第 1 〜 40 回 (1959 〜 1999 年) の国際数学オリンピック (IMO) の問題を紹介します．第 41 回 (2000 年) 以降の問題は数学オリンピック財団のホームページに掲載されていますので，そちらをご覧下さい．
誤訳の報告，疑問点の照会は安藤までご連絡下さい．下記問題の解答は

数学オリンピック財団編「数学オリンピック辞典」朝倉書店

にすべて掲載されていますので，そちらを参照して下さい．また，WEB をあちこち捜してもらえば，英語の解答が見つけられます．

1959 年 第 1 回 IMO ルーマニア大会

1. 任意の自然数 n について, $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ は既約分数であることを証明せよ.

2. $\sqrt{(x+\sqrt{2x-1})}+\sqrt{(x-\sqrt{2x-1})}=A$ であるとき, 実数 x がどのような値のとき, (a) $A=\sqrt{2}$, (b) $A=1$, (c) $A=2$ となるか? ただし, 根号の中には非負実数のみが許される.

3. a, b, c は実数とする. $\cos x$ に関する 2 次方程式

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

を考える. この方程式とすべて同じ根をもつ $\cos 2x$ に関する 2 次方程式を考える. $a=4$, $b=2$, $c=1$ のとき, $\cos x$ と $\cos 2x$ に関する 2 次方程式を比較せよ.

4. 与えられた斜辺の長さ c の直角三角形で, 斜辺に引かれた中線の長さが, 他の 2 辺の幾何平均に等しい三角形を構成せよ.

5. 線分 AB の内部に点 M を選ぶ. 正方形 $AMCD$ と正方形 $MBEF$ は直線 AB に関して同じ側にあり, AM と MB を各々の底辺とする. $AMCD$ と $MBEF$ の外接円の中心を各々 P, Q とし, これらの外接円の M 以外の交点を N とする. また直線 AF と BC の交点を N' とする.

(a) N と N' は一致することを証明せよ.

(b) 直線 MN は, 点 M の選び方に依らずに, ある定点 S を通ることを証明せよ.

(c) M が A と B の間を動くとき, 線分 PQ の中点の軌跡を求めよ.

6. 2 平面 P と Q は直線 p で交わっているとする. 点 A は平面 P 上にあり, 点 C は平面 Q 上に与えられれおり, かつ, A も B も直線 p 上にはないとする. AB と CD が平行である等脚台形 $ABCD$ で, 4 辺がある円に外接し, B, D が各々平面 P, Q 上にあるようなものを構成せよ.

1960 年 第 2 回 IMO ルーマニア大会

1. N は 3 桁の自然数で, N は 11 で割り切れ, かつ, $N/11$ は N の各桁の数の 2 乗の和に等しいという. このような N をすべて求めよ.

2. 以下の不等式が成立するのは実数 x がどのような値のときか?

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

3. 与えられた直角三角形 ABC の長さ a の斜辺 BC を n 等分する. ただし n は奇数である. この n 等分された線分達のうち BC の中点を含むものを線分 PQ とし, $\alpha = \angle PAQ$ とする. また, 点 A から斜辺 BC におろした垂線の長さを h とする. このとき次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\tan\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

4. 三角形 ABC で, 頂点 A, B から対辺へおろした垂線の長さが各々与えられた h_a, h_b で, A から BC の中点への中線の長さが与えられた m_a であるような三角形を構成せよ.

5. 立方体 $ABCDA'B'C'D'$ (面 $ABCD$ は $A'B'C'D'$ の真上にあるとする) を考える.
(a) 点 X が辺 AB 上を動き, 点 Y が辺 $B'D'$ 上を動くとき, 線分 XY に中点の軌跡を求めよ.
(b) 同上の条件下に, 線分 XY を $1:2$ に内分する点 Z の軌跡をもとめよ.

6. 直円錐と, その側面と底面に内接する球を考える. また直円柱が, この球に外接し, かつその底面は直円錐の底面と同じ平面上にある. V_1 を直円錐の体積, V_2 を直円柱の体積とする.
(a) $V_1 \neq V_2$ であることを証明せよ.
(b) 直円錐の形を動かすとき, $V_1 = kV_2$ なる実数 k の最小値を求めよ. また, k が最小となるときの, 直円錐の母線と底面のなす角を構成せよ.

7. 四角形 $ABCD$ は AB と CD が平行な等脚台形で, 上底は $CD = a$, 下底は $AB = c$ で高さ h である.
(a) 等脚台形の対称軸の上にある点 P で, $\angle BPC = 90°$ となるような点をすべて求めよ.
(b) 点 P から台形のいずれかへの底辺までの長さを計算せよ.
(c) 上記のような P が実際に存在するための条件を決定せよ.

1961 年 第 3 回 IMO ハンガリー大会

1. 連立方程式

$$\begin{aligned} x+y+z &= a \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2 \end{aligned}$$

を解け．ここに a, b は定数である．また, x, y, z が相異なる正の実数であるような解をもつために, a, b が満たすべき条件を求めよ．

2. 3 辺の長さが a, b, c の三角形があり, その面積を T とする．このとき $a^2+b^2+c^2 \geqq 4\sqrt{3}T$ であることを証明せよ．また等号が成立するのは, どのようなときか．

3. x についての方程式 $\cos^n x - \sin^n x = 1$ を解け．ただし n は自然数である．

4. 三角形 $P_1P_2P_3$ とその内部の点 P を考える．直線 P_1P, P_2P, P_3P は各々対辺と Q_1, Q_2, Q_3 で交わるとする．3 つの数 $\dfrac{P_1P}{PQ_1}$, $\dfrac{P_2P}{PQ_2}$, $\dfrac{P_3P}{PQ_3}$ のうち, 少なくともひとつは 2 以下であり, 少なくともひとつは 2 以上であることを証明せよ．

5. $AC=b$, $AB=c$, $\angle AMB=\omega$ である三角形 ABC を構成せよ．ただし, M は辺 BC の中点である．また, 構成可能であるための必要十分条件は,

$$b\tan\frac{\omega}{2} \leqq c < b$$

であることを証明せよ．ここで, 等号が成立するのは, どのような時か?

6. 平面 ε と, ε に関し同じ側の半空間にあって一直線上にない 3 点 A, B, C を考える．また, A, B, C で定まる平面は ε と平行ではないとする．平面 ε 上の 3 点 A', B', C' をとる．L, M, N を各々線分 AA', BB', CC' の中点とし, G を三角形 LMN の重心とする．(ただし, A', B', C' は LMN が三角形をなすような位置にあるものとする.) A', B', C' が平面 ε 上を動くとき, G に軌跡を求めよ．

1962 年 第 4 回 IMO チェコスロバキア大会

1. 以下の条件をみたす最小の自然数 n を求めよ.

(a) 十進法で n の 1 の位は 6 である.

(b) n から末尾の数字 6 を取り除いて先頭に移動すると, できた数は元の数 n の 4 倍になる.

2. 次の不等式をみたす実数 x を決定せよ.

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

3. 立方体 $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$, $A'B'C'D'$ は各々上底, 下底で, AA', BB', CC', DD' は平行) を考える. 点 X は正方形 $ABCD$ の周上を一定速度で $ABCDA$ の向きに動き, Y は X と同じ速さで正方形 $B'C'CB$ の周上を $B'C'CBB'$ の向きに動く. X と Y は同時に各々点 A, B' を出発する. このとき, 線分 XY の中点の軌跡を求めよ.

4. 方程式 $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$ を解け.

5. 円 K の周上に相異なる 3 点 A, B, C がある. K の周上の点 D を, 四角形 $ABCD$ にある円が内接するように, (定規とコンパスのみを用いて) 構成せよ.

6. 二等辺三角形を考える. r を外接円の半径, ρ を内接円の半径とする. この 2 つの円の中心の距離 d は, $d=\sqrt{r(r-2\rho)}$ であることを証明せよ.

7. 四面体 $SABC$ は次の条件を満たしている: ある相異なる 5 つの球があって, いずれの球も, 辺 SA, SB, SC, BC, CA, AB またはその延長線 6 本すべてに接する.

(a) $SABC$ は正四面体であることを証明せよ.

(b) 逆に, 正四面体にはそのような 5 つの球が存在することを証明せよ.

1963 年 第 5 回 IMO ポーランド大会

1. 方程式 $\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$ のすべての実数解 x を求めよ．ここに p は実パラメータである．

2. 点 A と線分 BC が与えられている．空間内の点で，その点を頂点として直交する 2 つの線分を，一方の線分が点 A を通り，他方の線分が線分 BC と交わるように描けるような点の軌跡を決定せよ．

3. すべての内角が等しい n 角形が，辺の長さを順に $a_1, a_2, \ldots, a_n$ とするとき，$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ をみたしているとする．このとき，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ であることを証明せよ．

4. 連立方程式

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= yx_1 \\ x_1 + x_3 &= yx_2 \\ x_2 + x_4 &= yx_3 \\ x_3 + x_5 &= yx_4 \\ x_4 + x_1 &= yx_5 \end{aligned}$$

の解 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ．ここに y はパラメータである．

5. $\cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2}$ であることを証明せよ．

6. ５人の生徒 A, B, C, D, E が競技をしている．ある予想では競技の順位は ABCDE の順であると言う．しかし，この予想は大きくはずれた．現実には，どの生徒も予想された順位ではなかったし，順位が連続して並ぶと予想されたどの 2 人の生徒もそのように並ばなかった．別の予想では，競技の順位は DAECB の順であると言う．この予想は少しはましで，丁度 2 人の順位は正しく，また，丁度 2 組の生徒達の順位が連続することを正しく言い当てた．さて，実際の順位はどのようであったか?

1964 年 第 6 回 IMO ソビエト大会

1. (a) 2^n-1 が 7 で割り切れるようなすべての正の整数 n を求めよ．

(b) 2^n+1 が 7 で割り切れるような正の整数 n は存在しないことを証明せよ．

2. a, b, c は三角形の 3 辺の長さとする．このとき次の不等式を証明せよ

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqq 3abc$$

3. 3 辺の長さが a, b, c の三角形 ABC に円が内接している．三角形 ABC のある辺に平行な内接円の 3 本の接線を考える．この各々の接線によって三角形 ABC から切り取られる 3 つの三角形について，各々の三角形の内接円を考える．これら 4 つの内接円の面積の和を a, b, c を用いて表わせ．

4. 17 人が互いに (どの人も他の全員と) 手紙で文通をしている．その手紙では，3 つの異なった話題だけが議論されている．どの 2 人の文通相手についても，いつも手紙の話題は同じ 1 つのことである．すると，ある 3 人を適当に選べばは，この 3 人は同一の話題について文通していることを証明せよ．

5. 平面上の相異なる 5 点があって，その中の 2 点を結ぶ直線達は，どの 2 本を選んでもも平行でも垂直でもなく，また一致もしないとする．各点から，他の 4 点同士を結ぶすべての直線に垂線 (直線) を引く．これらの垂線達の交点の個数は最大何個か求めよ．

6. 四面体 $ABCD$ の頂点 D と三角形 ABC の重心 D_0 とを結ぶ．それぞれ A, B, C を通り DD_0 と平行な直線を引き，この 3 直線と平面 BCD, CAD, ABD との交点を各々 A_1, B_1, C_1 とする．このとき，四面体 $ABCD$ の体積は，四面体 $A_1B_1C_1D_0$ の体積の $\dfrac{1}{3}$ であることを証明せよ．また，D_0 を三角形 ABC 内のどこか他の適当な点に選んで，上と同じ結果が成りたつようにすることはできるか?

1965 年 第 7 回 IMO 東ドイツ大会

1. $0 \leqq x \leqq 2\pi$ である実数 x で次の不等式をみたすものをすべて決定せよ.

$$2\cos x \leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2}$$

2. 未知数 x_1, x_2, x_3 に関する連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{aligned}$$

を考える. この係数は以下の条件をみたしている.
(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} は正の数である.
(b) それ以外の係数は負の数である.
(c) 各方程式において, 係数の和は正である.
このとき, 連立方程式は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 以外に解をもたないことを証明せよ.

3. 与えられた四面体 $ABCD$ において, 辺 AB, CD の長さを各々 a, b とする. ねじれの位置にある 2 直線 AB と CD の距離を d とし, それらのなす角を ω とする. AB と CD に平行な平面 ε によって, 四面体 $ABCD$ を 2 つに分割する. 平面 ε から AB, CD への距離の比を k とする. このとき, 四面体を分割した立体の体積の比を求めよ.

4. 4 つの実数 x_1, x_2, x_3, x_4 の集合で, どれを選んでも, その数に, 他の 3 つの数の積を足すと 2 になるようなものをすべて求めよ.

5. $\angle AOB < 90^\circ$ である鋭角三角形 OAB を考える. $M \neq O$ なる点 M から OA, OB へ垂線を引きその足を各々 P, Q とする. 三角形 OPQ の垂心を H とする. 点 M が (a) 辺 AB 上を動くとき, (b) 三角形 OAB の内点を動くとき, それぞれ H の軌跡を求めよ.

6. 平面上に n 点 $(n \geqq 3)$ の集合が与えられている. 各 2 点は線分で結ばれている. これらの線分のうち最も長いものの長さを d とする. このような長さ d の任意の線分を, この集合の**直径**と定義しよう. このとき, この集合の直径の個数は高々 n 個であることを証明せよ.

1966 年 第 8 回 IMO ブルガリア大会

1. 数学の競技で３つの問題 A, B, C が出題されている．参加者の中で１問以上正解した生徒は 25 人であった．問題 A が解けなかった生徒のについて, B を解けた生徒の人数は C を解けた生徒の人数の２倍である．A だけを解けた生徒の人数は, A 以外にもう１問以上解けた生徒の人数より１人多い．丁度１問だけ解けた生徒の中で, 半分の生徒は A が解けなかった．さて, B だけを解けた生徒は何人か?

2. ３辺の長さが a, b, c の三角形があり, その対角の頂角を各々α, β, γ とする．もし,

$$a + b = \tan\frac{\gamma}{2}(a\tan\alpha + b\tan\beta)$$

が成り立てば, 三角形は２等辺三角形であることを証明せよ．

3. 正四面体の４頂点からその外接球の中心までの距離の和は, ４頂点から中心以外の点までの距離の和より小さいことを証明せよ．

4. 各自然数 n と各実数 $x \neq k\pi/2^t$ ($t = 0$, 1,. . ., n で k は任意の整数) にたいし, 次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

5. 連立方程式

$$\begin{aligned}
|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_2 - a_1|x_1 \qquad\qquad\qquad + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 \qquad\qquad\qquad + |a_3 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 \qquad\qquad\qquad &= 1
\end{aligned}$$

を解け．ここで a_1, a_2, a_3, a_4 は相異なる実数である．

6. 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の内部に, 任意に各々点 K, L, M を選ぶ．三角形 AML, BKM, CLK のうち少なくとも１つの面積は, 三角形 ABC の面積の 1/4 以下であることを証明せよ．

1967 年 第 9 回 IMO ユーゴスラビア大会

1. $AB = a$, $AD = 1$, $\angle BAD = \alpha$ の平行四辺形 $ABCD$ がある．もし三角形 ABD が鋭角三角形ならば，4 頂点 A, B, C, D を中心とする半径 1 の 4 つの円によって平行四辺形が覆われるための必要十分条件は，$a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$ であることを証明せよ．

2. 正四面体の，ただひとつの辺だけの長さが 1 より大であるとき，その体積は 1/8 以下であることを証明せよ．

3. k, m, n は自然数，$m+k+1$ は素数で $n+1$ より大きいとする．また $c_s = s(s+1)$ とする．このとき，積 $(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdots(c_{m+n}-c_k)$ は積 $c_1c_2\cdots c_n$ で割り切れることを証明せよ．

4. $A_0B_0C_0$ と $A_1B_1C_1$ はいずれも鋭角三角形とする．三角形 $A_1B_1C_1$ と相似で，三角形 $A_0B_0C_0$ に外接する (しかも A_0 が辺 BC 上，B_0 が辺 CA 上，C_0 が辺 AB 上にあるものとする) すべての三角形 ABC を考える．そのような三角形のうちで面積が最大なものを決定し，それを構成せよ．

5. 数列 $\{c_n\}$ は，

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

で定義されている．ただし，a_1, a_2,..., a_8 は，ことごとくは 0 でない実数である．いま，数列 $\{c_n\}$ の中に 0 に等しい項が無限個あるものとする．このとき，$c_n = 0$ をみたす自然数 n をすべて決定せよ．

6. あるスポーツ大会において，n 日間 $(n>1)$ に，m 個のメダルが与えられる．第 1 日目に，1 個のメダルと，残りの $m-1$ 個のメダルの 1/7 が与えられる．第 2 日目には，2 個のメダルと，残りのメダルの 1/7 が与えられる．第 3 日目以降も同様で，最後の n 日目には残っている n 個のメダルが与えられる．さて，この大会は何日間行われ，授与されたメダルの総数は何個か?

1968 年 第 10 回 IMO ソビエト大会

1. 三辺の長さが連続する 3 つの整数で, ある一つの頂角がある別の頂角の 2 倍であるような三角形が, 丁度ひとつだけ存在することを証明せよ.

2. 自然数 x で, (十進法で表わしたときの) 各桁の数字の積が $x^2 - 10x - 22$ に等しいような x をすべて求めよ.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を未知数とする連立方程式

$$\begin{aligned}
ax_1^2 &+ bx_1 &+ c = x_2\\
ax_2^2 &+ bx_2 &+ c = x_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
ax_{n-1}^2 &+ bx_{n-1} &+ c = x_n\\
ax_n^2 &+ bx_n &+ c = x_1
\end{aligned}$$

を考える. ただし a, b, c は実数で $a \neq 0$ とする. $\Delta = (b-1)^2 - 4ac$ とおく. このとき以下のことを証明せよ.

(a) もし $\Delta < 0$ ならば, この連立方程式は解を持たない.
(b) もし $\Delta = 0$ ならば, この連立方程式はただ 1 組の解を持つ.
(c) もし $\Delta > 0$ ならば, この連立方程式は 2 組以上の解を持つ.

4. 任意の四面体にたいし, ある頂点を選べば, その頂点から出る 3 本の辺の長さと同じ 3 辺の長さをもつ三角形が存在することを証明せよ.

5. f は任意の実数 x にたいし定義され, 実数の値をとる関数で, ある正の定数 a が存在して, 任意の x にたいし関係式

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

が成立する.

(a) f は周期関数であることを証明せよ. (すなわち, ある正の数 b が存在して, 任意の x にたいし $f(x+b) = f(x)$ が成り立つことを証明せよ.)
(b) $a = 1$ にたいし, 上の条件を満たす関数で定数関数でないものの例をひとつあげよ.

6. 各自然数 n にたいし,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] = \left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \cdots$$

の値を求めよ.

1969 年 第 11 回 IMO ルーマニア大会

1. 以下の性質をもつ自然数 a が無限個存在することを証明せよ: $z = n^4 + a$ はどの自然数 n にたいしても素数ではない.

2. a_1, a_2,. . ., a_n は実定数, x は実変数とし,

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \frac{1}{4}\cos(a_3 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x)$$

とおく. もし $f(x_1) = f(x_2) = 0$ であれば, ある整数 m によって $x_2 - x_1 = m\pi$ となることを証明せよ.

3. k 本の辺の長さが a で, 残りの $6 - k$ 本の辺の長さが 1 であるような四面体が存在するために, 実数 $a > 0$ がみたすべき必要十分条件を, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ の各値にたいし, 決定せよ.

4. AB を直径とする半円弧 γ がある. C は γ 上の点で, A, B 以外の点とし, D は C から AB に下ろした垂線の足とする. AB に接する 3 つの円 γ_1, γ_2, γ_3 を以下のように定める. γ_1 は三角形 ABC の内接円とする. γ_2 と γ_3 は, いずれも CD と γ に接し, CD をはさんで反対側にある. このとき γ_1, γ_2, γ_3 は AB 以外の共通接線を持つことを証明せよ.

5. n 個の点 $(n > 4)$ が平面上に与えられていて, どの 3 点も同一直線上にないとする. すると, これらのうちの 4 点を頂点とする凸四角形が, 少なくとも $\binom{n-3}{2}$ 個存在することを証明せよ.

6. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$ をみたす任意の実数 x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 にたいし, 不等式

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成立するための必要十分条件を述べよ.

1970 年 第 12 回 IMO ハンガリー大会

1. M は三角形 ABC の辺 AB 上の点とする．r_1, r_2, r は各々三角形 AMC, BMC, ABC の内接円の半径とする．また, q_1, q_2, q は各々同上の三角形の傍接円のうち角 ACB 内にあるものの半径とする．このとき次の等式を証明せよ．

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \frac{r}{q}$$

2. a, b, n は 1 より大きい整数とし, a 進法と b 進法を考察する．a 進法で書かれた数 A_{n-1} と A_n があり, また, b 進法で書かれた数 B_{n-1} と B_n があって, 各々の記数法で,

$$\begin{aligned} A_n &= x_n x_{n-1} \cdots x_0, \qquad & A_{n-1} &= x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_0, \\ B_n &= x_n x_{n-1} \cdots x_0, \qquad & B_{n-1} &= x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_0, \end{aligned}$$

である．(ただし, $x_n \neq 0$, $x_{n-1} \neq 0$.) このとき $\dfrac{A_{n-1}}{A_n} < \dfrac{B_{n-1}}{B_n}$ である必要十分条件は $a > b$ であることを証明せよ．

3. 実数 a_1, a_2,..., a_n,... は条件 $1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots$ をみたしている．実数 b_1, b_2,..., b_n,... は以下のように定義されている．

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

(a) 任意の n にたいし $0 \leqq b_n < 2$ であることを証明せよ．
(b) $0 \leqq c < 2$ なる任意の c にたいし, 上の条件をみたすある a_0, a_1,... が存在して, 十分大きなすべての n にたいし $b_n > c$ とできることを証明せよ．

4. 集合 $\{\ n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5\ \}$ をうまく 2 つの部分集合に分割して, 一方の集合の要素の積が, 他方の集合の要素の積に等しくなるようにできるような, 正の整数 n をすべて決定せよ．

5. 四面体 $ABCD$ において, 角 BDC は直角である．また, D から平面 ABC に下ろした垂線の足 H は, 三角形 ABC の垂心に一致しているものとする．このとき,

$$(AB + BC + CA)^2 \leqq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

であることを証明せよ．また, どのような四面体のとき等号が成立するか?

6. 平面上に 100 個の点があり, どの 3 点も同一直線上にはない．これらのうちの 3 点を頂点とするすべての三角形を考える．そのうち鋭角三角形であるものは全体の 70% 以下であることを証明せよ．

1971 年 第 13 回 IMO チェコスロバキア大会

1. 以下の命題が $n=3$ と $n=5$ にたいして成立し, それ以外の $n>2$ なる自然数については偽であることを証明せよ: a_1, a_2,..., a_n が任意の実数のとき, $(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\geqq 0$ が成り立つ.

2. 9 個の点 A_1, A_2,..., A_9 を頂点とする凸多面体 P_1 を考える. P_i $(i=2, 3,\ldots, 9)$ は A_1 が A_i にくるように P_1 を平行移動した多面体とする. このとき P_1, P_2,..., P_9 のうちの少なくとも 2 つの多面体は, 共通内点をもつことを証明せよ.

3. 2^k-3 $(k=2, 3,\ldots)$ という形の整数全体の集合は, そのある無限部分集合で, その任意の 2 つの元は互いに素であるようなものを含むことを証明せよ.

4. 四面体 $ABCD$ のすべての面は鋭角三角形である. 以下のように定義された $XYZTX$ という形のすべての閉じた折れ線を考えよう: X は辺 AB 上の点で A, B 以外の点とする. 同様に, Y, Z, T は各々辺 BC, CD, DA の内点とする. このとき以下を証明せよ.

(a) $\angle DAB+\angle BCD\neq\angle CDA+\angle ABC$ ならば, 上記のような折れ線の中で長さが最小になるものは存在しない.

(b) $\angle DAB+\angle BCD=\angle CDA+\angle ABC$ ならば, 長さが最短になる折れ線が無限に存在して, それらの長さは, $2AC\sin(\alpha/2)$ である. ただし, $\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$ である.

5. 任意の自然数 m にたいして, 以下の性質をもつような, 平面上の点からなる有限集合 S が存在することを証明せよ:

> S に属する任意の点 A にたいし, S に属する丁度 m 個の点が存在して, A からの距離はすべて 1 である.

6. $A=(a_{ij})$ $(i, j=1, 2,\ldots, n)$ は, 非負整数を要素とする n 次正方行列とする. さらに, $a_{ij}=0$ である要素があれば, i 行目と j 列目の $(2n-1$ 個の$)$ 要素の和は n 以上であると仮定する. すると, A の全要素の和は $n^2/2$ 以上であることを証明せよ.

1972 年 第 14 回 IMO ポーランド大会

1. 十進法で 2 桁の整数 10 個から成る集合について, それから互いに交わらない 2 つの部分集合を適当に選んで, それらの要素の和が等しくなるようにできることを証明せよ.

2. $n \geqq 4$ ならば, 円に内接する任意の四角形について, それを, ある円に内接する n 個の四角形に分割できることを証明せよ.

3. m, n は任意の非負整数とする. このとき, $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ は整数であることを証明せよ.

4. 次の連立不等式の解 (x_1, x_2, x_3, x_4) をすべて求めよ.

$$
\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leqq 0 \\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leqq 0 \\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leqq 0 \\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leqq 0 \\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leqq 0
\end{aligned}
$$

ただし, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 は正の実数である.

5. f, g はすべての実数にたいし定義され, 実数の値をとる関数で, 任意の x, y について,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

をみたす. $f(x)$ が恒等的に 0 ではなく, かつ, 任意の x にたいし $|f(x)| \leqq 1$ をみたすならば, 任意の y にたいし $|g(y)| \leqq 1$ であることを証明せよ.

6. 任意に与えられた 4 枚の平行な平面にたいし, 各平面上に 1 点づつ頂点をもつ正四面体が存在することを証明せよ.

1973 年 第 15 回 IMO ソビエト大会

1. 点 O は直線 g 上の点で, $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$,..., $\overrightarrow{OP_n}$ は単位ベクトルであり, P_1, P_2,..., P_n は g を含む同一平面上の点で, かつ, g について同じ側にある (すなわち, 線分 P_iP_j が g と交わることはない) とする. n が奇数であれば, $|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}| \geqq 1$ であることを証明せよ.

2. 以下の性質をもつ空間内の点から成る有限集合 M が存在するか否か決定せよ:

M の全要素は同一平面上にはなく, M から任意の 2 点 A, B を選んだとき, M のそれ以外の 2 点 C, D が存在して, 直線 AB と直線 CD は平行になるが一致はしない.

3. a, b は実数で, 方程式 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ は少なくとも 1 個の実数解をもつとする. そのような全ての (a, b) の組について a^2+b^2 の最小値を決定せよ.

4. ある兵士は正三角形状の土地に地雷が埋まっていないか検査する任務を負っている. 地雷発見機は, その三角形の高さの半分に等しい半径の円内を調べることができる. この三角形の 1 つの頂点を出発した兵士が, 任務を完了するための最短経路を求めよ.

5. $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$, b は実数) という形の関数からなる集合 G が 以下の性質をもつとする.

(a) $f, g\in G$ ならば $g\circ f\in G$ である.

(b) $f\in G$ ならば $f^{-1}\in G$ である. ここで f^{-1} は $f(x)=ax+b$ の逆関数 $f^{-1}(x)=(x-b)/a$ である.

(c) 任意の $f\in G$ にたいし, ある実数 x_f が存在して, $f(x_f)=x_f$ をみたす.

このとき, ある実数 k が存在して, 任意の $f\in G$ にたいし $f(k)=k$ をみたすことを証明せよ.

6. a_1, a_2,..., a_n は n 個の正の実数とし, q は $0<q<1$ なる実数とする. このとき以下の条件をみたす n 個の実数 b_1, b_2,..., b_n が存在することを証明せよ.

(a) $a_k<b_k$ $(k=1, 2,\ldots, n)$

(b) $q<\dfrac{b_{k+1}}{b_k}<\dfrac{1}{q}$ $(k=1, 2,\ldots, n-1)$

(c) $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

1974 年 第 16 回 IMO 東ドイツ大会

1. 3人のプレーヤー A, B, C が次のようなゲームをしている．3枚の整数のかかれたカードがあり，その数字 p, q, r は $0 < p < q < r$ をみたす．3枚のカードはよく切ってから各人に1枚づつ配られる．配られたカードの数字は各人の点数表に加算されていく．そしてまた，カードをよく切って配る，というプロセスを，少なくとも，合計2回以上繰り返す．最終的に，A は 20 点，B は 10 点，C は 9 点を得た．また最終回に B に配られたカードは r であった．さて，最初の回に q のカードは誰のところに配られたか?

2. 三角形 ABC において，$|CD|$ が $|AD|$ と $|DB|$ の幾何平均であるような点 D が辺 AB 上に存在するための必要十分条件は，

$$\sin A \sin B \leqq \sin^2 \frac{C}{2}$$

であることを証明せよ．

3. どんな整数 $n \geqq 0$ にたいしても，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} 2^{3k}$ は 5 で割り切れないことを証明せよ．

4. 8×8 のチェス盤を，以下の条件を満たすように，重ならない p 個の長方形 (何個かのマスから成るものとする) に分割する方法を考える．

(i) どの長方形も白マスと同じ個数の黒マスを含んでいる．
(ii) i 番目の長方形に含まれる白マスの個数を a_i とすれば，$a_1 < a_2 < \cdots < a_p$ である．

上記の条件をみたす分割が存在する最大の p を求めよ．また，この p の値に対応する，可能な $a_1, a_2, \ldots, a_p$ をすべて決定せよ．

5. $S = \dfrac{a}{a+b+d} + \dfrac{b}{a+b+c} + \dfrac{c}{b+c+d} + \dfrac{d}{a+c+d}$ の取り得るすべての値を決定せよ．ただし，a, b, c, d は任意の正の実数である．

6. P は定数でない1変数多項式で，係数はすべて整数とする．$n(P)$ は $(P(k))^2 = 1$ を満たす整数 k の個数 (重複度は考えない) とする．このとき $n(P) - \deg P \leqq 2$ であることを証明せよ．ここに $\deg P$ は P の次数である．

1975 年 第 17 回 IMO ブルガリア大会

1. x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は実数で, $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$, $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ をみたすとする. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ を $y_1, y_2, \ldots, y_n$ の任意の置換 (並びかえ) とするとき, 次の不等式が成立することを示せ.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は正の整数の狭義単調増加 (すなわち, $i < j$ ならば $a_i < a_j$) な無限数列とする. すると任意の $p \geqq 1$ にたいし, $a_m = xa_p + ya_q$ (x, y はある正の整数, q は $q > p$ なる整数) と書けるような a_m が無限個存在することを証明せよ.

3. 三角形 ABC の各辺の外側に接して三角形 ABR, BCP, CAQ があり, $\angle BCP = \angle CAQ = 45°$, $\angle BCP = \angle ACQ = 30°$, $\angle ABR = \angle BAR = 15°$ である. このとき, $\angle QRP = 90°$, $QR = RP$ であることを証明せよ.

4. 十進法で 4444^{4444} の各桁の数字の和を A とし, A の各桁の数字の和を B とする. B の各桁の数字の和を求めよ.

5. 半径 1 の円周上に 1975 個の点を, その任意の 2 点間の距離が有理数であるように配置できるか否か決定し, 証明を与えよ.

6. 以下の条件をみたすような 2 変数多項式 P をすべて求めよ.

(i) 任意の正の整数 n と任意の実数 t, x, y にたいし, $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$ をみたす.

(ii) 任意の実数 a, b, c にたいし $P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0$ が成り立つ.

(iii) $P(1, 0) = 1$

1976 年 第 18 回 IMO オーストリア大会

1. 平面上の面積が 32 の凸四角形において, 向かい合う 1 組の辺とひとつの対角線の長さの和が 16 である. もう 1 本の対角線の可能な長さをすべて求めよ.

2. $P_1(x) = x^2 - 2$ とし, $j = 2, 3, \ldots$ にたいし $P_j(x) = P_1(P_{j-1}(x))$ とする. このとき, 任意の正の整数 n にたいし, 方程式 $P_n(x) = x$ の解はすべて実数で, 相異なる (重根をもたない) ことを証明せよ.

3. 直方体の箱に, 1 辺 1 の立方体がぎっしり隙間なく埋められている. 他方, この箱に, 体積 2 の立方体を, 各辺が箱の辺と平行であるように, できるだけたくさん入れると, 箱の容積の 40% になる. さて, この箱の 3 辺の長さとして考えられるものをすべて求めよ.

4. 総和が 1976 になる何個かの整数の積で, 最大なものを求めよ.

5. $q = 2p$ 個の未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ をもつ p 個の式よりなる連立方程式

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = 0
\end{array}
$$

を考える. ただし, 各係数 a_{ij} は集合 $\{ -1, 0, 1 \}$ の要素である. このとき, 以下の条件をみたす解 $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ が存在することを証明せよ.

(a) すべての x_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ は整数である.
(b) 少なくともひとつの j について $x_j \neq 0$ である.
(c) $|x_j| \leqq q$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$

6. 数列 $\{ n_n \}$ は次のように定義されている.

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 5/2, \quad u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

このとき, 正の整数 n にたいして, $[u_n] = 2^{[2^n - (-1)^n]/3}$ であることを証明せよ. ここに, $[x]$ は $\leqq x$ なる最大の整数をあらわす.

1977 年 第 19 回 IMO ユーゴスラビア大会

1. 正三角形 ABK, BCL, CDM, DAN が正方形 $ABCD$ の中にある．４つの線分 KL, LM, MN, NK の中点と，８つの線分 AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN の中点は, 正１２角形の１２個の頂点であることを証明せよ.

2. 実数の有限数列において, どの連続する 7 個の項の和も負であり, どの連続する 11 個の項の和も正である. このような数列の項数の最大値を決定せよ.

3. n は $n > 2$ なる整数とし, V_n は $1 + kn$ (ただし $k = 1, 2, \ldots$) という形の整数全体の集合とする．V_n の元 m が分解不能であるとは, $pq = m$ となるような V_n の元 p, q が存在しないことを言う．このとき, ある数 $r \in V_n$ が存在して, r は V_n の分解不能な元の積に，２通り以上の方法で表わされることを証明せよ．ただし, 単に掛け算の順序が異なっているだけのものは, 同じとみなす.

4. a, b, A, B は実定数で, $f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta$ とする．任意の実数 θ にたいし $f(\theta) \geqq 0$ が成り立つならば, $a^2 + b^2 \leqq 2$ かつ, $A^2 + B^2 \leqq 1$ であることを証明せよ.

5. a, b は正の整数とする．$a^2 + b^2$ を $a + b$ で割った商を q, 余りを r とする．$q^2 + r = 1977$ を満たすような (a, b) の組をすべて求めよ.

6. $f(n)$ は正の整数全体の集合上で定義され, 正の整数を値のとる関数とする．もし, 任意の正の整数 n にたいし $f(n+1) > f(f(n))$ が成り立てば, 各 n にたいし $f(n) = n$ であることを証明せよ.

1978 年 第 20 回 IMO ルーマニア大会

1. m, n は $1 \leqq m < n$ なる自然数で, 十進法で, 1978^m の下 3 桁と, 1978^n の下 3 桁は等しいとする. このような m, n のうち $m+n$ が最小なものを求めよ.

2. P は与えられた球の内部の点とする. P を始点とする互いに直交する 3 本の半直線が, 球と交わる点を U, V, W とし, 点 Q は PU, PV, PW で定まる直方体の頂点 P の対角線上に向かいあう点とする. P を始点とする直交 3 半直線をいろいろ動かすとき, 点 Q の軌跡を求めよ.

3. 正の整数全体の集合は $\{\ f(1),\ f(2),\ldots,\ f(n),\ldots\ \}$ と $\{\ g(1),\ g(2),\ldots,\ g(n),\ldots\ \}$ の交わりのない和集合であって, $f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots$, $g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots$, かつ, 任意の $n \geqq 1$ について $g(n) = f(f(n)) + 1$ をみたすとする. このとき, $f(240)$ の値を決定せよ.

4. $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC がある. 円が, 三角形 ABC の外接円に内接し, かつ, 辺 AB, AC と各々点 P, Q で接している. このとき, 線分 PQ の中点は三角形 ABC の内心に一致していることを証明せよ.

5. $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, 3,\ldots, n,\ldots)$ は相異なる正の整数から成る数列とする. このとき, 任意の自然数 n にたいし,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

が成立することを証明せよ.

6. 6 ケ国の委員達からなる国際会議がある. 委員は全部で 1978 人で, 1, 2,..., 1978 の番号が付けられている. このとき, ある委員の番号は, その国の他のある 2 人の委員の番号の和に等しいか, または, その国のある委員の番号の 2 倍に等しいことを証明せよ.

1979 年 第 21 回 IMO イギリス大会

1. p, q は自然数で

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

をみたすとする．このとき, p は 1979 の倍数であることを証明せよ．

2. 5角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ と $B_1B_2B_3B_4B_5$ を各々上底と下底とする5角柱がある．ふたつの5角形のすべての辺と, すべての線分 A_iB_j $(i,\ j = 1,\ldots, 5)$ は, 赤または青に塗られている．さらに, 5角柱の頂点を頂点とする三角形で, 3辺すべてが塗られている三角形は, 異なる色の辺をもつとする．このとき, 上下の5角形の 10 本の辺はすべて同じ色で塗られていることを証明せよ．

3. 2つの円が平面上で交わっている．A をその交点の一方とする．点 A を同時に出発した2つの点が, 各々の円周上を, それぞれ一定の早さで, 同じ向きにまわっている．そして, 2つの点は円周上を1周して同時に点 A に戻ってくる．このとき, 平面上のある定点 P が存在して, 常に, P から両方の動点への距離がひとしいことを証明せよ．

4. 平面 π と, この平面上の点 P と, π の外にある点 Q が与えられたとき, π 上の点 R で比 $(QP + PR)/QR$ が最大になるような点をすべて求めよ．

5. 以下の関係式達をみたすような非負実数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 が存在するような, 実数 a をすべてもとめよ．

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

6. A, E は正8角形の向かいあう頂点とする．蛙が頂点 A からジャンプを始める．E 以外のどの頂点からも, 蛙は隣接する2つの頂点のいずれへもジャンプできる．頂点 E についたとき, 蛙はそこで止まって留まっている．a_n は丁度 n 回のジャンプで A から E まで到達する相異なる道順の個数とする．このとき, $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $(n = 1, 2, 3,\ldots)$ であることを証明せよ．ここで, $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$ である．

1981 年 第 22 回 IMO アメリカ大会

1. 点 P は与えられた三角形 ABC の内部の点で, D, E, F は P から各々辺 BC, CA, AB へ降ろした垂線の足とする. 点 P を動かすとき,

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

の値を最小にするような点 P の位置をすべて決定せよ.

2. r は $1 \leqq r \leqq n$ なる整数とし, 集合 $\{\ 1,\ 2, \ldots,\ n\ \}$ の部分集合で r 個の元より成る集合すべてを考える. $F(n,r)$ は, これらの集合の最小値達の算術平均とする. このとき, $F(n,r)=\dfrac{n+1}{r+1}$ であることを証明せよ.

3. $m,\ n$ が $m,\ n \in \{\ 1,\ 2, \ldots,\ 1981\ \}$ かつ $(n^2-mn-m^2)^2=1$ をみたす整数であるとき m^2+n^2 のとりうる最大値を求めよ.

4. (a) ある n 個の連続する整数達の集合で, その集合の最大の元が, 残りの $n-1$ 個の元の最小公倍数の約数になっているようなものが存在するような, 整数 $n>2$ を決定せよ.

(b) 上の性質をみたす集合が丁度 1 個だけ存在するような, 整数 $n>2$ を求めよ.

5. 3 個の合同な円が 1 点 O を共有していて, 与えられた三角形の中にあり, 各円は, 三角形の 2 辺に接しているとする. このとき, 三角形の内心と外心と点 O は一直線上のあることを証明せよ.

6. 関数 $f(x,\ y)$ は任意の非負整数 $x,\ y$ に対し定義されていて,

(1) $f(0,\ y)=y+1$
(2) $f(x+1,\ 0)=f(x,\ 1)$
(3) $f(x+1,\ y+1)=f(x,\ f(x+1,\ y))$

を満足する. このとき $f(4,\ 1981)$ の値を決定せよ.

1982 年 第 23 回 IMO ハンガリー大会

1. 関数 $f(x)$ は任意の正の整数 n にたいし定義されていて, 非負整数の値をとる関数で, 任意の正の整数 m, n にたいし $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ または 1 である. また $f(2)=0$, $f(3)>0$, $f(9999)=3333$ をみたす. このとき, $f(1982)$ の値を決定せよ.

2. 三辺が a_1, a_2, a_3 の不等辺三角形 $A_1A_2A_3$ が与えられている (a_i は A_i の対辺である). 各 $i=1, 2, 3$ について, 点 M_i は辺 a_i の中点, 点 T_i は内接円と a_i の接点とする. また, 角 A_i の二等分線に関して T_i と対称な点を S_i とする. このとき, 3 直線 M_1S_1, M_2S_2, M_3S_3 は 1 点で交わることを証明せよ.

3. 正の実数からなる無限数列 $\{x_n\}$ で以下の条件を満たすものを考える.

$x_0=1$ で, 任意の $i \geqq 0$ にたいして $x_{i+1} \leqq x_i$ がなりたつ.

(a) 任意のこのような数列にたいし, ある $n \geqq 1$ が存在して

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqq 3.999$$

を満たすことを証明せよ.

(b) 任意の n にたいし

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4$$

を満たすような数列をひとつ例示せよ.

4. もし正の整数 n にたいし方程式 $x^3-3xy^2+y^3=n$ があるひと組の整数解 (x, y) をもてば, この方程式は少なくとも 3 組の整数解をもつことを証明せよ. また, $n=2891$ のとき, この方程式は整数解をもたないことを証明せよ.

5. 正 6 角形 $ABCDEF$ の対角線 AC, CE 上に各々点 M, N が $\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{CN}{CE}=r$ を満たすように与えられている. さらに, 点 B, M, N は一直線上にあると仮定するとき, r の値を求めよ.

6. S は一辺の長さが 100 の正方形で, L は S の内部の道であって, L は自分自身とは交わらず, 線分 A_0A_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}A_n$ ($A_0 \neq A_n$) から成る折線である. さらに, S の周上の任意の点 P にたいし, L 上のある点で P からの距離が 1/2 以下である点が存在する, と仮定する. このとき, L 上のある 2 点 X, Y を適当に選べば, X と Y の間の距離は 1 以下であり, かつ, X から Y までの L の道のりは 198 以上であるようにできることを, 証明せよ.

1983 年 第 24 回 IMO フランス大会

1. 正の実数上で定義され正の実数の値をとる関数 f で次のふたつの条件を満たすものをすべて求めよ.
(i) $f(xf(y)) = yf(x)$ が任意の正の実数 x, y に対し成り立つ.
(ii) $x \to \infty$ のとき $f(x) \to 0$ となる.

2. C_1, C_2 は各々点 O_1, O_2 を中心とする平面上の円で相異なる 2 点で交わるものとし, 点 A は C_1 と C_2 の交点の一方とする. C_1 と C_2 の共通接線のうち一方は, C_1 と点 P_1 で接し C_2 と点 P_2 で接するものとし, もうひとつの共通接線は C_1 と点 Q_1 で接し C_2 と点 Q_2 で接するものとする. さらに M_1 を線分 P_1Q_1 の中点, M_2 を線分 P_2Q_2 の中点とする. このとき, $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$ であることを証明せよ.

3. a, b, c は正の整数で, どのふたつも互いに素であるとする. このとき $2abc - ab - bc - ca$ は $xbc + yca + zab$ (ただし x, y, z は負でない整数) という形に表わせない最大の整数であることを示せ.

4. 三角形 ABC の三辺 AB, BC, CA 上のすべての点 (A, B, C を含む) の集合を $\mathcal{E}$ とする. $\mathcal{E}$ をどのように 2 つの部分集合に分割しても, 少なくとも一方の部分集合は, そこからある 3 点をうまく選べばそれが直角三角形になる. この命題は正しいか否か?

5. 10^5 以下の 1983 個の相異なる正の整数を適当に選べば, その中のどの 3 つの数も等差数列をなさないようにできる. この命題は正しいか否か?

6. a, b, c を三角形の 3 辺の長さをするとき,

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqq 0$$

が成り立つことを証明せよ. また等号が成立するのはいつか?

1984 年 第 25 回 IMO プラハ (チェコスロバキア) 大会

1. 非負実数 x, y, z が $x+y+z=1$ をみたすとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \leqq yz+zx+xy-2xyz \leqq \frac{7}{27}$$

2. 次の条件 (i), (ii) をみたす正整数 a, b の組を 1 組挙げよ.

(i) $ab(a+b)$ は 7 で割り切れない.

(ii) $(a+b)^7-a^7-b^7$ は 7^7 で割り切れる.

3. 平面上に異なる 2 点 O, A が与えられている. 平面上の点 O 以外の任意の点 X に対して, 線分 OA から反時計回りに OX までの角度を $a(X)$ $(0 \leqq a(X) < 2\pi)$ で表わす. $C(X)$ を, O を中心とし半径が $OX+\dfrac{a(X)}{OX}$ の円とする. 平面上の各点は, 有限個の色のうちいずれかの色で塗られている. このとき, ある点 Y を適当に選べば, $a(Y)>0$ であり, 円周 $C(Y)$ 上に点 Y と同じ色で塗られた点が存在することを証明せよ.

4. 四角形 $ABCD$ は凸四角形で, 直線 CD が AB を直径とする円に接するとする. このとき, 直線 AB が CD を直径とする円に接するための必要十分条件は, 直線 BC と AD が平行であることを証明せよ.

5. d は平面上の凸 n 角形 $(n>3)$ のすべての対角線の長さの和, p はその周の長さとする. このとき

$$n-3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

であることを証明せよ. ここに, $[x]$ は x を超えない最大の整数をあらわす.

6. a, b, c, d を $0<a<b<c<d$ かつ $ad=bc$ をみたす奇数とする. いま, ある整数 k, m に対して, $a+d=2^k$ かつ $b+c=2^m$ をみたすとすれば, $a=1$ であることを示せ.

1985 年 第 26 回 IMO ヘルシンキ (フィンランド) 大会

1. ある円に内接している四角形 $ABCD$ の辺 AB 上に中心を持つ (別の) 円が, 他の 3 辺に接している. このとき, $AD + BC = AB$ であることを証明せよ.

2. n, k を互いに素な自然数で $k < n$ とする. 集合 $M = \{\ 1, 2, \ldots, n-1\ \}$ に属する各元は, 青または白で塗られていて, 次の条件をみたすとする.

(i) 任意の $i \in M$ にたいし, i と $n - i$ は同色である.
(ii) $i \neq k$ なる任意の $i \in M$ に関して, i と $|i-k|$ は同色である.

このとき, 集合 M のすべての元は同色であることを証明せよ.

3. 整数係数多項式 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ に対し, 奇数である係数の個数を $w(P)$ で表わす. また, $i = 0, 1, 2, \ldots$ にたいし, $Q_i(x) = (1+x)^i$ とおく. $i_1, i_2, \ldots, i_n$ が $0 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ をみたす整数であるとき, 不等式

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \geqq w(Q_{i_1})$$

であることを証明せよ.

4. 26 より大きい素因数を持たない 1985 個の相異なる正の整数からなる集合 M が与えられている. このとき, M のある相異なる 4 つの元から成るある部分集合で, 4 つの元の積はある整数の 4 乗として表わせるようなものが存在することを証明せよ.

5. 三角形 ABC の 2 頂点 A, C を通り, O を中心とする円が, 線分 AB, BC と交わる (A, C 以外の) 点を各々 K, N とする. また, 三角形 ABC, KBN の外接円達の 2 交点を B, M とする. このとき, $\angle OMB$ は直角であることを示せ.

6. 任意の実数 x_1 に関して, 数列 $x_1, x_2, \ldots$ を, 各 $n \geqq 1$ にたいし, $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \dfrac{1}{n} \right)$ で定める. このとき, ある実数 x_1 がただ 1 つ存在して, 任意の自然数 n に対して $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ をみたすことを証明せよ.

1986 年 第 27 回 IMO ワルシャワ大会

1. d を 2, 5, 13 以外の任意の正整数とする．このとき, 集合 $\{\, 2, 5, 13, d \,\}$ から相異なる２つの要素 a, b を適当に選べば $ab - 1$ が完全平方数にならないようにできることを示せ.

2. 平面上に $\triangle A_1A_2A_3$ が与えられている．また, その平面上の勝手な位置の１点 P_0 を選ぶ．$s \geqq 4$ に対して, $A_s = A_{s-3}$ と定める．このとき, 平面上の点列 P_1, P_2,... を以下のように定める:

「P_{k+1} は点 P_k を点 A_{k+1} を中心とし, 時計まわりに 120° 回転して得られる点とする ($k = 0, 1, \ldots$).」

さて, $P_{1996} = P_0$ が成り立つとすれば, $\triangle A_1A_2A_3$ は正三角形であることを証明せよ.

3. 正５角形の各頂点の１つずつ整数を割り当て、それら５つの整数の和が正になるようにする．連続する３個の頂点に割り当てられた整数をそれぞれ x, y, z とする．このとき $y < 0$ ならば次の操作を行う:

３つの数 x, y, z をそれぞれ $x + y$, $-y$, $z + y$ で置き換える.

５つの整数のうち少なくとも１つが負である限り、上述の操作を繰り返し実行する．有限回の操作の後、この手続きが完了するか否か決定せよ.

4. A, B は平面上の点 O を中心とする正 n 角形 ($n \geqq 5$) の隣接する２頂点とする．三角形 OAB に合同な三角形の紙片がある．この紙片を $\triangle XYZ$ と呼ぶ．はじめ $\triangle OAB$ の位置に重ねておいてある $\triangle XYZ$ を次の規則に従って動かす:

頂点 X はこの正 n 角形の内部を動き, 頂点 Y, Z はともに正 n 角形の周上全体を動く.

このとき, 点 X の軌跡を図示せよ.

5. f は非負実数上で定義された, 次の条件 (1), (2), (3) をみたす非負実数値関数とする.

(1) $f(xf(y))f(y) = f(x + y) \qquad (x, y \geqq 0)$
(2) $f(2) = 0$
(3) $0 \leqq x < 2$ のとき $f(x) \neq 0$

このような関数 f をすべて求めよ.

6. 座標平面上に, 有限個の格子点からなる集合 A が与えられている．A の点のいくつかを赤で,A の残りの点を白で, 次の条件 $(*)$ をみたすように塗り分ける可能か否か?

$(*)$ 座標軸 (x 軸または y 軸) に平行な任意の直線 l に対して, l 上の白点の個数と赤点の個数の差 (の絶対値) が１以下である.

1987 年 第 28 回 IMO バハナ大会

1. 集合 $\{ 1, 2,\ldots, n \}$ $(n \geqq 1)$ 上の置換のうちで, ちょうど k 個の不動点を持つものの個数を $P_n(k)$ とする. このとき, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = n!$$

2. 鋭角三角形 ABC に関して, $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を L, $\angle A$ の二等分線と $\triangle ABC$ の外接円の交点を N とする. また, 点 L から AB, AC に下ろした垂線の足を各々 K, M とする. このとき, $\triangle ABC$ と四角形 $AKNM$ の面積は等しいことを証明せよ.

3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ をみたす実数 $x_1, x_2,\ldots, x_n$ が与えられている. このとき, 任意の整数 k $(\geqq 2)$ に対して, 次の条件 (1), (2), (3) をみたす整数 $a_1, a_2,\ldots, a_n$ が存在することを示せ.

(1) $(a_1, a_2,\ldots, a_n) \neq (0, 0,\ldots, 0)$
(2) $|a_i| \leqq k-1 \qquad (i = 1, 2,\ldots, n)$
(3) $|a_a x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n| \leqq \dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$

4. $\mathbb{Z}_0$ を非負整数全体の集合とする. 関数 $f\colon \mathbb{Z}_0 \to \mathbb{Z}_0$ で, 任意の $n \in \mathbb{Z}_0$ に対し
$f(f(n)) = n + 1987$
をみたすものは存在しないことを示せ.

5. n は 3 以上の任意の整数とする. このとき, 平面上に次の条件をみたすような n 個の点が存在することを示せ.
“任意の 2 点間の距離は無理数で, どの 3 点も必ず三角形を作り, その面積は正の有理数である.”

6. n を 2 以上の整数とする. $0 \leqq k \leqq \sqrt{\dfrac{n}{3}}$ をみたす任意の整数 k に対して, $k^2 + k + n$ が素数ならば, $0 \leqq k \leqq n-2$ をみたす任意の整数 k に対して, $k^2 + k + n$ は素数であることを示せ.

1988 年 第 29 回 IMO シドニー大会

1. ある平面上に半径をそれぞれ R, r $(R > r)$ とする同心円 C_1, C_2 が与えられている. 円 C_2 上に定点 P を, 円 C_1 上に動点 B を取る. 直線 BP と円 C_1 の点 B 以外の交点を C とし, 点 P で直線 BP と直交する直線 l と円 C_2 の交点を A とする. ただし, 直線 BP が円 C_2 に接するときは $A = P$ とする.

(1) $BC^2 + CA^2 + AB^2$ の取り得る値をすべて求めよ.

(2) 線分 AB の中点が描く軌跡を求めよ.

2. n を正整数とする. 集合 B と B の部分集合 $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ は次の 3 つの条件 (a), (b), (c) をみたすものとする.

(a) どの A_i もちょうど $2n$ 個の元から成る.
(b) どの $A_i \cap A_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 2n+1)$ もちょうど 1 つの元から成る.
(c) B のどの元も少なくとも 2 つの部分集合 A_i に属する.

また, B の各元に 0 または 1 のいずれかを適当に対応させれば, どの A_i も, ちょうど n 個の 0 が対応する元をもつという. このようなことが可能な n を決定せよ.

3. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は以下の条件をみたすものとする.

$$f(1) = 1,\ f(3) = 3$$
$$f(2n) = f(n)$$
$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$$
$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

このとき $f(n) = n$ かつ $n \leqq 1988$ をみたす正整数 n の個数をもとめよ.

4. 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqq \frac{5}{4}$ をみたす実数 x の集合を数直線上に共通部分をもたない区間の和として表わすとき, これらの区間の長さの総和は 1988 であることを示せ.

5. $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形とする. 点 A から斜辺 BC に下した垂線の足を D とする. $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の内心 O_1, O_2 を結ぶ直線と AB, AC の交点を各々 K, L とする. $\triangle ABD$ と $\triangle AKL$ の面積を各々 S, T とするとき, 不等式 $S \leqq 2T$ が成り立つことを示せ.

6. a, b は $a^2 + b^2$ が $ab + 1$ で割り切れるような正整数とする. このとき, $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ が完全平方数であることを示せ.

1989 年 第 30 回 IMO 西ドイツ（ブラウンシュバイク）大会

1. 集合 $\{ 1, 2, \ldots, 1989 \}$ を次の条件 (i), (ii) を満たす 117 個の互いに共通の要素をもたない集合 A_i ($i = 1, 2, \ldots, 117$) に分割できることを示せ.

(i) 各 A_i はちょうど 117 個の要素を含む.
(ii) 各 A_i に属する要素の和 (合計) は等しい.

2. 鋭角三角形 ABC が与えられている. $\angle A$ の 2 等分線が $\triangle ABC$ の外接円と交わる点を A_1 とする. B_1, C_1 も同様に定める. $\angle B, \angle C$ の外角の 2 等分線と直線 AA_1 の交点を A_0 とする. B_0, C_0 も同様に定める. このとき, 次のことを証明せよ.

(i) $\triangle A_0B_0C_0$ の面積は六角形 $AC_1BA_1CB_1$ の面積の 2 倍である.
(ii) $\triangle A_0B_0C_0$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の 4 倍以上である.

3. n, k をともに正整数とする. また次に示す条件 (i), (ii) をともに満たす平面上の n 個の点からなる集合を S とする.

(i) S のどの 3 点をとっても同一直線上にない.
(ii) S の各点 P に対して P から等しい距離にあるような S の点が k 個以上存在する.

このとき, 不等式 $k < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$ が成り立つことを証明せよ.

4. 凸四角形 $ABCD$ が与えられている. この四角形において, 頂点 C と D は直線 AB に関して同じ側に位置し, 3 辺 AB, AD, BC の間に等式 $AB = AD + BC$ が成立している. 直線 CD への距離が h であり, $AP = h + AD$, $BP = h + BC$ を満たす点 P がこの四角形の内部にある. このとき, 不等式

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BD}}$$

が成り立つことを証明せよ.

5. 任意に与えられた正整数 n に対して $k+1, k+2, \ldots, k+n$ のいずれもが素数の整数乗でないような正整数 k が存在することを示せ.

6. n は正整数とする. 集合 $\{ 1, 2, \ldots, 2n \}$ の置換 $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ が性質 P をみたすとは, 少なくとも 1 つの $i \in \{ 1, 2, \ldots, 2n-1 \}$ が存在し, $|x_i - x_{i+1}| = n$ が成り立つときを言う. 任意の n に対して, 性質 P をみたす置換の個数は性質 P をみたさない置換の個数より多いことを証明せよ.

1990 年 第 31 回 IMO 北京大会

1. 円の 2 つの弦 AB, CD がその内部の点 E で交わっている．点 M を線分 EB 上の E, B 以外の点とする．次に 3 点 D, E, M を通る円を描く．点 E において円 DEM に接する直線が 2 直線 BC, AC と交わる点をそれぞれ F, G とする． $\dfrac{AM}{AB} = t$ とするとき, $\dfrac{EG}{EF}$ を t を用いて表わせ.

2. $n \geqq 3$ とする．円周上の $2n-1$ 個の異なる点の集合を E とする．E の点のうち丁度 k 個を黒に塗る色分けについて考える．このような色分けのうちで, 次の条件を満たすものを「良い」色分けと呼ぶことにする:

「黒の 2 点を適当に選べば, その 2 点による分割でつくられる 2 つの弧のうち一方は, その内部に丁度 n 個の E の点を含むようにできる 」

E のどの k 個の点を黒に塗っても, それがつねに「良い」色分けになるような最小の k の値を決定せよ.

3. $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数となるような 1 より大きい整数 n をすべて決定せよ.

4. Q^+ を正の有理数全体の集合とする．このとき, 次の条件をみたす関数 $f\colon Q^+ \to Q^+$ を 1 つ作れ:

条件: 任意の x, $y \in Q^+$ に対して, $f(xf(y)) = \dfrac{f(x)}{y}$.

5. 初めに整数 $n_0 > 1$ が与えられている．2 人の競技者 A と B が次のルールに従って交互に整数を選ぶゲームをする．選ばれた整数を順に n_1, n_2, n_3,... とする.

ルール: A は n_{2k} を知った後に, $n_{2k} \leqq n_{2k+1} \leqq n_{2k}^2$ をみたす整数 n_{2k+1} を選ぶ．B は n_{2k+1} を知った後に, $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ が素数の正整数乗になるように整数 n_{2k+2} を選ぶ.

競技者 A が 1990 を選ぶことができれば A の勝ちとし , 競技者 B が 1 を選ぶことができれば B の勝ちと定める.

このとき, 次の (a), (b), (c) のそれぞれについて n_0 がどのような値のときであるか決定せよ.

(a) B が途中でどのように整数を選んでも, A が必ず勝てる方法がある.

(b) A が途中でどのように整数を選んでも, B が必ず勝てる方法がある.

(c) どちらの競技者にも必勝法がない (引き分けになる).

6. 次の 2 つの条件 (a), (b) をともにみたす凸 1990 角形が存在することを証明せよ.

(a) すべての内角は等しい.

(b) この多角形の 1990 個の辺の長さは 1^2, 2^2, 3^2,..., 1989^2, 1990^2 の適当な並べ変えである.

1991 年 第 32 回 IMO スウェーデン (シエナ) 大会

1. $\triangle ABC$ が与えられている. $\triangle ABC$ の内心を I とし, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の 2 等分線が対辺と交わる点をそれぞれ A', B', C' とするとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqq \frac{8}{27}$$

2. n は $n > 6$ なる整数とする. n より小さく, かつ n と互いに素である自然数を全部並べて得られる数列 a_1, a_2,. . ., a_k が等差数列, すなわち, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} > 0$ を成すとする. このとき, n は素数または 2 の巾乗 (2 の自然数乗) であることを証明せよ.

3. $S = \{\ 1, 2, 3, \ldots, 280\ \}$ とする. 次の条件を満たす最小の自然数 n を決定し, その理由とともに記せ.

条件: S のいかなる n 元集合 (n 個の要素からなる S の部分集合) に対しても, その n 元部分集合から 5 個の要素が選べ, それら 5 個の要素のどの 2 も互いに素 (1 以外の公約数をもたない) である.

4. G は k 本の辺をもつ連結なグラフとする. このとき, G のどの辺にも 1 から k のいずれか 1 個の自然数を割り当て, 異なる 2 辺には異なる自然数が割り当てられるようにする. 次の条件を満たすような割り当て方を構成できることを示せ.

条件: 2 本以上の辺が接続するどの頂点においても, その頂点に接続する辺 (達) に割り当てられた自然数 (の集合) の最大公約数は 1 である.

5. $\triangle ABC$ の内部に 1 点を勝手にとり, その点を P とする. このとき, 3 つの角 $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ のうちの少なくともひとつの角は 30° 以下であることを証明せよ.

6. 実数列 x_0, x_1, x_2,. . . が有界であるとは, ある定数 C が存在して, すべての非負整数 $i \geqq 0$ に対して, $|x_i| \leqq C$ が成り立つことである.

a (> 1) は任意に与えられて実定数とする. このとき, 次の不等式をみたす有界無限実数列: x_0, x_1, x_2,. . . の例をひとつ与えよ.

すべての異なる非負整数 i, j に対して $|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geqq 1$.

1992 年 第 33 回 IMO モスクワ (ロシア) 大会

1. $(a-1)(b-1)(c-1)$ が $abc-1$ の約数となるような整数 $a, b, c, 1 < a < b < c,$ をすべて求めよ.

2. $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ をみたす関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべて求めよ.

3. 空間に 9 個の点が置かれている. どの 4 点も同一平面上にない. どの 2 点も辺 (線分) で結ばれている. 各々の辺は、青に塗るか、赤に塗るか、あるいは (色を) 塗らずにおくかのいずれかとする. このとき、次の条件を満たす最小の n を求めよ.

条件: 丁度 n 本の辺を塗ると、必ず、3 辺とも同じ色で塗られた三角形が存在する.

4. 平面上に円 C と、この円に接する直線 l、および、l 上の点 M がある. 次の条件をみたす点 P の軌跡を求めよ.
条件： l 上に 2 点 Q, R が存在して, M が線分 QR の中点となり、かつ C が三角形 PQR の内接円となる.

5. S は 3 次元座標空間の有限個の点の集合である. S_x, S_y, S_z はそれぞれ、 S の点の yz-平面, zx-平面, xy-平面への正射影からなる点の集合である. 次を証明せよ.

$$|S|^2 \leqq |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

ここに $|A|$ は有限集合 A の要素の個数である.

6. 正整数 n に対して、$S(n)$ は次の条件をみたす最大の整数とする.
条件: すべての正整数 $k \leqq S(n)$ に対して、 n^2 を k 個の正の平方数の和として書き表すことができる.

- **a)** すべての $n \geqq 4$ に対して, $S(n) \leqq n^2 - 14$ を証明せよ.
- **b)** $S(n) = n^2 - 14$ となる正整数 n を 1 つ示せ.
- **c)** $S(n) = n^2 - 14$ をみたす正整数 n は無限個あることを証明せよ.

1993 年 第 34 回 IMO イスタンブール (トルコ) 大会

1. $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ とおき, n は 1 より大きな整数とする. このとき $f(x)$ を 1 次以上の整数係数多項式ふたつの積に分解することは不可能であることを証明せよ.

2. 点 D は鋭角三角形 ABC 内の点で $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}+90^\circ$, $\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}$ をみたすものとする.
(a) $\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}$ の値を求めよ.
(b) $\triangle\mathrm{ACD}$, $\triangle\mathrm{BCD}$ の外接円の点 C における接線は直交することを証明せよ.

3. 無限に広いチェス盤上で次の遊びをする. 開始時には n^2 個の駒が $n\times n$ の正方形状に並べられている. ひとつのマスにはひとつの駒しか置けない. このゲームで許される動きは, 縦隣りまたは横隣りに駒があるときそれをひとつ飛び越してふたつとなりの空いたマスに移動することのみである. このとき飛び越された駒は盤上から取り除かれる. それでは盤上に駒をひとつだけ残してゲームを終えることができるような n を決定せよ.

4. 平面上の三点 P, Q, R に対し三角形 PQR の三つの高さのうち最小の値を m(PQR) と書く. (ただし P, Q, R が一直線上にあるときは $\mathrm{m(PQR)}=0$ とする.) A, B, C を平面上の与えられた点とする. X を平面上の任意の点とするとき次を証明せよ.

$$\mathrm{m(ABC)}\leqq\mathrm{m(ABX)}+\mathrm{m(AXC)}+\mathrm{m(XBC)}$$

5. $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ とする. 関数 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ で以下の条件をみたすものが存在するか否か決定せよ.

$f(1)=2$
$f(f(n))=f(n)+n$ 　　$n\in\mathbb{N}$ は任意
$f(n)<f(n+1)$ 　　$n\in\mathbb{N}$ は任意

6. n は 1 より大きな整数とする. n 個のランプ $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ が円周上に並んでいる. 各ランプは ON または OFF のいずれかの状態をとれる. 一連の操作 $S_0, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ を行う. 操作 S_j はランプ L_j の状態のみに影響をおよぼす (他のランプの状態を変えない) 次のようなものである.

もし L_{j-1} が ON なら S_j により L_j の ON, OFF の状態は反転する.
もし L_{j-1} が OFF なら S_j により L_j の状態は変わらない.

ランプには modulo n で番号がつけられている. すなわち $L_{-1}=L_{n-1}$, $L_0=L_n$, $L_1=L_{n+1}$,... 最初すべてのランプは ON である. このとき以下のことを証明せよ.

(a) ある正整数 $M(n)$ が存在し, $M(n)$ 回目の操作の直後にすべてのランプが ON になる.
(b) n が 2^k の形ならば, n^2-1 回目の操作の直後にすべてのランプが ON になる.
(c) n が 2^k+1 の形ならば, n^2-n+1 回目の操作の直後にすべてのランプが ON になる.

1994 年 第 35 回 IMO 香港大会

1. m, n は正整数、$a_1, a_2,\ldots, a_m$ は集合 $\{1, 2,\ldots, n\}$ の相異なる要素とする．さらに $a_i+a_j \leqq n$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq m)$ であれば $a_i + a_j = a_k$ となるような k $(1 \leqq k \leqq m)$ が必ず存在するものとする．このとき次の不等式を示せ．

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}$$

2. $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC について、以下の作図をする．

(i) M は BC の中点で、O は直線 AM 上の点で OB が AB と垂直になるような点とする．

(ii) Q は線分 BC 上の点で B, C と異なる点とする．

(iii) E は直線 AB 上の点、F は直線 AC 上の点で E, Q, F は同一直線上にあるが、相異なるものとする．

このとき、OQ が EF と垂直であるための必要十分条件は $QE = QF$ であることを証明せよ．

3. 正整数 k に対し、$f(k)$ は、集合 $\{k+1, k+2,\ldots, 2k\}$ の要素のうち二進法で表わしたとき数字 1 が丁度 3 個現れるような要素の個数とする．

(a) 任意の正整数 m に対し、$f(k) = m$ をみたすような正整数 k が少なくともひとつは存在することを証明せよ．

(b) $f(k) = m$ をみたすような k がただひとつしか存在しないような正整数 m をすべて決定せよ．

4. $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ が整数になるような正整数 (m, n) の組をすべて決定せよ．

5. S は -1 より大きい実数全体の集合とする．次の二条件をみたす関数 $f\colon S \to S$ をすべて見つけよ．

(i) S の任意の要素 x, y について $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ が成り立つ．

(ii) $\dfrac{f(x)}{x}$ はふたつの区間 $-1 < x < 0$ および $0 < x$ でおのおの狭義単調増加である．

6. 正整数から成る集合 A で次の性質をみたすものが存在することを示せ．

無限個の素数から成る任意の集合 S に対し、ある $k \geqq 2$、およびある正整数 $m \in A$ と $n \notin A$ で m, n がいずれも S に属する k 個の相異なる要素の積で書けるようなものが存在する．

1995 年 第 36 回 IMO トロント (カナダ) 大会

1. A, B, C, D は一直線上の 4 つの点で, この順序に並んでいる. AC を直径とする円と BD を直径とする円の交点を X と Y とする. 直線 XY は BC と点 Z で交わる. P を直線 XY 上の, Z と異なる点とする. AC を直径とする円と直線 CP との交点を C と M, BD を直径とする円と直線 BP との交点を B と N とする. このとき 3 つの直線 AM, DN, XY は一点で交わることを証明せよ.

2. a, b, c は正の実数とし, $abc = 1$ とする. このとき, $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(c+a)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geqq \dfrac{3}{2}$ を証明せよ.

3. 平面上の n 個の点 A_1, A_2,..., A_n と実数 r_1, r_2,..., r_n で, 次の条件 (i), (ii) を満たすものが存在するような整数 $n > 3$ をすべて決定せよ.

(i) A_1, A_2,..., A_n のうちのどの 3 点も一直線上にはない.
(ii) すべての i, j, k $(1 \leqq i < j < k \leqq n)$ について, $\triangle A_iA_jA_k$ の面積は $r_i + r_j + r_k$ に等しい.

4. 正の実数からなる数列 $\{ x_0, x_1, \ldots, x_{1995} \}$ で, 次の 2 つの条件を満足するものが存在するような x_0 の最大値を求めよ.

(1) $x_0 = x_{1995}$
(ii) すべての $i = 1, 2, \ldots, 1995$ に対して $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$

5. $ABCDEF$ は凸 6 角形で, $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$, $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$ とする. G と H は 6 角形 $ABCDEF$ の内部の点で, $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ とする. このとき $AG+GB+GH+DH+HE \geqq CF$ を証明せよ.

6. p を奇数の素数とする. 集合 $\{ 1, 2, \ldots, 2p \}$ の部分集合 A で次の条件を満足するようなものの個数を求めよ.

(i) A はちょうど p 個の要素からなり, かつ
(ii) A の要素の総和は p で割り切れる.

1996 年 第 37 回 IMO ボンベイ (インド) 大会

1. $ABCD$ は辺の長さが $AB = 20$, $BC = 12$ の長方形とする．この長方形を 20×12 個の, 辺の長さが 1 の正方形のマスに分割する．r を正の整数とする．この長方形上で次の操作が許されている．あるマスにコインがあるとき, このマスから別のマスに, 二つのマスの中心の間の距離が $\sqrt{r}$ であるときにのみ, コインを動かすことができる．目標は, この操作を繰り返して, A を頂点に持つマスから, B を頂点に持つマスまでコインを動かす手順を見つけることである．

(a) r が 2 または 3 で割り切れるときは, こういう手順は存在しないことを示せ．
(b) $r = 73$ のときは, こういう手順が存在することを示せ．
(c) $r = 97$ のときは, こういう手順は存在するか?

2. P を三角形 ABC の内部の点として, $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ が成り立つと仮定する．また, D, E をそれぞれ $\triangle APB$, $\triangle APC$ の内心とする．このとき, AP, BD, CE は一点で交わることを示せ．

3. $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ を負でない整数全体の集合とする．$\mathbf{S}$ 上で定義され $\mathbf{S}$ に値を持つ関数 f で次の条件を満たすものをすべて求めよ．

$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ が任意の $\mathbf{S}$ の元 m, n に対して成り立つ．

4. a と b は正の整数で, $15a + 16b$ と $16a - 15b$ が共に正の整数の平方になるような数を動くとする．この二つの平方数の小さい方が取り得る最小の値を求めよ．

5. $ABCDEF$ を凸六角形として, AB と ED が平行で, BC と FE が平行で, CD と AF が平行であると仮定する．R_A, R_C, R_E を, それぞれ三角形 FAB, BCD, DEF の外接円の半径として, p を六角形の周の長さとする．このとき, 次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$R_A + R_C + R_E \geqq \frac{p}{2}.$$

6. n, p, q を $n > p + q$ である正の整数とする．x_0, x_1, $\ldots$, x_n を次の条件を満たす整数とする．

(a) $x_0 = x_n = 0$;
(b) $1 \leqq i \leqq n$ である各添え字 i に対して, $x_i - x_{i-1} = p$ または $x_i - x_{i-1} = -q$ が成り立つ．

このとき, $i < j$ かつ $(i, j) \neq (0, n)$ である添え字の組 (i, j) で, $x_i = x_j$ であるようなものが存在することを示せ．

1997 年 第 38 回 IMO マルデルプラタ (アルゼンチン) 大会

1. 座標平面上に, 格子点を頂点とする一辺の長さが 1 の正方形がしきつめられている. 各正方形は, チェス盤のように, 交互に黒と白に塗られている. 任意の正の整数の組 m, n に対し, 格子点を頂点とする直角三角形で, 直角を挟む二辺が正方形の辺に沿って走っていて, かつその長さが m, n であるような三角形を考える. S_1 は, この三角形の中で黒く塗られた部分の全体の面積とし, S_2 は, 三角形の白色の部分の面積とする. また

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|$$

とする.

(a) m, n がともに偶数, またはともに奇数の場合に $f(m, n)$ の値を求めよ.

(b) 任意の m, n に対し, $f(m,n) \leqq \dfrac{1}{2}\max\{m,n\}$ であることを証明せよ.

(c) 定数 C で, 任意の m, n に対し $f(m, n) < C$ を満たすものは存在しないことを証明せよ.

2. 頂角 A は, 三角形 ABC の最小の頂角であるとする. 点 B, C は, この三角形の外接円を 2 つの弧に分割するが, 点 U は 2 つの弧 BC のうち点 A を含まないほうの弧の上の内点とする. 線分 AB, AC の垂直二等分線と直線 AU の交点を各々 V, W とする. 直線 BV と CW は点 T で交わっているとする. このとき $AU = TB + TC$ であることを証明せよ.

3. x_1, x_2,. . ., x_n は実数で, 以下の 2 条件を満たすものとする.

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

$i = 1$, 2,. . ., n に対し $|x_i| \leqq \dfrac{n+1}{2}$ を満たす.

このとき, $(x_1$,. . ., $x_n)$ を並べ替えたある置換 $(y_1$,. . ., $y_n)$ で

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqq \frac{n+1}{2}$$

を満たすものが存在することを証明せよ.

4. 各成分が $S = \{\ 1, 2,\ldots, 2n-1\ \}$ の元である n 次正方行列で, 各 $i = 1,\ldots, n$ に対し, 第 i 行目と第 i 列目の成分の和集合の中に S のすべての元が含まれるものを**銀行列**と呼ぶことにする. このとき, 以下を証明せよ.

(a) $n = 1997$ のとき銀行列は存在しない.

(b) 銀行列が存在するような n は無数に存在する.

5. $a \geqq 1$, $b \geqq 1$ である整数の組 (a, b) で次の等式を満たすようなものを, すべて求めよ.

$$a^{b^2} = b^a$$

6. 正の整数 n に対し, $f(n)$ は, n を 2 の非負整数乗の和として表わす表現の個数とする. ただし, 和の順序が異なるだけの表現は同一とみなす. 例えば, $f(4) = 4$ で, 何故なら, 4 は, 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$ という 4 通りの表現で表わされるからである. このとき整数 $n \geqq 3$ に対し

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$$

が成り立つことを示せ.

1998 年 第 39 回 IMO 台湾大会

1. 凸四角形 $ABCD$ において, 対角線 AC, BD は直交していて, 対辺 AB, DC は平行でない. AB, DC の垂直二等分線の交点 P は $ABCD$ の内部にあるとする. このとき四角形 $ABCD$ がある円に内接するための必要十分条件は, 三角形 ABP と CDP の面積が等しいことであることを証明せよ.

2. ある競技会に a 人の選手と b 人の審判がいた. ただし b は 3 以上の奇数とする. 各審判はめいめい, 各選手に「可」か「否」かいずれかの評点を与える. k はある数で, どの 2 人の審判を選んでも, その 2 人が同じ評点を与えた選手は高々 k 人であったと仮定する. このとき

$$\frac{k}{a} \geqq \frac{b-1}{2b}$$

であることを証明せよ.

3. 各正の整数 n にたいし, $d(n)$ は, n の正の約数 (1 と n を含む) の個数を表わすものとする. このとき,

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

を満たす n が存在するような正の整数 k をすべて決定せよ.

4. ab^2+b+7 が a^2b+a+b の約数になるような正の整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

5. I は三角形 ABC の内心とする. 三角形 ABC の内接円が辺 BC, CA, AB と接する点を各々 K, L, M とする. 点 B を通り MK に平行な直線が, 直線 LM, LK と交わる点を各々 R, S とする. このとき $\angle RIS$ は鋭角であることを証明せよ.

6. 正の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ 上で定義され, 正の整数の値をとる関数 f で, 任意の s, $t \in \mathbb{N}$ に対し

$$f\big(t^2 f(s)\big) = s\big(f(t)\big)^2$$

を満たすようなもの全体を考える. このとき, $f(1998)$ の可能な最小値を求めよ.

1999 年 第 40 回 IMO ルーマニア大会

1. 平面上の, 三点以上の有限個の点からなる集合 S で, 次の条件を満たすものをすべて求めよ.
「任意の相異なる二つの S の点 A, B に対して, 線分 AB の垂直二等分線について S は線対称である」

2. $n \geqq 2$ を満たす整数 n を一つ固定する.
(a) 以下の不等式

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqq C \Big(\sum_{1 \leqq i \leqq n} x_i \Big)^4$$

が任意の $x_1, \ldots, x_n \geqq 0$ について成り立つような最小の定数 C を求めよ.
(b) この定数 C に対して, 不等式の等号が成立する条件を求めよ.

3. n を正の偶数とする. $n \times n$ の正方形の盤があり, n^2 個の単位正方形の升目に分かれている. 異なる二つの升目が共通の辺を持つときにそれらは隣接すると言う. N 個の升目に次の条件を満たすように印を付ける:
「任意の升目 (印の付いているものおよび印の付いていないもの) に対して少なくとも一つの隣接した印の付いている升目がある」
このような事の出来る N の最小値を求めよ.

4. 以下の条件を満たすような正整数の組 (n, p) をすべて決定せよ:
p は素数,
$n \leqq 2p$,
$(p-1)^n + 1$ は n^{p-1} の倍数.

5. 二つの円 Γ_1, Γ_2 は円 Γ の内部にあって, Γ_1 は Γ と点 M で接し, Γ_2 は Γ と点 N で接している. 但し, M, N は相異なる点とする. また, Γ_2 の中心は Γ_1 上にあるとする. Γ_1 と Γ_2 の二つの交点を通る直線と, Γ との交点を A, B とし, 直線 MA, 直線 MB と Γ_1 との交点をそれぞれ C, D とする. このとき, CD は Γ_2 に接していることを示せ.

6. 以下の条件を満たすような実数から実数への関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をすべて決定せよ:

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

がすべての実数 x, y について成立する. (これは，私の出題)