## ① Reeb foliation を与える一階 PDE系

§1. $\mathbb{R}^{2n+1} \ni (y, x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$

$$\underset{J^1(n,1)}{\mathbb{R}^{2n+1}} \ni (y, x_1, \underset{\partial y/\partial x_1}{y_1}, \cdots, x_n, \underset{\partial y/\partial x_n}{y_n})$$

$\alpha = dy - y_1 dx_1 - \cdots - y_n dx_n$ : contact form of $J^1(n,1)$.

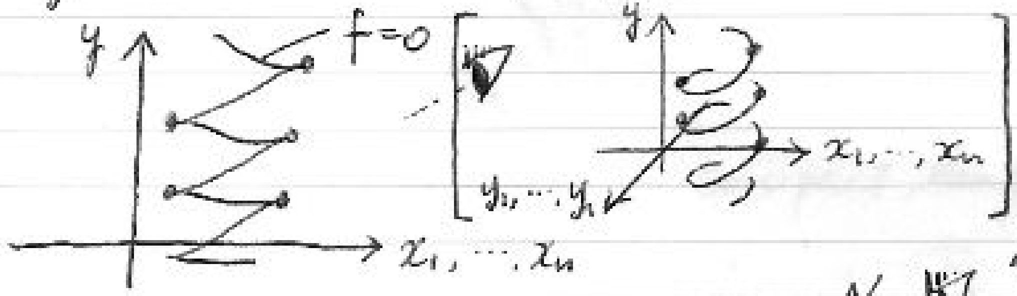
$f(y, x_1, \cdots, x_n)$ : $J^0(n,1)$ 上の関数

$y = \varphi(x_1, \cdots, x_n)$ : $f=0$ の陰関数

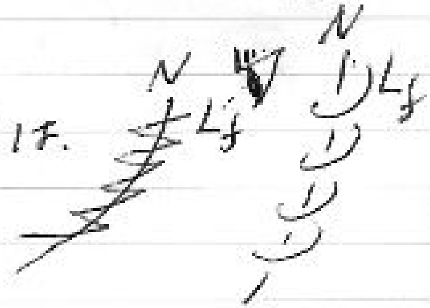
$L_\varphi : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (\varphi, x_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \cdots, x_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n})$

≀ はり合わせ

$L_f$ : Legendrian immersion (仮定)




(注) 与えられたワイルドでない $N^n \subset J^1(n,1)$ は、ある $L_f$ で $C^0$-近似される




$\boxed{n\text{連立一階 PDEs}}$ ($n$変数を$n$連立する!)

$$M^{n+1} = \bigcap_{i=1}^{n} \{F_i(y, x_1; y_1, \cdots, x_n, y_n) = 0\} \subset J^1(n,1)$$

(仮定) $\alpha \wedge d\alpha |M^{n+1} = 0$, $\alpha | M^{n+1} \neq 0$

$\rightsquigarrow \mathcal{F}$ : codim 1 foliation on $M^{n+1}$; $T\mathcal{F} = \ker \alpha |_M$

$f$ : solution for $M^{n+1} \Longleftrightarrow L_f$ : leaf of $\mathcal{F}$

(つまり各点 $p \in M^{n+1}$ を通る解は unique)

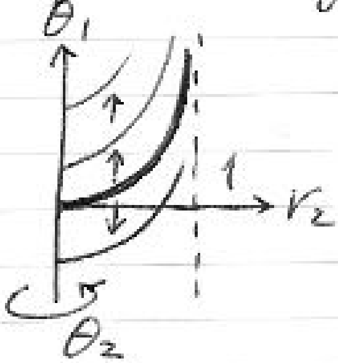
②

問題：$M^{n+1}$ : compact, $\partial M^{n+1}=\phi$ で，上のようなものを見つけよ。$(n>1)$

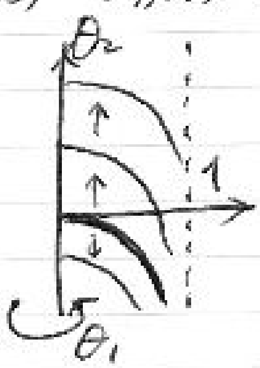
結果：$M^3 \cong S^3$ が $J^1(2,1)$ に見つかった．($C^\omega$-級)

## §2. Reeb foliation $\mathcal{F}_R$

$$S^3 \cong \partial(D^2\times D^2) = \underset{\theta_1}{\partial D^2}\times\underset{(r_2,\theta_2)}{D^2} \cup \underset{(r_1,\theta_1)}{D^2}\times\underset{\theta_2}{\partial D^2}$$



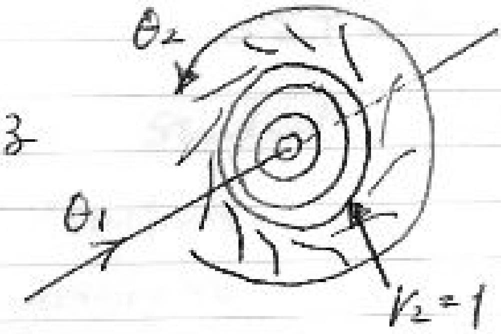

と




が

$\{r_1=r_2=1\} = T^2 \ni (\theta_1,\theta_2)$ : compact leaf に沿ってはり合わせられた foliation が $\mathcal{F}_R$

(注) $\partial D^2\times D^2 \supset \{\theta_1=\text{const}\}$ を少し拡張すると右図のようになる
$r_2=1$ の円周の近傍に 1st returnmap を考えると，
$r_2 \leqq 1$ の部分では identity germ になっている。従って，$\mathcal{F}_R$ は $C^\omega$ 級ではない。




(注) Novikov が見つけた vanishing cycle は上の $r_2=1$ のような円周である。このことから Haefliger が注意したように，$S^3$ には $C^\omega$-foliation は存在しない

③

## §3. Construction of $M^3 \cong S^3$ in $J^1(n,1)$

アイデア 1) $S^5 \subset \mathbb{C}^3$

$\{r_1^2+r_2^2+r_3^2=1\} \subset \mathbb{C}^3$

$(r_1 e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \cdots)$

$\lambda_5 = r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2 + r_3^2 d\theta_3 \mid S^5$

$(S^5, \lambda_5)$ : "standard $S^5$"

ここから1点(の近傍)を除くと $J^1(n,1)$ と contactomorphic である。
そこで $S^5$ の中に $M^3$ をつくればよい。

2) $S^3 = \{r_3=0, r_1^2+r_2^2=1\} \subset S^5$

$\lambda_3 = \lambda_5 | S^3 = r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2 \mid S^3$

$(S^3, \lambda_3)$ : "standard $S^3$"

既にあるこういうものを変形して $\mathcal{F}_R$ をつくろう.

Main theorem $\exists M_t (\cong S^3) \subset (S^5, \lambda_5)$ $0 \leq t \leq 1$ ;

- $M_0 = \{r_3=0, r_1^2+r_2^2=1\}$ : Standard $S^3$
- $M_t$ $(0 \leq t < 1)$ : contact submfd contactomorphic to $(S^3, \lambda_3)$
- $(M_1, \ker(\lambda_5 | M_1) = T\mathcal{F}_R)$ : Reeb foliation

(• $M_{1+\varepsilon}$ $(0<\varepsilon \ll 1)$ : overtwisted negative contact)

(注) contact str の変形は isotopy (diffeoの族) で追跡できる (一般の contact mfd, ただし compact かつ境界なし)
("Gray 安定性" という)

ごたく（講演では省略した）

1. compact oriented $\underset{(2k+1)}{m}$-mfd は，がんばれば，
$\mathbb{R}^{2m-1} = J^1(m-1, 1)$ に embed することができる．
$(\mathbb{R}^{4k+1} = J^1(2k, 1))$ (hard Whitney)

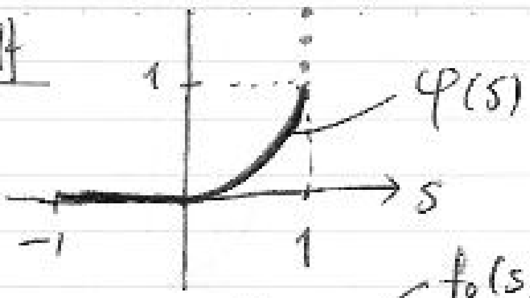
$m = 2k+1$ の contact mfd について，contact structure が $J^1(2k, 1)$ の contact str. の pull-back となるような埋め込みをつくることが問題（はめ込みまでは既にできている。h-principle ではなく，open-book 分解を利用するやり方があって，こちらは埋め込みまで上手く証明できそうな感じがする）

2. オープンブック分解と関連する codim 1 foliation というものがある。こうしたもののいくつかには，やはりオープンブック分解と関連する contact structure のある homotopy 変形が収束する。（これが私の研究題材）

3. 1と2の融合，というものがありえるかもしれない，というのが今回の main theorem が言いたいこと。
埋め込まれる多様体の次元は $2k+1$ $(=3\ (k=1))$，
埋め込む空間 $J^1(2k, 1)$ の Legendrian の次元は $2k$ $(=2\ (k=1))$ なので，ちょうど codim $= 1$ というわけ．

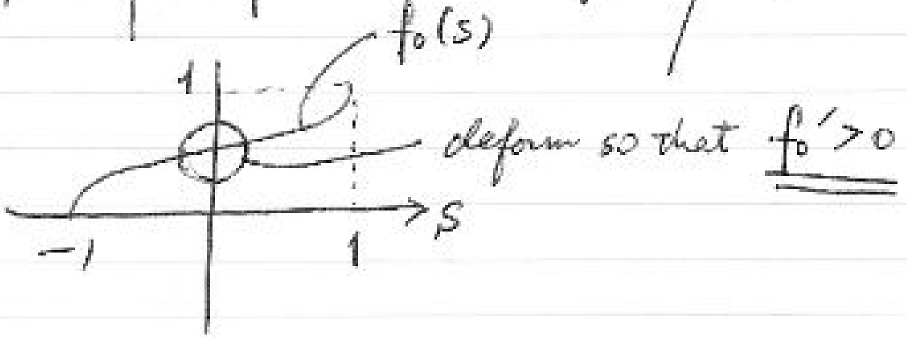
(5)

証明




$$f_0(s) \approx \frac{1+\varphi(s)-\varphi(-s)}{2}$$

$$g_0(s) = f_0(-s)$$




Put $f_1(s) = \varphi(s)$, $g_1(s) = \varphi(-s)$

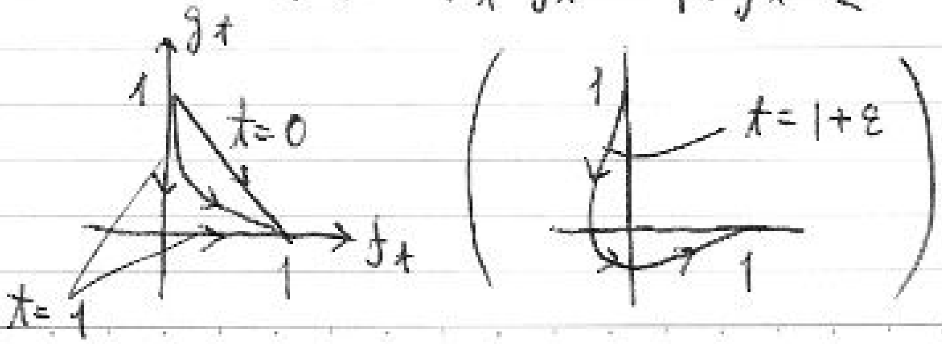
$$f_t = t f_1 + (1-t) f_0, \quad g_t = t g_1 + (1-t) g_0$$

$$M_t : \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = s \\ r_1^2 = \dfrac{1-f_t}{3-2f_t-2g_t} \\ r_2^2 = \dfrac{1-g_t}{3-2f_t-2g_t} \\ r_3^2 = \dfrac{1-f_t-g_t}{3-2f_t-2g_t} \quad (= 1 - r_1^2 - r_2^2) \\ \text{eliminate } s \in [-1,1] : \text{parameter} \end{cases}$$

$\Gamma = \{s = \pm 1\} \subset M_t$ を除けば、次は容易に分かる。

$$\lambda_s \wedge d\lambda_t \,\big|_{M_t - \Gamma} \gtrless 0 \quad (\text{w.r.t. } ds \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2)$$

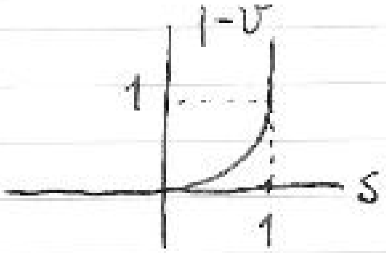
$$\Longleftrightarrow \quad f_t' g_t - f_t g_t' \gtrless 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \lessgtr 1$$




$(t \in [0, 1+\varepsilon])$

⑥

$\Gamma$の近くでは．（$\Gamma = S^1\times\{0\}\times\{0\} \cup \{0\}\times S^1\times\{0\} \subset S^5 \subset \mathbb{C}^3$）




$1-v=\varphi(s)$

$\rightsquigarrow s=s(v)$ : $C^\infty$- tangent to 1 at $v=0$

<u>$s=1$ という直線で近似してみると．</u>

$$\tilde{M}_t : \begin{cases} F_t = t(1-v)+(1-t)\dfrac{1+(1-v)}{2} \\ G_t = t\cdot 0 + (1-t)\dfrac{1-(1-v)}{2} \\ r_1^2 = \dfrac{1-F_t}{3-2F_t-2G_t} = \dfrac{tv+v}{2+4tv} \\ r_2^2 = \quad \sim \quad = \dfrac{2+tv-v}{2+4tv} \\ r_3^2 = \quad \sim \quad = \dfrac{2tv}{2+4tv} \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3 = 1 \\ \text{eliminate } v\in[0,\varepsilon) \quad (\varepsilon\ll 1) \end{cases}$$

$$\text{i.e.} \begin{cases} 2tr_1^2 = (t+1)r_3^2 \ll 1 \\ (1+3t)r_1^2 + (1+t)r_2^2 = 1+t \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3 = 1 \end{cases}$$

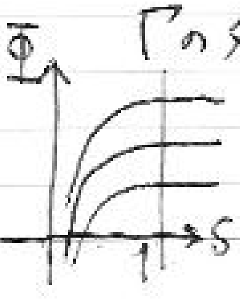
$$\tilde{M}_1 : \begin{cases} r_1 = r_3 \ll 1 \\ 2r_1^2 + r_2^2 = 1 \\ \theta_1+\theta_2+\theta_3 = 1 \end{cases}$$

では $r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2 + r_3^2 d\theta_3$

$= r_1^2 d(\theta_1+\theta_3) + r_2^2 d\theta_2$

$= (1-3r_1^2)\, d\theta_2$

従って solid torus $\tilde{M}_1$ は meridian disks $\{\theta_2 = \text{const}\}$ で foliate される（$t \geqq 1$ での contact 条件は容易）




$\Gamma$の外での状況との符合：

$$\alpha|_{(M_1-\Gamma)\cap\{s>0\}} = \frac{1}{3-2\varphi(s)}\{\varphi(s)d\theta_2 + (1-\varphi(s))ds\}$$

$$\therefore\ \theta_2 = \int \frac{\varphi(s)-1}{\varphi(s)}ds = \Phi(s) + \text{const} \quad \blacksquare$$

Thank you.