{g}_{32})$ をとったとき,) みるべき可換図式は

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xlongequal{\quad} & X_1 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 X_{12} & \longrightarrow & X_{123} & \longrightarrow & X_3 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 X_2 & \longrightarrow & X_{23} & \longrightarrow & X_3 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & TX_1 & \longrightarrow & TX_{12}
 \end{array} \tag{6}$$

の4つの□の可換性です.

補足

p99 上のピラミッド型の図式



では X_{12} から X_{23} へ向かう射の合成 2 つによる可換図式, X_{23} から TX_{12} に向かう射の合成 2 つによる可換図式はともに含まれています. 一方, 合成 $X_1 \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{123}$, $X_{123} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_1$ に関しては, 合成された結果の矢印 $X_1 \rightarrow X_{123}$, $X_{123} \rightarrow X_1$ が略されているかたちとなっています.

4 p104, line -7

ここからホモトピー圏 $K(\mathcal{C})$ において写像錐から作る三角系列が (Tr5) を満たすことを議論しています. そして p105 最後で,

「八面体公理 (と等価な条件) が示された. 」

となって終わっているのですが, まだ三角系列から $X_{123} = X_{123'}$ が得られることまでしかいっていないので, 証明としては図 (6) の 4 つの可換性が満たされていることもいわなければなりません. ただしこれは, 本書で書かれている通りに X_{123} などを構成した時点で直接簡単に確認できることなのでここでも省略します. 4 つのうち 3 つはとても簡単で, 最後の

$$\begin{array}{ccc} X_{23} & \longrightarrow & X_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ TX_1 & \longrightarrow & TX_{12} \end{array}$$

はそれらよりはもうひと手間かかります. (射の合成 2 つは複体の圏においては一致せず, ホモトピックとなります.)

5 p131, line 7

ここでは DG 圏 $\mathcal{C}$ から構成される三角圏 $Tr(\mathcal{C})$ の完全三角系列が実際 (Tr5) を満たすことが議論されています. この節でいいたいのは, 議論はホモトピー圏のときを全く同様にできるということです. ホモトピー圏の場合とほとんど同じ議論をして $\mathcal{X}_{123} = \mathcal{X}'_{123}$ の存在をいって終わっていて, 4 つの可換性について何もいっていないですが, これはホモトピー圏のときと全く同じようにして示すことができるのでこれは省略して大丈夫でしょう.