外微分形式系と特性多様体

2011 年 1 月 21 日 (土)

水谷 忠良

目 次

1　はじめに

外微分形式系 (EDS) の主な研究の目的は，積分多様体を求めること，およびその性質を研究し，微分方程式などへの関連する応用を探ることである。
「EDS が involutive のとき，付随する特性多様体も eikonal equation として，involutive である」というのが特性多様体の integrability と呼ばれる定理である。
この定理をひとつの動機付けとして，外微分形式系における特性多様体の記述について，初学者の立場から説明したい。
この定理の証明を EDS の言葉で述べることが懸案の一つである。
使う用語や notation などは主に，次の文献 BCG3 による。
R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. Goldschmidt, and P. Griffiths, Exterior differential systems, Springer-Verlarg, New York (1986).

Symbol

線形微分作用素 (linear diff. operator)

$$Pu = \sum_{|\alpha| \le d} C_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}$$

に対し principal symbol $\sigma_P(\xi)$ は次で定義される行列である。

$$\sigma_P(\xi) = \sum_{|\alpha|=d} C_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=d} C_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}, \qquad where$$

$$\begin{aligned}
u =& (u^a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s, \quad C^\infty \text{map} \\
C_\alpha =& (C^\lambda_{\alpha a}) : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^r, \quad \text{linear map}(r \times s \text{ matrix}) \\
\xi =& \xi_1 dx^1 + \cdots + \xi_n dx^n \in \mathrm{T}^*\mathbb{R}^n \\
\alpha =& (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad 0 \le \alpha_i \le d \\
i =& 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, s, \quad \lambda = 1, \ldots, r.
\end{aligned}$$

さらに，一般に d 次の PDE(系) に対しては

$$F^\lambda(x^i, u^a, p^a_\alpha) = 0, \quad |\alpha| \le d, \quad \lambda = 1, \ldots, r \quad (\ r \text{ PDE's})$$

$$\left(\sum_{|\alpha|=d} \frac{\partial F^\lambda}{\partial p^a_\alpha} \xi^\alpha \right) \quad r \times s \text{ matrix}$$

is the symbol matrix.　　Characteristic variety Ξ is

$$\Xi = \{\xi | \ker \sigma(\xi) \neq \{0\}\}.$$

Charac variety は，$\mathrm{T}^*_x\mathbb{R}^n$ の homogeneous polynomials の zero 点からなる。

(注) vector bundle version: M 上の bundle E, E' の場合，LDO は morphism $\Phi : J^d(E) \to E'$ があって，$P = \Phi \circ j^d : \Gamma(E) \to J^d(E) \xrightarrow{\Phi} E'$ により定義する。$S^d(\mathrm{T}^*M) \otimes E \to J^d(E) \xrightarrow{\Phi} E'$ を使って，$\sigma_P(\xi) \in \mathrm{Hom}(E, E')$ が symbol と定義される。($\mathbb{R}^n$ 上の trivial bunndle $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, E' = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ の場合が上)。

2　外微分形式系と積分多様体 (用語と記号)

M: m 次元 C^∞ -manifold or open set in $\mathbb{R}^m$.

定義 1 (外微分形式系，Exterior Differential System) とは
An ideal in $\Omega^*(M)$，which is closed under d，(=EDS) , denoted by：$\mathcal{I}$.

定義 2 (パフ系，Pfaff System) とは
An EDS generated by 1-forms.

$$\text{Notaion} : \mathcal{I} = \{\theta^1, \ldots, \theta^s\}_{\text{diff}} = \{\theta^1, \ldots, \theta^s, d\theta^1, \ldots, d\theta^s\}_{\text{alg}}.$$

定義 3 (積分要素，Integral Element) k-dim integral element is
k-dim subspace $E \subset \mathrm{T}_x M$ s.t. $\mathcal{I}$　vanishes on E.

定義 4 (積分多様体, Integral Manifold) Integral manifold of $\mathcal{I}$ とは
N： submanifold of M s.t. $\mathcal{I}$　vanishes on N.

(1) θ^a が多様体 N 上で消えれば $d\theta^a$ も消える.

(2) 積分多様体の接空間は積分要素。ベクトル場の解曲線は (一次元の) 積分多様体の例。

ここで専ら取り扱う EDS は次のもの

定義 5 (線形パフ系 (Linear Pfaff System)) $\mathcal{I}=\{\theta^a\}_{\mathrm{diff}}$ とする。
$\{\theta^a,\omega^i,\pi^\varepsilon,a=1,\dots,s,i=1,\dots,n,t=1,\dots,t\}$ を M の余枠。
$\Omega=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n\neq 0$ を満たす integral manifold を求める問題設定をする。
構造方程式が次のように $\pi^\varepsilon\wedge\pi^\lambda$ の項を持たないとき，すなわち

$$d\theta^a\equiv A^a_{\varepsilon i}\pi^\varepsilon\wedge\omega^i+\frac{1}{2}c^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j,(c^a_{ij}+c^a_{ji}=0)\mod\{\theta^a\}$$

と表されるとき，$\mathcal{I}$ を線形パフ系（LPS）と呼ぶ。

$$\text{記号：}\quad I=\mathrm{span}\{\theta^1,\dots,\theta^s\},\quad J=\mathrm{span}\{\theta^1,\dots,\theta^s,\omega^1,\dots,\omega^n\},$$
$$\mathrm{T}^*M=\mathrm{span}\{\theta^1,\dots,\theta^s,\omega^1,\dots,\omega^n,\pi^1\dots,\pi^t\}.$$

(1) PDE はすべて，ある空間の LPS として記述される。

(2) EDS はすべて，その延長 (prolongation) が LPS となる。

(3) 「構造方程式」に現れる行列の族 $A_\varepsilon = (A^a_{\varepsilon i})$ の張る線形空間 A は tableau(タブロ，描板) と呼ばれる。 $s \times n$ 行列の空間で，$\mathrm{Hom}((J/I)^*, I^*)$ の部分空間。

(4) タブロ A の零化空間 $B = \mathrm{span}\{B^\lambda\}$（$n \times s$ 行列の空間）はシンボル空間と呼ばれる。ペアリングは，行列の積をとってトレースをとる。

3　PDE に付随する EDS（積分要素の記述）

n 変数，s 個の未知関数に関する 1 階偏微分方程式系は

$$F^\lambda\left(x^i, z^a, \frac{\partial z^a}{\partial x^i}\right) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, r. \tag{1}$$

ジェット空間の座標 $(x^i, z^a, p_i^a) \in J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ で書く。

$$M: \qquad F^\lambda(x^i, z^a, p_i^a) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, r. \tag{2}$$

定義式 (2) が，$J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ の部分多様体 M （余次元 r）を記述するとする。
$J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^s)$ の接触形式を M に制限して，外微分形式系 (EDS) $\mathcal{I} = \{\theta^a\}_{\mathrm{diff}}$ を得る。接触形式とその外微分は次のとおり。

$$\begin{cases} \theta^a = dz^a - p_i^a dx^i, \\ d\theta^a = -dp_i^a \wedge dx^i. \end{cases}$$

PDE(1) の (局所的な) 解は，EDS $\mathcal{I} = \{\theta^a\}_{\text{diff}}$ の n 次元の積分多様体で，独立性の条件

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \neq 0$$

を満たすものである。実際，このとき積分多様体が $(x^1, \ldots, x^n)$ のグラフに表され，$\theta^a = dz^a(x) - p^a_i dx^i = 0$ の条件より $p^a_i(x)$ が $z^a_{x^i}$ に一致する。
M における LPS としてのデータは次のとおり。

$$I = \{\theta^a = \theta^a_M\}, \quad J = \{\theta^a, \omega^i = dx^i_M\}, \quad \mathrm{T}^*M = \{\theta^a, \omega^i, dp^a_i\}.$$

ただし， dp^a_i の間には， $dF^\lambda = 0$ による 次の一次関係がある。
(T^*M/J で well defined.)

$$\begin{aligned} 0 = dF^\lambda =& F^\lambda_{x^i} dx^i + F^\lambda_{z^a} dz^a + F^\lambda_{p^a_i} dp^a_i \\ =& (F^\lambda_{x^i} + F^\lambda_{z^a} p^a_i) dx^i + F^\lambda_{p^a_i} dp^a_i + F^\lambda_{z^a} \theta^a. \end{aligned} \tag{3}$$

積分要素の記述

M 上の LPS $\mathcal{I}$ の n 次元の積分要素 E を p^a_{ij} を 未定係数 として

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + p^a_j \frac{\partial}{\partial z^a} + p^a_{ij} \frac{\partial}{\partial p^a_i}, \quad j = 1, \ldots, n$$

によって張られるものとする。一次微分形式を用いて，E が接空間の中で

$$\theta^a = dz^a - p^a_j dx^j = 0, \qquad dp^a_i - p^a_{ij} dx^j = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n,\ a = 1, \ldots, s) \quad (4)$$

により，定義されるものとすると言ってもよい。積分要素上では
$0 = d\theta^a = -p^a_{ij} dx^j \wedge dx^i$ が成り立つから，$p^a_{ij} = p^a_{ji}$ となる。

また，(3) の式に関係式 $dp^a_i = p^a_{ij} dx^j$ を代入して，p^a_{ij} が満たすべき式

$$(F^\lambda_{x^i} + F^\lambda_{z^a} p^a_i + F^\lambda_{p^a_j} p^a_{ij}) dx^i + F^\lambda_{z^a} \theta^a = 0$$

が得られる。

M 上での dx^i の独立性から $F^\lambda_{x^i} + F^\lambda_{z^a} p^a_i + F^\lambda_{p^a_j} p^a_{ij} = 0$ が成り立つことが必要である。したがって，積分要素は

$$p^a_{ij} = p^a_{ji} \quad \text{かつ} \quad F^\lambda_{x^i} + F^\lambda_{z^a} p^a_i + F^\lambda_{p^a_j} p^a_{ij} = 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n,\ a = 1,\ldots,s. \tag{5}$$

を満たす p^a_{ij} によって記述される。

• (5) は非斉次な一次方程式で，解の存在は自明ではない。存在すれば，斉次方程式の分だけの解が存在し，それだけ積分要素が存在する。

Integrability(積分要素の存在)

定義 6 外微分形式系 $\mathcal{I}$ が，各点で積分要素を持つ時，積分条件 (integrability condition) を満たすという。

一般の LPS において n 次元の積分要素は θ^a に加えて

$$d\theta^a \equiv A^a_{\varepsilon i}\pi^\varepsilon \wedge \omega^i + \frac{1}{2}c_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad (c^a_{ij} + c^a_{ji} = 0)$$

を消さなければならない。すなわち，余枠の元 π^ε を $\pi^\varepsilon + q^\varepsilon_j\omega^j$ をうまくとって，$\omega^i \wedge \omega^j$ の項が消えること，すなわち， q^ε_i についての非斉次一次方程式
$A^a_{\varepsilon i}q^\varepsilon_j - A^a_{\varepsilon j}q^\varepsilon_i + c^a_{ij} = 0$ が解をもつことが必要で，また十分でもある。このとき，$\pi^a_i = A^a_{\varepsilon i}(\pi^\varepsilon - q^\varepsilon_j\omega^j)$ とおくと構造方程式は次のようになる。

$$\theta^a = 0, \quad d\theta^a \equiv \pi^a_i \wedge \omega^i \mod \{\theta^a\}, \quad B^{\lambda i}_a\pi^a_i \equiv 0 \mod \{\theta^a\},$$
$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n \neq 0.$$

積分要素を定義する式はは $\theta^a = 0, \pi^a_i = 0$ である。

PDE の例でも，実際，$\pi^a_i = dp^a_i - p^a_{ij}dx^j$ とおくと

$$d\theta^a = -(\pi^a_i + p^a_{ij}dx^j) \wedge \omega^i = -\pi^a_i \wedge \omega^i$$

であり，積分要素は，構造方程式を $d\theta^a = -\pi^a_i \wedge \omega^i$ と書いて

$$\theta^a = 0, \quad \pi^a_i = 0, \quad F^\lambda = 0 \quad ただし \quad F^\lambda_{p^a_i}\pi^a_i \equiv 0 \mod \{\theta^a\} \tag{6}$$

によって記述される。
（逆は，$d\theta^a$ を 2 通りに書き，$(\pi^a_i - dp^a_i)\omega^i = 0$ から，Cartan lemma を用いて $\pi^a_i - dp^a_i = b^a_{ij}\omega^j, (b^a_{ij} = b^a_{ji})$ と書いて，(4) を得る。）

この π^a_i は $s \times n$ 行列空間の部分空間，描板(タブロ，tableau) A を生成し，$(B^{\lambda i}_a) = (F^\lambda_{p^a_i})$ はそれを零化する双対空間の行列で シンボル空間 を生成する。

一般の LPS においても π_i^a は $J/I \otimes I^*$ に値を持つ一次微分形式で，$\{\theta^a, \omega^i, \pi^\varepsilon\}$ を M の余枠とすれば，$\pi_i^a = A_{\varepsilon i}^a \pi^\varepsilon$ と書けて，π_i^a は行列の集合 $\{A_{\varepsilon i}^a, \varepsilon = 1, \ldots, t\}$ の張る $M(s, n)$ の線形部分空間 $(\pi_i^a(J^\perp))$ を定義し，LPS の tableau となる。それを零化するものがシンボル (空間) である。

4 Characteristic Variety の Integrability とは

特性多様体の積分可能性の定理は次である。N は積分多様体，ΞN は $\mathcal{I}$ の characteristic variety である。

定理 1 (O.Gabber) If $\mathcal{I}$ is involutive near N, and both $\mathcal{I}$ and N are real analytic, then $\tilde{\Xi} N$ is a coisotropic submanifold of T^*N and fiber bundle over N.

N: integral manifold, $\tilde{\Xi} N$ is the inverse image of $\Xi N \subset PT^*N$.
（歴史的には，GQS(1970)，SKK(1973)，Gabber(1981), Malgrange(1977，2000) の論文による） BCG3 では，外微分形式系に対する証明が望まれることが記されている。
ここで，coisotropy と integrability の関係（同値性）について述べたい。

Coisotropy と Integrability

$M(=P\mathrm{T}^*N)$ を contact manifold， θ：contact form， $D=\ker\theta$.
$d\theta:\mathrm{T}M\to\mathrm{T}^*M$ は $D\to\mathrm{Im}(D)$（同型）．　$\mathrm{T}^*M=\mathrm{Im}(D)\oplus\langle\theta\rangle$.

$\pi:\mathrm{T}^*M\to\mathrm{T}M$ を $\ker\pi=\langle\theta\rangle$, 　$\pi_{\mathrm{Im}(D)}=(d\theta)^{-1}_{\mathrm{Im}(D)}$ と定義。(2-vector field).

$f,g\in C^\infty(M)$ に対して， $\{f,g\}:=\pi(df,df)$ は Lagrange bracket と呼ばれる。

定義 7 Σ: submanifold in M が coisotropic $\Leftrightarrow$ $f_\Sigma=0, g_\Sigma=0$ なる $f,g\in C^\infty(M)$ に対して $\{f,g\}_\Sigma=0$ である。

(ベクトル空間としての歪直交は:$W^{\perp_{d\theta}}=\{X\in D|d\theta(W\cap D,X)=0\}$)

$\Sigma \subset P\mathrm{T}^*N$ には EDS　$\mathcal{I} = \{\theta_\Sigma\}_{\mathrm{diff}}$ が定義される。次が成り立つ。

定理 2 (1) $\Sigma F^1 = 0, \ldots, F^r = 0, (r \leq n)$ によって定まる $P\mathrm{T}^*N$ の部分多様体で，行列 $(F^\lambda_{p_i})$ の階数が r とする。このとき
Σ 上の $\mathcal{I} = \{\theta, d\theta\}_{\mathrm{alg}}$ が積分条件を満たす $\Leftrightarrow$ Σ が coisotropic.
(2) $\pi(dF^\lambda)$ は，$\mathcal{I}$ の Cauchy characteristic を生成する。
(3) ditribution $C \subset \mathrm{T}N$ に対応する $\Sigma_C \in P\mathrm{T}^*N$ について
　C が完全積分可能 $\Leftrightarrow$ Σ_C が coisotropic.

• $P\mathrm{T}^*N$ の subbundle Σ は，N 上の関数 f に関しての微分方程式を与える。(eikonal equation). $[df] \in \Sigma$,　$F^\lambda\left(x^i, \dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0$ の形. 例：Σ が，fiber 座標で，$\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$ なら PDE は $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 = 0.$
• 積分多様体は，初期条件を設定して，独立な Cauchy characteristics ベクトル場 $\pi(F^\lambda), \lambda = 1, \ldots, r$ を利用して作ることができる。

5 EDS の Characteristic Variety

$(\mathcal{I} = (\theta^a, \omega^i, \pi_i^a), \Omega)$, LPS on M with indep, condition, E : $x \in M$ 積分要素,
$\xi = \xi_j dx^j = \omega^i \in J/I \cong E^*$ は E の余次元 1 の線形部分空間 E' を定義。
E' の <u>極空間 (polar space)</u> は 次。

$$H(E') = \{v \in \mathrm{T}_x M | \varphi(v, E') = 0, \quad \varphi \in \mathcal{I}^{(n)}\}.$$

$H(E')$ にかかわる $\varphi \in \mathcal{I}^{(n)}$ は，次の二種類の微分形式からなる。

$$\theta^a \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \omega^n \quad と \quad d\theta^a \wedge \omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^i} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega^j} \wedge \cdots \wedge \omega^n$$

E' の $n-1$ 個の基底を代入すると，極空間の記述式が得られる：

$$\text{(I)} \quad \theta^a = 0, \quad \xi_j \pi_i^a - \xi_i \pi_j^a = 0, \quad a = 1, \ldots, s, \ i, j = 1, \ldots, n.$$

一方， E の式は, もちろん

$$(\mathrm{II}) \quad \theta^a = 0, \quad \pi_i^a = 0, \quad a = 1, \ldots, s,\ i = 1, \ldots, n.$$

定義 8 この両者に差があるとき， すなわち， E' から n 次元積分要素への拡張が一意的でないとき，$[\xi]$ を $E^* \approx J/I$ における特性方向であるという。

(II) と（I) に 差があるかどうかは，関係式 $B_a^{\lambda i}\pi_i^a = 0, \quad (\lambda = 1, \ldots, r)$ と（I) とあわせて $\pi_i^a = 0$ が導かれるかどうかである。
（I) の関係式 $\xi_j\pi_i^a - \xi_i\pi_j^a = 0$ を $B_a^{\lambda i}\pi_i^a = 0$ に代入すると

$$B_a^{\lambda i}\xi_i\pi_j^a = 0$$

が得られる。これから，方程式 $\pi_j^a = 0$ が得られるかどうかは $r \times s$ 行列 $(B_a^{\lambda i}\xi_i)$ のランクによる。
特性方向の集合は, $B_a^{\lambda i}\xi_i$ を (λ, a) 成分とする行列の s 次小行列式が全て消える点の集合で， $P^*(J/I)$ の中の代数多様体。

定義 9 線形 LPS の各積分要素で特性方向の集合からなる代数多様体が定まる。この代数多様体をファイバーとする積分要素の集合上のバンドルを特性多様体 (characteristic variety) と呼ぶ。（積分多様体があれば，その上にも）。

計算例

　具体的な計算では，シンボル写像を考える。
手軽な例： a, b, c, d をパラメーターとする。

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{pmatrix}$$

をタブロとするとき，$(w^a \xi_i)$ をタブロの (a, i) 成分に対応させて，関係式を書き下す。

$$w^2\xi_1 = w^1\xi_2, \quad w^3\xi_1 = w^2\xi_2 = w^1\xi_3, \quad w^2\xi_3 = w^3\xi_2$$

なる 4 個の関係式を得る。これは $(w^a\xi_i)$ が tabeau に入る条件式である。

これから，$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$ をうつす 4×3 行列として上の関係式を書いて $\begin{pmatrix} -\xi_2 & \xi_1 & 0 \\ -\xi_3 & \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 & -\xi_1 \\ 0 & -\xi_3 & \xi_2 \end{pmatrix}$ を得る。これは，シンボル写像 $\sigma_\xi : W \to \mathrm{Hom}(V, W)/A$ を行列で書いたものである。これより，単射でない ξ の集合を求めると，characteristic variety が求まる。

高次の Tableau の場合

二階の PDE における linear Pfaff system は次のように記述されている。

$$
\begin{aligned}
\theta^a =&0, \quad \theta^a_i = 0, \qquad (\theta^a = dz^a - p^a_i dx^i, \theta^a_i = dp^a_i - p^a_{ij} dx^j) \\
d\theta^a \equiv&0 \quad \mathrm{mod}\ \{\theta^a, \theta^a_i\}, \qquad d\theta^a_i \equiv \pi^a_{ij} \wedge \omega^j, \quad \mathrm{mod}\ \{\theta^a, \theta^a_i\}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Omega = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n \neq 0
\end{aligned}
$$

symbol relation は

$$
(1)\pi^a_{ij} = \pi^a_{ji} \quad \mathrm{mod}\ \{\theta^a, \theta^a_i, \omega^i\}, \qquad (2) B^{\lambda ij}_a \pi^a_{ij} \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\ \{\theta^a, \theta^a_i, \omega^i\}
$$

ただし， $B^{\lambda ij}_a = B^{\lambda ji}_a$ である。この時，同様の議論で symbol matrix が

$$
(B^{\lambda ij}_a \xi_i \xi_j)
$$

であたえられることが示される。

例 二階単独二変数 PDE

$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ で与えられる PDE においては，$dF \equiv 0 \mod J$，$F_r dr + F_s ds + F_t dt \equiv 0 \mod J$ が symbol relation に他ならない。$B_1^{1(11)} = F_{p_{11}^1} = F_r$ などであり，この係数に $\xi^1\xi^1$ がついて，$F_r\xi^1\xi^1 + F_s\xi^1\xi^2 + F_t\xi^2\xi^2$ が symbol matrix になる。

6 包合性 (Involutivity)

EDS の理論において，積分多様体の構成を保証する基本定理はフロベニウスの定理と analytic category における Cartan-Kähler の定理である。前者はよく知られている。

定義 10 Involutivity
M 上の EDS $(\mathcal{I}, \Omega)$ が involutive とは，$\forall x \in M$ において，ordinary な integral element が存在することである。

定義 11 ordinary integral element integral element E が ordinary integral element であるとは，各 E_i が Kähler regular であるような integral flag

$$E_0 = \{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E, \quad \dim E_i = i$$

が取れることである。(「Kähler regular」とは，積分要素が $G_n(\mathcal{I})$ の点として，smooth な manifold point であり，polar equation の rank が locally constant .)

定理 3 (Cartan-Kähler) $(\mathcal{I},\Omega)$ が analytic な EDS で，involutive であるとすれば， $x \in M$ を通る (local な）integral manifold が存在する。

ordinary な E のための条件として，Cartan test が有名で有効である。

定理 4 (Cartan test) integral element E の integral flag で各 E_i が Kähler regular であるような

$$E_0 = \{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = E \quad \dim E_i = i$$

が取れるための条件は，$c_k = \mathrm{codim}\mathrm{H}(E_k)$ (polar space の $\mathrm{T}M$ での余次元）とするとき

$$\mathrm{codim}(G_n(\mathcal{I}) \subset G_n(\mathrm{T}M)) = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1}$$

が成立することである。

注. polar space : $\mathrm{H}(E_k) = \{v \in \mathrm{T}_x M | \varphi(v, E_k) = 0, \varphi \in \mathcal{I}^{(k+1)}\}$.

注. $s_k = c_k - c_{k-1}, s_0 = c_0, s_n = c_n - c_{n-1}, c_n = \dim M - n = s$ などと置く。

注. 一般に $E \subset \mathrm{H}(E_{k+1}) \subset \mathrm{H}(E_k)$.

タブロの包合性 (involutivity)

LPS の包合性はタブロで判定される。すなわち

定理 5 (LPS の involutivity) LPS $(\mathcal{I}, \Omega)$ が $x \in M$ で包合的であるためには
(1) x の近傍で，トーションが消えて (積分可能条件が満たされて），
(2) タブロ A_x が包合的である
が必要十分である。

実は，タブロ A の involutivity は，タブロを一次関数の集合とみて一階，定係数 PDE の解空間と考えるときに，Cartan test を通過することである。
• A のシンボル空間の基底 $B_a^{\lambda i}$ を使って，一階の PDE $B_a^{\lambda i}\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} = 0$ を作ると，$y^a = A^a_{\varepsilon i} x^i$ が解になっている。

ポイントは

(1) V^* の <u>一般的な基底</u> をとり，タブロ A をその基底で行列に表し，reduced character $s_1, \ldots, s_n$ を定義すること。ただし，$A \subset W \otimes V^* = \mathrm{Hom}(V, W)$.

(2) タブロ A の <u>延長 (prolongation)</u> $A^{(1)}$ がシンボルから定義される PDE の積分要素の空間と同一視されること。

A を $W \otimes V^* = \mathrm{Hom}(V, W)$ の部分空間と見るとき，一般的な基底とは，まず V_1^* を V^* の余次元 1 の部分空間とし，$A_1 = A \cap (W \otimes V_1^*) \subset W \otimes V^*$ の次元が最小になるように選ぶ。A_1 の A における余次元を s_1 とする。このような，V_1^* は，適当な空間の中で open dense にある。次に，$V_2^* \subset V_1^*$ のペアを $A \cap (W \otimes V_1^*)$ の余次元 $= s_1$ を満たし，$A_2 = A \cap (W \otimes V_2^*) \subset W \otimes V^*$ の次元が最小になるように余次元 2 の部分空間を選ぶ。A_2 の余次元を $s_1 + s_2$ とする。$A_k = A \cap W \otimes V_k^* \subset W \otimes V^*$ も順次同様に作る。このようにして，V^* の flag ができる。これに適合した V^* の基底が上で一般的と呼んでいるものであり，

$s_k = \dim A_k - \dim A_{k+1}$ が，タブロ A の reduced character と呼ばれているものである。このとき， $\mathrm{H}(E_k)$ の余次元は

$$c_k \equiv \mathrm{codim}\mathrm{H}(E_k) = s + s_1 + \cdots + s_k$$

と計算される ($s = \dim W$)。

タブロ A の (第一) 延長 は

$$A^{(1)} = (A \otimes V^*) \cap (W \otimes S^2(V^*))$$

のことで，考えている PDE の 2 次関数による解空間である。これが，一階の PDE $B_a^{\lambda i}\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} = 0$ の積分要素の空間と見なされるということである。このことは $\theta^a = dy^a - p_i^a dx^i = 0$ と $dp_i^a - p_{ij}^a dx^j = 0$ を $J^1(V, W)$ の (線形) 多様体 $B_a^{\lambda i} p_i^a = 0$ で記述して得られることから導かれる。
(タブロの involutivity は，この場合の Cartan test が成り立つことと同じもの)

定義 12 (tableau の involutivity) タブロ A が involutive とは

$$\dim A^{(1)} = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$$

が成り立つことである。

7 Characteristic Variety の integrability の証明の筋道

BCG3[Bryant, Chern, Gardner, Goldschmidt, Griffiths:
Exterior differential systems,Springer-Verlarg,New York (1986).]
による (次元 0 の場合の) 部分的証明の sketch は以下の通り。
証明する命題は
「LPS $\{\mathcal{I}, \Omega\}$ が involutive ならば，積分多様体 N の上の characteristic manifold $\Xi \subset P\mathrm{T}^*N$ は coisotorpic である。（ここでは， Ξ の fiber が 0 次元とする。）」

(1) Ξ と reduced character の関係：$s_1, \ldots, s_k = l \neq 0$, $s_{k+1} = \cdots = s_n = 0$ のとき，$\dim\Xi + 1 = k$ であり，一般的な点 $x \in \Xi$ で $\dim\ker\sigma_\xi(x) = 1$ なら $\mathrm{degree}\Xi = l$ である。

(2) タブロの reduced character は $s_1 = s, s_2 = \cdots = s_n = 0$ となる。π_1 を第一列とすると 行列 (π^a_i) は $(\pi_1\ C_2\pi_1\ C_3\pi_1\ \ldots\ C_n\pi_1)$，$C_a$ は $s \times s$ 行列。

(3) これが involutive なタブロになるのは $[C_a, C_b] = 0$ のとき。

(4) C_a の固有空間は共通であるが，さらに，対角化可能と仮定する。また，複素化も必要であるが...。

(5) Ξ を求める。それには，次のタブロ行列を見て，$s \times (n-1)$ 個の関係式:
$0 = w^a \xi_i - \lambda_i^a w^a \xi_1 = (\xi_i - \lambda_i^a \xi_1) w^a$，($i = 2, \ldots, s, a = 1, \ldots, s$) からシンボル行列 $s \times (n-1)$ 行 s 列 を得る。

$$(\pi_i^a) = \begin{pmatrix} \pi_1^1 & \lambda_2^1 \pi_1^1 & \cdots & \lambda_n^1 \pi_1^1 \\ \pi_1^2 & \lambda_2^2 \pi_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \pi_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_1^s & \lambda_2^s \pi_1^s & \cdots & \lambda_s^s \pi_1^s \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(タブロ行列)}$$

$\xi = \xi_1 \omega^1 + \cdots + \xi_n \omega^n$ が $\Xi(N)$ に入るのは $\tilde{\omega}^a = \omega^1 + \lambda_2^a \omega^2 + \cdots + \lambda_n^a \omega^n$ の s 個であることがわかる。

(6) $\tilde{\omega}^a$ は $\Xi(N)$ の section，特に $P\mathrm{T}^* N$ の section i.e. N 上の 1-form である。

(7) この場合，$\Xi(N)$ の isotropy は N 上で，$\tilde{\omega}^a$ が Frobenius integrable なことである (前に述べた定理の (3))。

(8) 関係式 $d\theta^a = \pi^a \wedge \tilde{\omega}^a \mod I$ から，$d\tilde{\omega}^a \equiv 0 \mod \tilde{\omega}^a$ を示す。(あらかじめ，$\mathcal{I}$ に Cauchy characteristic がないことを仮定しておけば $\{\theta^a, \omega^i, \pi_i^a\}$ が $\mathrm{T}_x^* M$ を張ることに注意して。)

問題：一般の LPS について，定理の証明を与えよ。

(終わり)

参考文献

[BCG^3] R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. Goldschmidt, and P. Griffiths, Exterior differential systems, Springer-Verlarg, New York (1986).

[BGH] R. Bryant, P. Griffiths and L.Hsu, Hyperbolic Exterior Differential Systems and their Conservation Laws, Part I, Selecta Mathematica, vol 1 (1995), 21–112.

[CB] T.A.Ivey and J.M.Landsberg, Cartan for Beginnerss, Graduate St. in Math., 61 , AMS (2003).

[Gab] O. Gabber, The integrability of characteritic variety, Amer.J. Math., vol. 103 (1981), 445–468.

[Gra] M. Granger, P. Maisonobe, A basic course on differential modules, in D-modules coherents et holonomes, P. Maisonobe et C. Sabbah ed., Travaux en cours no 45, Hermann(1993), 103–168.

[GQS] V. Guillemin, D. Quillen, and S. Sternberg, The integrability of characteristics, Comm. Pure and Appl. Math. 23(1970), 39–77.

[Mal] B. Mailgrange, La variété caractéristique d'un sytéme differentiel analytique, Ann. l'inst. Fourier, 50, no 2,(2000)491–518.

[Ma] 松田 道彦, 外微分形式の理論, 岩波書店 (1976).

[Sa] 佐藤　肇, 2 階偏微分方程式系の接触幾何学. 数学, **55** (2003), 155–165.

[SKK] M. Sato, TKawai, M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Springer Lect. Notes in Math. 287 (1973), 265–529.

[Sto] O. Stormark, Lie's structure approach to PDE systems, Encyclopedia of math. and appl. 80, Cambridge Univ. Press (2000).