ホモロジー代数学正誤表＋補遺

(2017 年 8 月 1 日版)

正誤表の最後に「補遺」を追加しました．本文中で省略した定理等の証明が書いてあります.

誰でもすぐ修正できる数学とは無関係な文章中の日本語の誤植 (ミスタイプ) については，一部記載されていないところがあります.

● p.i (「はじめに」の最初のページ) 下から 9 行目 (第 2 刷で修正)
誤: 森田康夫『代数概論』培風館
正: 森田康夫『代数概論』裳華房

● 目次
目次のページ番号の中で，以下の 4 個のページ番号が間違っていて，正しいページ番号より 1 だけ小さい値になっていました.

2.4 次数付き加群　　49 → 50
2.6 複体の完全系列　　54 → 55
4.5 導来関手の性質　　111 → 112
7.4 完備化と Matlis の双対　　222 → 223

● p.v (目次) 下から 4 行目と 5 行目の間に，次の行を追加する．(第 2 刷で修正)
追加: 7.7　CM 環と Gorenstein 環 251

● p.5 4 〜 10 行目 (第 2 刷で修正)
4 箇所登場する L はすべて N の間違いです．つまり,
4 行目: **誤:** $g(y_1),\ldots, g(y_m)$ は L の　　**正:** $g(y_1),\ldots, g(y_m)$ は N の
6 行目: **誤:** $g(y_{l+1}),\ldots, g(y_m)$ が L の　　**正:** $g(y_{1+1}),\ldots, g(y_m)$ が N の
10 行目: **誤:** $g_(y_{l+1}),\ldots, g(y_m)$ は L の基底になり，$\dim_k L = m - l$

正: $g_(y_{l+1}),\ldots, g(y_m)$ は N の基底になり，$\dim_k N = m - l$

● p.11 下から 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: この y に対し $\varphi_2(x) = y$ を

正: この y に対し $\varphi_2(x) = g(y)$ を

● p.12 命題 1.4.3 の可換図式の下の行の完全系列 (第 2 刷で修正)

誤: $M_1 \xrightarrow{g_1} M_2 \xrightarrow{g_2} M_3 \xrightarrow{g_3} M_2 \xrightarrow{g_4} M_5$

正: $M_1 \xrightarrow{g_1} M_2 \xrightarrow{g_2} M_3 \xrightarrow{g_3} M_4 \xrightarrow{g_4} M_5$

● p.21 注意 1.6.6 の 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 2 つの射影的をとる順序も交換可能である.

正: 2 つの射影的極限をとる順序も交換可能である.

● p.24 下から 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 任意の $x \in L$ に対し，$f(h(x)) = 0$ であるが，

正: 任意の $x \in A$ に対し，$f(h(x)) = 0$ であるが，

● p.31 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $(x, y) \in L \times N$ に $(x \in L, y \in M)$ に対し，

正: $(x, y) \in L \times N$ $(x \in L, y \in M)$ に対し，

● p.31 下から 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\varphi(V) \subset V'$ で，

正: $\varPhi(V) \subset V'$ で，

● p.34 下から 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 定義 1.3.1(4) より，

正: 命題 1.2.6(4) より，

● p.34 最後の 7 行

f が 2 通りの意味に使われていたので，ここから先の f を g, g を h と書き換えて下さい．以下のようになります．

[修正後]

$$g\colon (L\otimes_R M)\twoheadrightarrow (L\otimes_R M)/N_1\cong L/L_0\otimes_R M$$
$$h\colon (L\otimes_R M)/N_1\twoheadrightarrow \frac{(L\otimes_R M)/N_1}{N_2'}\cong L/L_0\otimes_R M/M_0$$

を考える．$g(N_2)=N_2'$ だから，命題 1.2.6(4) より，

$$g^{-1}(N_2')=N_2+\operatorname{Ker} g=N_2+N_1$$

が成り立つ．よって，$\operatorname{Ker}(h\circ g)=N_1+N_2$ で，

$$L/L_0\otimes_R M/M_0\cong (L\otimes_R M)/(N_1+N_2)$$

が成り立つ． □

● p.38 命題 1.9.14

仮定が不足していました．以下の原稿と差し替えて下さい．

命題 1.9.14. R は環，L, M, N は R-加群とする．このとき，自然な準同型写像

$$\sigma\colon L\otimes_R \operatorname{Hom}_R(M,\,N)\longrightarrow \operatorname{Hom}_R\bigl(\operatorname{Hom}_R(L,\,M),\,N\bigr)$$

が存在する．さらに，L が有限表示で N が移入的 (第 3 章参照) ならば，σ は同型写像である．

証明. 表記を簡単にするため，R-加群 X に対し，

$$F(X)=X\otimes_R \operatorname{Hom}_R(M,\,N),\quad G(X)=\operatorname{Hom}_R\bigl(\operatorname{Hom}_R(X,\,M),\,N\bigr)$$

とおく．$\sum_i x_i\otimes f_i\in F(X)=X\otimes_R \operatorname{Hom}_R(M,\,N)$ に対し，

$$h(g)=\sum_i f_i(g(x_i))\quad (g\in \operatorname{Hom}_R(X,\,M))$$

で定まる $h\in G(X)=\operatorname{Hom}_R\bigl(\operatorname{Hom}_R(X,\,M),\,N\bigr)$ を対応させることにより，R-準同型 $\varphi(X)\colon F(X)\longrightarrow G(X)$ が定義できる．

$X=R^{\oplus r}$ の場合，定理 1.7.2, 定理 1.9.6 より，

$$F(R^{\oplus r})\cong \operatorname{Hom}_R(M,\,N)^{\oplus r}\cong G(R^{\oplus r})$$

となるので，$\varphi(R^{\oplus r})$ は同型写像である．L は有限表示なので，完全系列 $R^{\oplus m} \to R^{\oplus n} \to L \to 0$ $(\exists m,\, n \in \mathbb{N})$ が存在する．後の命題 3.1.5(2) を用いると，$G(R^{\oplus m}) \longrightarrow G(R^{\oplus n}) \longrightarrow G(L) \longrightarrow 0$ は完全系列になり，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccc}
F(R^{\oplus m}) & \longrightarrow & F(R^{\oplus n}) & \longrightarrow & F(L) & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle \varphi(R^{\oplus m})}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi(R^{\oplus n})}\big\downarrow & & {\scriptstyle \varphi(L)}\big\downarrow & & \\
G(R^{\oplus m}) & \longrightarrow & G(R^{\oplus n}) & \longrightarrow & G(L) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

定理 1.7.4, 定理 1.9.7 より横の 2 本の系列は完全である．$\varphi(R^{\oplus m})$, $\varphi(R^{\oplus n})$ は同型なので，ファイブ・レンマにより $\varphi(L)$ も同型である． □

● p.45 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $C^n = C_n^\vee = \mathrm{Hom}_R(C^n,\, R)$,

正: $C^n = C_n^\vee = \mathrm{Hom}_R(C_n,\, R)$,

● p.50 下から 6 〜 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: であるとか，**次数を k シフトする準同型写像**であるという．このとき，$f^n = f|_{B^n} : B^n \to C^{n+k}$ として f^n を定める．

正: であるという．このとき，$f^n = f|_{B^n} : B^n \to C^{n+k}$ として f^n を定める．0 次の準同型写像を単に**準同型写像**という．

● p.50 下から 2 行目 (第 2 刷で修正)

以下の部分をゴチック体 (太文字) にして下さい．

次数を k だけシフトして得られる次数付き加群

● p.53 2 〜 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $f\colon B \to C$ が微分を持つ次数付き加群の準同型写像であることをいう．

正: $f\colon B \to C$ が微分を持つ次数付き加群の (特に断らない限り 0 次の) 準同型写像であることをいう．

● p.53 12 〜 13 行目

誤:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\widetilde{f^n} &= (f^n)^{-1}(\operatorname{Im} d_C^{n-1}) = d_B^{n-1}\big((f^{n-1})^{-1}(C^{n-1})\big) \\ &\subset d_B^{n-1}(B^{n-1}) = \operatorname{Im} d_B^{n-1}\end{aligned}$$

だから，$\widetilde{f^n}$ から自然に

正:

$$f^n(\operatorname{Im} d_B^{n-1}) = d_C^{n-1}\big(f^{n-1}(B^{n-1})\big) \subset d_C^{n-1}(C^{n-1}) = \operatorname{Im} d_C^{n-1}$$

より $\operatorname{Ker}\widetilde{f^n} \supset \operatorname{Im} d_B^{n-1}$ であり，$\widetilde{f^n}$ から自然に

● p.53 下から 10 行目 (第 2 刷で修正)

誤: B, C コホモロジー複体の場合の同様に，

正: B, C がコホモロジー複体の場合も同様に，

● p.55 下から 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n-1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \operatorname{Ker} d_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$

正: $0 \longrightarrow H_n(C) \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \operatorname{Ker} d_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$

● p.56 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: はコホモロジー複体の完全系列とする．

正: は 0 次の準同型の完全系列とする．

● p.57 演習問題 2.2 の 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: また，$d^0\colon \mathbb{C}^0 \to C^1$, $d^1\colon \mathbb{C}^1 \to C^2$ は

正: また，$d^0\colon C^0 \to C^1$, $d^1\colon C^1 \to C^2$ は

● p.57 演習問題 2.3 の最後の行 (第 2 刷で修正)

誤: であることを確か確かめよ．

正: であることを確かめよ．

● p.61 最下行 命題 3.1.5(1) の 2 行目

誤: $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M_n \xrightarrow{f^n} M_{n+1} \cdots \to$

正: $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} M_n \xrightarrow{f^n} M_{n+1} \to \cdots$

● p.62 5 行目 命題 3.1.5(2) の 2 行目

誤: $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \cdots \to$

正: $\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots$

● p.65 15 行目 定理 3.2.8 の証明の 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $f \circ g = \mathrm{id}_R$

正: $f \circ g = \mathrm{id}_P$

● p.67 10 行目, 12 〜 14 行目 (第 2 刷で修正)

文字 x_j と m が別の意味に使われていたため混乱していました．m を l, x_j を z_j と書き直して下さい．あと，写像 h の定義の記述を補足します．

(10 行目)

誤: したがって，$x = b_1x_1 + \cdots + b_mx_m$ ($\exists b_j \in \mathfrak{a}$) と

正: したがって，$x = b_1z_1 + \cdots + b_lz_l$ ($\exists b_j \in \mathfrak{a}$, $\exists z_j \in K$) と

(12 〜 14 行目)

誤:

$$x = a_1 \sum_{j=1}^{m} c_{j1}x_j + \cdots + a_n \sum_{j=1}^{m} c_{jn}x_j = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$$

である．そこで，

$$h\bigl(\alpha_1e_1 + \cdots + \alpha_ne_n\bigr) = \alpha_1 \sum_{j=1}^{m} c_{j1}x_j + \cdots + \alpha_n \sum_{j=1}^{m} c_{jn}x_j$$

正:

$$x = a_1 \sum_{j=1}^{l} c_{j1} z_j + \cdots + a_n \sum_{j=1}^{l} c_{jn} z_j = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

である．そこで，$e \in E - \{e_1, \ldots, e_n\}$ のとき $h(e) = 0$,

$$h\bigl(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\bigr) = \alpha_1 \sum_{j=l}^{l} c_{j1} z_j + \cdots + \alpha_n \sum_{j=1}^{l} c_{jn} z_j$$

● p.67 下から 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $h' \colon P \to K$

正: $h' \colon F \to K$

● p.70 下から 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $F_L \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{\pi_M} M$

正: $F_L \xrightarrow{\subset} F \xrightarrow{\pi} M$

● p.71 下から 7 〜 26 行目 (第 2 刷で修正)

11 行目の $0 \to K_0 \to F_L \to M \to 0$ は $F_L \to M$ が全射でないので完全系列になりません．そこで，7 行目以降の証明を次のものに差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$\lambda = (L, K) \in \Lambda$ をとる．$L = \{e_1 = (x_1, n_1), \ldots, e_l = (x_l, n_l)\}$ とし，e_i の K を法とする同値類を $\overline{e_i} \in P_\lambda = F_L/K$ とすると，L は F_L の基底だから，$\{\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_l}\}$ は $P_\lambda = F_L/K$ の生成系になる．有限生成 R-加群 K の生成系を $y_1, \ldots, y_r$ とし，$y_i = a_{i1} e_1 + \cdots + a_{il} e_l$ $(\exists a_{ij} \in R)$ と表示する．完全系列 $0 \to \operatorname{Ker}\pi \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} M \to 0$ に補題 3.2.10 を適用すると，ある R-準同型 $h \colon F \to \operatorname{Ker}\pi$ で $h(y_i) = y_i$ $(\forall i = 1, \ldots, r)$ を満たすものが存在する．必要なら F の基底から有限個の $e_{l+1}, \ldots, e_m$ を追加して，

$e_j - h(e_j) = b_{j1}e_1 + \cdots + b_{jm}e_m$ $(\exists b_{jk} \in R)$ と表示することができる．

$$0 = y_i - h(y_i) = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}(e_j - h(e_j)) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}e_k$$

なので，$a_{i1}b_{1k}+\cdots+a_{il}b_{lk} = 0$ である．よって，$g(\overline{e_j}) = b_{j1}e_1+\cdots+b_{jm}e_m$ によって，$g\colon P_\lambda \longrightarrow R^{\oplus m} = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_m$ を矛盾なく定義できる．

$e_i = (x_i,\, n_i)$ $(i = 1,\ldots, m)$ のとき，$n'_1,\ldots, n'_m \in \mathbb{N} - \{n_1,\ldots, n_l\}$ を相異なる自然数とし，

$$L' = L \cup \bigl\{e'_1 = (x_1,\, n'_1),\, \ldots,\, e'_m = (x_m,\, n'_m)\bigr\}$$

とおく．$\psi\colon F_{L'} \twoheadrightarrow R^{\oplus m}$ を，$\psi(e'_j) = e_j$，$\psi(e_j) = g(\overline{e_j})$ で定める．

$K' = \operatorname{Ker}\psi$ とおく．$0 \to K' \to F_{L'} \to R^{\oplus m} \to 0$ は命題 3.2.2 より split する．K' は $F_{L'}$ の像になるから有限生成である．$\lambda' = (L',\, K') \in \varLambda$ とおく．$P_{\lambda'} := F_{L'}/K' \cong R^{\oplus m}$ なので，$\lambda' \in \varLambda_0$ である．$a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{il}b_{lk} = 0$ より $\psi(y_i) = 0$ である．よって，$\psi(K) = 0$ で，$K \subset K'$ がわかり，$\lambda \leqq \lambda'$ が得られる． □

● p.74 下から 1 〜 2 行目および p.75 1 〜 3 行目 (第 2 刷で修正)

定理 3.3.7(1) の証明を以下のように修正して下さい．

誤: だ 1 つだけ存在するので，$f(b) = a$ で定まる単射 (c^{-1} 倍写像) $f\colon cR \longrightarrow R$ が矛盾なく定義できる．特に，$f(c) = 1$ である．

正: だ 1 つだけ存在するので，$g(b) = ax$ として $g\colon cR \to I$ を定義する．特に，$g(c) = x$ である．また，$f\colon cR \longrightarrow R$ は包含写像とする．

誤: $g(a) = ax$ で定義される $g\colon cR \to I$ に対し，$g = h\circ f$ を満たす $h\colon R \to I$ が存在する．$cx = g(c) = h(f(c)) = h(1)$ なので，$y = h(1) \in I$ とおけば，$cx = y$ が成り立ち，I は分割可能である．

正: I は移入的だから，$g = h\circ f$ を満たす $h\colon R \to I$ が存在する．$y = h(1) \in I$ とおけば，$cy = ch(1) = h(c) = h(f(c)) = g(c) = x$ が成り立ち，I は分割可能である．

● p.77 命題 3.3.10(3) の証明の 1 行目

誤: (3) $P = R$ とおいて

正: (3) $P = S$ とおいて

● p.78 4 行目

誤: 上の補題から，

正: 命題 3.3.10(4) から，

● p.82 14 行目 (第 2 刷で修正)

誤: P の最小性は成立せず，projrctive

正: P の最小性は成立せず，projective

● p.83 8 〜 9 行目 (第 2 刷で修正)

以下の間違いが 2 ケ所あります

誤: $\overline{\iota_\lambda}(E_R(M_\lambda))$

正: $\overline{f_\lambda} \circ \overline{\iota_\lambda}(E_R(M_\lambda))$

● p.86 6 〜 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: Noether 環の層の上の連接層の圏においては射影分解は存在するが，移入分解は通常存在しない.

正: Noether 環の層の上の連接層の圏においては移入分解は通常存在しない.

解説: Noether 環の層の上の連接層の圏においても射影分解は一般には存在しません.

● p.90 3 〜 4 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\varepsilon = h \circ f$ を満たす．そこで，$\varepsilon = h \oplus (\varepsilon \circ g)$

正: $\varepsilon_L = h \circ f$ を満たす．そこで，$\varepsilon_M = h \oplus (\varepsilon_N \circ g)$

● p.90 定理 3.6.1 の証明の最後から 3 〜 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 上で ε_0 を構成したように d_M^{n+1} を構成すれば,
正: 上で ε_M を構成したように δ_M^{n+1} を構成すれば,

● p.92 命題 3.6.3 の証明の 5 〜 6 行目 (第 2 刷で修正)
誤: に定理 3.6.1 を適用して，$Z_{m+1}(C)$ の移入分解 $K^\bullet_{m+1}$ を構成すると，$K^\bullet_{m+1}/J^\bullet_{m+1}$ が $H^{m+1}(C)$ の移入分解になる．
正: に定理 3.6.1 を適用して，$Z^{m+1}(C) = \operatorname{Ker} d^{m+1}$ と $H^{m+1}(C)$ の移入分解 $K^\bullet_{m+1}$, $L^\bullet_{m+1}$ を構成すると，$K^\bullet_{m+1}/J^\bullet_{m+1} = L^\bullet_{m+1}$ となる．

● p.94 4 行目 (第 2 刷で修正)
誤: 『Lectures om Modules
正: 『Lectures on Modules

● p.98 8 行目 (第 2 刷で修正)
誤: 位相空間体を対象とし
正: 位相空間全体を対象とし

● p.104 2 行目 (第 2 刷で修正)
誤: $\iota_M\colon L \to L \oplus M$ を自然な単射 ($\iota(x) = (x, 0)$, $\iota(y) = (0, y)$) とし，
正: $\iota_M\colon M \to L \oplus M$ を自然な単射 ($\iota_L(x) = (x, 0)$, $\iota_M(y) = (0, y)$) とし，

● p.104 演習問題 4.2 の 1 行目 (第 2 刷で修正)
誤: 演習問題 3.5 のように
正: 演習問題 3.4 のように

● p.127 命題 5.1.3. の 3 行目の (2) の行 (第 2 刷で修正)
誤: $F^{n+1}(F^n) = 0.$
正: $F^{n+1}(E^n) = 0.$

● p.131 10 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\mathrm{Ker}(\alpha\colon E_2^{i+1,0} \to E^{i+1}) \cong E_{i+1}^{i+1,0}/E_{i+2}^{i+1,0} \cong \mathrm{Im}\, d_{i+1}^{0,i}$

正: $\mathrm{Ker}(\alpha\colon E_2^{i+1,0} \to E^{i+1}) \cong \mathrm{Im}\, d_{i+1}^{0,i}$

● p.131 下から 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 添え字がごちゃごちゃするので，始めて読む方は飛ばしてよい．

正: 添え字がごちゃごちゃするので，初めて読む方は飛ばしてよい．

● p.132 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $J_2 = K_2 = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i+j=n,\, i \leqq m-r,\, i \neq l\}$

正: $J_2 = K_2 = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid i+j=n,\, i \neq l,\, i \leqq \max\{m-r, l-1\}\}$

● p.136 下から 8 行目．定理 5.2.3 の証明の 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 補題 5.2.2 を $l = q$,

正: 補題 5.2.2 を $l = p$,

● p.137 節の見出し「5.3. スペクトル系列の構成」の次の行 (第 2 刷で修正)

誤: 複体とそのフルターづけから，スペクトル系列を構成する方法を説明する．

正: 複体とそのフィルターづけから，スペクトル系列を構成する．

● p.138 10 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $d(x) \in F^{p+r}(A^{p+r+1}) = A^{p+r,q-r+1}\}$

正: $d(x) \in F^{p+r}(A^{p+q+1}) = A^{p+r,q-r+1}\}$

● p.138 11 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $d(A_r^{p-r,q+r-1}) \cap A^{p,q}$

正: $d(A^{p-r,q+r-1}) \cap A^{p,q}$

● p.138 下から 11 行目 (第 2 刷で修正)

下のように, 右端に ① を追加して下さい.

$A^{p+1,q-1} \subset A^{p,q}, \quad Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_r^{p,q},$ ①

$\cdots \subset B_{r-1}^{p,q} \subset B_r^{p,q} \subset \cdots \subset B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} \subset \cdots \subset Z_r^{p,q} \subset Z_{r-1}^{p,q} \subset \cdots$ ②

● p.140 7 行目 (第 2 刷で修正)

下のように, $B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$ を $B_{r-1}^{p-r,q+r+1}$ に修正して下さい.

$$\mathrm{Im}\left(d_r^{p-r,q+r-1}\colon \frac{Z_r^{p-r,q+r-1}}{Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}+B_{r-1}^{p-r,q+r+1}} \longrightarrow \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1}+B_{r-1}^{p,q}}\right)$$

● p.140 9 〜 11 行目 命題 5.3.3(4) の証明 (第 2 刷で修正)

もとの説明を，次のように改良します.

旧:

(4) $A^{p+1,q-1} = F^{p+1}(A^{p+q}) \subset F^p(A^{p+q}) = A^{p,q}$ と $Z_{r+1}^{p,q}$, $Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ の定義より，$Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$ であることに注意する．さらに，$B_{r-1}^{p,q} \subset B_r^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p,q}$ と (2) より，

新:

(4) $B_r^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p,q}$ である．また，(2) より，$Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$ である．これらに注意し，$L = Z_{r+1}^{p,q}$, $M = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}$ とおいて命題 1.2.6(3) を使うと，(3) より，

● p.140 命題 5.3.3(5) の証明の 2 行目

誤: $i \leqq p_1$ のとき，$F^i(A^n) = F^p(A^n) = A^n$ より，

正: $i \leqq p_1$ のとき，$F^i(A^n) = F^{p_1}(A^n) = A^n$ より，

● p.140 下から 2 行目 命題 5.3.3(6) の証明の 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $F^{p+r}(A) = 0$ なので，

正: $F^{p+r}(A^{p+q+1}) = 0$ なので，

● p.141 6 〜 7 行目 命題 5.3.3(7) の証明

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

(7) (6) より $Z_\infty^{p+1,q-1} \cap B_\infty^{p,q} = B_\infty^{p+1,q-1}$ なので，

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}} \cong \frac{Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}}{\left(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}\right)/B_\infty^{p,q}}$$
$$= \frac{F^p(E^{p+q})}{Z_\infty^{p+1,q-1}/\left(Z_\infty^{p+1,q-1} \cap B_\infty^{p,q}\right)} = \frac{F^p(E^{p+q})}{Z_\infty^{p+1,q-1}/B_\infty^{p+1,q-1}} = \frac{F^p(E^{p+q})}{F^{p+1}(E^{p+q})}$$

● p.141 6 〜 7 行目 命題 5.3.3(8) の証明 (第 2 刷で修正)

もとの証明が不明瞭なので，改良します．

旧:

(8) $F^0(A) = A$, $F^{n+1}(A^n) = 0$ $(\forall n \geqq 0)$ が成り立てば，$F^0(E^n) = E^n$, $F^{n+1}(E^n) = 0$ なので，スペクトル系列は第 1 象限にある．

新:

(8) $p_1 = 0$, $p_2 = n+1$, $r = 2$ として (5) の証明を読み直せ．「$r > p_2 - p$ ならば $E_r^{p+r,q-r+1} = 0$」は，「$q < 0$ ならば $E_2^{p,q} = 0$」を意味する．

● p.141 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $B_0^{p,q} = d(A^{p,q})$,

正: $B_0^{p,q} = d(A^{p,q-1})$,

● p.149 2 行目と 5 行目 (第 2 刷で修正)

2 行目の式と 5 行目の式を交換して下さい．つまり，以下のようになります．

$$d_r(x) = \sum_{p+q=r} \left(\delta_I^{p,q}(x_{p,q}) + \delta_{II}^{p,q}(x_{p,q})\right)$$

として準同型写像 $d_r: C^r \to C^{r+1}$ を定義する．ただし，定義 5.5.1 の $(*)$ の代わりに $(*')$ を採用した場合には，

$$d_r(x) = \sum_{p+q=r} \left(\delta_I^{p,q}(x_{p,q}) + (-1)^p \delta_{II}^{p,q}(x_{p,q})\right)$$

● p.150 9 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p+1,q} = C^{p,q}$

正: $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p+1,q-1} = C^{p,q}$

● p.150 13 行目

誤: また，$d_I^{p,q}: E_I^{p,q} \to E_I^{p+1,q}$ は，

正: また，$d_1^{p,q}: E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ は，

● p.151 下から 9 行目 (第 2 刷で修正)

誤: で以下の条件を満たすもの存在する．

正: で以下の条件を満たすものが存在する．

● p.156 定義 5.6.4 の 6 〜 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤:

$$F_{p+1}(A) \supset F_p(A), \qquad d(F_p(A)) \subset F_p(A)$$
$$\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F_p(A) = A, \qquad F_p(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (F_p(A_n))$$

正:

$$F_{p+1}(A) \supset F_p(A), \quad d(F_p(A)) \subset F_p(A), \quad F_p(A) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_p(A_n)$$

● p.159 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $d^r(x) = \sum_{p+q=r} \left(\delta^I_{p,q}(x_{p,q}) + (-1)^p \delta^{II}_{p,q}(x_{p,q})\right)$

正: $d^r(x) = \sum_{p+q=r} \left(\delta^I_{p,q}(x_{p,q}) + \delta^{II}_{p,q}(x_{p,q})\right)$

● p.166 下から 4 行目 (第 2 刷で修正)

誤: しかっり

正: しっかり

● p.166 最下行 (第 2 刷で修正)

誤: derives functor) と位置づけている.

正: derived functor) と位置づけている.

● p.171 4 行目

誤: $\varprojlim \mathrm{Ext}^n_R(M_\lambda, N)$

正: $\varprojlim \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M_\lambda, N)$

● p.171 5 行目

旧: である.

新: である (問 6.8 参照).

● p.184 下から 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\mathrm{Tor}^1_R(N, X) \cong \mathrm{Tor}^{n+1}_R(M, X) = 1$ なので,

正: $\mathrm{Tor}^1_R(N, X) \cong \mathrm{Tor}^{n+1}_R(M, X) = 0$ なので,

● p.188 〜 190 定理 6.2.14 (第 2 刷で修正)

定理 6.2.14(1) の証明が間違っていました．定理 6.2.14 の先頭から，その (1) の証明の最後までを，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 6.2.14. R は環，$a \in R$ は非零因子で中心元 (つまり，任意の $b \in R$ に対し $ab = ba$) であるとする．また，$M \neq 0$ は R/aR-加群とする．

（1） もし $\operatorname{inj\,dim}_{R/aR} M < +\infty$ ならば，次が成り立つ．

$$\operatorname{inj\,dim}_R M = 1 + \operatorname{inj\,dim}_{R/aR} M$$

（2） もし $\operatorname{proj\,dim}_{R/aR} M < +\infty$ ならば，次が成り立つ．

$$\operatorname{proj\,dim}_R M = 1 + \operatorname{proj\,dim}_{R/aR} M$$

証明. (1) 定理 6.1.8(2) より，R/aR-加群 X に対し，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_{R/aR}(X, \operatorname{Ext}^q_R(R/aR, M)) \implies E^n = \operatorname{Ext}^n_R(X, M)$$

が存在する．$f\colon R \to R$ を $f(x) = ax$ で定まる a 倍写像とすると，$0 \to R \xrightarrow{f} R \to R/aR \to 0$ は R/aR の R-自由分解なので，$q \geqq 2$ のとき，$\operatorname{Ext}^q_R(R/aR, M) = 0$ で，$E_2^{p,q} = 0$ である．また，完全系列

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R/aR, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{f_0^*} \operatorname{Hom}_R(R, M) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(R/aR, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(R, M) \xrightarrow{f_1^*} \operatorname{Ext}^1_R(R, M) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

が得られる．ここで，演習問題 6.3 より，f_0^*, f_1^* は a 倍写像である．これは，M のほうの a 倍写像 $g\colon M \to M$ $(g(y) = ay)$ から得られる写像とも一致する．しかし，$aM = 0$ なので g はゼロ写像であり，f_0^*, f_1^* もゼロ写像となる．したがって，

$$\begin{aligned} &\operatorname{Hom}_R(R/aR, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R, M) \cong M, \\ &\operatorname{Ext}^1_R(R/aR, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R, M) \cong M, \quad \operatorname{Ext}^1_R(R, M) = 0 \end{aligned}$$

を得る．よって，$E_2^{n,0} = E_2^{n,1} = \operatorname{Ext}^p_{R/aR}(X, M)$ である．定理 5.2.3(2) を $p = 0, q = 1, r = 2$ として用いると，完全系列

$$\cdots \to E_2^{n,0} \longrightarrow E^n \longrightarrow E_2^{n-1,1} \longrightarrow E_2^{n+1,0} \longrightarrow E^{n+1} \to \cdots \qquad ①$$

が得られる．$d(A) := \sup\{i \mid \operatorname{Ext}^i_A(X, M) \neq 0\}$ $(A = R/aR, R)$ とおく．$n > d(R/aR)$ のとき $E_2^{n,0} = E_2^{n-1,1} = 0$ だから，① より $E^n = 0$ である．よって，$d(R) \leqq d(R/aR) - 1$ である．逆に，$n \geqq d(R)$ のとき $E^n = 0$ だから，① より $E_2^{n-1,1} \cong E_2^{n+1,0} = E_2^{n+1,1} \cong E_2^{n+3,1} = \cdots$ であるが，$d(R/aR) < +\infty$ だから，$n \geqq d(R)$ のとき $\operatorname{Ext}^{n-1}_{R/aR}(X, M) = 0$ となる．

よって，$d(R) = d(R/aR) + 1$ である．定理 6.2.4 より，$\mathrm{inj\,dim}_{R/aR} M \leqq \mathrm{inj\,dim}_R M - 1$ を得る．

$r := \mathrm{inj\,dim}_{R/aR} M < +\infty$ とおく．Y を任意の R-加群とし，$X = \mathrm{Ker}\bigl(Y \xrightarrow{\times a} aY\bigr)$ とおく．$aX = 0$ なので X は R/aR-加群になり，上の考察から，$n > r$ のとき，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(X,\, M) = 0$ である．完全系列 $0 \to X \to Y \xrightarrow{\times a} aY \to 0$ より，$n > r$ のとき完全系列

$$\mathrm{Ext}_R^n(X,\, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(aY,\, M) \xrightarrow{\times a} \mathrm{Ext}_R^{n+1}(Y,\, M) \longrightarrow 0$$

が得られるが，$aM = 0$ より上の a 倍写像はゼロ写像で，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(Y,\, M) = 0$ を得る．したがって，$\mathrm{inj\,dim}_R M \leqq r + 1$ である．

● p.191 2 〜 8 行目 (第 2 刷で修正)

定理 6.2.14(1) の証明変更に伴い，この部分の説明も，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

なお，上の定理の (2) の証明も，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^p_{R/aR}(\mathrm{Tor}_q^R(M,\, R/aR),\, X) \implies E^n = \mathrm{Ext}_R^n(M,\, X)$$

を利用して，(1) と同様な議論で証明することもできる．

● p.195 2 行目

誤: $H_j^{II}(C_{\bullet\bullet}) = \mathrm{Ker}\, d^0_{i,j} / \mathrm{Im}\, d^0_{i,j+1}$

正: $H_j^{II}(C_{\bullet\bullet}) = \mathrm{Ker}\, d'_{i,j} / \mathrm{Im}\, d'_{i,j+1}$

● p.195 9 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $(\delta'_{i,j} = \mathrm{id}_{P_j} \otimes \mathrm{id}_{Q_i})$ は完全系列になる．

正: $(\delta'_{i,j} = \mathrm{id}_{P_j} \otimes \delta'_i)$ は完全系列になる．

● p.197 定理 6.4.4 の証明の 4 行目

誤: $B_i(P) \otimes_R H_n(Q) \cong E_n = H_n(B_i(P) \otimes_R Q)$

正: $B_i(P) \otimes_R H_n(Q) \cong H_n(B_i(P) \otimes_R Q)$

● p.210 下から 4 行目 (第 2 刷で修正)
誤: $0 \neq x \in N' \cap S^{-1}L$ をとり
正: $0 \neq x \in N'$ をとり

● p.213 1 〜 14 行目 定理 7.1.9 の (1) $\Longleftrightarrow$ (2) の証明. (第 2 刷で修正)
すこし，証明が整理されていないので，以下の原稿と差し替えて下さい.
[差し替え原稿]

証明. (1) $\Longleftrightarrow$ (2). 形式的に $d_0 = \varepsilon$ とする．$i \geqq 0$ とする．$e_1,\ldots, e_m$ を F_{i+1} の基底，$y_1,\ldots, y_r$ を F_i の基底とし，$x_j = d_{i+1}(e_j)$ とおく．x_j, y_k の $F_i/\mathfrak{m}F_i$ における像を $\overline{x_j}$, $\overline{y_k}$ とする．$g_i\colon F_i/\mathfrak{m}F_i \longrightarrow (\operatorname{Im} d_i)/\mathfrak{m}(\operatorname{Im} d_i)$ は d_i から誘導される全射とする．$\operatorname{Im} d_i = \operatorname{Ker} d_{i-1}$ に注意すると，最小自由分解の構成法から，$F_\bullet$ が最小自由分解であるための必要十分条件は，各 g_i が同型写像であることである.

さて，(1) が成り立つとすると g_i は同型写像である.

$$g_i(\overline{x_j}) = \big(d_i(d_{i+1}(e_i)) \bmod \mathfrak{m}(\operatorname{Im} d_i)\big) = 0$$

であるので $\overline{x_j} = 0$ である．つまり，$x_j \in \mathfrak{m}F_i$ である．よって，$\operatorname{Im} d_{i+1} = Rx_1 + \cdots + Rx_m \subset \mathfrak{m}F_i$ となる.

逆に (2) が成り立つとする．$y \in F_i$ を $\overline{y} \in \operatorname{Ker} g_i$ となるような元とする．$d_i(y) \in \mathfrak{m}(\operatorname{Im} d_i)$ であるので，$d_i(y) = \sum_{k=1}^{r} b_k d_i(y_k)$ $(\exists b_k \in \mathfrak{m})$ と書ける．$\operatorname{Ker} d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$ なので，$y = \sum_{k=1}^{r} b_k y_k + \sum_{j=1}^{m} c_j d_{i+1}(x_j)$ と書ける．$d_{i+1}(x_j) \in \mathfrak{m}F_i$ なので，$y \in \mathfrak{m}F_i$ である．したがって，$\operatorname{Ker} g_i = 0$ で，g_i は同型写像である.

● p.216 1 〜 9 行目 (定理 7.2.2) (第 2 刷で修正)
定理 7.2.2 の記述が不正確でした．下記の原稿と差し替えて下さい．ま

た，定理 7.2.2 の証明をこの正誤表の最後の補遺に書いておきます．

[差し替え原稿]

定理 7.2.2. (準素加群分解) R は Noether 可換環，$0 \neq M$ は有限生成 R-加群，$N \subsetneqq M$ は部分 R-加群とする．

(1) $\mathrm{Ass}(M/N)$ は空でない有限集合であって，$\mathrm{Ass}(M/N)$ の極小元全体の集合は，$\mathrm{Supp}(M/N)$ の極小元全体の集合と一致する．

(2) $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ とおくとき，M の準素部分加群 $N_1, \ldots, N_r$ が存在して，

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r, \quad \mathrm{ann}(M/N_i) = \mathfrak{p}_i, \quad \mathrm{Ass}(M/N_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$$

$(i = 1, \ldots, r)$ を満たす．これを N の**準素** (**加群**) **分解**という．ただし，$N_1, \ldots, N_r$ は一意的とは限らない．

● p.218 補題 7.2.6 の証明の 2 行目

誤: $I = E_R(J)$, $J \cap M \neq \phi$ である．

正: $I = E_R(J)$, $J \cap M \neq 0$ である．

● p.218 下から 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $R_R(R/\mathfrak{p})$

正: $E_R(R/\mathfrak{p})$

● p.222 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $E_R^n(M) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R} E_R^n(R/\mathfrak{p})^{\oplus \mu_n(\mathfrak{p}, M)}$

正: $E_R^n(M) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R} E_R(R/\mathfrak{p})^{\oplus \mu_n(\mathfrak{p}, M)}$

● p.222 16 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\mathrm{Hom}_R\left(k, E_R^n(M)\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(k, E_R^n(k)^{\oplus \lambda_{\mathfrak{m}}}\right) = \mathrm{Hom}_R(k, E_R(k))^{\oplus \lambda_{\mathfrak{m}}}$

正: $\mathrm{Hom}_R\left(k, E_R^n(M)\right) \cong \mathrm{Hom}_R\left(k, E_R(k)^{\oplus \lambda_{\mathfrak{m}}}\right) = \mathrm{Hom}_R(k, E_R(k))^{\oplus \lambda_{\mathfrak{m}}}$

● p.225 定理 7.4.3 の証明の最後から 4 行目

誤: $\mathrm{Hom}_k(V_n, k) \cong V_n$

正: $\mathrm{Hom}_k(V_n, k) \cong V_n^\vee$

● p.229 7 行目 (命題 7.5.2 の証明の 3 行目) (第 2 刷で修正)

誤: ([永田] p.46 補題 2.9.5 参照).

正: ([永田] p.46 補題 2.0.5 参照).

● p.233 下から 9 〜 8 行目 (定理 7.5.9(3)) (第 2 刷で修正)

間違いではありませんが，以下のほうがよかったと反省しています.

旧: (3) $a \in R$ が M-正則元のとき，次が成り立つ.

$$\mathrm{depth}_R(\mathfrak{a}, M/aM) = \mathrm{depth}_R(\mathfrak{a}, M) - 1$$

新: (3) $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \subset \mathfrak{a}$ が M-正則列のとき，次が成り立つ.

$$\mathrm{depth}_R(\mathfrak{a}, M/\mathbf{a}M) = \mathrm{depth}_R(\mathfrak{a}, M) - n$$

● p.233 定理 7.5.9 の証明の 6 行目

誤: $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$ $(\exists \in M)$

正: $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x)$ $(\exists x \in M)$

● p.236 定理 7.5.12 の 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 次が成り立つ.

正: が成り立つ.

● p.238 下から 7 行目 (補題 7.5.15 の証明の 3 行目) (第 2 刷で修正)

誤: $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\times a} \mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(R/(aR+\mathfrak{p}), M)$

正: $\mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \xrightarrow{\times a} \mathrm{Ext}_R^n(R/\mathfrak{p}, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n+1}(R/(aR+\mathfrak{p}), M)$

● p.238 下から 5 行目 (補題 7.5.15 の証明の 5 行目) (第 2 刷で修正)

誤: $\mathrm{Ext}^n_R(R/(aR+\mathfrak{p}),\, M)=0$

正: $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(R/(aR+\mathfrak{p}),\, M)=0$

● p.243 12 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $H^r(\mathbf{a},\, L)=H^r(K^\bullet(\mathbf{a},\, M))=\mathrm{Ker}\,\delta^r/\,\mathrm{Im}\,\delta^{r+1}$

正: $H^r(\mathbf{a},\, M)=H^r(K^\bullet(\mathbf{a},\, M))=\mathrm{Ker}\,\delta^r/\,\mathrm{Im}\,\delta^{r+1}$

● p.244 命題 7.6.2(7) の証明の 4 行目と 7 行目

誤: $\displaystyle\sum_{j=1}^{r-1}$

正: $\displaystyle\sum_{j=1}^{r}$

● p.245 下から 5 行目 (定理 7.6.3 の証明の 1 行目) (第 2 刷で修正)

誤: 定理 7.6.3 より，

正: 命題 7.5.6 より，

● p.247 定理 7.6.5 の証明の 7 行目

誤: $S_i^{-1}\,\mathrm{Ext}^{i-1}_{A_i}(A_i/\mathfrak{p}_iA_i,\, M_i)$

正: $S_{i-1}^{-1}\,\mathrm{Ext}^{i-1}_{A_i}(A_i/\mathfrak{p}_iA_i,\, M_i)$

● p.247 下から 4 行目

旧: 定理 7.6.4 より，$H_0(\mathbf{a},\, M)\neq 0$ である．また，定理 7.6.3, 命題 7.6.2 より，

新: もし $M=aM\subset\mathfrak{m}M$ なら $M=0$ なので，定理 7.6.3, 命題 7.6.2 より，

● p.249 命題 7.6.6 の証明の最後から 2 行目

誤: $\mathrm{depth}_R\, M/aM-\mathrm{depth}_R\, M/aM=s(M/aM)$

正: $\operatorname{depth}_R R - \operatorname{depth}_R M/aM = s(M/aM)$

● p.249 下から 7 行目 (定義 7.6.7 の 10 行目)

誤: $C^r = \displaystyle\bigoplus_{I \subset \mathfrak{I}_r} R_I$

正: $C^r = \displaystyle\bigoplus_{I \in \mathfrak{I}_r} R_I$

● p.250 定理 7.6.8 の直前の行 (第 2 刷で修正)

誤: は複体の帰納系なし，次が成り立つ.

正: は複体の帰納系をなし，次が成り立つ.

● p.250 の 6 行目から p.251 命題 7.6.9 まで

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

さて，$m \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbf{a}^m = (a_1^m, a_2^m, \ldots, a_n^m)$ とおく．$\mathbf{a}^m$ から得られる Koszul 複体 $K_r(\mathbf{a}^m) = K_r(\mathbf{a}^m, R)$, $K^r(\mathbf{a}^m) = K^r(\mathbf{a}^m, R)$ を考える．$f_r^{m+k,m}\colon K_r(\mathbf{a}^{m+k}) \longrightarrow K_r(\mathbf{a}^m)$ を

$$f_r^{m+k,m}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = (a_{i_1} \cdots a_{i_r})^k \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

によって定める．$f_r^{m+1,m}$ は微分と可換なので，複体の射影系ができる．この双対複体として $f^r_{m,m+k}\colon K^r(\mathbf{a}^m) \longrightarrow K^r(\mathbf{a}^{m+k})$ を定め，複体の帰納系を作る．M を R-加群として，

$$K^r_\infty(\mathbf{a}, M) := \varinjlim_m \operatorname{Hom}_R\big(K_r(\mathbf{a}^m), M\big) \cong \varinjlim_m \big(K^r(\mathbf{a}^m) \otimes_R M\big)$$

と定義する．$K^r_\infty(\mathbf{a}, R)$ を $K^r_\infty(\mathbf{a})$ とも書く．

また，$\{1, \ldots, n\}$ における $\{i_1, \ldots, i_r\}$ の補集合を $\{j_1, \ldots, j_{n-r}\}$ とし，

$$g_r^{m,m+k}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = (a_{j_1} \cdots a_{j_{n-r}})^k \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

によって $g_r^{m,m+k}\colon K_r(\mathbf{a}^m) \longrightarrow K_r(\mathbf{a}^{m+k})$ を定めると，これも微分と可換なので，複体の帰納系ができる．そこで，

$$K_r^\infty(\mathbf{a},\, M) := \varinjlim_m \bigl(K_r(\mathbf{a}^m) \otimes_R M\bigr)$$

と定義する．$K_r^\infty(\mathbf{a},\, R)$ を $K_r^\infty(\mathbf{a})$ とも書く．

定理 7.6.8. 上の定義の記号と仮定のもとで，次が成り立つ．

$$K_\infty^r(\mathbf{a},\, M) \cong \check{C}^r(\mathbf{a}) \otimes_R M$$
$$\varinjlim_m H^r(\mathbf{a}^m,\, M) \cong H^r\bigl(\check{C}^r(\mathbf{a}) \otimes_R M\bigr)$$

証明. $K_r(\mathbf{a}^m)$ の標準基底 $\bigl\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \bigm| 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq d\bigr\}$ の双対基底として $K^r(\mathbf{a}^m)$ の基底 $\bigl\{(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r})^\vee \bigm| 1 \leqq i_1 < \cdots < i_r \leqq n\bigr\}$ を構成する．$\varphi_m^r\colon K^r(\mathbf{a}^m) \longrightarrow \check{C}^r(\mathbf{a})$ を，

$$\varphi_m^r((e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r})^\vee) = \frac{1}{(a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_r})^m} \in R_I \subset \check{C}^r(\mathbf{a})$$

$(I = \{i_1, \ldots, i_r\})$ によって定める．これが複体の準同型写像であることや，$\varphi_m^r = \varphi_{m+1}^r \circ f_{m,m+1}^r$ が成り立つことは容易に確認できる．そこで，

$$\varphi = \bigl(\varinjlim_m \varphi_m^r \otimes \mathrm{id}_M\bigr) : \varinjlim_m K^r(\mathbf{a}^m) \otimes_R M \longrightarrow \check{C}^r(\mathbf{a}) \otimes_R M$$

とおく．φ_m^r の直和因子への制限として得られる $g_m\colon R \cong R((e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r})^\vee) \longrightarrow R_I$ を考える．$R_I \otimes_R M$ の元 y は m を十分大きな自然数とすれば，$y = x/(a_{i_1} \cdots a_{i_r})^m$ $(x \in M)$ という形に書けるから，$y \in \mathrm{Im}(g_m \otimes \mathrm{id}_M)$ であり，φ は全射である．また，$z \in \mathrm{Ker}(g_m \otimes \mathrm{id}_M)$ ならば，$k \gg 1$ に対して $z \in \mathrm{Ker}(f_{m+,m+k}^r \otimes \mathrm{id}_M)$ となる．したがって，φ は同型写像である．

コホモロジーの同型は，このことと，演習問題 2.6 からわかる． □

命題 7.6.9. 定義 7.6.7 の記号と仮定のもとで，次が成り立つ．

$$H_{n-r}\bigl(K_\bullet^\infty(\mathbf{a}) \otimes_R M\bigr) \cong H^r\bigl(K_\infty^\bullet(\mathbf{a}) \otimes_R M\bigr)$$

● p.252 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\operatorname{depth}_R = d = \operatorname{Krull}\dim R$ が成り立ち，

正: $\operatorname{depth} R = d = \operatorname{Krull}\dim R$ が成り立ち，

● p.252 定理 7.7.3 の末尾 (第 2 刷で修正)

条件 (3) の末尾に以下の文を追加して下さい．

追加文: ただし，$\mathfrak{a} = (0)$, $h = 0$ の場合も含む．

● p.251 〜 252 正規パラメータ系と定理 7.7.3 の補足説明 (第 2 刷で修正)

解説． 本書の正規パラメータ系の定義は，[永田] の正規パラメータ系の定義 ([永田] p.155) と異なっているが，[永田] 定理 6.5.4 より，両者の定義が同値であることがわかる．

また，定理 7.7.3 の証明をこの正誤表の最後の補遺に書いておきます．

● p.253 命題 7.7.4 の証明の (2) $\Longrightarrow$ (1) の段落の 3 行目

誤: $\mathfrak{m}$ は I の極小素因子でないので，

正: $\mathfrak{m}$ は I_n の極小素因子でないので，

● p.255 定理 7.7.8 の 4 行目 (第 2 刷で修正)

間違いではありませんが，以下のように改良してください．証明に変更はありません．

旧: (2) $\operatorname{inj}\dim_R R = n$.

新: (2) $\operatorname{inj}\dim_R R = \operatorname{depth}_R R = \operatorname{Krull}\dim R = n$.

● p.258 定理 7.7.11 の 1 行目

誤: $(R, \mathfrak{m})$ は Noether 局所環，$k = R/\mathfrak{m}$ とすれば，

正: $(R, \mathfrak{m}, k)$ は Noether 局所環で $\operatorname{Krull}\dim R < \infty$ とすれば，

● p.259 8 行目

誤: $\mathfrak{m}$ は R の非零因子全体からなるイデアルである.

正: $\mathfrak{m}$ は R の零因子全体からなるイデアルである.

● p.264 定義 8.1.2 の直後 (第 2 刷で修正)

以下の文を追加して下さい.

「命題 7.5.10(4) より，標準加群は極大 CM 加群である.」

● p.266 下から 5 行目. 補題 8.1.4(2) の証明の 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 定理 7.5.12 より，

正: 定理 7.5.13 より，

● p.269 1 行目 定理 8.1.5(5) の証明の 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: a_1 倍写像 $f_{a_1}\colon K_R \to K_R$ は同型写像になり，

正: a_1 倍写像 $f_{a_1}\colon K_R \to K_R$ は単射になり，

● p.271 13 行目 定理 8.1.8 の証明の 9 行目

誤: Matris

正: Matlis

● p.272 7 行目 定理 8.1.8 の証明の最後から 2 行目

誤: $\mathrm{Hom}_{S/\mathbf{a}S}(R, K_{S/\mathbf{a}K_S})$

正: $\mathrm{Hom}_{S/\mathbf{a}S}(R, K_{S/\mathbf{a}S})$

● p.276 下から 8 行目 定理 8.2.2 の証明の最後から 3 行目

誤: ある $k = k(r) \in N$ が存在して，

正: ある $k = k(r) \in \mathbb{N}$ が存在して，

● p.279 下から 7 行目

誤: Matris

正: Matlis

● p.280 1 行目

誤: Matris

正: Matlis

● p.281 下から 8 行目 定理 8.2.2 の証明の最後から 3 行目

誤: $C^\bullet\colon 0 \longrightarrow k^{\oplus \mu_0} \xrightarrow{\delta^1} k^{\oplus \mu_1} \xrightarrow{\delta^2} k^{\oplus \mu_2} \to \cdots$

正: $C^\bullet\colon 0 \longrightarrow k^{\oplus \mu_0} \xrightarrow{\delta^0} k^{\oplus \mu_1} \xrightarrow{\delta^1} k^{\oplus \mu_2} \to \cdots$

● p.284 7 行目

誤:

正:

● p.285 最下行 定理 8.2.9 の証明の 7 行目

誤: $\breve{D}^n = \bigoplus_{I \subset \mathfrak{I}_n} S_I',$

正: $\breve{D}^n = \bigoplus_{I \subset \mathfrak{I}_n} S_I,$

● p.288 命題 8.2.12

下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

命題 8.2.12. $(R,\ \mathfrak{m},\ k)$ は Noether 局所環，M は R-加群，$d = \operatorname{Krull\,dim} R$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d) \subset \mathfrak{m}$ は R-正則列とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \cong \operatorname{Tor}^R_{d-i}(H^d_{\mathfrak{m}}(R),\ M) \quad (\forall i \in \mathbb{Z})$

(2) $\operatorname{flat\,dim}_R H^d_{\mathfrak{m}}(R) = \operatorname{Krull\,dim} R$

証明．(1) 定理 7.6.3 より複体 $K_\bullet(\mathbf{a}^m)$ は $R/\mathbf{a}^m R$ の自由分解である．$K_r^\infty(\mathbf{a})$ はその帰納的極限なので平坦で，1 次以上のホモロジーは 0 である．定理 8.2.8, 7.6.8, 命題 7.6.9 より，その 0 次ホモロジー群は $H_\mathfrak{m}^d(R)$ と同型である．よって，

$$0 \longrightarrow K_d^\infty(\mathbf{a}) \longrightarrow \cdots \to K_1^\infty(\mathbf{a}) \longrightarrow K_0^\infty(\mathbf{a}) \longrightarrow H_\mathfrak{m}^d(R) \longrightarrow 0$$

は $H_\mathfrak{m}^d(R)$ の平坦分解を与える．定理 7.6.8, 8.2.8, 命題 7.6.9 より，

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tor}_{d-i}^R(H_\mathfrak{m}^d(R),\, M) \cong H_{d-i}\bigl(K_\bullet^\infty(\mathbf{a}) \otimes_R M\bigr)\\ &\cong H^i\bigl(K_\infty^\bullet(\mathbf{a}) \otimes_R M\bigr) \cong H^i\bigl(\check{C}^\bullet(\mathbf{a}) \otimes_R M)\bigr) \cong H_\mathfrak{m}^i(M)\end{aligned}$$

(2) 定理 8.2.10 と上の (1) よりすぐわかる． □

● p.290 系 8.2.14 の証明の 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: (1), (2) を示すは，

正: (1), (2) を示すには，

● p.290 系 8.2.14 の証明の 7 〜 8 行目

誤:

$$\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^i(M_\mathfrak{p},\, K_{R_\mathfrak{p}}) \cong S^{-1}\operatorname{Ext}_R(M,\, K_R) \neq 0$$

である．(1) より，

正:

$$\operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^i(M_\mathfrak{p},\, K_{R_\mathfrak{p}}) \cong S^{-1}\operatorname{Ext}_R^i(M,\, K_R)$$

である．もし，これが 0 でないならば，(1) より，

● p.299 下から 3 行目

誤: $\mathfrak{M}_G$

正: $\mathfrak{M}_R$

● p.301 下から 3 行目

誤: (斉次元による生成系のうち n が最小であるも)

正: (斉次元による生成系のうち n が最小であるもの)

● p.305 1 行目 下から 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 次数付き加群 M の次数付き自由加群による自由分解の層化が $\widetilde{M}$ の射影的分解を与えるので，

正: 次数付き加群 M の次数付き自由加群による自由分解の層化が $\widetilde{M}$ の局所自由分解を与え，

解説: 連接加群層の圏において，自由加群や局所加群は射影的対象にならないので，自由分解や局所自由分解は射影分解になるとは限りません．

● p.312 8 行目 命題 8.5.2 の (3') の 1 行目

誤: $M_{[\mathfrak{p}]}$ は CM $R_{[\mathfrak{m}]}$-加群で

正: $M_{[\mathfrak{m}]}$ は CM $R_{[\mathfrak{m}]}$-加群で

● p.316 下から 10 〜 9 行目

誤: ベロネーゼ埋入 $f = (f_0 : \cdots : f_m) : Y \to \mathbb{P}^m$ を作れば，$f(Y) \subset \mathbb{P}^m$ の座標環 R' は aCM 環になる．

正: ベロネーゼ埋入 $f = (f_0 : \cdots : f_m) : X \to \mathbb{P}^m$ を作れば，$f(X) \subset \mathbb{P}^m$ の座標環 R' は aCM 環になる．

● p.316 下から 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: ここで，R が locall Gorenstein ならば

正: ここで，R が locally Gorenstein ならば

● p.320 2 行目

誤: $K_{[\mathfrak{p}]}$

正: $K_{R_{[\mathfrak{p}]}}$

● p.320 9 行目 命題 8.5.12(1) の最後の行. (第 2 刷で修正)

誤: $m = \sum_{i=1}^{n} \deg a_i$ である.)

正: $m = -\sum_{i=1}^{n} \deg a_i$ である.)

● p.322 命題 8.5.14 の証明の 2 行目

誤: $(M^{\Diamond\Diamond})_i = \mathrm{Hom}_{R_0}\big(\mathrm{Hom}_{R_0}(M_i,\, E),\, E\big) \cong \widehat{R} = R$

正: $(M^{\Diamond\Diamond})_i = \mathrm{Hom}_{R_0}\big(\mathrm{Hom}_{R_0}(M_i,\, E),\, E\big) \cong \widehat{M_i} = M_i$

● p.328 定理 8.5.24(3) の 2 行目

誤: 斉次元からなるパラメータ系とする.

正: 斉次元からなる R-正則列とする.

● p.328 定理 8.5.24 の証明の 1 行目

誤: $E = R_{R_0}(R_0/\mathfrak{m}_0)$ とし,

正: $E = E_{R_0}(R_0/\mathfrak{m}_0)$ とし,

● p.329 定理 8.5.25 の証明の 4 行目

誤: $\cong \mathrm{Tor}_i^R(M,\, R^{\Diamond})^{\Diamond} \cong \mathrm{Ext}_R^i(M,\, R^{\triangledown\triangledown}) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M,\, K_R)$

正: $\cong \mathrm{Tor}_i^R(M,\, R^{\Diamond})^{\Diamond} \cong {}^*\mathrm{Ext}_R^i(M,\, R^{\Diamond\Diamond}) \cong {}^*\mathrm{Ext}_R^i(M,\, K_R)$

● p.329 7 行目, 13 行目

誤: Matris

正: Matlis

● p.336 10 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 森田康夫『代数概論』培風館

正: 森田康夫『代数概論』裳華房

● p.336 17 行目 (第 2 刷で修正)

誤: [EJ] (中略) 『Relatice Homological Algebra』

正: [EJ] (中略) 『Relative Homological Algebra』

● 記号索引 (p338 〜 339)

以下の 4 個の項目のページ番号が間違っていて，正しいページ番号より 1 だけ小さい値になっていました.

$\operatorname{depth}_R M$　　232 → 233

$K_\bullet(\mathbf{a}, M)$　　242 → 243

$\check{C}^\bullet(\mathbf{a})$　　249 → 250

${}^*E_R(M)$　　305 → 306

● 用語索引 (p340 〜 343)

以下の 22 個の項目のページ番号が間違っていて，正しいページ番号より 1 だけ小さい値になっていました.

Čech 複体　　249 → 250

Gorenstein 環　　279 → 280

Koszul 複体　　242 → 243

移入 (的) 分解　　89 → 90

完全対　　141 → 142

境界作用素　　43 → 44

Gorenstein 環　　279 → ゴレンシュタイン環　　280

次数付き環　　290 → 291

射影分解　　90 → 91

射影 (的) 次元　　86 → 87

自由分解　　83 → 84

スペクトル系列　　125 → 126

正の次数付き環　　290 → 291

成分　　43 → 44

お礼. みんなで正誤表 http://public-errata.appspot.com も参考にさせて頂きました.

補遺

● 定理 7.2.2 の証明

証明に必要な諸定理の証明から始める．

命題 7.2.1b. R はネーター環, M は有限生成 R-加群とする．このとき，$\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Supp}\, M$ であり，$\mathrm{Ass}\, M$ の極小元全体の集合は，$\mathrm{Supp}\, M$ の極小元全体の集合と一致する．

証明. (i) $\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Supp}\, M$ を示す．$\mathrm{ann}(x) = \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, M$ $(x \in M)$ とする．x 倍写像 $R/\mathfrak{p} \to M$ は単射だから，x 倍写像 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p}$ も単射である (局所化の平坦性)．よって，$M_\mathfrak{p} \neq 0$ で $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M$ である．

(ii) $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Supp}\, M$ の極小元であるとする．勝手な $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, M_\mathfrak{p}$ をとる．ある $x \in \mathrm{Ass}\, M_\mathfrak{p}$ により $\mathfrak{q} = \mathrm{ann}(x)$ と書ける．$x = y/a$ $(y \in M,$ $a \in R - \mathfrak{p})$ と書ける．$b \in R_\mathfrak{p}$ に対して,「$bx = 0 \Longleftrightarrow by = 0$」であるので，$\mathrm{ann}(x) = \mathrm{ann}(y)$ である．よって，$\mathfrak{q} \cap R \in \mathrm{Ass}\, M$ である．$\mathfrak{q}$ は $R_\mathfrak{p}$ の素イデアルだから，$\mathfrak{q} \cap R \subset \mathfrak{p}$ である．$\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Supp}\, M$ の極小元で $\mathfrak{q} \cap R \in \mathrm{Supp}\, M$ だから，$\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ でなければならない．特に，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R \in \mathrm{Ass}\, M$ である．$\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Supp}\, M$ だから，$\mathrm{Supp}\, M$ の極小元 $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ass}\, M$ でも極小である．

(iii) $\mathfrak{q}$ は $\mathrm{Ass}\, M$ の極小元とする．$\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Supp}\, M$ だから，$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ であるような $\mathrm{Supp}\, M$ の極小元 $\mathfrak{p}$ が存在する．(ii) より，$\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Ass}\, M$ の極小元であるから，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ である． □

命題 7.2.1c. R はネーター環, M は有限生成 R-加群，$N \subset M$ は部分 R-加群とする．N が M の準素部分加群であるための必要十分条件は，ある R の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在して $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\} \in \mathrm{Ass}(M)$ となることである．このとき，N は $\mathfrak{p}$-**準素部分加群**であるという．また，このとき $\mathrm{ann}(M/N)$ は準素イデアルで，$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} = \mathfrak{p}$ である．

証明. (I) 一般に，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$ のとき，ann の定義から $\mathrm{ann}(M/N) \subset \mathfrak{p}$ であるので，$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \subset \mathfrak{p}$ である．

(II) $ax=0$ を満たす $a \in R$, $0 \neq x \in M/N$ をとる．

$$F_x = \{ \mathrm{ann}(y) \mid y \in M/N,\, y \neq 0,\, \mathrm{ann}(x) \subset \mathrm{ann}(y) \}$$

とおく．F_x には極大元 $\mathrm{ann}(y)$ が存在する．b, $c \in R$, $bcy=0$, $cy \neq 0$ ならば $\mathrm{ann}(y)$ の極大性から $\mathrm{ann}(cy) = \mathrm{ann}(y)$ であり，$b \in \mathrm{ann}(y)$ となる．よって，$\mathrm{ann}(y)$ は素イデアルで $\mathrm{ann}(y) \in \mathrm{Ass}(M/N)$ である．特に $\mathrm{Ass}(M/N) \neq \phi$ である．

(必要性) N は M の準素部分加群であると仮定する．勝手な $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(x) \in \mathrm{Ass}(M/N)$ をとる．$a \in \mathfrak{p}$ ならば $ax=0$ だから準素部分加群の定義より $a \in \sqrt{\mathrm{ann}(M/N)}$ である．よって，$\mathfrak{p} \subset \sqrt{\mathrm{ann}(M/N)}$ となり，(I) より $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{ann}(M/N)}$ となる．また，$\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$ である．

(十分性) $\mathrm{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}\}$ と仮定する．$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} = \mathfrak{p}$ であることを証明しよう．$\mathrm{ann}(M/N) \subset \mathfrak{p}$ なので，$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \subset \mathfrak{p}$ である．$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \supset \mathfrak{p}$ を示そう．

$x \in \mathfrak{p} - \sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \neq \phi$ であると仮定すると，$S = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は積閉集合である．$S \cap I = \phi$, $\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \subset I \subset \mathfrak{p}$ を満たす R のイデアル I 達の中で極大なものをとり，それを改めて I とする．$b_1, b_2 \notin I$ のとき，$\exists c_i \in S \cap (Rb_i + I) \neq \phi$ であるが，$c_1 c_2 \in S \cap (Rb_1 b_2 + I) \neq \phi$ より $b_1 b_2 \notin I$ であり，I は素イデアルである．

$\mathfrak{q}$ は $\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} \subset \mathfrak{q} \subset I$ を満たす素イデアルの中で極小なものとする．$a \in R - \mathfrak{q}$ ならば，ある $y \in M/N$ が存在して $ay \neq 0$ となる．よって，$(M/N)_{\mathfrak{q}} = (M/N) \otimes_R R_{\mathfrak{q}} \neq 0$ である．前命題より $\mathfrak{p}$ は $\mathrm{Supp}(M/N)$ の唯一の極小元であり，$\mathfrak{q} \in \mathrm{Supp}(M/N)$ だから，$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ がわかる．$\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q} \subset I \subset \mathfrak{p}$ より，$I = \mathfrak{p}$ となり，$x \notin I$ と矛盾する．

以上で，$\sqrt{\mathrm{ann}(M/N)} = \mathfrak{p}$ が証明された．$a \in R$, $0 \neq x \in M/N$ が $ax=0$ を満たすと仮定する．(II) より F_x の極大元は $\mathrm{Ass}(M/N)$ の元であるから，$\mathrm{ann}(x) \subset \mathfrak{p}$ である．よって，$a \in \sqrt{\mathrm{ann}(M/N)}$ であり，N は M の準素部分加群である． □

命題 7.2.1d. R は可換環，M は R-加群，$\mathfrak{p}$ は R の素イデアル，$N_1, \ldots, N_r$ は M の $\mathfrak{p}$-準素部分加群とする．すると，$N_1 \cap \cdots \cap N_r$ も $\mathfrak{p}$-準素部分

加群である．

証明．$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ とおく．自然な写像 $M/N \to \bigoplus_{i=1}^{r} M/N_i$ は単射だから，

$$\operatorname{Ass}(M/N) \subset \operatorname{Ass}\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M/N_i\right) = \bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Ass}(M/N_i) = \bigcup_{i=1}^{r} \{\mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p}\}$$

となる．よって，N も $\mathfrak{p}$-準素である． □

補題 7.2.1e. $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ が R-加群の完全系列ならば，

$$\operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} L \cup \operatorname{Ass} N$$

である．

証明．$\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(x) \in \operatorname{Ass} L$ $(x \in L)$ ならば，$\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(f(x)) \in \operatorname{Ass} M$ である．よって，$\operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} M$.

次に，$\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(y) \in \operatorname{Ass} M$ $(y \in M)$ とする．y 倍写像 $R/\mathfrak{p} \to M$ は単射であり，その像を $R/\mathfrak{p} \cong K \subset M$ とする．このとき，任意の $0 \neq x \in K$ に対して $\operatorname{ann}(x) = \mathfrak{p}$ が成り立つ．

$\exists x \in f(L) \cap K \neq 0$ の場合には，$\operatorname{ann}(x) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} L$ である．$f(L) \cap K = 0$ の場合には，$K \cong g(K) \cong R/\mathfrak{p}$ だから，$z \in g(K)$ をとれば $\mathfrak{p} = \operatorname{ann}(z) \in \operatorname{Ass} N$ となる． □

補題 7.2.1f. R はネーター環，M は有限生成 R-加群で $M \neq 0$ とする．すると，$\operatorname{Ass} M$ は空でない有限集合である．

証明．$\operatorname{Ass} M \neq \phi$ であることは，命題 7.2.1c の証明の (ii) で示されている．

$\mathfrak{p}_1 = \operatorname{ann}(x_1) \in \operatorname{Ass} M$ に対し，x_1 倍写像 $R/\mathfrak{p}_1 \to M$ の像を M_1 とおくと，$\operatorname{Ass} M_1 = \{\mathfrak{p}_1\}$, $\operatorname{Ass}(M/M_1) \cup \{\mathfrak{p}_1\} = \operatorname{Ass} M$ である．$\mathfrak{p}_2 = \operatorname{ann}(x_2) \in \operatorname{Ass}(M/M_1)$ に対し，x_2 倍写像 $R/\mathfrak{p}_2 \to M/M_1$ の像を M_2/M_1 とおくと，$\operatorname{Ass}(M_2/M_1) = \{\mathfrak{p}_2\}$, $\operatorname{Ass}(M/M_2) \cup \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\} = \operatorname{Ass} M$ である．以下，同様に $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$ を構成すると，M はネーター加群だからある

$n \in \mathbb{N}$ が存在して $M_n = M$ となる．よって，$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ である． □

定理 7.2.2. (準素加群分解) R は Noether 可換環，$0 \neq M$ は有限生成 R-加群，$N \subsetneqq M$ は部分 R-加群とする．

（1） $\operatorname{Ass}(M/N)$ は空でない有限集合であって，$\operatorname{Ass}(M/N)$ の極小元全体の集合は，$\operatorname{Supp}(M/N)$ の極小元全体の集合と一致する．

（2） $\operatorname{Ass}(M/N) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ とおくとき，M の準素部分加群 $N_1, \ldots, N_r$ が存在して，

$$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r, \quad \operatorname{ann}(M/N_i) = \mathfrak{p}_i, \quad \operatorname{Ass}(M/N_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$$

$(i = 1, \ldots, r)$ を満たす．これを N の**準素** (**加群**) **分解**という．ただし，$N_1, \ldots, N_r$ は一意的とは限らない．

証明. (1) は既に証明した．(2) を示す．$N = 0$ の場合の証明すれば十分である．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ を 1 つ固定する．

$\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} M$ を満たす R-部分加群 $L \subset M$ の中で極大なものを改めて L とする．勝手な $\mathfrak{q} = \operatorname{ann}(\overline{x}) \in \operatorname{Ass}(M/L)$ をとる ($\overline{x}$ は $x \in M$ の L を法とする同値類)．$L' = L + Rx$ とおくと $\operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} L' \subset \operatorname{Ass} L \cup \operatorname{Ass}(L'/L) = \operatorname{Ass} L \cup \{\operatorname{ann}(\overline{x})\}$ なので，もし $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ ならば L の極大性に矛盾する．よって，$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ であり，$\operatorname{Ass}(M/L) = \{\mathfrak{p}\}$ である．命題 7.2.1c より L は M の $\mathfrak{p}$-準素部分加群である．$\operatorname{Ass} L \subset \operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Ass} L \cup \operatorname{Ass}(M/L)$ だから，$\operatorname{Ass} L = \operatorname{Ass} M - \{\mathfrak{p}\}$ である．

命題 7.2.1f より，$\operatorname{Ass} M$ は有限集合なので，$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$ とおく．$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass} M$ に対して，上のような L を 1 つ選び，それを N_i とおく．$K = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ とおく．$K \subset N_i$ より $\operatorname{Ass} K \subset \operatorname{Ass} N_i = \operatorname{Ass} M - \{\mathfrak{p}_i\}$ である．よって，$\operatorname{Ass} K = \phi$ となる．これは $K = 0$ を意味する．よって，$0 = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ が M の R-部分加群 $N = 0$ の準素分解を与える． □

● 定理 7.2.3 の証明

定理 7.7.3 **の証明**. 命題 7.7.4, 命題 7.7.5, 命題 7.7.6 の証明で定理 7.7.3 は用いられていないので, これら 3 つの命題を利用して定理 7.7.3 を証明する．

(1) $\Longrightarrow$ (2) を示す．命題 7.7.4 の (1) $\Longrightarrow$ (2) より，$a_1,\ldots, a_d$ ($d = \operatorname{depth} R = \operatorname{Krull\,dim} R$) が R-正則列ならば，$\operatorname{ht}(a_1,\ldots, a_d) = d$ であるので，$(a_1,\ldots, a_d)$ の素因子は $\mathfrak{m}$ のみで，$a_1,\ldots, a_d$ は正規パラメータ系になる．

(1) $\Longrightarrow$ (3) を示す．R は CM 環で，$\mathfrak{a} = (a_1,\ldots, a_r)$ は R のイデアルで $\operatorname{ht}\mathfrak{a} = r$ と仮定する．$\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{a}$ の素因子とする．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{a})$ である．定理 7.5.11 より，$\operatorname{depth} R/\mathfrak{a} \leqq \operatorname{Krull\,dim} R/\mathfrak{p} \leqq \operatorname{Krull\,dim} R/\mathfrak{a}$ である．他方，

$$\operatorname{Krull\,dim} R/\mathfrak{a} = \operatorname{Krull\,dim} R - r = \operatorname{depth} R - r$$

である．命題 7.7.4 の (2) $\Longrightarrow$ (1) より，$a_1,\ldots, a_r$ は R-正則列である．定理 7.5.9(3) より，$\operatorname{depth} R/\mathfrak{a} = \operatorname{depth} R - r$ である．以上より，$\operatorname{Krull\,dim} R/\mathfrak{p} = \operatorname{Krull\,dim} R/\mathfrak{a}$ が得られるので，$\operatorname{ht}\mathfrak{p} = r$ である．

(3) $\Longrightarrow$ (1) を示す．$\operatorname{Krull\,dim} R = d$ とし，$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ を R の素イデアル列とする．帰納的に，正則列 $a_1,\ldots, a_d$ ($a_i \in \mathfrak{p}_i$) を構成する．

$i \geqq 1$ とし，正則列 $a_1,\ldots, a_{i-1}$ が定まっていて，イデアル $\mathfrak{a}_{i-1} = (a_1,\ldots, a_{i-1})$ は $\operatorname{ht}\mathfrak{a}_{i-1} = i-1$ を満たすと仮定する．ただし，$\mathfrak{a}_0 = 0$ とする．$\mathfrak{a}_{i-1} = (a_1,\ldots, a_{i-1})$ のどの素因子も高さ $i-1$ だから，$a_i \in \mathfrak{p}_i$ を，$\mathfrak{a}_{i-1}$ のどの素因子にも含まれないように選ぶことができる．$R/\mathfrak{a}_{i-1}$ における a_i の像 $\overline{a_i}$ は，(0) の素因子に含まれないのでゼロ因子でない．実際，準素イデアル分解 $\mathfrak{a}_{i-1} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ をとるとき，$a_i x \in \mathfrak{a}_{i-1}$ ならば，$a_i^n \notin \mathfrak{q}_j$ だから $x \in \mathfrak{q}_j$ で，$x \in \mathfrak{a}_{i-1}$ となる．よって，$a_1,\ldots, a_i$ は正則列になる．

長さ d の正則列が存在するので，$\operatorname{depth} R = d = \operatorname{Krull\,dim} R$ となる． □

● 参考 7.7.13 の証明

参考 7.7.13 を 2 つの定理に分けて証明する．

定理 7.7.13b. (アウスランダー・ブックスバウムの定理)　正則局所環は UFD(素元分解整域) である．

証明. R は正則局所環，$\mathfrak{m}$ は R の極大イデアル，$d = \mathrm{Krull}\dim R$, $x_1,\ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ は正則パラメータ系とする．

Claim 1. R は整域で，x_1 は R の素元であることを証明する．

$R_k = R/(x_1, \ldots, x_k)$ とし R_k における $\mathfrak{m}$, x_i の像を $\mathfrak{m}_k$, $x_{i,k}$ とおく．$\mathfrak{m}_k$ は $x_{k+1,k},\ldots, x_{n,k}$ で生成される R_k の極大イデアルである．R_k が整域であることを k についての降下帰納法で証明する．R_d は体なので整域である．

$k < d$ として，R_{k+1} は整域であると仮定する．$y := x_{k+1,k} \in R_k$ とおく．$R_k/yR_k \cong R_{k+1}$ だから yR_k は R_k の高さ 1 の素イデアルである．もし R_k が整域でないとすると $(0) \neq \mathfrak{q} \subsetneqq yR_k$ を満たす R_k の高さ 0 の素イデアル $\mathfrak{q}$ が存在する．$\mathfrak{q}$ の勝手な元 $0 \neq ay \in \mathfrak{q}$ $(a \in R_k)$ をとる．$y \notin \mathfrak{q}$ だから $a \in \mathfrak{q}$ である．よって，$\mathfrak{q} \subset y\mathfrak{q}$ である．これを R_k の yR_k による局所化 R'_k で考えれば，中山の補題より $\mathfrak{q}R'_k = (0)$ が得られる．これは $\mathfrak{q} = (0)$ を意味する．よって，R_k は整域である．

特に R_1 は整域なので，x_1R は素イデアルで，x_1 は R の素元である．$R_0 = R$, $y = x_1$ として上の議論を適用すれば，R も整域であることがわかる．

定理 7.6.3(3) より，Koszul 複体 $0 \longrightarrow K_d \xrightarrow{\delta_d} K_{d-1} \xrightarrow{\delta_{d-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} K_0 \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$ は $R/\mathfrak{m}$ の長さ d の自由分解である．よって，$i > d$ のとき $\mathrm{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{m}) = 0$ となる．定理 7.5.16(2) より，任意の有限生成 R-加群 M は長さ d 以下の自由分解を持つ．

さて，d に関する帰納法で R が UFD であることを証明する．$d = 1$ のときは R の素イデアル (0) と $\mathfrak{m} = (x_1)$ が単項イデアルなので R は PID(単

項イデアル整域) であり，R は UFD である．$d \geqq 2$ とし $d-1$ まで定理は正しいと仮定する．

Claim 2. $S := R[1/x_1]$ が UFD であることを証明する．

$\mathfrak{m}S = S$ で S は局所環とは限らないことに注意しよう．$\mathfrak{p}$ は S の勝手な高さ 1 の素イデアルとする．各 $\mathfrak{p}$ が単項イデアルであれば，S は UFD である．$\mathfrak{p} \cap R$ は高さ 1 の R の素イデアルである．上の考察から $\mathfrak{p} \cap R$ は長さ d 以下の R-自由分解

$$0 \to L_d \to L_{d-1} \to \cdots \to L_0 \to \mathfrak{p} \cap R \to 0$$

を持つ．$F_i := L_i \otimes_R S$ とおけば，$\mathfrak{p}$ の S-加群としての自由分解

$$0 \xrightarrow{f_{d+1}} F_d \xrightarrow{f_d} F_{d-1} \xrightarrow{f_{d-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{p} \to 0 \tag{1}$$

が得られる．$\mathfrak{n}$ を S の任意の極大イデアルとし，$\mathfrak{q} := \mathfrak{n} \cap R$ とおく．$\mathfrak{q}$ は R の素イデアルである．$S/\mathfrak{n} \neq R/\mathfrak{m}$ に注意しよう．$x_1 \notin \mathfrak{q}$ なので $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$ である．よって，$\operatorname{Krull\,dim} S_{\mathfrak{n}} = \operatorname{Krull\,dim} R_{\mathfrak{q}} < d$ となる．$S_{\mathfrak{n}}$ は正則局所環であるから，帰納法の仮定から $S_{\mathfrak{n}}$ は UFD である．もし $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$ ならば $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{n}}$ は $S_{\mathfrak{n}}$ の高さ 1 の素イデアルだから単項である．また $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{n}$ ならば，$\mathfrak{p}S_{\mathfrak{n}} = S_{\mathfrak{n}}$ である．いずれの場合も $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{n}}$ はランク 1 の $S_{\mathfrak{n}}$-自由加群である．定理 3.2.9 より $\mathfrak{p}$ はランク 1 の局所自由 S-加群であり，定理 3.2.11 より $\mathfrak{p} = \operatorname{Im} f_0$ は射影的 S-加群である．完全系列 $0 \longrightarrow \operatorname{Im} f_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow \operatorname{Im} f_i \longrightarrow 0$ を考えると，$\operatorname{Im} f_i$ が射影的ならばこれは split するので，i に関する帰納法で，$\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i+1}$ は射影的で，$F_i \cong \operatorname{Im} f_{i+1} \oplus \operatorname{Im} f_i$ であることがわかる．これより，$G_i := \bigoplus_{k \geqq 0} F_{i+2k}$ とおくとき，i に関する降下帰納法で $\operatorname{Im} f_i \oplus G_{i+1} \cong G_i$ であることが証明できる．特に，$\mathfrak{p} \oplus G_1 \cong G_0$ である．ここで，G_0, G_1 はランクが有限な S-自由加群である．$r = \operatorname{rank} G_1$ とおけば，S-加群として

$$S \cong \bigwedge^{r+1} G_0 = \bigwedge^{r+1} (\mathfrak{p} \oplus G_1) \cong \mathfrak{p} \otimes_S \bigwedge^{r} G_1 \cong \mathfrak{p} \otimes_S S \cong \mathfrak{p}$$

となるので，$\mathfrak{p}$ はランク 1 の自由 S-加群である．すなわち，$\mathfrak{p}$ は S の単項イデアルである．

Claim 3. R は UFD であることを証明する．

0 でも可逆元でもない $a \in R$ をとる．$S = R[1/x_1] \supset R$ は UFD なので，S において $a = ua_1 \cdots a_m$ と一意的に素元分解できる．ここで，u は S の単元であり，$u = vx_1^l$ ($l \in \mathbb{Z}$ で v は R の単元) と書ける．また，$a_i = b_i/x_1^{k_i}$ ($b_i \in R$ で b_i は素元 x_1 の倍数でない) と書ける．$a_iR[1/x_1]$ は S の素イデアルなので，$b_iR = a_iS \cap R$ は R の素イデアルである．よって，b_i は R の素元である．$k = k_1 + \cdots + k_m$ とおくと R において

$$\begin{cases} a = vx_1^{m-k}b_1 \cdots b_m & (m \geqq k \text{ のとき}) \\ ax_1^{k-m} = vb_1 \cdots b_m & (m < k \text{ のとき}) \end{cases}$$

成り立つ．x_1 と b_i は R の同伴でない素元だから，素元分解の一意性から下の場合は起こらず，上の形に a は素元分解できる．よって R は UFD である． □

定理 7.7.13c. 局所環 R が UFD ならば，R は整閉整域である．特に，正則局所環は正規環である．

証明. R は UFD とする． $f/g \in Q(R)$ (f, $g \in R$) が R 上整であるとする．ただし，g は R の可逆元でなく，f と g は共通因子を持たないと仮定する．ある $m \in \mathbb{N}$ と $a_1, \ldots, a_m \in R$ があり，

$$\left(\frac{f}{g}\right)^m + a_1\left(\frac{f}{g}\right)^{m-1} + a_2\left(\frac{f}{g}\right)^{m-2} + \cdots + a_m = 0$$

となる．$m \geqq 2$ とすると，

$$f^m = -(a_1f^{m-1} + a_2f^{m-2}g + \cdots + a_mg^{m-1})g$$

となり，f と g が共通因子を持たないことに反する．したがって，g は R の可逆元で，$f/g \in R$ であり，R は整閉である． □