

不等式正誤表

(2017 年 10 月 10 日版)

前半に誤りや誤植の修正のみを列挙し，後半に改良できる結果を紹介
します．

目次

目次のページ番号の中で，以下の 9 個のページ番号が間違っていて，正
しいページ番号より 1 だけ小さい値になっていました．

2.1.4 5 次以上の対称・巡回不等式	32	33
2.3 4 次斉次不等式	56	57
2.4.2 5 次巡回不等式	81	82
2.5.3 6 次巡回不等式詳論	107	108
3.1.2 分母が 1 次の斉次巡回有理不等式	123	124
3.1.3 分母が 1 次的一般有理不等式	128	129
4.1.3 Popoviciu-Cirtoaje の不等式	183	184
4.1.4 EV-定理	186	187
5.2.6 命題 P_{12} と P_{23} の証明	262	263

p.2, 系 1.1.2 行目

$$\text{誤: } \geq \frac{na_1a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

$$\text{正: } \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

p.6, 下から 2 行目

$$\text{誤: } +i!(n-i)!s_i xy + \frac{(i+1)!}{2} \cdot (n-i-1)!y^2$$

$$\text{正: } +i!(n-i)!s_i xy + \frac{(i+1)!}{2} \cdot (n-i-1)!s_{i+1}y^2$$

p.7, 3 行目

誤: $\frac{(n!)^2}{4} D =$

正: $\frac{D}{(n!)^2} =$

p.7, 下から 4 行目

誤: 狭義単調減

正: 狭義単調減少

p.7, 下から 3 行目と下から 2 行目 (2ヶ所)

誤: 定義

正: 定義

p.13, 1 行目

誤: $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\alpha x_{\sigma(k)}^{p_k} x_{\sigma(l)}^{p_l} + \beta x_{\sigma(l)}^{p_l} x_{\sigma(k)}^{p_k} \right) X_\sigma$

正: $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\alpha x_{\sigma(k)}^{p_k} x_{\sigma(l)}^{p_l} + \beta x_{\sigma(l)}^{p_l} x_{\sigma(k)}^{p_k} \right) X_\sigma$

p.13, 3 行目 (このままでも間違いではありませんが)

誤: $\geq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(x_{\sigma(k)}^{q_k} x_{\sigma(l)}^{q_l} \right) X_\sigma$

正: $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(x_{\sigma(k)}^{q_k} x_{\sigma(l)}^{q_l} \right) X_\sigma$

p.13, 13 行目

誤: $n \geq 3$ とし, \mathfrak{J}_n^{n-1} では列 ① が存在すると仮定する.

正: $n \geq 3$ とし, \mathfrak{J}_d^{n-1} では列 ① が存在すると仮定する.

p.13, 15 行目

誤: \mathcal{J}_d^{n-1} の元として考えれば,

正: $\mathcal{J}_{d-p_1}^{n-1}$ の元として考えれば,

p.13, 下から 3 行目

誤: $\mathbf{p}_{r+1} := (q_1, p_2 + m_2, \dots, p_r + m_r, p_{r+1} + p_1 - q_1, p_{r+2}, \dots, p_n)$

正: $\mathbf{p}_{r+1} := (q_1, p_2 + m_2, \dots, p_r + m_r, p_{r+1} + p_1 - q_1 - (m_1 + \dots + m_r), p_{r+2}, \dots, p_n)$

p.26, 命題 2.1.1 の (2)

誤: (2) $3S_4 \geq T_{3,1} \geq 2S_{2,2} \geq 2US_1$

正: (2) $2S_4 \geq T_{3,1} \geq 2S_{2,2} \geq 2US_1$

p.30, 4 行目 (例題 2.1.5(1) の解答)

誤: (1) $S_4 + 2S_{2,2} - 3US_1 = (S_4 - US_1) + (2S_{2,2} - 2US_1)$.

正: (1) $S_{2,2} - US_1$.

p.32, 下から 11 行目 (系 2.1.7 (2'))

誤: (2') $S_4 \geq S_{3,1}, S_{2,2} \geq US_3$

正: (2') $S_4 \geq S_{3,1}, S_{2,2} \geq US_1$

p.35, 1 行目 (例題 2.1.10(2))

誤: $(a^3 + b^3 + c^3)^4 \geq (a^4 + b^4 + c^4)^3$

正: $(a^3 + b^3 + c^3)^4 \geq 3(a^4 + b^4 + c^4)^3$

(不等式自体はウソではありませんが)

p.35, 4 行目 (例題 2.1.10(4))

誤: $\geq (a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3$

正: $\geq 27(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3$
 (不等式自体はウソではありませんが)

p.35, 下から 6 行目 (例題 2.1.10 解答 (4) の 2 行目)

誤: $4(3a^3 + 2b^2 + c^3)$

正: $4(3a^3 + 2b^3 + c^3)$

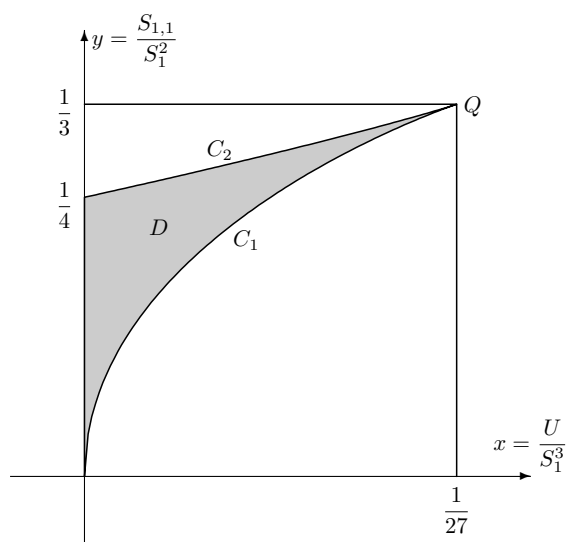
p.37, 5 行目 (例題 2.1.11 解答 (4) の 4 行目)

誤: $= (x^2 + y^x + z^2) +$

正: $= (x^2 + y^2 + z^2) +$

p.42, グラフ

グラフ中の P は Q の誤りです。以下のグラフと差し替えて下さい。



p.43, 下から 5 行目 (補題 2.2.2 の証明の 1 行目)

誤: 前定理の ① を書き換えると ,

正: $p = S_1, q = S_{1,1}, r = U$ として前定理の ① を書き換えると ,

p.55, 2 行目 (補定理 2.2.11 の 2 行目)

誤: $(\mathbb{R}_+ \ddot{U} + (\mathcal{C}_3^+)^b)$

正: $(\mathbb{R}_+ \cdot U + (\mathcal{C}_3^+)^b)$

p.57, 下から 3 行目

誤: xyz の最小値を $r_1 = \alpha_1 \beta^2$,

正: xyz の最小値を $r_1 = \alpha_1 \beta_2^2$,

p.69, 下から 5 行目

誤: $2q + r + 2 = (-p + \beta) +$

正: $2q + r + 2 = 2(-p + \beta) +$

p.70. 3 行目. 定理 2.3.8(1) の 3 行目.

誤: $k^2 S_4 - 2k T_{3,1} + (2k^2 + 1) S_{2,2} - (k - 2) U S_1$

正: $k^2 S_4 - 2k T_{3,1} + (2k^2 + 1) S_{2,2} - (2k - 2) U S_1$

p.70. 4 行目. 定理 2.3.8(1) の 4 行目.

誤: $-1/2 \leq k < 1$

正: $-1/2 \leq k \leq 1$

p.70. 8 行目. 定理 2.3.8(1) の 8 行目. 以下の行を削除して下さい .

$$L_{0,0} := \{ \alpha \mathfrak{g}_{2,2} + \beta \mathfrak{l}_0 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \}$$

p.70. 9 行目. 定理 2.3.8(1) の 9 行目.

誤: $L_\infty := \{ \alpha \mathfrak{g}_\infty + \beta \mathfrak{l}_0 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \}$

正: $L_\infty := \{\alpha \mathfrak{g}_{2,2} + \beta \mathfrak{l}_0 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+\}$

p.70 の下から 2 行目型 ~ p.71 の 10 行目. 定理 2.3.8(1) の証明全部 .

この定理 2.3.8(1) の証明は, 直感に頼った不十分な点があり, 厳密性に欠けるようです . 正しい証明は, 実代数幾何を利用した, もっと難しい証明で, 後で体系立てて説明します .

p.72. 下から 10 行目.

誤: $0 = f(0) < f(\sqrt{3}) = 6(p+q) - (p^2 + pq + q^2) - 15$

正: $0 = \varphi(0) < \varphi(\sqrt{3}) = 6(p+q) - (p^2 + pq + q^2) - 15$

p.73. 3 行目.

誤: $\varphi_0(x_0) = 0$

正: $\varphi(x_0) = 0$

p.75 ~ 76, 例題 2.3.11

まず, 例題 2.3.11(3) は間違いでした . 以下のように訂正して下さい .

例題 2.3.11. (3) $S_4 + \beta S_{2,2} \geq (\beta + 1)S_{3,1}$ を満たす β は存在しない .

なお, 例題 2.3.11 の解答を下記と差し替えて下さい .

解答. (1) $s = \sqrt[4]{3}$ として, $S_4 + \left(\frac{4\sqrt[4]{3}}{3} - 1\right)US_1 - \frac{4\sqrt[4]{3}}{3}S_{3,1} = \mathfrak{g}_{0,s}^A + \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27}}{3}h_s \geq 0$ である .

(2) $S_4 - (p+1)S_{3,1} + pS_{1,3} = \mathfrak{g}_{0,s}^A + qh_s$ が成立するような (s, p, q) を求める . 両辺の $S_{3,1}, S_{1,3}, S_{2,2}$ の係数に注目すると, 連立方程式

$$\begin{aligned} -(p+1) &= \frac{1-2s^2}{s} + q \\ p &= \frac{s^2-2}{s} + s^2q \end{aligned}$$

$$0 = \frac{(s^2 - 1)^2}{s^2} - 2sq$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると， $q > 0$ であるものは， $(s, p, q) \doteq (1.659046320, 1.379074434, 0.3362622802)$ ， $(0.6027559256, -2.379074434, 0.9255399651)$ の 2 つだけである．なお，後者は $S_4 + \alpha S_{3,1} \geq (\alpha + 1)S_{1,3}$ を与える．また，連立方程式から p, q を消去すると s の 6 次方程式が得られる．

(3) $S_4 - p + 1S_{3,1} + pS_{2,2} = g_{0,s}^A + qh_s$ が成立するような (s, p, q) を求める．両辺の $S_{3,1}, S_{1,3}, S_{2,2}$ の係数に注目すると，連立方程式

$$\begin{aligned} -(p+1) &= \frac{1-2s^2}{s} + q \\ 0 &= \frac{s^2-2}{s} + s^2q \\ p &= \frac{(s^2-1)^2}{s^2} - 2sq \end{aligned}$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると， $s \geq 0$ ， $q > 0$ であるような解は存在しないことがわかる．

(4) $S_4 + pS_{3,1} - (p+1)S_{2,2} = g_{0,s}^A + qh_s$ が成立するような (s, p, q) を求める．両辺の $S_{3,1}, S_{1,3}, S_{2,2}$ の係数に注目すると，連立方程式

$$\begin{aligned} p &= \frac{1-2s^2}{s} + q \\ 0 &= \frac{s^2-2}{s} + s^2q \\ -(p+1) &= \frac{(s^2-1)^2}{s^2} - 2sq \end{aligned}$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると， $q > 0$ であるものは， $(s, p, q) \doteq (0.6774488196, 5.077909402, 4.956680770)$ の 1 つだけである．

(5) $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおくと， $S_4 + 2S_{3,1} - 2S_{1,3} - S_{2,2} = g_{0,s}^A + \frac{\sqrt{5}+1}{2}h_s \geq 0$ である． \square

誤: (1) 例題 2.3.11(6) より ,

正: (1) 例題 2.3.11(5) より ,

p.77. 6 行目.

誤: (2) 例題 2.3.11(4) より ,

正: (2) 例題 2.3.11(3) より ,

p.77. 8 行目.

誤: (3) 例題 2.3.11(5) から

正: (3) 例題 2.3.11(4) から

p.82, 下から 5 行目. 定理 2.4.4 の 3 行前.

誤: これは , $U_2 \geq U_{1,1}$ より ,

正: これは , $S_2 \geq S_{1,1}$ より ,

p.83, 3 行目. 定理 2.4.4 の証明の 1 行目

誤: $F(a, b, c, s) =$ (与式の左辺) とするとき .

正: $F(a, b, c, s) =$ (与式の左辺) とするとき ,

p.85, 2 行目. 定理 2.4.4 の証明の最後から 3 行目

誤: $\psi_6(k) := k^4(1 + k^2 - k^3 + k^5)$

正: $\psi_6(k) := k^4(2 + k^2 - k^3 + k^5)$

p.86, 1 行目. 定理 2.4.7 の証明の 1 行目

誤: 与式の左辺を $\tilde{f}(a, b, c, s)$ とし .

正: 与式の左辺を $\tilde{f}(a, b, c, s)$ とし ,

p.87, 3 行目.

誤: $A_2(k, s) \leq A_3(k, a)$ だから ,

正: $A_2(k, s) \leq A_3(k, s)$ だから ,

p.87, 最後から 2 行目.

$$\text{誤: } \sum_{i=0}^9 b_i(x)(1-m)m^i + b_{10}m^{10}$$

$$\text{正: } \sum_{i=0}^9 b_i(x)(1-m)m^i + b_{10}(x)m^{10}$$

p.88, 9 ~ 11 行目.

誤:

$$b_8(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 256x^7 + 89x^8$$

$$b_9(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 264x^7 + 98x^8$$

$$b_{10}(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 264x^7 + 97x^8$$

正:

$$b_8(x) := 3 + 16x + 24x^2 + 8x^7 - 8x^8$$

$$b_9(x) := 3 + 16x + 24x^2 + x^8$$

$$b_{10}(x) := 3 + 16x + 24x^2$$

p.88, 下から 9 行目.

$c_1(s)$ の式の前に以下の $c_0(s)$ の式が欠落していました . 追加してください .

$$c_0(s) := 3(1 + 2s + 3s^2 + 3s^4 + 2s^5 + s^6)$$

p.89, 2 行目.

$$\text{誤: } = \sum_{i=0}^7 d_i(x)(1-k)k^i + d_8(x)k^8$$

$$\text{正: } = \sum_{i=0}^7 d_i(x)(1-m)m^i + d_8(x)m^8$$

p.89, 18 行目. 定理 2.4.7 の証明の Step 2 の 3 行目

誤: $F(1 - k(1 - b), b, s)$

正: $F(1 - k(1 - b), b, 1, s)$

p.90, 9 行目.

$$\text{誤: } \frac{1}{(1-s)^2} B_1((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} e_i(x) k^i$$

$$\text{正: } \frac{1}{(1-s)^2} B_1((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} e_i(x) s^i$$

ついでに、11 ~ 23 行目に登場する $e_i(k)$ の変数 k も x に修正してもらうほうが綺麗です。数学的には k のままでもいいですが。ただし、下から 4 行目の「 $k + s \leq 1$ のとき $B_1(k, s) \geq 0$ である。」の部分の k は x に変更しないでください。

p.91, 17 行目. Step 2-3 の 3 行目.

$$\text{誤: } \frac{1}{(1-s)^2} B_2((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} g_i(x) k^i$$

$$\text{正: } \frac{1}{(1-s)^2} B_2((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} g_i(x) s^i$$

p.92, 例題 2.4.8

4ヶ所登場する $\sqrt[4]{5}$ がすべて $\sqrt[5]{4}$ の誤りです。正しくは以下になります。

例題 2.4.8. $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ のとき, 次の不等式を示せ。

$$S_5 + \left(\frac{5\sqrt[5]{4}}{4} - 1 \right) US_2 \geq \frac{5\sqrt[5]{4}}{4} S_{4,1}$$

解答. 定理 6.5.7 において, $s = \sqrt[5]{4}$ のとき,

$$\frac{s^8 - 4s^5 + 3s^4 - 4s^3 + 1}{3s^4} = 1 - \frac{5\sqrt[5]{4}}{4}$$

$$-\frac{4s^5 - 1}{3s^4} = -\frac{5\sqrt[5]{4}}{4}$$

なので、求める不等式を得る。 \square

p.98 ~ 99, 例題 2.5.2(1) とその解答。

例題 2.5.2(1) は斉次多項式ではないので定理 2.5.1 は適用できません。この解答は間違っています。問題と解答を削除して下さい。

p.103, 例題 2.5.4(6) の 4 行目

誤: $2\delta^3 + 2\delta - 1 = 0$

正: $2\delta^3 + 2\delta^2 - 1 = 0$

p.112, 定理 2.5.6 の証明の終わりのほう

誤: $\psi_6(k) := 18 + 2k - 48k^2 + 96k^3 + 32k^4 - 402k^5 + 623k^6 - 167k^7 - 466k^8 + 432k^9 + 112k^{10} - 360k^{11} + 195k^{12} - 35k^{13}$

正: $\psi_6(k) := 6 + 12k - 18k^2 + 20k^3 + 60k^4 - 60k^5 - 168k^6 + 361k^7 - 54k^8 - 140k^9 + 126k^{10} + 48k^{11} - 78k^{12} + 21k^{13}$

p.127, 下から 4 行目 (例題 3.1.3(16) の解答の最後の行)

誤: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$

正: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

p.129, 例題 3.1.4(4)

$$(4) \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{a+b+c}{a+b+c+1}$$

この問題は簡単すぎてボカです。出題意図は Cauchy の不等式の利用だったのですが、 $\frac{a}{a+1} \geq \frac{a}{a+b+c+1}$ を使えば簡単に証明できてしまっ
て、意図通りの問題になっていませんでした。

p.150, 11 行目 (例題 3.2.3(8) の解答の 6 行目)

$$\text{誤: } = 3 + \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{y}{1-z}$$

$$\text{正: } = 3 + \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z}$$

p.151, 1 行 ~ 11 行目. 例題 3.2.3(9) の解答

解答が完全に間違っていました. この方針では証明できないので, 解答を完全に差し替えるしかありません.

[差し替え原稿]

(9) $x := \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}$, $y := \sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}$, $z := \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ とおく.
 $b + c - a > 0$ より, $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - \sqrt{a}^2 = (b + c - a) + 2\sqrt{bc} > 0$ なので,
 $x > 0$ である. 同様に, $y > 0$, $z > 0$ である. $b + c - a = x^2 - \frac{1}{2}(x - y)(x - z)$
 なので,

$$\frac{\sqrt{b + c - a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} = \sqrt{1 - \frac{(x - y)(x - z)}{2x^2}}$$

である. $s = \frac{(x - y)(x - z)}{2x^2}$ とおく. $2x^2 - (x - y)(x - z) = 2(b + c - a) > 0$

なので, $s \leq 1$ である. このとき, $\sqrt{1 - s} \leq 1 - \frac{s}{2}$ である. よって,

$$\begin{aligned} 3 - \sum_3 \frac{\sqrt{b + c - a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} &= \sum_3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(x - y)(x - z)}{2x^2}} \right) \\ &\geq \sum_3 \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - y)(x - z)}{2x^2} = \frac{1}{4} \sum_3 x^{-2}(x - y)(x - z) \geq 0 \end{aligned}$$

である. 最後のところで, Schur の不等式を用いた. □

p.163, 5 行目. 例題 3.3.5(2) の解答の 3 行目

$$\text{誤: } + \frac{c^2 a^2}{b^2} 2(a^2 + b^2 + c^2) -$$

$$\text{正: } + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) -$$

p.234, 下から 5 行目. 例題 5.2.1(2) の解答の 4 行目

$$\text{誤: } = \frac{a+c}{b+d} + \frac{b+d}{a+d} \geq 2\sqrt{\frac{a+c}{b+d} \cdot \frac{b+d}{a+d}} = 2$$

$$\text{正: } = \frac{a+c}{b+d} + \frac{b+d}{a+c} \geq 2\sqrt{\frac{a+c}{b+d} \cdot \frac{b+d}{a+c}} = 2$$

p.270, 最下行.

誤: Drinfel'd が高校生時代に証明した定理 [16] を,

正: Drinfel'd が高校生時代に証明した定理 [17] を,

p.272, 定理 5.2.28 の証明の 8 行目.

$$\text{誤: } = \frac{m_i + m_{n+1-i} 2m_i m_{n+1-i}}{m_i m_{n+1-i} (1 + m_i) (1 + m_{n+1-i})}$$

$$\text{正: } = \frac{m_i + m_{n+1-i} + 2m_i m_{n+1-i}}{m_i m_{n+1-i} (1 + m_i) (1 + m_{n+1-i})}$$

p.278, 10 行目.

誤: [21] R. Muirhead,

正: [20] R. Muirhead,

p.280, 左の列の 12 行目. 目次

参照するページ番号を以下のように修正して下さい.

LCF 定理 179 180

ここからは改良部分です.

2017 年 7 月 4 日のコメント: 定理 6.7.5 と定理 6.7.12 が 4 変数 4 次対称不等式に対する新しい結果です。「代数的領域」を使うのをやめて「半代数多様体」を使うことにしました. もともと, 半代数的集合というのは

\mathbb{R}^n の中で幾つかの多項式による不等式・方程式によって定義された集合で、実代数幾何の教科書にはそう書いてあります。不等式論では、半代数的集合を実射影空間の部分集合に対しても定義して使う必要があって、1年くらい前までは \mathbb{P}^n の部分集合に限定して議論していました。しかし、半代数的集合の定義を見直して、一般の代数多様体の部分集合について定義を拡張し、さらに「半代数的集合を包含している代数多様体」という余計なものを取り除いて、環付き空間として「半代数的多様体」を定義することを提案しています。代数的不等式論は、半代数的集合上の符号付き線形系の理論と考えられます。半代数的集合の間の正則写像、同型写像、半同型写像等の概念を整備し、複素代数幾何と実代数幾何の共通点・相違点を明確化すると、不思議なことに不等式論の見通しがものすごく改善します。特に、有理写像の不確定点除去をしたとき、例外集合の実部がどういう構造になっているかが不等式論で重要です。

p.21, 第1章の末尾

以下の原稿を追加して下さい(証明はちょっと難しいので割愛します)。

1.3.8. Hilbert の第 17 問題

定理 1.3.9. (E. Artin) $f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n)$ は互いに素な実数係数多項式で、 $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_2(x_1, \dots, x_n)}{f_1(x_1, \dots, x_n)}$ とする。さらに、 $f_1(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ であるような任意の有理数の組 (a_1, \dots, a_n) に対して $f(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ が成り立つと仮定する。すると、ある自然数 r と、ある実数係数有理関数 $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_r(x_1, \dots, x_n)$ が存在して、

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r g_i(x_1, \dots, x_n)^2$$

と書ける。さらに、 f_1, f_2 が有理数係数多項式ならば、 g_1, \dots, g_r を整数係数有理関数として選ぶことができる。

証明は順序体・実閉体の理論が必要で、可換体論に関する相当な準備が必要である。例えば、永田雅直「可換体論」裳華房 §5.3 の定理 5.3.6 を参照されたい。証明は背理法と Zorn の補題を使うもので、与えられた f に対して、具体的に g_1, \dots, g_r を求める方法については、何も語っていない。

上の定理において、 f が実数係数多項式の場合、 g_1, \dots, g_r を多項式として選べるとは限らない。これに関しては、Hilbert 自身が以下の定理を証明している。

定理 1.3.10. (Hilbert) 一般に、ある多項式 f が何個かの多項式の 2 乗の和として表せるとき、 f は SOS (Sum Of Squares) であるという。2 以上の自然数 n と、2 以上の偶数 d を固定する。

任意の実数 a_1, \dots, a_n に対して $f(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ を満たすような任意の実数係数 d 次斉次多項式 f が SOS であるための必要十分条件は、 $n = 2$ または $d = 2$ または $(n, d) = (3, 4)$ である。

証明は結構いろいろな知識が必要で難しい。解析学を使って証明している原論文

D. Hilbert, Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten, Math. Ann., **32**(1888), 342-350

あるいは、実代数幾何を利用した証明

J. Bochnak & M. Coste & M.F. Roy, Real Algebraic Geometry, Springer, §6.3

などを参照してほしい。

p.41 ~ 113.

初版第 1 刷の第 2 章の主要定理の証明には、不十分な点があり、厳密に証明しようとする実代数幾何を本格的に使うしかないようです。ただ、全体的にハイレベルの議論になるので、次回の改訂では第 6 章を追加して、そこで実代数幾何関係の話解説しようと思っています。それに伴い、第 2 章のいくつかの定理の証明は第 6 章に移動し、現在かなりごちゃごちゃ

している第 2 章の記述を簡略化しようと思います。第 2 章は簡略化だけで
すので、以下に、第 6 章の原案を提示します。

第 6 章

実代数幾何の応用

本章は、代数幾何学の初歩的知識を仮定して議論を進める。

6.1. 半代数多様体

実代数幾何の理論は実閉体上で展開される場合が多い。本書では順序体や実閉体の説明はせず、 \mathbb{R} 上で議論する。しかし、第 1 ~ 5 章で述べたことは、 \mathbb{R} を一般の実閉体と読み替えてもそのまま成立する。実閉体の理論をご存知の方は、以下の議論においても、 \mathbb{R} という記号は実閉体と読み替えてもらおうとよい。

6.1.1. 実代数多様体

本書では、実の場合も複素の場合も、代数多様体は既約かつ被約であると仮定する。また、非特異点を少なくとも 1 点は持つと仮定する。代数多様体 V の次元 $\dim V$ は、その構造層の局所環のクルル次元として定義されるが、非特異点の近傍では、その近傍の多様体としての次元と一致する。

例えば、 $x^2 + y^2 = 0$ とか $x^2 + y^2 + 1 = 0$ で定まる (x, y) -平面 \mathbb{R}^2 上の集合は実代数多様体ではない。また、例えば、 $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ のとき、 \mathbb{R}^n 内で $f_1 = \dots = f_r = 0$ で定まる集合 V_1 と、 $f_1^2 + \dots + f_r^2 = 0$ で定まる集合 V_2 は、集合としては一致する。しかし、後者を $I_2 = (f_1^2 + \dots + f_r^2)$ を定義イデアルとして定まる実アフィン多様体と考えるのは適切でない。 V_1 も、もう少し条件を課しないと、実アフィン多様体にはならない。以下、本書における実代数多様体の正確な定義を述べる。

定義 6.1.1. 多項式環 $S = \mathbb{R}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ のイデアル $I_0 \subset S$ を取り,

$$V = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } f \in I_0 \text{ に対し } f(\mathbf{a}) = 0\},$$

$$I(V) = \{f \in S \mid \text{任意の } \mathbf{a} \in V \text{ に対し } f(\mathbf{a}) = 0\}$$

とおく. 今, $V \neq \emptyset$ を仮定する. $I_0 \subset I(V)$ であるが, 一致するとは限らない. $P(V) := S/I(V)$ とおく. 点 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathbf{a}} := \sum_{i=1}^n S \cdot (X_i - a_i) \text{ とおく. } \pi: S \rightarrow P(V) \text{ を自然な全射として, 点}$$

$\mathbf{a} \in V$ のとき, $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} := \pi(\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathbf{a}})$ とおくと, $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ は $P(V)$ の極大イデアルである. $S(\mathbf{a}) := P(V) - \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ は $P(V)$ の積閉集合である. $B \subset V$ を空でない部分集合とする. $S_B := \bigcap_{\mathbf{a} \in B} S(\mathbf{a})$ も $P(V)$ の積閉集合であるので, S_B に

よる $P(V)$ の局所化を $R(B) = \mathcal{R}_V(B) := S_B^{-1}P(V)$ とおく. $P(V)$ はネーター環であるので, $R(B)$ もネーター環である. $\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} := \mathfrak{M}_{\mathbf{a}}R(V)$ とおくと, $\mathbf{a} \in V$ のとき $R(V)/\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} \cong P(V)/\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \cong S/\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mathbf{a}} \cong \mathbb{R}$ で, $\mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ は $R(V)$ の極大イデアルである. $\mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ を点 $\mathbf{a} \in V$ に対応する $R(V)$ の極大イデアルという. 容易に分かるように, 勝手な極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R(V)$ を取るとき, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ となるような点 $\mathbf{a} \in V$ がただ 1 つ存在する.

広義実アフィン多様体 V には自然な方法でザリスキー位相とユークリッド位相が定義できる. U が V のユークリッド開集合のとき, $R(U) = S_U^{-1}R(V)$ を U の座標環という. V 上の可換環の接続層 \mathcal{R}_V を $\mathcal{R}_V(U) = R(U)$ によって定める. 局所環付き空間 (V, \mathcal{R}_V) を広義実アフィン (代数) 多様体という. $R(V)$ が 0 以外の零因子を持たないとき, V は被約であるという. $R(V)$ が整域であるとき, V は (狭義) 実アフィン (代数) 多様体であるという.

V がザリスキー位相で既約なとき, V は既約であるという. 広義実アフィン多様体が既約かつ被約であることと, それが実アフィン多様体であることは同値である.

広義実アフィン多様体 V はザリスキー位相でネーター空間になっている. $\sqrt{I} = I(V)$ なので, その次元は $\text{Krull dim } R(V) = \text{Krull dim } P(V)$ と一致

する．この次元を $\dim V$ と書く．

V は広義実アフィン多様体とする．部分部分集合 $B \subset V$ に対し， B を含む最小の V のザリスキー閉集合を $\text{Zar}(B)$ とか $\text{Zar}_V(B)$ と書き， V における B のザリスキー閉包という．他方，ユークリッド位相に関しての V における B の閉包は $\text{Cls}_V(B)$ とか \bar{B} と書く．また， V における B の dft 境界きょうかい $\partial_V B$ を $\partial_V B := \text{Cls}_V(B) - \text{Int}_V(B)$ と書く．

$V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ はそれぞれ $R(V)$, $R(W)$ を座標環とする広義実アフィン多様体とする． \mathbb{R} -代数としての準同型写像 $\varphi^a: R(W) \rightarrow R(V)$ が存在すると仮定する．このとき，点 $\mathbf{a} \in V$ に対し $\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} \subset R(V)$ を対応する極大イデアルとするととき， $(\varphi^a)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathbf{a}})$ は $R(W)$ の極大イデアルであり，ある点 $\mathbf{b} \in W$ に対応する．そこで， $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ によって正則写像 $\varphi: V \rightarrow W$ を定義する．

$\varphi^a: R(W) \rightarrow R(V)$ が同型写像であるとき， $\varphi: V \rightarrow W$ は同型写像あるといい， V と W は dft 同型 faaai であるという．

V は広義実アフィン多様体とする． V のザリスキー開集合 U に対し， $R(U) \cong R(W)$ となるような広義実アフィン多様体 (W, \mathcal{R}_W) が存在するとき， U は V のアフィン開集合であるという．

$P \in V$ に対し，局所環 $\mathcal{R}_{V,P}$ が正則局所環であるとき， P は V の非特異点であるという． P が V の非特異点でないとき， P は V の特異点であるという． V の特異点全体の集合を $\text{Sing}(V)$ ， V の非特異点全体の集合を $\text{Reg}(V)$ と書く．ヤコビアン判定法により $\text{Reg}(V)$ は V の空でないザリスキー開集合になることが証明できる．実アフィン多様体 V はザリスキー位相でネーター空間になっているので，その次元を $d = \dim V$ とする． $P \in \text{Reg}(V)$ のとき， $\mathcal{R}_{V,P}$ は d 個の元からなる正則パラメータ系 x_1, \dots, x_n を持ち，これは P の十分小さなザリスキー開近傍 U の上で正則であり， U の局所座標系になる．したがって，

$$\text{Krull dim } P(V) = \text{Krull dim } R(V) = \text{Krull dim } \mathcal{R}_{V,P} = \dim V = d$$

が成り立つ．

定義 6.1.2. 局所環付き空間 (A, \mathcal{R}_A) が n 次元の広義実代数多様体) で

あるとは、以下の (1), (2), (3) を満たす A のある有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^r$ が存在することをいう。

- (1) 各 $i = 1, \dots, r$ に対し, $(U_i, \mathcal{R}_A|_{U_i})$ は広義アフィン多様体である。
- (2) 各 $i, j \in \{1, \dots, r\}$ に対し, $U_i \cap U_j$ は U_i のアフィン開集合でザリスキー位相に関して稠密である。
- (3) 対角写像 $\Delta: A \rightarrow A \times A$ は閉埋入である。ここで, $A \times A$ のザリスキー位相は, 広義アフィン代数多様体 $U_i \times U_j$ のザリスキー位相から誘導される位相である。

広義実代数多様体 A について, 上のようにして定まる位相をザリスキー位相という。それに対し, 各 U_i 上のユークリッド位相から誘導される位相をユークリッド位相という。

さらに, 各 $\mathcal{R}_A(U_i)$ が整域であるとき, 実代数多様体であるという。このとき, $\mathcal{R}_A(U_i)$ の分数体を, $\text{Rat}(A) := Q(\mathcal{R}_A(U_i))$ と書き, A の有理関数体という。

広義実代数多様体 A, B の間の正則写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は局所環付き空間としての射として定義する。

広義実代数多様体 A について, 上のようにして定まる位相をザリスキー位相という。それに対し, 各 U_i 上のユークリッド位相から誘導される位相をユークリッド位相という。

広義実代数多様体 A が既約であるとは, ザリスキー位相について既約な位相空間であることをいう。広義実代数多様体 A が被約であるとは, 各点 $P \in A$ に対し, 局所環 $\mathcal{R}_{A,P}$ が 0 以外に巾零元を持たないことをいう。広義実代数多様体 A の次元は $\dim A = \max_{P \in A} \text{Krull dim } \mathcal{R}_{A,P}$ として定義する。

6.1.2. 半代数的集合

定義 6.1.3. V は集合, A_1, \dots, A_n は V の部分集合とする。 A_1, \dots, A_n と \cap, \cup , 及び補集合を表す記号 $V - A_i$ と何個かの括弧を用いて表すことのできる集合の式を, A_1, \dots, A_n のブール式という。

例えば, $(A_1 \cap A_2) \cup (V - A_3)$ や $(A_1 - A_2) \cap A_3$ は A_1, A_2, A_3 のブール式である.

定義 6.1.4. V は広義実代数多様体, $U \subset V$ はアフィン開集合, $R(U) = \mathcal{R}_V(U)$ とする. ある有限個の U 上の正則関数 $f_1, \dots, f_r \in R(U)$ によって,

$$\{x \in U \mid \text{すべての } i = 1, \dots, r \text{ に対して } f_i(x) > 0\}$$

と表すことのできる集合を V の基本的半代数的開 (部分) 集合という. また,

$$\{x \in U \mid \text{すべての } i = 1, \dots, r \text{ に対して } f_i(x) \geq 0\}$$

と表すことのできる集合が V のユークリッド閉集合であるとき, これを V の基本的半代数的閉 (部分) 集合という. 基本的半代数的開 (部分) 集合と基本的半代数的閉 (部分) 集合をあわせて基本的半代数的 (部分) 集合という.

$f_{ij} \in R(U)$ で, $*_{ij}$ が $>, \geq$ または $=$ のいずれかであるとき,

$$\bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in U \mid f_{ij}(x) *_{i,j} 0\}$$

という形の集合は, U の半代数的部分集合であり, 逆に U の半代数的部分集合はこのような形に表すことができる.

ある有限個の基本的半代数的集合のブール式で表すことのできる V の部分集合を, V の半代数的 (部分) 集合という.

上の定義において $U = \mathbb{R}^n$ で (x_1, \dots, x_n) がその座標系の場合, $R(U)$ は \mathbb{R} 係数の n 変数多項式 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ 全体の集合であることに注意する.

\mathbb{R}^n 自身は代数多様体であり, 特に, 半代数的集合である. また, \mathbb{R}^n 内で $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ で定まる集合 \mathbb{R}_+^n は, \mathbb{R}^n の基本的閉集合である.

以下, 本章では, \mathbb{R}^n を座標系 (x_1, \dots, x_n) を用いて考察する場合に, $\mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_n)$ と書き, 実射影空間 \mathbb{P}^n を斉次座標系 $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ を用いて考察する場合に, $\mathbb{P}^n : (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ と書く.

補題 6.1.5. V は \mathbb{R}^n 内の閉部分アフィン代数多様体とする. このとき以下が成立する.

- (1) A が V の基本的開集合ならば, \mathbb{R}^n のある基本的開集合 B が存在して, $A = B \cap V$ と表すことができる.
- (2) A が V の基本的閉集合ならば, \mathbb{R}^n のある基本的閉集合 B が存在して, $A = B \cap V$ と表すことができる.

証明. (1) $S = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ とし, $\pi: S \rightarrow R(V)$ を自然な全射とする.
 V の勝手な基本的開集合

$$A := \{x \in V \mid \text{任意の } i = 1, \dots, r \text{ に対して } f_i(x) > 0\}$$

をとる. π は全射なので, $\pi(F_i) = f_i$ を満たす $F_i \in S$ が存在する.

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } i = 1, \dots, r \text{ に対して } F_i(x) > 0\}$$

とおけば, B は \mathbb{R}^n の基本的開集合で, $A = B \cap V$ となる.

(2) の証明も同様である. □

定義 6.1.6. V は広義実代数多様体, A は V の半代数的部分集合で $\text{Zar}(A) = V$ を満たすと仮定する. V のザリスキー位相, ユークリッド位相から誘導される A 上の位相を, それぞれ, A 上のザリスキー位相, ユークリッド位相という. A のザリスキー開集合 U に対し, $\mathcal{R}_A(U) := \mathcal{R}_V(U)$ で A 上の層 \mathcal{R}_A を定める. (A, \mathcal{R}_A) と同型な局所環付き空間を広義半代数多様体という.

任意の点 $P \in A$ に対し, 局所環 $\mathcal{R}_{A,P}$ が 0 以外の巾零元を持たないとき, A は被約であるという. また, $\text{Zar}(A)$ が既約のとき, A は既約であるという. もし, A が既約かつ被約なとき, (A, \mathcal{R}_A) と同型な局所環付き空間を, 半代数多様体と呼ぶ.

A は広義半代数多様体とする. A のザリスキー開集合 U に対し, $\mathcal{R}_U \cong \mathcal{R}_B$ となるような広義アフィン半代数多様体 (B, \mathcal{R}_B) が存在するとき, U は A のアフィン開集合であるという.

A の境界と代数的境界を,

$$\partial A := A - \text{Int}(A), \quad \partial_a A := \text{Zar}(\partial_Z A)$$

で定義する. A の特異点集合と正則点集合を

$$\text{Sing}(A) := \text{Sing}(\text{Zar}(A)) \cap A, \quad \text{Reg}(A) := A - \text{Sing}(A)$$

と定義する .

広義半代数多様体 A, B の間の正則写像 $\varphi: A \rightarrow B$ は局所環付き空間としての射として定義する . 広義半代数多様体 A の次元は $\dim A = \max_{P \in A} \text{Krull dim } \mathcal{R}_{A,P}$ として定義する .

例 6.1.7. $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ は実射影空間とする .

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n := \{(X_0 : \dots : X_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid \text{任意の } 0 \leq i < j \leq n \text{ に対して } X_i X_j \geq 0\}$ は半代数多様体である . 正則写像 $f: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ を $f(X_0 : \dots : X_n) = (X_1^2 : \dots : X_n^2)$ で定まるとき , $f(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ であることに注意する .

6.1.3. Tarski-Seidenberg 原理

命題 6.1.8. V, W は \mathbb{R} 上の代数多様体で , $\varphi: V \rightarrow W$ は正則写像とする . A が W の半代数的部分集合ならば , $\varphi^{-1}(A)$ は V の半代数的部分集合である .

証明. まず , V, W がアフィン代数多様体の場合に証明する . V, W はある $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の閉部分代数多様体である . $S(V) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m], S(W) = \mathbb{R}[y_1, \dots, y_n]$ とおく . 座標環の全射 $\pi_1: S(V) \rightarrow R(V), \pi_2: S(W) \rightarrow R(W)$ が存在する .

A が W の基本的半代数的部分集合の場合に証明すれば十分である . A は \mathbb{R}^n の基本的半代数的部分集合でもあるので , ある $f_1, \dots, f_r \in S(W)$ と不等号あるいは等号 $*_i$ により ,

$$A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{各 } 1 \leq i \leq r \text{ に対して } f_i(y) *_i 0\}$$

と書ける . $z_i = \varphi^*(\pi_2(y_i))$ とし , $\pi_1(g_i) = z_i$ となる $g_i \in S(V)$ をとる . このとき ,

$\varphi^{-1}(A) = V \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid \text{各 } 1 \leq i \leq r \text{ に対して } f_i(g_1(x), \dots, g_n(x)) *_i 0\}$ となり , これは V の半代数的部分集合である .

次に , V, W が一般の代数多様体の場合に証明する . U_W を W の勝手なアフィン開集合とする . $A \cap U_W$ は U_W の半代数的部分集合である . V の

有限個のアフィン開集合 U_1, \dots, U_r により, $\varphi^{-1}(U_W) = U_1 \cup \dots \cup U_r$ とできる.

$$\bigcup_{i=1}^r (\varphi^{-1}(A) \cap U_i) = \varphi^{-1}(A \cap U_W) = \bigcup_{i=1}^r (\varphi^{-1}(A \cap U_W) \cap U_i)$$

前半の議論により, $\varphi^{-1}(A \cap U_W) \cap U_i$ は U_i の半代数的部分集合だから, $\varphi^{-1}(A) \cap U_i$ も U_i の半代数的部分集合で, $\varphi^{-1}(A)$ は V の半代数的部分集合である. \square

半代数的集合の正則写像による像が半代数的であることは Tarski-Seidenberg 原理と同値であり, 以下, その証明を述べるが少し複雑である.

$E := \{-1, 0, 1\}$ とし, $a \in \mathbb{R}$ に対し, $a > 0$ なら $\text{sign}(a) = 1$, $a = 0$ なら $\text{sign}(a) = 0$, $a < 0$ なら $\text{sign}(a) = -1$ と約束する. d を非負整数, s は自然数とする. E の元を成分とする s 行 $2N + 1$ 列の行列全体の集合

を $\widehat{W}_{s,N}$ とし, $W_{s,d} = \bigcup_{N=0}^d \widehat{W}_{s,N}$ とおく. 一般に, d 次以下の 1 変数多

項式 $0 \neq f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$ ($i = 1, \dots, s$) に対して, E の元を成分とする行列 $S(f_1, \dots, f_s)$ を以下のように定義する. まず, f_1, \dots, f_s の \mathbb{R} 内での根全体を $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ とする. 形式的に, $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{N+1} = +\infty$ とおく. 各開区間 $I_k := (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ ($k = 0, \dots, N$) 上では, $\text{sign}(f_i(x))$ は一定であるので, その値を $\text{sign}(f_i(I_k)) \in E$ と定める. $p_{i,k} := \text{sign}(f_i(I_k))$, $q'_{i,k} := \text{sign}(f_i(\alpha_k))$ とし, 符号を並べた長さ $2s + 1$ の行ベクトル $S(f_i)$ を

$$S(f_i) := (p_{i,0}, q_{i,1}, p_{i,1}, q_{i,2}, p_{i,2}, \dots, p_{i,N-1}, q_{i,N}, p_{i,N})$$

と定める. 行ベクトル $S(f_1), \dots, S(f_s)$ を縦に並べてできる s 行 $2N + 1$ 列の符号の行列を $S(f_1, \dots, f_s)$ と書く. ここで, $N \leq sd$ だから, $S(f_1, \dots, f_s) \in W_{s,d}$ である.

補題 6.1.9. 写像 $\varphi : W_{2s,d} \rightarrow W_{s,d}$ で以下の条件 (*) を満たすものが存在する.

- (*) $h, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が d 次以下の多項式で $\deg h \geq 1$ であるならば, h を h', f_2, \dots, f_s で割った余りをそれぞれ r_1, \dots, r_s とする

とき,

$$S(h, f_2, \dots, f_s) = \varphi(S(h', f_2, \dots, f_s, r_1, \dots, r_s))$$

が成り立つ. ここで, $h' = \frac{d}{dx}h(x)$ である.

証明. $w \in W_{2s,d}$ をとる. $w = S(h', f_2, \dots, f_s, r_1, \dots, r_s)$ を満たす d 次以下の $h, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が存在しないときは $\varphi(w)$ の値はどのように定めてもよいから, $w = S(h', f_2, \dots, f_s, r_1, \dots, r_s)$ を満たす d 次以下の $h, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が存在する場合に, h, f_2, \dots, f_s の選び方に依存せずに $\varphi(w)$ の値を定理の結論を満たすように定めることができることを示せばよい.

h, f_2, \dots, f_s の \mathbb{R} 内での根全体を $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$ とし, $h', f_2, \dots, f_s, r_1, \dots, r_s$ の \mathbb{R} 内での根全体を $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_M$ とする. β_1, \dots, β_M の中で, h', f_2, \dots, f_s の中のいずれかの根になっているもの全体の集合を $\beta_{i_1} < \dots < \beta_{i_L}$ とする.

各 β_{i_k} ($k = 1, \dots, L$) に対し, h', f_2, \dots, f_s の中の少なくとも 1 つは β_{i_k} を根に持つので, L および i_1, \dots, i_L の値は, 行列 w の最初の s 個の行ベクトルに現れる 0 の位置によって決定される. つまり, h, f_i の選び方に依存せずに, i_1, \dots, i_L の値は w の値のみから定まる. 特に, $v := S(h, f_2, \dots, f_s)$ の $2 \sim s$ 番目の行ベクトルは w の $2 \sim s$ 番目の行ベクトルから決定できる. また, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ の中で何番目のものが f_2 から f_s までの根であるかは特定される. v の 1 行目の行ベクトルを決定する方法を考察しよう.

もし, $L = 0$ であれば, h は根を持たず, w の 1 行目の最後の成分が ε (これは ± 1 のいずれか) ならば, v の 1 行目の値はすべて ε である. 以下, $L \neq 0$ の場合を考える.

今, 写像 $\theta : \{1, \dots, L\} \rightarrow \{1, \dots, s\}$ を以下のように定める. 整数 $1 \leq k \leq L$ をとる.

もし, $h'(\beta_{i_k}) = 0$ である場合, $\theta(k) = 1$ と定める. このとき, $h = q_1 h' + r_1$ より, $h(\beta_{i_k}) = r_{\theta(k)}(\beta_{i_k})$ が成り立つ.

$h'(\beta_{i_k}) \neq 0$ である場合, $f_j(\beta_{i_k}) = 0$ を満たす $j \geq 2$ が存在するが, そのような j の中の任意の 1 つを選んで $\theta(k) = j$ と定める. このとき,

$h = q_j f_j + r_j$ と書けるので, $f_j(\beta_{i_k}) = 0$ より, $h(\beta_{i_k}) = r_{\theta(k)}(\beta_{i_k})$ が成り立つ. これらの性質から, 写像 θ は行列 w のみから決定することができる. 特に, どの β_{i_k} が h' の根であるかは w から特定できる.

今, 形式的に, $i_0 = 0, \beta_0 = -\infty, i_{L+1} = M + 1, \beta_{M+1} = +\infty$ とおく. 中間値の定理より, 多項式 h が開区間 $(\beta_{i_k}, \beta_{i_{k+1}})$ ($1 \leq k < L$) 内に解を持つための必要十分条件は,

$$\text{sign}(r_{\theta(k)}(\beta_{i_k})) \text{sign}(r_{\theta(k+1)}(\beta_{i_{k+1}})) = -1$$

が成り立つことである. また, h が $(-\infty, \beta_{i_1})$ 内に解を持つための必要十分条件は,

$$\text{sign}(h'(-\infty, \beta_{i_1})) \text{sign}(r_{\theta(1)}(\beta_{i_1})) = 1$$

であり, また, h が $(\beta_{i_L}, +\infty)$ 内に解を持つための必要十分条件は,

$$\text{sign}(h'(\beta_{i_L}, +\infty)) \text{sign}(r_{\theta(M)}(\beta_{i_M})) = 1$$

である. これでは, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ の中で何番目のものが h の根であるかは既にわかっていたが, それがどの区間 $(\beta_{i_k}, \beta_{i_{k+1}})$ 内にあるかも, w から特定できる. さらに, そこでの h' の符号から h の増減がわかるので, α_i や (α_i, α_{i+1}) における h の符号も特定できる. よって, w の 1 行目と $(s+1) \sim 2s$ 行目の行ベクトルの値から, v の 1 行目は決定できる. \square

補題 6.1.10.

$$f_i(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=0}^{m_i} h_{i,k}(y_1, \dots, y_n) x^k \in \mathbb{R}[x, y_1, \dots, y_n] - \{0\}$$

($m_i = \deg_x f_i; i = 1, \dots, s$) とし, $d = \max\{m_1, \dots, m_s\}$ とする. また, W は $W_{s,d}$ の部分集合とする. このとき, 以下の条件を満たす半代数的集合 $\mathcal{B}(W) \subset \mathbb{R}^n$ が存在する.

$$S(f_1, \dots, f_s) \in W \iff (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{B}(W)$$

ただし, S は y_1, \dots, y_n を定数と考え, f を x の多項式とみなして定義する.

証明. $m_1 \geq \dots \geq m_s$ と仮定してよい.

非負整数が降順に並んだ有限列全体の集合を A とし, A に順序を以下のように定義する. $K = (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s)$, $L = (l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_t)$ とするとき, $k_1 = l_1, \dots, k_{r-1} = l_{r-1}, k_r > l_r$ ($\exists r \in \mathbb{N}$) であるとき $K > L$ であると定義する.

$M := (m_1, \dots, m_s) \in A$ に関する帰納法で証明する.

M が A の極小元の場合は, $m_1 = \dots = m_s = 0$ で, $f_i = h_{i,0}(y_1, \dots, y_n)$ だから, 連立不等式 $S(h_{1,0}, \dots, h_{s,0}) \in W$ によって定まる半代数的集合を $\mathcal{B}(W)$ とすればよい.

$M > \min A$ の場合を考える. $\deg_x f_1 \leq \dots \leq \deg_x f_s$ と仮定してよい. $\deg_x f_s \geq 1$ である. 前補題の写像 $\varphi : W_{2s,d} \rightarrow W_{s,d}$ を取り, $W' = \varphi^{-1}(W)$ とおく. すると, $S(f_1, \dots, f_s) \in W$ と, $S(f'_1, f_2, \dots, f_s, r_1, \dots, r_s) \in W'$ は同値となる. $(\deg_x f'_1, \deg_x f_2, \dots, \deg_x f_s, \deg_x r_1, \dots, \deg_x r_s)$ を降順に並べ替えた順列 L は A の中で M より小さいから, 帰納法の仮定によって,

$$S(f'_1, \dots, r_s) \in W' \iff (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{B}(W')$$

を満たす半代数的集合 $\mathcal{B}(W')$ が存在する. そこで, $\mathcal{B}(W) = \mathcal{B}(W')$ とおけばよい. \square

定理 6.1.11. V, W は \mathbb{R} 上の代数多様体で, $\varphi: V \rightarrow W$ は正則写像とする. A が V の半代数的部分集合ならば, $\varphi(A)$ は W の半代数的部分集合である.

証明. (第 1 段階) まず, $V = \mathbb{R}^{n+1}$, $W = \mathbb{R}^n$ で, $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ の場合に証明する. A が V の基本的半代数的部分集合の場合に証明すれば十分である. ある $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x, y_1, \dots, y_n]$ と, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \in E = \{-1, 0, +1\}$ によって,

$$A = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{sign}(f_i(x, y_1, \dots, y_n)) = \varepsilon_i \ (i = 1, \dots, s)\}$$

と書ける. $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ を縦に並べた列ベクトルを ε とする. $A \in W_{s,d}$ で A の少なくとも 1 つの列ベクトルが ε と一致するような A 全体の集合を W

とする。このとき、 $\varphi(A) = \mathcal{B}(W)$ であり、前補題より、これは W の半代数的部分集合である。

(第2段階) $V = \mathbb{R}^{r+n}$, $W = \mathbb{R}^n$ で、 $\varphi(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ の場合は、第1段階のような正射影を r 回合成することによって証明できる。

(第3段階) V, W がアフィン多様体の場合に証明する。適当に $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ を選んで、 V, W を $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ の閉部分アフィン多様体として埋め込めば、 φ は \mathbb{R}^r から \mathbb{R}^n への多項式写像として表すことができる。 $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ の座標系をそれぞれ $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ で表す。

$$X = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{r+n} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\}$$

とおく。 $\mathbf{x} \in V$ は多項式による不等式または等式、 $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ は多項式の等式であるから、 X は \mathbb{R}^{r+n} の半代数的部分集合である。 $\pi: \mathbb{R}^{r+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ で定まる正射影とすれば $\pi(X) = \varphi(A)$ で、第2段階の結果から、これは半代数的集合である。

(第4段階) V, W が一般の代数多様体の場合に証明する。 W の任意のアフィン開集合 U に対して $\varphi(A) \cap U$ が半代数的であることを証明すればよい。 $\varphi^{-1}(U)$ は V の有限個のアフィン開集合 U_1, \dots, U_t の合併集合として表すことができ、各 $A \cap U_i$ は半代数的だから、 $\varphi(A \cap U_i)$ も第3段階の結果から半代数的で、その合併集合である $\varphi(A) \cap U$ も半代数的である。□

6.1.4. 臨界集合

定義 6.1.12. (臨界集合) A は広義半代数多様体で、 $\dim A = n$ とする。以下、 $\Delta^i(A)$ ($i = 0, \dots, n$) を n に関する帰納法で定義する。 $n = \dim A = 0$ の場合には、 A は有限個の点から成る集合で $A = \{P_1, \dots, P_m\}$ (各 P_i は点) と書ける。このとき、 $\Delta^0(A) := \{P_1, \dots, P_m\}$ とおき、 $i \neq 0$ に対しては $\Delta^i(A) := \phi$ と定める。

$n = \dim A \geq 1$ の場合を考える。 $\text{Zar}(A)$ の既約成分の中で n 次元のもの全体を Z_1, \dots, Z_r とする。

$$A_i := \text{Int}(Z_i - \text{Sing}(A))$$

とおき, $\Delta^n(A) := \{A_1, \dots, A_r\}$ と定める. $i \neq j$ のとき $Z_i \cap Z_j \cap \text{Int}(A) \subset \text{Sing}(A)$ であることに注意する. $\text{Zar}(A)$ の既約成分の中で $(n-1)$ 次元以下のもの全体を Y_1, \dots, Y_k とし, $B_j := Y_j - (A_1 \cup \dots \cup A_r)$ とおき,

$$B := \text{Sing}(A) \cup \partial A \cup B_1 \cup \dots \cup B_k$$

とする. すると, B は広義半代数的集合で $\dim B < \dim A$ である. $\Delta^i(B)$ は定義されているので, $i \neq n$ に対しては $\Delta^i(A) := \Delta^i(B)$ と定める. また,

$$\Delta(A) := \Delta^0(A) \cup \Delta^1(A) \cup \dots \cup \Delta^n(A)$$

とおく. $D \in \Delta(A)$ のとき, D は A の臨界集合 (critical set) であるという. D は非特異半代数多様体で $\partial D = \phi$ であることに注意する.

例 6.1.13. \mathbb{P}_+^2 は三角形 (周を含む) と半代数多様体として同型である. したがって, $\Delta^0(\mathbb{P}_+^2) = \{(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$, $\Delta^2(\mathbb{P}_+^2) = \{\text{Int}(\mathbb{P}_+^2)\}$ であり, $\Delta^1(\mathbb{P}_+^2)$ は $\Delta^0(\mathbb{P}_+^2)$ 内の 2 点を結ぶ 3 本の開線分から成る.

定義 6.1.14. (符号付き線形系) A は広義半代数多様体, \mathcal{L} はある可逆 \mathcal{R}_A -加群層とする. $H^0(A, \mathcal{L})$ の有限次元部分ベクトル空間 \mathcal{H} を A 上の線形系という.

各 $f \in \mathcal{H}$ と各 $a \in A$ に対して, $\text{sign } f(a) \in \{-1, 0, 1\}$ が定義されると仮定する. つまり, $f(a)$ の値が \mathbb{R} 内に存在しなくてもよいが, $f(a)$ の符号が矛盾なく定義されていて, かつ $f(a) \neq \pm\infty$ であると仮定する. さらに,

- (1) $\text{sign}(f(a)g(a)) = (\text{sign } f(a))(\text{sign } g(a))$ ($\forall f, g \in \mathcal{H}, \forall a \in A$).
- (2) $\text{sign}(f(a)) \geq \text{sign}(g(a))$ ならば $\text{sign}(f(a)+h(a)) \geq \text{sign}(g(a)+h(a))$ ($\forall h \in \mathcal{H}, \forall a \in A$).

が成り立つとき, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系という.

例 6.1.15. 実射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ の斉次座標系を $(X_0 : \dots : X_n)$ とする. 実数係数 d 次斉次多項式 $f(X_0, \dots, X_n) \in \mathbb{R}[X_0, \dots, X_n]$ 全体の集合と $\{0\}$ の合併集合を $\mathcal{H}_{n+1,d}$ という記号で表わす.

$f \in \mathcal{H}_{n+1,d}$, $a \in \mathbb{P}_+^n$ に対して $f(a)$ の値は定義されないが, $f(a)$ の符号は定まる. よって, $\mathcal{H}_{n+1,d}$ は \mathbb{P}_+^n 上の符号付き線形系である.

また, d が偶数ならば, 任意の $f \in \mathcal{H}_{n+1,d}$ と $a \in \mathbb{P}_\mathbb{R}^n$ に対して $f(a)$ の符号は定まる. よって, $\mathcal{H}_{n+1,d}$ は \mathbb{P}^n 上の符号付き線形系である.

定義 6.1.16. A は広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の線形系とする.

$$\text{Bs } \mathcal{H} := \{a \in A \mid \text{任意の } f \in \mathcal{H} \text{ に対して } f(a) = 0\}$$

$\text{Bs } \mathcal{H}$ と定め, $\text{Bs } \mathcal{H}$ を \mathcal{H} の基点集合 とか固定点集合 という.

$N := \dim \mathcal{H} - 1$ とおき, $N \geq 1$ かつ $A \not\subset \text{Bs } \mathcal{H}$ であると仮定する.

$U := V - \text{Bs } \mathcal{H}$ とおく. ベクトル空間 \mathcal{H} の基底 $\{s_0, \dots, s_N\}$ を取る.

$a \in U$ に対して

$$\Phi(a) = (s_0(a) : \dots : s_N(a)) \in \mathbb{P}^N$$

を対応させる写像 $\Phi: U \rightarrow \mathbb{P}^N$ を

$$\Phi_{\mathcal{H}}: V \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$$

$\Phi_{\mathcal{H}}$ と書く. $U = A - \text{Bs } \mathcal{H}$ を $\Phi_{\mathcal{H}}$ の定義域 という.

もし $\text{Bs } \mathcal{H} = \emptyset$ で $\Phi_{\mathcal{H}}: A \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$ が同型写像であるとき, \mathcal{H} は非常に豊富であるという.

命題 6.1.17. G は $n+1$ 次対称群 \mathcal{S}_{n+1} の部分群とし, $\pi: \mathbb{P}_\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{R}^n/G$ は自然な全射とする.

$$\mathcal{H}_d^G := \{f \in \mathcal{H}_{n+1,d} \mid \text{任意の } \sigma \in G \text{ に対し } \sigma(f) = f\}$$

とおく. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\mathbb{P}_\mathbb{R}^n/G$ は正規半代数多様体である.
- (2) $d \in \mathbb{N}$ が群の位数 $\#G$ の倍数ならば, $\pi(\mathcal{H}_d^G)$ は $\mathbb{P}_\mathbb{R}^n/G$ 上の非常に豊富な線形系である.

証明. (1) X が非特異複素代数多様体で有限群 G が X に作用しているとき, X/G は正規複素代数多様体であることが知られている. このことから, (1) が導かれる.

(2) π を係数拡大して $\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n/G$ に延長して考える. H を $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の超平面とし, $D := \sum_{\sigma \in G} \sigma(H)$ とおく. π_*D は複素代数多様体 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n/G$ 上の非常に豊富な因子である. したがって, $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}(d)^G$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n/G$ 上の非常に豊富な可逆送である. したがって $\pi(\mathcal{H}_d^G)$ も $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n/G$ 上で非常に豊富である. \square

6.1.5. PSD 錐

定義 6.1.18. A は広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系とする.

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{H}) := \{f \in \mathcal{H} \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対して } f(a) \geq 0\}$$

と定め $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ を A 上の \mathcal{H} 内の半正定値錐とか PSD 錐という.

$U := A - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \emptyset$ と仮定する. $\Phi_{\mathcal{H}}$ による U の像の閉包を

$$X(A, \mathcal{H}) := \text{Cls}(\Phi_{\mathcal{H}}(U))$$

$X(A, \mathcal{H})$ と書き, $X(A, \mathcal{H})$ を $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ の特性多様体という.

また, $\{s_0, \dots, s_N\}$ を \mathcal{H} の基底とし,

$$\tilde{X}(A, \mathcal{H}) := \bigcup_{x \in A} \mathbb{R}_+ \cdot (s_0(x), \dots, s_N(x)) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

とおく. さらに, $\tilde{X}(A, \mathcal{H})$ を含む \mathbb{R}^{N+1} 内の最小の閉凸錐を $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ と書き, $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ の特性錐という.

例 6.1.19. G は $n+1$ 次対称群 \mathfrak{S}_{n+1} の部分群で, d は G の位数 $\#G$ の正の倍数であるとする. すると, $X(\mathbb{P}_+^n, \mathcal{H}_d^G) \cong \mathbb{P}_+^n/G$, $X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, \mathcal{H}_d^G) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n/G$ である.

命題 6.1.20. A は広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系で $A - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \emptyset$ と仮定する. $X := X(A, \mathcal{H})$ とし, \mathcal{H}_1 は $\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$ 上の 1 次斉次式全体 (0 を含む) のなす線形系とする. このとき,

$$\Phi_{\mathcal{H}}^*: \mathcal{P}(X, \mathcal{H}_1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$$

は同型写像である.

証明. $U := A - \text{Bs } \mathcal{H}$ とおく. $f \in \mathcal{H}$, $a \in \text{Bs } \mathcal{H}$ ならば $f(a) = 0$ であるので,

$$\mathcal{P}(U, \mathcal{H}) = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$$

であることに注意する. 定義 6.1.18 の記号で, $s_i = \Phi_{\mathcal{H}}^* X_i$ ($0 \leq i \leq N$) である. $f = \sum_{i=0}^N p_i s_i \in \mathcal{H}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) を取る. $g = \sum_{i=0}^N p_i X_i$ とおけば $f = \Phi_{\mathcal{H}}^*(g)$ が成り立つ. $a \in \text{Bs } \mathcal{H}$ に対しては $f(a) = 0$ であるので, 任意の $a \in A$ に対して $f(a) \geq 0$ であることと, 任意の $P \in X$ に対して $g(P) \geq 0$ であることは同値である. これより, 結論を得る. \square

命題 6.1.21. (半代数性定理) A は半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系で, $A - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ はユークリッド空間 \mathcal{H} 内の半代数的閉凸錐である.
- (2) $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は特性錐 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ の双対錐である.

証明. (1) 前命題により $A = X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ の場合に証明すればよい.

(i) まず, A が $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ 内の基本的半代数的閉部分集合の場合に証明する.

$$A = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N \mid \text{任意の } i = 1, \dots, r \text{ に対して } f_i(x) \geq 0\}$$

($f_i \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_N]$ は偶数次の斉次多項式) と表すことができる.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N \times \mathbb{R}^{N+1} \mid f_i(x) \geq 0 \ (\forall i) \text{ かつ } x \cdot y < 0\}$$

(ここで $x \cdot y = x_0 y_0 + \dots + x_N y_N$) とおくと, B も半代数的集合である. $\pi_2 : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N \times \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ を $\pi_2(x, y) = y$ で定まる正射影とする. すると,

$$\pi_2(B) = \{y \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \text{ある } \exists x \in A \text{ に対して } x \cdot y < 0\}$$

も Tarski-Seidenberg 原理より半代数的集合である. よって, $\mathcal{P}(A, \mathcal{H}) = \mathbb{R}^{N+1} - \pi_2(\tilde{C})$ は半代数的である.

(ii) $A \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ が一般の広義半代数多様体の場合を考える. ある基本的半代数的閉部分集合 $B_1, \dots, B_k \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ により $A = B_1 \cup \dots \cup B_k$ と表せる. $\mathcal{P}(A, \mathcal{H}) = \mathcal{P}(B_1, \mathcal{H}) \cap \dots \cap \mathcal{P}(B_k, \mathcal{H})$ である. よって, $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は半代数的である.

(2) の証明も (1) と同様である. \square

定義 6.1.22. (面成分) C は \mathbb{R}^N または $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ の半代数的凸閉部分集合で, $\dim C = n$ とする. 臨界集合 $D \in \Delta^{n-1}(C)$ を取る. D が $D \subset \partial C$ を満たすとき, D の閉包 \overline{D} を C あるいは ∂C の面成分であるという.

命題 6.1.23. (境界定理) A はコンパクト広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系とする. $\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は非退化であると仮定する. $f \in \mathcal{P}$ を取る.

- (1) ある $a \in A - \text{Bs } \mathcal{H}$ に対して $f(a) = 0$ であれば, $f \in \partial \mathcal{P}$ である.
- (2) $f \in \partial \mathcal{P}$ かつ $\partial \mathcal{P} \neq \mathcal{P}$ ならば, $f(a) = 0$ を満たす $a \in A$ が存在する.

証明. $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2, \mathcal{H}) = \mathcal{P}(A_1, \mathcal{H}) \cap \mathcal{P}(A_2, \mathcal{H})$ なので, A が既約で $\mathcal{H} \subset \text{Rat}(A)$ の場合に証明すれば十分である.

(1) $a \notin \text{Bs } \mathcal{H}$ なので, $g(a) > 0$ を満たす $g \in \mathcal{P}$ が存在する. すると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(a) - \varepsilon g(a) < 0$ である. つまり, $f - \varepsilon g \notin \mathcal{P}$ である. よって $f \in \partial \mathcal{P}$ である.

(2) $f \in \mathcal{P}$ が任意の $a \in A$ に対して $f(a) > 0$ を満たすと仮定する. V はコンパクトなので, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば $f \pm \varepsilon g \in \mathcal{P}$ となる. よって $f \notin \partial \mathcal{P}$ である. □

定義 6.1.24. (双対多様体) $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ とし, \mathbb{P} 内の超平面全体の集合を \mathbb{P}^{\vee} と書く. $D \subset \mathbb{P}$ は非特異半代数多様体で $\partial D = \emptyset$ を満たすものとする. このとき $\Delta(D) = \{D\}$ である. 点 $x \in D$ に対し $T_{D,x} := T_{\text{Zar}(D),x} \subset \mathbb{P}$ とおく. ここで, $T_{\text{Zar}(D),x}$ は点 x における実代数多様体 $\text{Zar}(D)$ の接空間である. このとき,

$$D^{\vee} := \{H \in \mathbb{P}^{\vee} \mid \text{ある点 } x \in D \text{ に対し } H \supset T_{D,x}\}$$

と定義し, D^{\vee} を D の双対多様体と言う. D が非特異で既約であるので, D^{\vee} は既約である (非特異とは限らない). したがって, D^{\vee} も半代数多様体である.

D^{\vee} 自体を求めるのは難しいが, $\text{Zar}(D^{\vee})$ は以下のようにして求められる.

公式 6.1.25. (1) A はコンパクト広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系とする. $X = X(A, \mathcal{H})$ とし, それ以外の記号は今までと同じとする. $P \in A$ とし $x := \Phi_{\mathcal{H}}(P) \in D \in \Delta^r(X)$ とおく. $B := \Phi_{\mathcal{H}}^{-1}(D) \subset A$ とし, $\Phi_{\mathcal{H}}: B \rightarrow D$ は不分岐有限写像であると仮定し, さらに点 P の B における局所座標系 (t_1, \dots, t_r) が存在すると仮定する. $\{s_0, \dots, s_N\}$ を \mathcal{H} の基底とする. 関数 $p_0 s_0 + \dots + p_N s_N \in \mathcal{H}$ と点 $(p_0, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ を同一視して考える. $(p_0 : \dots : p_N)$ は $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ の斉次座標系とみなすことができる. このとき,

$$T_{D,x} := \left\{ \left(\dots : s_i(P) + \sum_{j=1}^r v_j \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P) : \dots \right) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid (v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r \right\}$$

である. したがって, $\text{Zar}(D^\vee)$ の判別式 $\text{disc}(D) = \text{disc}_D(p_0, \dots, p_N)$ は以下の連立方程式から媒介変数 t_1, \dots, t_r を消去することによって得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N p_i s_i(P(t_1, \dots, t_r)) &= 0 \\ \sum_{i=0}^N p_i \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P(t_1, \dots, t_r)) &= 0 \quad (j = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

ここで $P(t_1, \dots, t_r)$ は点 P の座標を表す関数である. この消去法の計算は, 通常, コンピュータに頼らざるを得ないが, コンピュータも太刀打ちできない場合も多い.

(2) $\dim D = N - 1$ の場合を考える. すると, $\text{Zar}(D)$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ 内である既約多項式 $h(x_0, \dots, x_N)$ によって定義される超曲面である. この場合, $h_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ とおくと,

$$T_{D,x} = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N \mid h_0(P)x_0 + \dots + h_N(P)x_N = 0\}$$

と書ける. したがって, $\text{Zar}(D^\vee)$ の判別式 $\text{disc}(D) = \text{disc}_D(p_0, \dots, p_N)$ は, 以下の連立方程式から x_0, \dots, x_N を消去することによって得られる.

$$\begin{aligned} p_0 x_0 + \dots + p_N x_N &= 0 \\ p_i &= h_i(x_0, \dots, x_N) \quad (i = 0, \dots, N) \end{aligned}$$

(3) $D \in \Delta^0(X)$ の場合は D は 1 点で $x = D = (b_0 : \cdots : b_N)$ と書ける . この場合 , $\text{Zar}(P^\vee)$ は $b_0 p_0 + \cdots + b_N p_N = 0$ で定まる超平面であり , これが判別式 $\text{disc}(D) = b_0 p_0 + \cdots + b_N p_N$ である .

定理 6.1.26. (主定理) $X \subset \mathbb{P} := \mathbb{P}^n$ はコンパクト広義半代数多様体とし , $\mathcal{P} := \mathcal{P}(X, \mathcal{H}_1)$ を考える . $\pi : (\mathcal{H}_1 - \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ は自然な全射とする . $\mathbb{P}(\mathcal{P}) := \pi(\mathcal{P} - \{0\}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ とおく . $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}_1^\vee)$ なので $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1) = \mathbb{P}^\vee$ であることに注意する . このとき .

$$\partial\mathbb{P}(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{D \in \Delta(X)} D^\vee.$$

が成り立つ .

証明. $0 \neq f \in \partial\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_1$ を取る . 1 次斉次式 f に対応する超平面を $H_f \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}_1^\vee)$ とする . $\text{Bs } \mathcal{H}_1 = \phi$ なので境界定理から $f(x) = 0$ を満たす点 $x \in X$ が存在する . $x \in D$ となる臨界集合 $D \in \Delta(X)$ を取る . 任意の $y \in D$ に対して $f(y) \geq 0$ なので , $H_f \supset T_{D,x}$ である . よって $H_f \in D^\vee$ である . \square

注意 6.1.27. もし $D \in \Delta(X)$ が $X \cap \text{Int}(\mathbb{P}(\mathcal{C}(X, \mathcal{H}_1))) \neq \phi$ を満たしたとすると . $D^\vee \notin \mathcal{P}$ となる . したがって , $\partial\mathbb{P}(\mathcal{P}) = \bigcup_{D \in \Delta(X)} D^\vee$ は必ずしも成立しない .

定義 6.1.28. (判別式) 前定理と同じ仮定のもと , $D \in \Delta(X)$ に対して .

$$\mathcal{F}(D) := \text{Cls}_{\mathcal{H}_1}(\pi^{-1}(D^\vee) \cap \partial\mathcal{P}).$$

と定義する . もし $\text{Zar}(\mathcal{F}(D))$ が \mathcal{H}_1 の超曲面であるとき . $\mathcal{F}(D)$ は \mathcal{P} の面成分になる . また , 超曲面 $\text{Zar}(\mathcal{F}(D)) = \text{Zar}(D^\vee)$ の定義方程式を , \mathcal{P} の面成分 $\mathcal{F}(D)$ の判別式という .

例 6.1.29. d は正の偶数とする . $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ 上の d 次斉次式全体 (0 を含む) の集合を $\mathcal{H}_{n,d}$ とし , $\mathcal{P}_{n,d} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathcal{H}_{n,d})$ とおく . $X_{n,d} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathcal{H}_{n,d})$ とするとき , $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}}(d)$ は非常に豊富なので , $X_{n,d} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ である .

したがって, $\Delta^{n-1}(X_{n,d}) = \{X_{n,d}\}$ で, $i \neq n-1$ に対しては $\Delta^i(X_{n,d}) = \phi$ となる. これより $\partial\mathcal{P}_{n,d}$ は既約であることがわかる.

定理 6.1.26 を用いると, $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ を求める以下のアルゴリズムが得られる.

アルゴリズム 6.1.30. A はコンパクト広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系で $A - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \phi$ を満たすものとする.

ステップ 1. 特性多様体 $X = X(A, \mathcal{H})$ とその臨界集合への分解 $\Delta(X)$ を代数幾何を用いて求める.

ステップ 2. 各臨界集合 $D \in \Delta(X)$ に対し, 双対多様体のザリスキー閉包 $\text{Zar}(D^\vee) = \text{Zar}(D)^\vee$ を公式.1.25 を用いて計算する.

ステップ 3. $S := \bigcup_{D \in \Delta(X)} \text{Zar}(D)^\vee$ によって \mathcal{H} は何個かのブロック

B_1, \dots, B_k に切り分けられる. ここで, 各 B_i は $\partial B_i \subset S, \text{Int}(B_i) \cap S = \phi$ を満たす. もし, ある点 $a \in A$ に対して $f(a) < 0$ となる $f \in B_i$ が 1 つでも存在すれば $\text{Int}(B_i) \cap \mathcal{P} = \phi$ である. 逆に, $f \in \mathcal{P}$ となる $0 \neq f \in B_i$ が 1 つでも存在すれば, $\overline{B_i} \subset \mathcal{P}$ である. \mathcal{P} は何個かの $\overline{B_i}$ の和集合であり, かつ, 凸錐である. この性質を利用して \mathcal{P} を決定する. なお, 各 B_i は半代数的集合であることが知られているが, 本書では証明は割愛する.

ステップ 4. 上のようにして得られた \mathcal{P} は基本的半代数的集合ではない場合もある. その場合は, 上手に \mathcal{P} を基本的半代数的集合の和集合として表す必要がある. つまり, \mathcal{P} を何個かの不等式によって表わしたいからである. このステップも時として結構難しい.

6.1.6. 局所錐

上で述べたアルゴリズム 6.1.30 の各段階は結構難しい場合が多く, それを実行するための補助的な道具を用意しておく. 以下の局所錐の概念は, ステップ 2 を実行するとき特に役に立つ.

定義 6.1.31. (局所錐) A は広義半代数多様体, \mathcal{H} は A 上の符号付き線

形系, $\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とする. A の部分集合 I に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_I &:= \{f \in \mathcal{H} \mid \text{任意の } a \in I \text{ に対して } f(a) = 0\} \\ \mathcal{P}_I &:= \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_I\end{aligned}$$

と定める. \mathcal{P}_I を点 I における \mathcal{P} の局所錐という. 特に, $I = \{a\}$ の場合には $\mathcal{P}_{\{a\}}$ を \mathcal{P}_a と書く.

命題 6.1.32. 上の定義の仮定と記号のもと, 以下が成り立つ.

- (1) \mathcal{P}_I は \mathcal{H}_I 内の半代数的閉凸錐である.
- (2) $\mathcal{P}_I = \mathcal{P}(A, \mathcal{H}_I)$ である.
- (3) I と J が A の部分集合のとき, $(\mathcal{P}_I)_J = \mathcal{P}_{(I \cup J)}$ が成り立つ.

証明. (1) \mathcal{P} は凸錐であるので, $f, g \in \mathcal{P}_a \subset \mathcal{P}$ ならば任意の $0 \leq t \leq 1$ に対し $(1-t)f + tg \in \mathcal{P}_a \in \mathcal{P}$ である. $(1-t)f(a) + tg(a) = 0$ であるので, $(1-t)f + tg \in \mathcal{P}_a$ である. よって \mathcal{P}_a は凸錐である. $\mathcal{P}_a = \mathcal{P} \cap \text{Zar}(\mathcal{P}_a)$ なので \mathcal{P}_a は閉集合である.

(2), (3) は自明である.

命題 6.1.33. (局所錐定理) $A, \mathcal{H}, \mathcal{P}$ は今までと同じとし, さらに, A はコンパクトであると仮定する.

- (1) $\partial\mathcal{P} \subset \bigcup_{a \in A} \mathcal{P}_a$ が成り立つ.
- (2) $I - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \emptyset$ ならば $\mathcal{P}_I \subset \partial\mathcal{P}$ である.
- (3) A は既約で $A - \text{Bs } \mathcal{H} \neq \emptyset$ であると仮定する. $\mathcal{U} := \bigcup_{a \in A - \text{Bs } \mathcal{H}} \mathcal{P}_a$ と

おく. このとき, $\text{Cls}(\mathcal{U}) = \partial\mathcal{P}$ が成り立つ.

- (4) $0 \neq f \in \mathcal{P}_a$ を取る. f が \mathcal{P} の端元であるための必要十分条件は f が \mathcal{P}_a の端元であることである.

証明. (1) $0 \neq f \in \partial\mathcal{P}$ を取る. 命題 6.1.23 より, ある $a \in A$ に対して $f(a) = 0$ なので $f \in \mathcal{P}_a$ である.

(2) $f \in \mathcal{P}_I$ を取る. $I \not\subset \text{Bs } \mathcal{H}$ なので $f(a) = 0$ を満たす $a \in I - \text{Bs } \mathcal{H}$ が存在する. 境界定理より $f \in \partial\mathcal{P}$ である.

(3) 命題 6.1.23 より, \mathcal{U} は $\partial\mathcal{P}$ のある空でない開集合を部分集合として含む. $\text{Bs}\mathcal{H}$ は A のザリスキー閉集合なので, $\dim(\partial\mathcal{P} - \mathcal{U} < \dim \partial\mathcal{P})$ である. よって $\text{Cls}(\mathcal{U}) = \partial\mathcal{P}$ である.

(4) f が \mathcal{P} の端元であるとき f が \mathcal{P}_a の端元であることは自明である. $f \in \mathcal{P}_a$ が \mathcal{P} が端元でないとは仮定する. すると, ある $g, h \in \mathcal{P} - \mathbb{R}_+ \cdot f$ で $f = g + h$ を満たすものが存在する. $g(a) \geq 0, h(a) \geq 0$ で $g(a) + h(a) = f(a) = 0$ なので $g(a) = h(a) = 0$ となる. つまり $g, h \in \mathcal{P}_a$ となり矛盾する. よって, f は \mathcal{P}_a の端元でない. \square

定理 6.1.34. (面成分定理) X は \mathbb{P}^N の半代数的閉部分集合で, \mathbb{P}^N のどの超平面にも X は含まれないと仮定する. \mathcal{H}_1 は \mathbb{P}^N 上の 1 次斉次式全体 (0 を含む) のなすベクトル空間とし, $\mathcal{P} := \mathcal{P}(X, \mathcal{H}_1)$ とする. $D \in \Delta^r(X)$ ($r < m := \dim X$) を取る.

(1) $\mathcal{P}_x \neq 0$ ならば $\dim \mathcal{P}_x = N - r$ が成り立つ.

(2) $\mathcal{F}(D) = \text{Cls} \left(\bigcup_{x \in D} \mathcal{P}_x \right)$ である.

証明. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1$ とし, $f \in \mathcal{H}$ に対し, $f = 0$ で定まる \mathbb{P}^N の超平面を H_f と書く. また $T_{D,P} \subset \mathbb{P}^N$ は D の点 $P \in D$ における接空間とする.

(1) \mathcal{P} は非退化なので点 P に任意のユークリッド開近傍 U に対し $\dim(U \cap \mathcal{P}) = N + 1$ が成り立つ. D は非特異なので $\dim T_{D,x} = \dim D = r$ である. $T_{D,P} \subset H_f$ という条件は, f が線形独立な $r + 1$ 個の点で 0 になることを意味する. よって, $\dim \mathcal{P}_P = \dim \mathcal{P} - (r + 1) = N - r$ である.

(2) \supset は自明である. \subset を示す. 勝手な $f \in D^\vee \subset \text{Int}(\mathcal{F}(D))$ を取る. すると, ある点 $x \in D$ で $f(x) = 0$ となる. よって, $f \in \mathcal{P}_x$ である. \square

上で述べたように $\dim \mathcal{H}_x = \dim \mathcal{H} - 1 = N$ である. また, $r \geq 0$ ならば $\dim \mathcal{P}_x \leq N - r$ である. したがって, \mathcal{P}_x は \mathcal{H}_x の中で退化している.

公式 6.1.35. $\text{Zar}(\mathcal{P}_P)$ の基底の求め方を説明しておく. 公式 1.25 と同じ仮定と記号を用いる. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ と $X = X(A, \mathcal{H})$ は定理 6.1.34 の仮定を満たすとする. $D \in \Delta^r(X)$ と $P \in B := \Phi_{\mathcal{H}}^{-1}(D)$ を取る. $\Phi_{\mathcal{H}}: B \rightarrow D$

は不分岐有限写像であると仮定する．さらに点 P の B における局所座標系 (t_1, \dots, t_r) が存在すると仮定する． $f = \sum_{i=0}^N p_i s_i \in \mathcal{P}_P$ を取る． $f \in \mathcal{H}_P$ なので

$$\sum_{i=0}^N p_i s_i(P(t_1, \dots, t_r)) = 0. \quad \textcircled{1}$$

である． (p_0, \dots, p_N) は $T_{D, \Phi_{\mathcal{H}}(P)}$ と直交するので，

$$\sum_{i=0}^N p_i \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P(t_1, \dots, t_r)) = 0 \quad \textcircled{2}$$

$(j = 1, \dots, r)$ が成り立つ． $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ を (p_0, \dots, p_N) についての連立方程式と考えてその解を求めると， $\mathcal{P}_P \neq 0$ の場合には，それが $\text{Zar}(\mathcal{P}_P)$ の基底を与える．なお， $\textcircled{1}$ ， $\textcircled{2}$ は公式.1.25(1) で登場した方程式と同じであることに注意する．

6.1.7. 相対定理

命題 6.1.36. (相対定理 H) V は \mathbb{R} 上の代数多様体， A は V のコンパクト広義半代数多様体， \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系とする． $\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とする．部分ベクトル空間 $0 \neq \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ に対し， $\mathcal{P}' := \mathcal{P}(A, \mathcal{H}')$ とおく．このとき以下が成り立つ．

- (1) $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}'$ ， $\partial \mathcal{P}' \subset \partial \mathcal{P} \cap \mathcal{H}'$ ．
- (2) $\text{Bs } \mathcal{H}' = \phi$ で \mathcal{P} が非退化ならば， \mathcal{P}' は非退化である．
- (3) 任意の点 $a \in A$ に対し， $(\mathcal{P}')_a = \mathcal{P}_a \cap \mathcal{H}'$ が成り立つ．
- (4) $0 \neq f \in \mathcal{P}'$ に対し， f が \mathcal{P} の端元であれば， f は \mathcal{P}' の端元である．

証明. (1), (3), (4) は自明である．

(2) もし $\dim \mathcal{P}'$ が退化していれば，その双対錐 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H}')$ は原点を含む直線 L を含む． $\rho: \mathcal{C}(A, \mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{C}(A, \mathcal{H}')$ を包含写像 $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ から誘導される正射影とする． ρ は射影線形なので $\rho^{-1}(L)$ も直線を含む．これは \mathcal{P} が退化することを意味する． \square

注意 6.1.37. $\text{Bs } \mathcal{H}' \neq \phi$ の場合には \mathcal{P}' は退化する可能性がある . その例を示す . $A = \mathbb{P}_+^n$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n+1,d}$, $d \geq 2$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とおく . a は A の内点とする . $\mathcal{H}_a = \{f \in \mathcal{H} \mid f(a) = 0\}$ とおく . $\text{Bs } \mathcal{H}_a = \{a\}$ であることを注意する . このとき , $\mathcal{P}(\mathbb{P}_+^n, \mathcal{H}_a) = \mathcal{P}_a$ である . しかし , $\mathcal{P}_a = 0$ となることがあり , 退化する場合がある .

命題 6.1.38. (相対定理 A) A はコンパクト半代数多様体 , $B \subset A$ は閉部分半代数多様体で $\text{Zar}_A(B) = A$ を満たすものとする . \mathcal{H} は A 上の符号付き線形系とする . $Y := X(B, \mathcal{H})$, $X := X(A, \mathcal{H})$ とし , $D_A := \text{Reg}(X) \in \Delta(X)$, $D_B := \text{Reg}(Y) \in \Delta(Y)$ を取る . $\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$, $\mathcal{P}' := \mathcal{P}(B, \mathcal{H})$ と置く . 今 , \mathcal{P} は非退化であり , $\dim \mathcal{F}(D_B) = \dim \mathcal{P}' - 1$ であると仮定する . すると $\text{Zar}(\mathcal{F}(D_A)) = \text{Zar}(\mathcal{F}(D_B))$ が成り立つ .

証明. $B \subset A$ なので $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ である . $N := \dim \mathcal{H} - 1$ と置く . $N = \dim \mathcal{P} \leq \dim \mathcal{P}' = \dim \mathcal{F}(D_B) \leq \dim \mathcal{F}(D_A) \leq N$ より , これらの値は一致する . $B \subset A$ なので $D_B \subset D_A$, $D_A^\vee \subset D_B^\vee$, $\mathcal{F}(D_A) \subset \mathcal{F}(D_B)$ が成り立つ . D_A^\vee と D_B^\vee は既約で $\dim \mathcal{F}(D_B) = \dim \mathcal{F}(D_A) = N$ であるので , $\text{Zar}(\mathcal{F}(D_A)) = \text{Zar}(\mathcal{F}(D_B))$ を得る . \square

命題 6.1.36. (閉包定理) C は \mathbb{R}^m 内の半代数的閉凸錐とする .

- (1) F は C の面成分 , $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ は相異なる点で Q は線分 PR の内点であるとする . このとき , もし $P \in C$, $P \notin F$, $Q \in F$ ならば $R \notin C$ である .
- (2) C は直線を含まないと仮定する . F_0, F_1, \dots, F_r は C の面成分で $\partial C = F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_r$ が成り立つと仮定する . すると ,

$$\partial F_0 = (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r) \cap F_0$$

が成り立つ .

証明. (1) もし $R \in C$ なら $P, R \in F$ となってしまう .

(2) 明らか . \square

6.1.8. $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n, A = \mathbb{P}_+^N$ の場合

PSD 錐 \mathcal{P} が非退化でない適用できない定理があるが、以下は \mathcal{P} が非退化であるための十分条件を与える。

定理 6.1.37. d は自然数で $A = \mathbb{R}_+^{n+1}$, または d は偶数で $A = \mathbb{R}^{n+1}$ であるとする。また, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{n+1,d}$ は A 上の符号付き線形系とする。このとき, $\text{Bs } \mathcal{H} = \phi$ ならば, $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は非退化である。

証明. (1) まず, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n+1,d}$ の場合に証明する。 A を含む \mathbb{P}^n の座標系を $(a_0 : \cdots : a_n)$ で表わす。 $s_0 := \sum_{i=0}^n a_i^d \in \mathcal{H}$ とおく。 $s_0 \in \mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ に注意する。

\mathcal{P} が退化したと仮定する。すると \mathcal{P} の双対錐 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ は、原点 P を通るある直線 L を含む。 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ は $\tilde{X}(A, \mathcal{H})$ によって生成されるから、ある $P_1, \dots, P_r \in \tilde{X}(A, \mathcal{H})$ とある $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}_+$ が存在して、斉次座標について $\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i = 0$ を満たす。 P_i は a_i の像であるとするれば、 $\sum_{i=1}^r \alpha_i s_0(a_i) = 0$ が成り立つ。ところが $s_0(a_i) > 0$ であるので矛盾する。

(2) 一般の \mathcal{H} に対しては、(1) と命題 6.1.36(2) から結論が得られる。□

A は非特異半代数多様体とし、有限群 G が A に作用している場合を考える。 $\pi: A \rightarrow A/G$ を自然な全射とする。また、作用の固定点集合を

$$A^G := \{ \mathbf{a} \in A \mid \text{任意の } \sigma \in G \text{ に対して } \sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \}$$

と書く。複素代数多様体の場合と同様に、 $\text{Sing}(A/G) \subset \pi(A^G)$ である。

例 6.1.38. $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ に巡回群 $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ が自然に作用する場合を考える。このとき、固定点集合は $A^G = \{1\}$ で、1 点 $1 := (1 : 1 : \cdots : 1)$ のみから成る集合である。また、 $\text{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n/G) = \{\pi(1)\}$ である。

命題 6.1.39. $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ または $A = \mathbb{P}_+$ とし、 G は対称群 \mathfrak{S}_{n+1} の部分群とする。 G の位数を $g := \#G$ とし、 $X_d^G := X(A, \mathcal{H}_d^G)$ とおく。

- (1) $d = kg + 2m$ ($k \geq 1, m \geq 0$) で $\text{Bs } \mathcal{H}_d^G = \phi$ ならば $A/G \cong X_d^G$ である .
- (2) $A = \mathbb{P}_+^n, d \geq g$ かつ $\text{Bs } \mathcal{H}_d^G = \phi$ ならば $A/G \cong X_d^G$ である .

証明. $f \in \mathcal{H}_d^G$ に対し $V(f) := \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ とおく . 有理写像 $\Phi_{\mathcal{H}_d^G} : A \cdots \rightarrow X_d^G$ は $A \xrightarrow{\pi} A/G \xrightarrow{\Psi_d^G} X_d^G$ と分解する .

(1) $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$ の場合に証明すれば十分である . $d = kg$ の場合には , 命題 6.1.17(2) より $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n/G \cong X_d^G$ である .

次に , $d = kg + 2m$ の場合を考える . $S_2 := a_0^2 + \cdots + a_n^2$ とし , 単射 $\iota : \mathcal{H}_{kg}^G \xrightarrow{\times S_2^m} \mathcal{H}_d^G$ を $\iota(f) = fS_2$ で定義する . $V(S_2^m) = V(S_2) = \phi$ なので正則写像 $\rho : X_d^G \rightarrow X_{kg}^G$ が存在する . $\Phi_{\mathcal{H}_{kg}^G} = \rho \circ \Phi_{\mathcal{H}_d^G}$ であることに注意する . $\Psi_{\mathcal{H}_{kg}^G}$ は同型写像であるので Ψ_d^G も同型写像である .

(2) $d = n + 1 + l$ の場合を考える . $S_1 := a_0 + \cdots + a_n$ とし , 単射 $\iota : \mathcal{H}_g^G \xrightarrow{\times S_1^{d-g}} \mathcal{H}_d^G$ を $\iota(f) = fS_1^{d-g}$ で定める . $A \cap V(S_1^{d-g}) = \phi$ なので , 正則写像 $\rho : X_d^G \rightarrow X_g^G$ が存在する . この後は (1) の証明と同様である . \square

6.2. 巡回不等式

6.2.1. \mathbb{P}^2 上の巡回不等式

第 2 章の復習から始める . 本節では主に f が 3 変数 d 次斉次巡回多項の場合を扱い , 一部 , f が対称多項式の場合も扱う . 巡回群 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ または $A = \mathbb{P}_+^2$ に自然に作用していると考え . A の斉次座標系を $(a : b : c)$ で表す . 以下 , 本章を通して 3 変数斉次多項式を扱う節では , $\mathcal{H}_{3,d}, \mathcal{P}_{3,d}^c$ 等の 3 は省略して , $\mathcal{H}_d, \mathcal{P}_d^c$ 等と書く . 改めて定義を書くと ,

$$\mathcal{H}_d^c := \{d \in \mathcal{H}_{3,d} \mid f \text{ は 3 変数 } d \text{ 次巡回多項式}\} \cup \{0\}$$

$$\mathcal{H}_d^{c0} := \{f \in \mathcal{H}_d^c \mid f(1, 1, 1) = 0\}$$

$$\mathcal{P}_d^c := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^c), \quad \mathcal{P}_d^{c+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_d^c)$$

$$\mathcal{P}_d^{c0} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^{c0}), \quad \mathcal{P}_d^{c0+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_d^{c0})$$

である．以下は \mathcal{H}_d^c に属する基本的な多項式である．

$$\begin{aligned} S_{i,j,k}(a,b,c) &:= a^i b^j c^k + b^i c^j a^k + c^i a^j b^k \\ S_{i,j}(a,b,c) &:= a^i b^j + b^i c^j + c^i a^j \\ S_i(a,b,c) &:= a^i + b^i + c^i, \quad U(a,b,c) := abc \\ T_{i,j,k}(a,b,c) &:= S_{i,j,k}(a,b,c) + S_{j,i,k}(a,b,c) \\ T_{i,j}(a,b,c) &:= T_{i,j,0}(a,b,c) \end{aligned}$$

繁雑さを避けるため，上記の多項式については変数が a, b, c であるとき， (a, b, c) を省略して書く．例えば， $S_i = a^i + b^i + c^i$ ， $U = abc$ である．

命題 6.2.1. $d \geq 3$ のとき以下が成り立つ．

- (1) $\text{Bs } \mathcal{H}_d^c = \phi$.
- (2) $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{c0} = \{(1 : 1 : 1)\}$.

証明. (1) 命題 6.1.17(2) より $\text{Bs } \mathcal{H}_{3k}^c = \phi$ である．また， $\text{Bs } \mathcal{H}_4^c \subset V(S_4) = \phi$ である． S_2 倍写像 $\iota : \mathcal{H}_d^c \xrightarrow{\times S_2} \mathcal{H}_{d+2}^c$ を考えれば $\text{Bs } \mathcal{H}_{d+2}^c \subset \text{Bs } \mathcal{H}_d^c$ なので，結論を得る．

(2) 上の議論と同様である． \square

定理 6.2.2. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし， $\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ は自然な全射とする．また，

$$L := \{(0 : s : 1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid s > 0\}$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

- (1) $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ は正規実代数曲面で， $\Delta^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G) = \{\pi(1 : 1 : 1)\}$ ， $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G) = \phi$ ， $\Delta^2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G) = \{\text{Reg}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G)\}$ である．
- (2) \mathbb{P}_+^2/G は 2 次元正規半代数多様体で， $\Delta^0(\mathbb{P}_+^2/G) = \{\pi(1 : 1 : 1), \pi(0 : 0 : 1)\}$ ， $\Delta^1(\mathbb{P}_+^2/G) = \{\pi(L)\}$ ， $\Delta^2(\mathbb{P}_+^2/G) = \{\text{Reg}(\mathbb{P}_+^2/G)\}$ である．

証明. (1) $X_d^c := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^c)$ とおくと， $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \cong X_3^c$ である．後で証明するが， X_3^c は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ 内の超曲面である．または，次の命題で証明するように X_4^c は実代数多様体で，双有理写像 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \cdots \rightarrow X_4^c$ が存在する．いずれからとも， $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ が実代数曲面であることがわかる． $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$ は $\pi(1 : 1 : 1)$ に有

理 2 重点を持ち, それ以外では非特異な複素代数曲面である. このことから結論を得る.

(2) は例 6.1.13 と (1) よりわかる. $\text{Zar}(\pi(L))$ は $\pi(0:0:1)$ に尖点を持つ有理曲線である. \square

次に特性多様体について述べる.

$$\Phi_d^c := \Phi_{\mathcal{H}_d^c}, \quad X_d^c := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^c), \quad X_d^{c+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_d^c)$$

とおく. $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ として, $d \geq 3$ のとき $X_d^{c+} \cong \mathbb{P}_+^2/G$ である. また, $d = 3$ または $d \geq 5$ のとき $X_d^c \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ である. X_4^c については, 別途, 調べておく必要がある.

命題 6.2.3. $P := \Phi_4^c(1:1:1) \in X_4^c$ とおくと, $\Delta^0(X_4^c) = \{P\}$, $\Delta^1(X_4^c) = \emptyset$, $\Delta^2(X_4^c) = \{X_4^c - \{P\}\}$ である.

証明. $\Phi_4^c: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow X_4^c$ を係数拡大して有理写像 $\Phi_{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}_4^c \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ に拡張する. また $\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}/G$ も $\pi_{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}/G$ に拡張する. ここで $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である. $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\mathbf{1} = (1:1:1)$, $Q_1 := (\omega: \omega^2: 1)$ and $Q_2 := (\omega^2: \omega: 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ とおく. すると $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)^G = \{\mathbf{1}, Q_1, Q_2\}$ であり, $\text{Bs}(\mathcal{H}_4^c \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \{Q_1, Q_2\}$ である. したがって, 有理写像 $\Phi_{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow (X_4^c)_{\mathbb{C}}$ の不確定点集合は $\{Q_1, Q_2\}$ である. $L_{\mathbb{C}} := \{(a:b:c) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid a+b+c=1\}$, $L := L_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = V(S_1)$, $P := \pi(\mathbf{1})$, $P_1 := \pi_{\mathbb{C}}(Q_1)$, $P_2 := \pi_{\mathbb{C}}(Q_2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$, $C_{\mathbb{C}} := \pi_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$ and $C := \pi(L) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ とおく. $Q_1, Q_2 \in L_{\mathbb{C}}$, $\text{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G) = \{P, P_1, P_2\}$ であることに注意する. \mathcal{H}_4^c に属する任意の関数は L 上では定数関数となるので, $\Phi_4^c(L)$ は 1 点である. 他方, $\Psi_4^c: (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G - C) \rightarrow (X_4^c - \Phi_4^c(L))$ が同型写像であることは容易にわかる. $\psi: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$ を 2 点 P_1, P_2 でのブロー・アップとし, この写像による $C_{\mathbb{C}}$ の強変換を $C_{\tilde{X}}$ とする. $C_{\tilde{X}}$ が第 1 種例外曲線であり, $\tilde{X} \rightarrow (X_4^c)_{\mathbb{C}}$ は $C_{\tilde{X}}$ のコントラクションである. $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \subset \tilde{X}$ とみなせば, $\Psi_4^c: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \rightarrow X_4^c$ は C の滑らかなコントラクションであることがわかる. したがって, X_4^c は完備実代数多様体である. また, $\text{Sing}(X_4^c) = \{P\}$ で,

この孤立特異点は A_1 -型有理 2 重点である。 □

これまでに述べたことから次が得られる。

定理 6.2.4. $d \geq 3$ とし, $P := \Phi_d^c(1 : 1 : 1)$, $O := \Phi_d^c(0 : 0 : 1)$, $C_d := \{\Phi_d^c(0 : s : 1) \mid s > 0\}$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\mathcal{P}_d^c := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^c)$ の境界は 2 つの面成分 $\mathcal{F}_d^c := \mathcal{F}(\text{Reg}(X_d^c))$ と $\mathcal{F}(P)$ から成る. ここで, $\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0}$ である.
- (2) \mathcal{P}_d^{c+} の境界は高々 4 個の面成分から成り, その 4 個は $\mathcal{F}_d^{c+} := \mathcal{F}(\text{Reg}(X_d^{c+}))$, $\mathcal{E}_d^{c+} := \mathcal{F}(C_d)$, $\mathcal{F}(O)$, $\mathcal{F}(P)$ である. ただし, これらのうち幾つかは面成分にならない場合もある. また $\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0+}$ で, これは必ず面成分である.
- (3) もし $\dim \mathcal{F}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ ならば, $\text{disc}(\text{Reg}(X_d^c)) = \text{disc}(\text{Reg}(X_d^{c+}))$ が成り立つ.

証明. (1) 定義から $\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0}$ であり, これは超平面 $\mathcal{H}_d^{c0} \subset \mathcal{H}_d^c$ 上の半代数的閉凸錐である. \mathcal{P}_d^c は非退化であったので, $\mathcal{F}_d^c \cup \mathcal{P}_d^{c0}$ はある非退化な凸錐を囲む. その凸錐は \mathcal{P}_d^c 以外にあり得ない. したがって, \mathcal{F}_d^c は \mathcal{P}_d^c の面成分である.

(2) に証明も (1) と同様である.

(3) は相対定理 A より分かる。 □

定義 6.2.5. 上の命題において, \mathcal{F}_d^c を \mathcal{P}_d^c の主成分であるといい, $\text{disc}(\text{Reg}(X_d^c))$ を \mathcal{P}_d^c の主判別式という.

\mathcal{P}_d^{c+} については, $\dim \mathcal{F}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ であるとき, \mathcal{F}_d^{c+} を \mathcal{P}_d^{c+} の主成分といい, $\text{disc}(\text{Reg}(X_d^{c+}))$ を主判別式という. $\dim \mathcal{F}_d^{c+} < \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ の場合, \mathcal{P}_d^{c+} は主成分を持たないという. また, \mathcal{E}_d^{c+} が面成分であるとき, \mathcal{E}_d^{c+} は \mathcal{P}_d^{c+} の端成分であるといい, $\text{disc}(C_d)$ を端判別式という.

$\text{disc}(P)$ は $f(1, 1, 1) = 0$ を表現する 1 次式, $\text{disc}(O)$ は S_d の係数が 0 であることを表す 1 次式で, これらは自明な 1 次式であるので, 取り立てて判別式と呼ぶほど重要なものではない.

命題 6.2.6. (主判別式定理) \mathcal{P}_d^{c+} が主成分を持つ場合, \mathcal{P}_d^{c+} と \mathcal{P}_d^c の主判別式は一致する.

証明. 相対定理 A よりすぐわかる. \square

命題 6.2.7. (端判別式定理) $d \geq 3$ とし \mathcal{P}_d^{c0+} は端成分を持つと仮定する. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) \mathcal{P}_d^{c+} も端成分を持ち, \mathcal{P}_d^{c0+} と \mathcal{P}_d^{c+} の端判別式は一致する.
- (2) \mathcal{H}_d^c の基底 s_0, \dots, s_N を各 s_i が $s_i = S_{j,k,l}$ の形であるように選ぶ. この基底に対応して端判別式を $\text{disc}_d^{c+}(p_0, \dots, p_N)$ という形に表す. もし, s_i が abc の倍数であれば, disc_d^{c+} は p_i を含む項を持たない.

証明. (1) $\{s_0, \dots, s_{N-1}\}$ を \mathcal{H}_d^{c0} の基底とし, これに対応して \mathcal{P}_d^{c0+} の端判別式を $\text{disc}_d^{c0+}(p_0, \dots, p_{N-1})$ という形に表す. \mathcal{P}_d^{c0+} が端成分を $\dim \mathcal{E}_d^{c0+} = N - 2$ を持つから $\dim \mathcal{E}_d^{c0+} = N - 2$ であり, 任意の点 $P \in C_d^{c0+}$ に対して $\dim(\mathcal{P}_d^{c0+})_P \leq N - 3$ である.

$s_N = S_{i,j,k} \in \mathcal{H}_d^c - \mathcal{H}_d^{c0}$ を s_N が $U = abc$ の倍数であるように選ぶことができる. すると $s_N(0, s, 1) = 0$ なので $s_N \in (\mathcal{P}_d^{c+})_P$ である.

$$\text{Zar}((\mathcal{P}_d^{c+})_P) = \text{Zar}((\mathcal{P}_d^{c0+})_P + \mathbb{R}_+ \cdot s_N) \quad \textcircled{1}$$

なので, $\text{Zar}(\mathcal{E}_d^{c+})$ は $\text{Zar}(\mathcal{E}_d^{c0+})$ を底, s_N を無限遠点にある頂点とする凸錐 (柱と言ってもよい) である. \mathcal{H}_d^c の基底 s_0, \dots, s_N に対応した \mathcal{P}_d^{c+} の端判別式を $\text{disc}_d^{c+}(p_0, \dots, p_N)$ とする. ① より, $\text{disc}_d^{c+}(p_0, \dots, p_N) = \text{disc}_d^{c0+}(p_0, \dots, p_{N-1})$ である.

(2) $s_i = S_{j,k,l}$ が abc の倍数であれば, $S_{j,k,l} \in \mathcal{H}_d^c - \mathcal{H}_d^{c0}$ である. 改めて \mathcal{H}_d^{c0} の基底 $\{s'_0, \dots, s'_{N-1}\}$ を選び直して $s'_N = S_{i,j,k}$ となるようにすることができる. 必要なら適当に並べ変えて, $1 \leq m < N$ に対しては $s'_m = s_m - c_m s'_N$ ($c_m \in \mathbb{R}$) という形であると仮定してよい. (1) の結果から $\text{disc}_d^{c+}(p'_0, \dots, p'_N)$ は p_N を含む項を持たない. したがって, $\text{disc}_d^{c+}(p'_0, \dots, p'_N) = \text{disc}_d^{c+}(p_0, \dots, p_N)$ であり, $\text{disc}_d^{c+}(p_0, \dots, p_N)$ も p_N を含む項を持たない. \square

6.2.2. 3 変数対称不等式

3 変数対称不等式を調べるには、まず $\Delta(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3)$ と $\Delta(\mathbb{P}_{+}^2/\mathcal{G}_3)$ を決定しておくのが有用である。まず、 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3$ の研究から始める。

$\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3$ を自然な全射とする。 π の基本領域として、

$$A_s := \{(s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid s + t + 1 \geq 0, s \leq t \leq 1\}$$

を選ぶことができる。基本領域とは、 $\pi(A_s) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3$ であって、 π の定義域と地域を制限した写像 $\pi: A_s^{\circ} \rightarrow \pi(A_s^{\circ})$ が半代数多様体の同型写像であることを意味する。

よく知られているように、任意の対称多項式は基本対称式の多項式として表すことができるので、

$$\mathbb{C}[a, b, c]^{\mathcal{G}_3} = \mathbb{C}[S_1, S_{1,1}, U]$$

である。ここで左辺は $\mathbb{C}[a, b, c]$ 内の対称多項式全体の集合を表す。このことは、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/\mathcal{G}_3 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ であることを意味する。ここで、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ は重み付き射影空間である。 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ の斉次座標 $(x_0 : x_1 : x_2)$ は $(S_1 : S_{1,1} : U)$ に対応するように選ぶ。 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ は点 $(0 : 1 : 0)$ と点 $(0 : 0 : 1)$ を孤立特異点（これらは有理 2 重点）として持つ他は非特異であることが知られている。 π の係数拡大 $\pi_{\mathbb{C}}: \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/\mathcal{G}_3$ を考える。 $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0 : 0 : 1)$ はすべて虚点であって $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ には属さない。よって $(0 : 0 : 1) \notin \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3$ である。他方 $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0 : 1 : 0) \cap A_s = \{(-1 : 0 : 1)\}$ であって、 $\text{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathcal{G}_3) = \{(0 : 1 : 0)\}$ である。

ところで $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ は \mathbb{R} -スキームの構造を持つので、その \mathbb{R} -値点を定義することができ、それを $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ と定義する。 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ は実代数多様体である。集合としては $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ は $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ を次の同値関係で割って得られる商集合である。

$$(x, y, z) \sim (x', y', z')$$

$$\iff \text{ある } c \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ が存在して } x = cx', y = c^2y', z = c^3z'$$

例えば $(0, -1, 0) \sim (0, 1, 0)$ であるが、 $c \in \mathbb{R}$ に限定するとこの同値関係が導けず、正しい定義にならない。

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ の半代数的閉部分集合であるが, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3 \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ である.

一般に, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{G}_n$ を $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, \dots, n)$ の半代数的閉部分集合として不等式で表すことは, n 次方程式 $x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n = 0$ のすべての根が実数であることを a_1, \dots, a_n の不等式として表すことと同値である. 特に, $n \geq 5$ だと非常に複雑になるが, $n = 3, 4$ の場合は簡単である. 3 次方程式 $x^3 - S_1x^2 + S_{1,1}x - U = 0$ のすべての解が実数である条件は, よく知られているように,

$$27U^2 - 18S_1S_{1,1}U + 4S_1^3U + 4S_{1,1}^3 - S_1^2S_{1,1}^2 = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \leq 0$$

である. これが, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ 内での $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3$ の定義不等式である. 斉次座標 $(x_0 : x_1 : x_2)$ で書き換えれば

$$27x_2^2 - 18x_0x_1x_2 + 4x_0^3x_2 + 4x_1^3 - x_0^2x_1^2 \leq 0 \quad \textcircled{1}$$

である. これより, 以下が得られる.

命題 6.2.8. $L_s^b := \{(s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, s \neq 1, s \neq -2\}$ とおく. すると, $\pi(L_s^b)$ は尖点を持つ $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ 内の完備 3 次曲線と同型で, $\Delta^2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3) = \{\pi(A_s^\circ)\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3) = \{\pi(L_s^b)\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3) = \{\pi(1 : 1 : 1), \pi(-1 : 0 : 1)\}$ となる.

証明. \mathfrak{G}_3 の適当な元により $\{(s : s : 1) \in A_s \mid -1/2 \leq s \leq 1\}$ は $\{(s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid s \leq -2 \text{ または } s \geq 1\}$ に変換することができることに注意する. そこで A_s の 3 辺 (頂点を除く) を考えるかわりに L_s^b を利用することができる. 簡単な計算から, $\pi(\overline{L_s^b})$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3)$ 上で

$$27x_2^2 - 18x_0x_1x_2 + 4x_0^3x_2 + 4x_1^3 - x_0^2x_1^2 = 0$$

で定義される曲線で, $\text{Sing}(\pi(\overline{L_s^b})) = \{\pi(1 : 1 : 1)\}$ である.

$L_1 := \{(s : -s-1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid -2 \leq s < -1\}$, $L_2 := \{(s : -s-1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid -1 < s \leq -1/2\}$ とおく. $\pi(1/s : -1/s-1 : 1) = \pi(s : -s-1 : 1)$ なので, $\pi(L_1) = \pi(L_2)$ であり, これは点 $(0 : 0 : 1)$ と点 $(0 : -3 : -2)$ を結ぶ開線分である. $\text{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)) \cap \pi(L_1) = \emptyset$ なので. $\pi(L_1) \subset \text{Reg}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{G}_3)$ で

ある . よって , これは $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$ に登場しない . また , $\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \pi(\overline{L_s^b})$ である . さらに , $\pi(-1:0:1) = (0:0:1) \in \text{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$, $\pi(-2:1:1) = (0:-3:-2) \notin \text{Sing}(\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3))$ である . 以上の考察から , 結論が得られる . \square

次に , $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ の構造を研究する . 自然な全射 $\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ に関する基本領域として ,

$$A_{s+} := \{(s:t:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq 1\}$$

を選ぶことができる . $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ 内で ① と $x_1/x_0^2 \geq 0$, $x_2/x_0^3 \geq 0$ で定まる半代数的集合である . 前命題の証明をあわせて考えると , 次の命題が得られる .

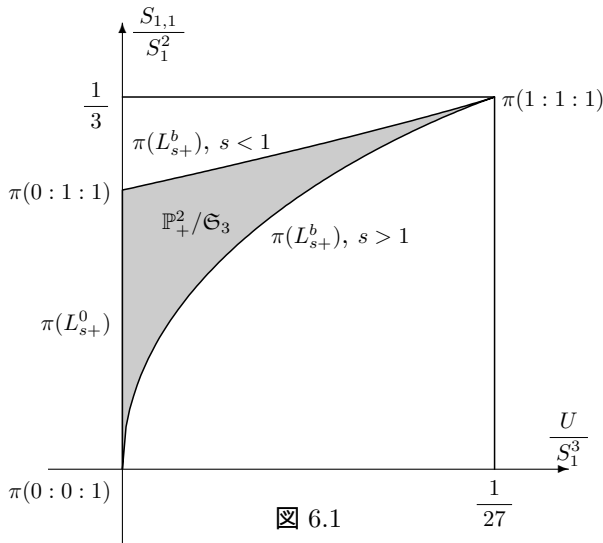


図 6.1

命題 6.2.9. $\Delta^2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \{\pi(A_{s+}^{\circ})\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \{\pi(L_{s+}^b)\}$, $\pi(L_{s+}^0)\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \{\pi(0:0:1), \pi(0:1:1), \pi(1:1:1)\}$ である . ここで ,

$$L_{s+}^b := \{(s:1:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid 0 < s < 1 \text{ or } 1 < s < \infty\}$$

$$L_{s+}^0 := \{(0:s:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid 0 < s < 1\}$$

である .

命題 6.2.10. 以上の記号のもと,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_d^s &:= \{f \in \mathcal{H}_d \mid f \text{ は対称多項式}\}, \\ \mathcal{H}_d^{s0} &:= \{f \in \mathcal{H}_d \mid f(1,1,1) = 0 \text{ かつ } f \text{ は対称多項式}\} \\ L &= \{(a:b:c) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid a+b+c=0\}\end{aligned}$$

とおく. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) d が 4 以上の偶数ならば $\text{Bs } \mathcal{H}_d^s = \phi$, $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{s0} = \{(1:1:1)\}$ である.
- (2) d が 3 以上の奇数ならば, $\text{Bs } \mathcal{H}_d^s \cap A_s = \{(-1:0:1)\}$ である.
- (3) d が 5 以上の奇数ならば $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{s0} \cap A_s = \{(1:1:1), (-1:0:1)\}$ である.
- (4) $d \geq 3$ のとき, $\Phi_d^s(L)$ が 1 点になるのは $d = 3, 4, 5, 7$ の場合に限る.

証明. (1), (2), (3) S_2 倍写像 $\mathcal{H}_d^s \xrightarrow{\times S_2} \mathcal{H}_{d+2}^s$ を考えると $\text{Bs } \mathcal{H}_{d+2}^s \subset \text{Bs } \mathcal{H}_d^s \cup V(S_2) = \text{Bs } \mathcal{H}_d^s$ がわかる. $\text{Bs } \mathcal{H}_4^s = \phi$ なので, 4 以上の偶数 d に対して $\text{Bs } \mathcal{H}_d^s = \phi$ である. $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{s0} = \{(1:1:1)\}$ の同様にわかる.

d が 5 以上の奇数ならば, $\text{Bs } \mathcal{H}_d^s \subset \text{Bs } \mathcal{H}_3^s$, $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{s0} \subset \text{Bs } \mathcal{H}_5^{s0}$ である.

$\text{Bs } \mathcal{H}_3^s \cap A_s \supset \{(-1:0:1)\}$, $\text{Bs } \mathcal{H}_5^{s0} \cap A_s \supset \{(1:1:1), (-1:0:1)\}$ は直接的計算でわかる.

基本対称式を $\sigma_1 := S_1$, $\sigma_2 := S_{1,1}$ and $\sigma_3 := U$ と置くととき, $\mathcal{H}_d^s = (\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3])_d$ であって, $S_1(-1:0:1) = 0$, $U(-1:0:1) = 0$, $S_{1,1}(-1:0:1) = -1$ である. d が 3 以上の奇数のとき, 単項式 $f(a, b, c) = \sigma_1^k \sigma_2^l \sigma_3^m$ が $k+2l+3m = d$ を満たせば, f は σ_1 か σ_3 の倍数なので, $f(-1, 0, 1) = 0$ である. $(-1:0:1) \in \text{Bs } \mathcal{H}_d^s \subset \text{Bs } \mathcal{H}_3^s$ である.

$\text{Bs } \mathcal{H}_d^{s0}$ についても同様である.

(4) $\{\sigma_1^k \sigma_2^l \sigma_3^m \mid k+2l+3m = d\}$ の元の中で, $\sigma_2^l \sigma_3^m$ という形の元が 1 個しか存在しないのは, $d = 3, 4, 5, 7$ の場合に限る. $\sigma_2^l \sigma_3^m$ という形の元が 2 個以上存在すれば, $\Phi_d^s(L)$ は半代数曲線になる. \square

6.3. 3変数3次斉次巡回不等式

6.3.1. \mathcal{P}_3^{c+} の構造

ここでは, 第 2.2.3 項で述べた諸定理を証明する. 定理 2.2.10 のように,

$$\begin{aligned} f_s(a, b, c) &:= s^2 S_3 - (2s^3 - 1)S_{2,1} + (s^4 - 2s)S_{1,2} \\ &\quad - 3(s^4 - 2s^3 + s^2 - 2s + 1)U \\ f_\infty(a, b, c) &:= S_{1,2} - 3U \end{aligned}$$

とおく. また, 第 6.2.2 項, 第 6.2.3 項の記号をそのまま用いる. $A := \mathbb{P}_+^2$ の斉次座標系を $(a : b : c)$ で表す. $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし, \mathcal{H}_d^c は前節と同じとし, $\mathcal{P}_d^{c+} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H}_d^c)$ とおく. \mathcal{P}_d^{c+} は非退化であった.

以下, $d = 3$ の場合を考える. \mathcal{H}_3^c の基底として $s_0 := S_3 - 3U$, $s_1 := S_{2,1} - 3U$, $s_2 := S_{1,2} - 3U$, $s_3 := U = abc$ を選ぶ. $\{s_0, s_1, s_2\}$ は \mathcal{H}_3^{c0} の基底であることに注意する. このように基底を選ぶのが, 結果的に最良のようである.

アルゴリズム 6.1.30 のステップ 1 ~ 4 を実行してみよう.

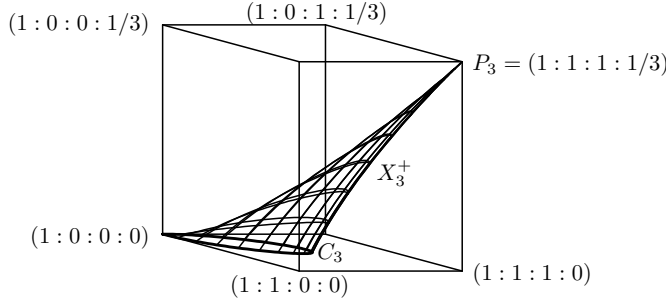
ステップ 1. 特性多様体 $X_3^c := X(\mathbb{P}_\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_3)$ とその臨界集合への分解 $\Delta(X_3^c)$ を求める.

$x_i = s_i(a, b, s)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) から a, b, c を消去すると,

$$F_3 := x_1^3 - x_0 x_1 x_2 + x_2^3 + x_0^2 x_3 - 3x_0 x_1 x_3 + 9x_1^2 x_3 - 3x_0 x_2 x_3 - 9x_1 x_2 x_3 + 9x_2^2 x_3$$

が得られる. $F_3 = 0$ で定まる $\mathbb{P}_\mathbb{R}^3$ 内の 3 次曲面が $X_3^c := X(\mathbb{P}_\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_3^c)$ であり, これは $\mathbb{P}_\mathbb{R}^2/G$ と同型である. その中で, $x_i x_3 \geq 0$ ($0 \leq i \leq 2$) で定まる半代数的閉集合が X_3^{c+} である. $P_3 := (0 : 0 : 0 : 1)$, $O_3 := (1 : 0 : 0 : 0)$, $C_3 := (X_3^{c+} \cap \{x_3 = 0\}) - \{P\}$ とおくと, 前節で証明してよように, $\Delta^0(X_3^{c+}) = \{P_3, O_3\}$, $\Delta^1(X_3^{c+}) = \{C_3\}$, $\Delta^2(X_3^{c+}) = \{\text{Reg}(X_3^{c+})\}$ である.

他方, $X_3^{c0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_3^{c0})$ は $\mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ 上で閉曲線 $C_3 \cup \{O_3\}$ で囲まれた領域であり, $\Delta^0(X_3^{c0+}) = \{O_3\}$, $\Delta^1(X_3^{c0+}) = \{C_3\}$, $\Delta^2(X_3^{c0+}) = \{\text{Reg}(X_3^{c0+})\}$ である.



ステップ 2. 各臨界集合 $D \in \Delta(X_3^{c+})$ に対し, 双対多様体のザリスキー閉包 $Zar(D^\vee) = Zar(D)^\vee$ を計算する.

多項式 $p_0s_0 + \dots + p_3s_3 \in \mathcal{H}_3^c$ と点 $(p_0, \dots, p_3) \in \mathbb{R}^4$ を同一視して考える. 公式.1.25(3) より $\text{disc}(O_3) = p_0$, $\text{disc}(P_3) = p_0 + p_1 + p_2 + 3p_3$ である. 公式.1.25(2) を用いて $Zar(C_3^\vee)$ を計算すると, $Zar(C_3)$ は $x_3 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 - x_0x_1x_2 = 0$ で定まる半代数曲面 (2次元半代数多様体) であることがわかる. したがって,

$$\text{disc}(C_3) = 4p_0p_1^3 + 4p_0p_2^3 + 27p_0^4 - p_1^2p_2^2 - 18p_0^2p_1p_2$$

が端判別式である.

点 $(0 : s : 1) \in \mathbb{P}_+^2$ における \mathcal{P}_3^{c+} , \mathcal{P}_3^{c0+} の局所錐を $\mathcal{L}_{0,s}^{c+}$, $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}$ という記号で表すことにする. 定理 6.1.34(1) より, これらが 0 でなければ, $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c+} = 2$, $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c0+} = 1$ が成り立つ. 公式 6.1.35 より, $Zar(\mathcal{L}_{0,s}^{c0+})$ の基底として,

$$f_s(a, b, c) := s^2S_3 - (2s^3 - 1)S_{2,1} + (s^4 - 2s)S_{1,2} - 3(s^4 - 2s^3 + s^2 - 2s + 1)U$$

が選べるのがわかる. $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}$ は半直線なのだから, $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_s$ である. 定理 6.1.33(4) より, f_s は \mathcal{P}_3^{c+} の端元である. f_s において $s \rightarrow +\infty$ とした極限は, $f_\infty(a, b, c) := s'_2 = S_{1,2} - 3U$ である. 次の定理により, ステップ 2 は完了する.

定理 6.3.1. 記号は上の通りとする.

- (1) \mathcal{P}_3^{c+} は主成分を持たない.
- (2) $s > 0$ に対し $\mathcal{L}_{0,s}^{c+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_s + \mathbb{R}_+ \cdot U$ である.
- (3) $\mathcal{F}(O_3) = \mathbb{R}_+ \cdot U + \mathbb{R}_+ \cdot (S_{2,1} - 3U) + \mathbb{R}_+ \cdot (S_{1,2} - 3U)$ である.

証明. (1) \mathbb{P}_+^2 内で, $C_3 \cup O_3$ で囲まれる領域を底とし P_3 を頂点とする閉錐体を Y とする. X_3^c は P_2 を A_1 型有理 2 重点に持つ 3 次曲面の一部なので, 閉曲線 $C_3 \cup O_3$ 上の 1 点と P_3 を結ぶ開線分 I は X_3^c と共有点を持たず X_3^c で囲まれる領域の外側にある. 他方, I は Y の境界上にある. よって, $\text{Reg}(X_3^{c+}) \subset \text{Int}(Y)$ である. したがって $\text{Reg}(X_3^{c+})^\vee$ は \mathcal{P}_3^{c+} の外部にある. すなわち, \mathcal{F}_3^{c+} は面成分でない.

(2) $f := \alpha f_s + \beta U$ — ① とおく. $f(0, s, 1) = 0$ が成り立つ. したがって, $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ のとき $f \in \mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ である. これと定理 6.1.34(1) より, $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c+} = 2$ が得られる.

逆に, ① の形の f が $f \in \mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ を満たしたとする. すると, $\beta = f(1, 1, 1) \geq 0, \alpha = (1/s^2)f(0, 0, 1) \geq 0$ が成り立つ. 以上から (2) がわかる.

(3) $\mathcal{F} := \mathcal{F}(O_3) = \mathcal{L}_{0,0}^{c+}$ とおく. 命題 6.1.36(2) より, $\partial \mathcal{F} = (\mathcal{E}_3^{c+} \cup \mathcal{P}_3^{c0+}) \cap \mathcal{F}$ である.

$$\mathcal{E}_3^{c+} \cap \mathcal{F} = (\mathbb{R}_+ \cdot f_0 + \mathbb{R}_+ \cdot U) \cup (\mathbb{R}_+ \cdot f_\infty + \mathbb{R}_+ \cdot U)$$

$$\mathcal{P}_3^{c0+} \cap \mathcal{F} = \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_0 \cup \mathbb{R}_+ \cdot f_\infty$$

なので, $\mathcal{F} = \mathbb{R}_+ \cdot U + \mathbb{R}_+ \cdot (S_{2,1} - 3U) + \mathbb{R}_+ \cdot (S_{1,2} - 3U)$ が得られる. \square

注意 6.3.2. $\Psi_3^c: X_3^{c+} \rightarrow X_3^{c0+}$ は $\Psi_3^c(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0 : x_1 : x_2)$ で定まる正射影とする. F_3 は x_3 については 1 次式であるので, Ψ_3^c は双有理写像で, ユークリッド位相に関する連続写像である. 正則写像が特異点を非特異点に移すことはないのであるが, $\Phi_3^c(P_3) = (3 : 1 : 1) \in \text{Reg}(X_3^{c0+})$ なので, 点 P_3 において Ψ_3^c は正則写像ではない. 複素代数幾何では有理写像が非正則点や不確定点で連続になることはないが, 実代数幾何ではそういうことも起きるのである.

ステップ 3 とステップ 4. \mathcal{P}_c^{c+} の判別式は 2 つの自明な判別式 $\text{disc}(O_3) = p_0, \text{disc}(P_3) = p_0 + p_1 + p_2 + 3p_3$ と, 端判別式

$$\text{disc}(C_3) = 4p_0p_1^3 + 4p_0p_2^3 + 27p_0^4 - p_1^2p_2^2 - 18p_0^2p_1p_2$$

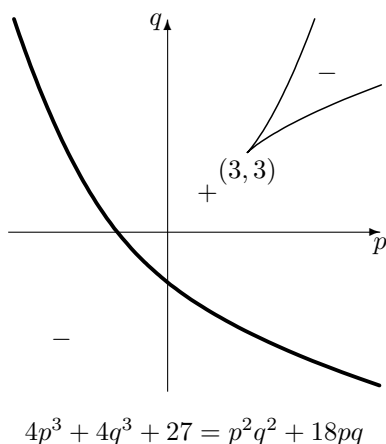
の 3 つしか存在しない. これら 3 つの判別式で定まる $\mathcal{H}_3^c \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ 内の超平面と超曲面は簡単な形状である. そのため, ステップ 3 とステップ 4 は瞬

時に完了する.

定理 6.3.2. \mathcal{H}_3^c 内のモニックな多項式 $f = S_3 + pS_{2,1} + qS_{1,2} + rU$ に対し, 任意の $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ に対して $f(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は次の (1), (2) のうちいずれかが成立することである.

- (1) $3 + 3p + 3q + r \geq 0$ かつ $4p^3 + 4q^3 + 27 \geq p^2q^2 + 18pq$
 (2) $3 + 3p + 3q + r \geq 0$ かつ $p \geq 0$ かつ $q \geq 0$

証明. $\text{disc}(C_3)$ を f に合わせて非斉次系で書くと, $\text{disc}_3^{c+}(p, q) := 4p^3 + 4q^3 + 27 - p^2q^2 - 18pq$ である. これは r の項を含まないことに注意する. (p, q) -平面上の曲線とみなしてこの判別式のグラフを描くと以下のようなになる.



第1象限に不必要な部分が現れるので,そこを取り除けばよい.1つの方法として,第1象限と,それ以外の3つの象限に分けて考えるのが簡明である.すると,定理の(1),(2)のような \mathcal{P}_3^{c+} の記述方法が得られる. \square

系 6.3.3. \mathcal{P}_3^{c+} の端元は, f_s ($s \in [0, \infty)$) の正の定数倍か, $U = abc$ の正の定数倍のいずれかである.

証明. ステップ2のところで証明されている. \square

系 6.3.4. \mathcal{H}_3^s は $\mathcal{H}_{3,3}$ 内の 3 変数 3 次対称多項式全体 (0 を含む) の集合とし, $\mathcal{P}(\mathbb{P}_+^3, \mathcal{H}_3^G)$ とおく. すると, $\mathcal{P}_{3,3}^{s+}$ は以下の 3 本の半直線 E_1, E_2, E_3 を稜 (辺) とする三角錐である.

$$E_1 := \mathbb{R}_+ \cdot (T_{2,1} - 6U) \quad E_2 := \mathbb{R}_+ \cdot (S_3 + 3U - T_{2,1}) \quad E_3 := \mathbb{R}_+ \cdot U$$

6.3.2. X_d^{c0} と X_d^{c0+} の構造

$\Phi_d^{c0} := \Phi_{\mathcal{H}_d^{c0}}, X_d^{c0} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^{c0}), X_d^{c0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_d^{c0})$ とおく.

定理 6.3.5. $d \geq 3$ ならば $\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は 1 点である. すなわち, 有理写像 $\Phi_d^{c0}: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \cdots \rightarrow X_d^{c0}$ は不確定点 $(1:1:1)$ まで連続写像として拡張できる. さらに, $\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内部の非特異点である.

証明. \mathbb{C} に係数拡大して考察する. $\rho_1: Y' \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ を点 $(1:1:1)$ でのプロ-アップとし, $E'_1 := \rho_1^{-1}(1:1:1)$ とする.

まず, $d = 3$ の場合から考える. $s_0 := S_3 - 3U, s_1 := S_{2,1} - 3U, s_2 := S_{1,2} - 3U$ を $\mathcal{H}_3^{c0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の基底として選ぶ.

$$\begin{aligned} s_0(1+t, 1+ut+vt^2, 1) &= 3(u^2 - u + 1)t^2 + (3(2u - 1)v + (u^3 + 1))t^3 + O(t^4) \\ s_1(1+t, 1+ut+vt^2, 1) &= (u^2 - u + 1)t^2 + ((2u - 1)v + u)t^3 + O(t^4) \\ s_2(1+t, 1+ut+vt^2, 1) &= (u^2 - u + 1)t^2 + ((2u - 1)v + u^2)t^3 + O(t^4) \end{aligned}$$

である. ここで, $O(t^4)$ は t について 4 次以上の項の和を表す. そこで, $\zeta_6 = (1 + \sqrt{-3})/2$ とし, $u^2 - u + 1 = 0$ の 2 根 $u = \zeta_6, \zeta_6^5$ に対し, 点 $(1:1:1)$ を始点とする方向ベクトル $(1:u:1)$ に対応する E'_1 上の 2 点を y_2, y_3 とする. すると, $\text{Bs}(\rho_1^* \mathcal{H}_3^{c0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \{y_2, y_3\}$ である. $\widetilde{\rho}_2: \widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow Y'$ を 2 点 y_2, y_3 でのプロ-アップとし, $E_2 := \rho_2^{-1}(y_2), E_3 := \rho_2^{-1}(y_3), E_1$ は E'_1 の強変換, $\rho := \rho_2 \circ \rho_1$ とする. $s_i(1+t, 1+ut+vt^2, 1)$ の t^3 の係数は線形独立だから, すると, $\text{Bs}(\rho^* \mathcal{H}_3^{c0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \emptyset$ である. $\widetilde{\Phi}_3^{c0}: \widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ は $\widetilde{\Phi}_3^{c0} = \Phi_3^{c0} \circ \rho$ を満たす正則写像とする. $\widetilde{\Phi}_3^{c0}(E_1) = (3:1:1) =: Q$ である.

$u = \zeta_6, \zeta_6^5$ に対し, Q と $((u^3 + 1) : u : u^2)$ を通る直線を L_2, L_3 とすると, $\widetilde{\Phi}_3^{c_0}(E_2) = L_2, \widetilde{\Phi}_3^0(E_2) = L_3$ である. $L_2 \cap \mathbb{P}^2 = \{Q\}, L_3 \cap \mathbb{P}^2 = \{Q\}$ なので, \mathbb{R} -係数の範囲では $\Phi_3^{c_0}(1 : 1 : 1) = Q$ と確定する. よって, $\Phi_3^0 : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ は $(1 : 1 : 1)$ まで連続写像として拡張できるが, そこで正則ではない.

$d \geq 4$ とする. $\iota : \mathcal{H}_3^{c_0} \rightarrow \mathcal{H}_d^{c_0}$ を $\iota_h(f) = S_1^{s-3}f$ で定義する. $\text{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_d^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \subset \text{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_3^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \cup V(S_1)$ である. $\text{Bs}(\mathcal{H}_d^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \{(1 : 1 : 1)\}$ なので, $\text{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_d^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \phi$ がわかる.

$\rho^*\mathcal{H}_d^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ が定める正則写像を $\widetilde{\Phi}_d^{c_0} : \widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{P}((\mathcal{H}_d^{c_0})^{\vee} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ とし, $(X_d^{c_0})_{\mathbb{C}} := \widetilde{\Phi}_d^{c_0}(\widetilde{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2)$ とおく.

$e = 4, 5$ のとき, $s = S_4 - US_1, S_{3,1} - US_1, S_{2,2} - US_1, S_{1,3} - US_1 \in \mathcal{H}_4^{c_0}$ と $s = S_5 - US_{1,1}, S_{4,1} - US_{1,1}, S_{3,2} - US_{1,1}, S_{2,3} - US_{1,1}, S_{1,4} - US_{1,1}, US_1 - US_{1,1} \in \mathcal{H}_5^{c_0}$ に対して,

$$s(1+t, 1+ut, 1) = c_0(u^2 - u + 1)t^2 + \sum_{i \geq 3} h_i(u)t^i \quad \textcircled{1}$$

と書けることはすぐ確認できる. $d = 3k + e$ ($e \in \{3, 4, 5\}$) のとき, $\mathcal{H}_d^{c_0} = \mathcal{H}_{3k}^c \cdot \mathcal{H}_e^{c_0}$ である. よって, 任意の $s \in \mathcal{H}_d^{c_0}$ について $\textcircled{1}$ が成り立つ. したがって, $\widetilde{\Phi}_d^{c_0}(E_1)$ は 1 点である.

$\text{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_3^{c_0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \phi$ だから, 正則写像 $\psi : (X_d^{c_0})_{\mathbb{C}} \rightarrow (X_3^{c_0})_{\mathbb{C}}$ が存在する. $Q' := \widetilde{\Phi}_d^{c_0}(E_1), L'_i := \widetilde{\Phi}_d^{c_0}(E_i)$ ($i = 2, 3$) とおくと, $\psi(L'_i) = L_i$ である. $L_i \cap X_3^{c_0} = \{Q\}$ なので $L'_i \cap X_d^{c_0} = \{Q'\}$ である. よって, $\Phi_d^{c_0}(1 : 1 : 1) = Q$ である.

Q は $(X_3^{c_0})_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ の非特異点だから, その原像である Q' も $(X_d^{c_0})_{\mathbb{C}}$ の非特異点である. \square

定理 6.3.6. $G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし, $\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ は自然な全射とする. Φ_d^c と $\Phi_d^{c_0}$ を

$$\Phi_d^c : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \xrightarrow{\Psi_d} X_d^c, \quad \Phi_d^{c_0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \xrightarrow{\Psi_d^{c_0}} X_d^{c_0}$$

と分解する. また, $\varphi_d : X_d^c \cdots \rightarrow X_d^{c_0}$ は包含写像 $\mathcal{H}_{3,d}^{c_0} \xrightarrow{\subset} \mathcal{H}_{3,d}^c$ から誘導される正射影とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $d = 3$ または $d \geq 5$ ならば, $\Psi_d^{c0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \rightarrow X_d^{c0}$ と $\varphi_d : X_d^c \rightarrow X_d^{c0}$ は双有理写像で, ユークリッド位相に関して連続写像で, 全単射である .
- (2) $d \geq 3$ ならば, $\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内部の点である .

証明. $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 - \{(1:1:1)\}$, $W_d^c := \Phi_d^c(A)$, $W_d^{c0} := \Phi_d^{c0}(A)$ とおく . $d = 3$ のとき (1), (2) が成立することは, 本節の前半で確認した . しかも, $\Psi_3^{c0} : A/G \rightarrow W_3^{c0}$ と $\varphi_3 : W_3^c \rightarrow W_3^{c0}$ は同型写像であった .

$d = 6$ の場合を考える . $\mathcal{H}_6^{c0} = \mathcal{H}_3^c \cdot \mathcal{H}_3^{c0}$ なので, $\text{Bs } \mathcal{H}_6^{c0} = \phi$ である . Ψ_3^{c0} は双有理な連続写像で全単射であり, $\Phi_3^{c0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \xrightarrow{\Psi_3^{c0}} X_6^{c0} \rightarrow X_3^{c0}$ と分解することができる . したがって $\varphi_6 : W_6^c \rightarrow W_6^{c0}$ は同型写像であり, $\varphi_6 : X_6^c \cdots \rightarrow X_6^{c0}$ は連続写像で全単射である .

$d = 5$ または $d \geq 7$ の場合を考える . S_2 倍写像 $\mathcal{H}_{d-2}^c \xrightarrow{\times S_2} \mathcal{H}_d^c$ を考えると, $\text{Bs } \mathcal{H}_d^{c0} = \phi$ がわかる . $e = 3$ または $e = 6$ に対して, 双有理連続全単射 $\Phi_e^{c0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \xrightarrow{\Psi_e^{c0}} X_d^{c0} \rightarrow X_e^{c0}$ が存在する . よって, $\varphi_d : W_d^c \rightarrow W_d^{c0}$ は同型写像であり, $\varphi_d : X_d^c \cdots \rightarrow X_d^{c0}$ は双有理連続全単射である .

(2) $\Psi_3^{c0} : \mathbb{P}_+^2/G \rightarrow X_3^{c0+}$ は $\Psi_d^{c0} : \mathbb{P}_+^2/G \rightarrow X_d^{c0+}$ と $X_d^{c0+} \rightarrow X_3^{c0+}$ の合成写像であるから, $\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内点である . \square

系 6.3.7. $O_d := \Phi_d^{c0}(0:0:1)$, $L := \{(0:s:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid s > 0\}$, $C_d := \Phi_d^{c0}(L)$ とおく . すると, 以下が成り立つ .

- (1) $d \geq 3$ ならば, $X_d^{c0+} \cong X_3^{c0+}$ であり, $\Delta^0(X_d^{c0+}) = \{O_d\}$, $\Delta^1(X_d^{c0+}) = \{C_d\}$, $\Delta^2(X_d^{c0+}) = \{\text{Reg}(X_d^{c0+})\}$ である .
- (2) d が 3 以上の奇数ならば, $X_d^{c0} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ であり, $\Delta^0(X_d^{c0}) = \Delta^1(X_d^{c0}) = \phi$, $\Delta^2(X_d^{c0}) = \{X_d^{c0}\}$ である .

6.4. 3 変数 4 次斉次巡回不等式

6.4.1. \mathcal{P}_4^{c0} の構造

今まで通り $\mathcal{H}_4^{c0} := \{f \in \mathcal{H}_4^c \mid f(1,1,1) = 0\}$ とおく . $\mathcal{P}_4^{c0} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ の研究から始める . 同時に $\mathcal{P}_4^{c0+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ についても, 並行し

て部分的にしらべておく.

アルゴリズム 6.1.30 のステップ 1 ~ 4 を実行してみよう.

ステップ 1. 特性多様体 $X_4^{c0} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ と $\Delta(X_4^{c0})$ を求める.

$s_0 := S_4 - US_1, s_1 := S_{3,1} - US_1, s_2 := S_{1,3} - US_1, s_3 := S_{2,2} - US_1$ を \mathcal{H}_4^{c0} の基底として選び, s_0, \dots, s_3 と $s_4 := US_1$ を \mathcal{H}_4^c の基底として選ぶ.

定理 6.4.1. 上記の記号のもと, 以下が成り立つ.

- (1) X_4^{c0} は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ 内で次の多項式 F_4^{c0} の零点として定まる 2 次曲面である.

$$F_4^{c0} := (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 + (x_0 - 2x_3)^2 - x_0^2$$

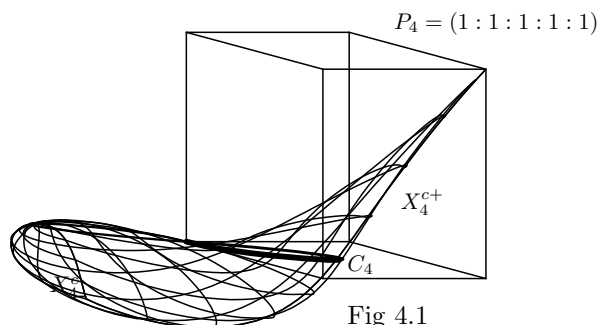
また, $\Delta^0(X_4^{c0}) = \Delta^1(X_4^{c0}) = \phi, \Delta^2(X_4^{c0}) = \{X_4^{c0}\}$ であり, $\partial\mathcal{P}_4^{c0}$ は唯一の面成分 $\mathcal{F}(X_4^{c0})$ から成る.

- (2) X_4^c は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ 内で, $F_4^{c0} = 0$ かつ $F_4^c = 0$ によって定まる曲面である. ここで,

$$F_4^c := (x_1 + x_2 + 3x_4)^2 - (x_0 + 2x_3 + 3x_4)(x_3 + 3x_4)$$

である.

- (3) 包含写像 $\mathcal{H}_4^{c0} \xrightarrow{\mathbb{C}} \mathcal{H}_4^c$ から誘導される有理写像 $\varphi_4^c: X_4^c \cdots \rightarrow X_4^{c0}$ は双有理連続写像であり全単射である.



証明. (1), (2) は $x_i = s_i$ から a, b, c を計算機を使って消去すると得られる.

(3) φ_4^c は $\varphi(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ で定義されることに注意する. F_4^c を展開すると x_4 について 1 次式になるので, $\varphi_4^c : X_4^c \rightarrow X_4^{c0}$ は連続な全単射であり, よって双有理写像である. \square

ステップ 2. 双対多様体と局所錐を求める.

$\mathcal{P}_4^c, \mathcal{P}_4^{c0}$ の点 $(s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における局所錐をそれぞれ $\mathcal{L}_{s,t}^c, \mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ と書くことにする. 定理 6.1.34(1) より, 任意の点 $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ に対し $\dim \mathcal{L}_{s,t}^c = 2, \dim \mathcal{L}_{s,t}^{c0} = 1$ である. \mathcal{H}_4^{c0} の元を $p_0s_0 + p_1s_1 + p_2s_2$ と表わしておく. s_0, s_1, s_2, s_3 から a, b, c を計算機を使って消去すると, \mathcal{P}_4^{c0} の主判別式

$$\text{disc}_4^{c0} = 3(p_0p_3 + p_0^2) - (p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2)$$

が得られる. $\Delta(X_4^{c0}) = \{X_4^{c0}\}$ だったので, $\partial\mathcal{P}_4^{c0}$ は $\text{disc}_4^{c0} = 0$ で定まる 2 次曲面である. また, 1 次元凸錐 (すなわち, 半直線) $\mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ は, 次の多項式 $\mathfrak{g}_{s,t}^A$ で生成される. ただし, $\mathfrak{g}_{s,t}^A$ は結構複雑な多項式である.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{p,q}^X(a, b, c) &:= S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} \\ &\quad + \left(\frac{p^2 + pq + q^2}{3} - 1 \right) S_{2,2} - \left(p + q + \frac{p^2 + pq + q^2}{3} \right) US_1 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_{\infty}^X(a, b, c) := S_{2,2} - US_1,$$

$$p(s, t) := -\frac{2S_{3,1}(s, t, 1) - S_{1,3}(s, t, 1) - S_{2,1,1}(s, t, 1)}{S_{2,2}(s, t, 1) - S_{2,1,1}(s, t, 1)}$$

$$\mathfrak{g}_{s,t}^A(a, b, c) := \mathfrak{g}_{p(s,t), p(t,s)}^X(a, b, c)$$

ただし, $p(1, 1) := -2, p(0, 0) = \infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1, \mathfrak{g}_{0,0}^A := \mathfrak{g}_{\infty}^X$ とする. $p(s, t) = p(1/t, s/t) = p(t/s, 1/s)$ であることに注意しよう. \mathcal{P}_4^{c0} が単純なのでステップ 3, 4 は必要でなく, 以下の定理が得られた.

定理 6.4.2. 4 次元の PSD 錐 \mathcal{P}_4^{c0} について以下が成り立つ.

- (1) $f = p_0S_4 + p_1S_{3,1} + p_2S_{1,3} + p_3S_{2,2} - 3(p_0 + p_1 + p_2 + p_3)US_1 \in \mathcal{H}_4^{c0}$ に対し, $f \in \mathcal{P}_4^{c0}$ となるための必要十分条件は $\text{disc}_4^{c0}(p_0, p_1, p_2, p_3) \geq 0$ である.
- (2) $\mathcal{L}_{s,t}^{c0} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_{s,t}^A$ である.
- (3) \mathcal{P}_4^{c0} の端的元は, $\mathfrak{g}_{p,q}^X$ または \mathfrak{g}_{∞}^X の正の定数倍である.

6.4.2. \mathcal{P}_4^{c0+} の構造

ステップ 1. $X_4^{c0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_4^{c0}) \subset X_4^{c0}$ の構造を調べる .

$O_4 := \Phi_4^{c0}(0 : 0 : 1) = (1 : 0 : 0 : 0)$, $C_4 := \{\Phi_4^{c0}(0 : s : 1) \mid s > 0\}$ とおく . 系 6.3.7 より , $\Delta^0(X_4^{c0+}) = \{O_4\}$, $\Delta^1(X_4^{c0+}) = \{C_d\}$, $\Delta^2(X_4^{c0+}) = \{\text{Reg}(X_4^{c0+})\}$ である .

ステップ 2. 相対定理 A より , \mathcal{P}_4^{c0+} と disc_4^{c0} の主判別式は一致し , 前項で述べた disc_4^{c0} になる . 公式.1.25(3) より $\text{disc}(O_4) = p_0$ である .

端判別式を求めよう . 公式.1.25(1) より , $\text{Zar}(C_4^Y)$ に対応する端判別式は連立方程式

$$\sum_{i=0}^3 p_i s_i(0, s, 1) = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^3 p_i \frac{\partial s_i}{\partial s}(0, s, 1) = 0 \quad \textcircled{1}$$

から s を消去することによって得られる . 計算機を使って計算する場合も少し工夫を要するが , 結果として端判別式は以下ようになる .

$$\begin{aligned} \text{disc}_4^{c+} = & 256p_0^6 - 27p_0^2p_1^4 - 192p_0^4p_1p_2 - 6p_0^2p_1^2p_2^2 - 4p_1^3p_2^3 - 27p_0^2p_2^4 \\ & + 144p_0^3p_1^2p_3 + 18p_0p_1^3p_2p_3 + 144p_0^3p_2^2p_3 + 18p_0p_1p_2^3p_3 - 128p_0^4p_3^2 \\ & - 80p_0^2p_1p_2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_3^2 - 4p_0p_1^2p_3^3 - 4p_0p_2^2p_3^3 + 16p_0^2p_3^4 \end{aligned}$$

命題 6.2.8 より , これは \mathcal{P}_4^{c+} の端判別式でもある . 他方 , ① を p_i について解くと , 以下の多項式 h_s が $\text{Zar}(\mathcal{L}_{0,s}^{c0+})$ の元として見つかる .

$$\begin{aligned} h_s &:= S_{3,1} + s^2 S_{1,3} - 2s S_{2,2} - (s-1)^2 U S_1 \\ h_\infty &:= S_{1,3} - U S_1 \end{aligned}$$

なお , $h_0 = S_{3,1} - U S_1$, $\mathfrak{g}_{0,0}^A = \mathfrak{g}_\infty^X = S_{2,2} - U S_1$ であることに注意する . 形式的に $\mathfrak{g}_{0,+ \infty}^A := \mathfrak{g}_\infty^X$ とおく . また , \mathcal{P}_4^{c+} , \mathcal{P}_d^{c0+} の点 $(s : t : 1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}^2$ における局所錐をそれぞれ $\mathcal{L}_{s,t}^{c+}$, $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+}$ と書くことにする .

定理 6.4.3. 4次元の PSD 錐 \mathcal{P}_4^{c0+} について以下が成り立つ .

(1) $s > 0, t > 0$ のとき $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+} = \mathcal{L}_{s,t}^{c0} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_{s,t}^A$ であり , 以下が成り立つ .

$$\mathcal{F}_4^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot (\{\mathfrak{g}_{p,q}^X \mid 9(p+q)^2 - (p-q)^2 \geq 6^2, p+q \leq 0\} \cup \{\mathfrak{g}_\infty^X\})$$

(2) $s > 0$ のとき $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_{0,s}^A + \mathbb{R} \cdot h_s$ である .

(3) \mathcal{P}_4^{c0+} の端的元は $g_{s,t}^A$ ($s, t \in \mathbb{R}_+$) または h_s ($s \in [0, \infty]$) の正の定数倍である .

証明. (1) $s > 0, t > 0$ のとき, $\dim \mathcal{L}_{s,t}^{c0+} = 1$ で $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+} \supset \mathcal{L}_{s,t}^{c0} \neq 0$ なので, $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+} = \mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ となる . 特に, $g_{s,t}^A$ は \mathcal{P}_4^{c0+} の端元である .

(2) $s > 0$ のとき $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c0+} \leq 2$ であった . $a, b, c \in \mathbb{R}_+, s > 0$ のとき,

$$h_s(a, b, c) = s^2(S_{1,3} - US_1) - 2s(S_{2,2} - US_1) + (S_{3,1} - US_1)$$

$$= (S_{1,3} - US_1) \left(s - \frac{S_{2,2} - US_1}{S_{1,3} - US_1} \right)^2 + \frac{US_1(S_{2,2} - S_{1,1})^2}{S_{1,3} - US_1} \geq 0$$

である . また, $h_s(1, 1, 1) = h_s(0, s, 1) = h_s(0, 0, 1) = 0$ も容易に確かめられる . したがって, $h_s \in \mathcal{L}_{0,s}^{c0+} \cap \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} \subset \partial \mathcal{P}_4^{c0+}$ である . $\dim(\mathcal{L}_{0,s}^{c0+} \cap \mathcal{L}_{0,0}^{c0+}) \leq 1$ なので, $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+} \cap \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot h_s$ であることがわかる . したがって, h_s は \mathcal{P}_4^{c0+} の端元である . $g_{s,t}^A$ も端元なので, $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+} = \mathbb{R}_+ \cdot g_{0,s}^A + \mathbb{R} \cdot h_s$ である .

(3) は (1), (2) からすぐわかる . □

ステップ 3 ~ 4.

定理 6.4.3b. $f(a, b, c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} - (1+p+q+r)US_1 \in \check{\mathcal{H}}_4$ について, 任意の $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は, 以下の (1) ~ (6) のいずれかが成立することである .

- (1) $r \geq -2, p \leq -2\sqrt{r+2}, p+q \geq 0$, かつ $\text{disc}_4^{c0+}(p, q, r) \leq 0$
- (2) $r \geq -2, q \leq -2\sqrt{r+2}, p+q \geq 0$, かつ $\text{disc}_4^{c0+}(p, q, r) \leq 0$
- (3) $r \geq -2, -\sqrt{r+4} \leq p+q \leq 0, p \geq -2\sqrt{r+2}, q \geq -2\sqrt{r+2}$, かつ $\text{disc}_4^{c0+}(p, q, r) \geq 0$
- (4) $r \geq -2, p \geq -2\sqrt{r+2}, q \geq -2\sqrt{r+2}$, かつ $p+q \geq 0$
- (5) $r \geq 0$, かつ $p^2 + pq + q^2 \leq 3r + 3$
- (6) $r \leq -2, p+q \geq 0$ かつ $\text{disc}_4^{c0+}(p, q, r) \leq 0$

証明. 一般に, 部分ベクトル空間 $V \subset \mathcal{H}_4^{c0}$ に対し, V 内のモニック多項式全体の集合を \check{V} と書くことにする .

$f(a, b, c) = S_4 + xS_{3,1} + yS_{1,3} + zS_{2,2} - (1+x+y+z)US_1 \in \check{\mathcal{H}}_4^{c0}$ と $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ を同一視することにより, $\check{\mathcal{H}}_4^{c0} = \mathbb{R}^3$ と考える . 今までに述

べたように,

$$\check{\mathcal{H}}_4^{c0+} = \left\{ (x, y, z) \in \check{\mathcal{H}}_4^{c0} \mid \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 3z + 3, \\ 9(x+y)^2 - (x-y)^2 \geq 6^2, x+y \leq 0 \end{array} \right\}.$$

である.

$$S := \{(x, y, z) \in \check{\mathcal{H}}_4^{c0} \mid \text{disc}_4^{c0+}(x, y, z) = 0\}$$

とおくと, S は $\check{\mathcal{H}}_4^{c0}$ 内の6次代数曲面であり, $\check{\mathcal{E}}_4^{c0+}$ のザリスキー閉包である.

$\check{\mathcal{H}}_4^{c0}$ における曲面 $\partial\check{\mathcal{P}}_4^{c0+}$ を観察するために, $z = r$ で定まる $\check{\mathcal{H}}_4^{c0}$ 内の平面

$$V_r := \{(x, y, z) \in \check{\mathcal{H}}_4^{c0} \mid z = r\}$$

を考え, $P_r := \mathcal{P}_4^{c0+} \cap V_r$, $C_r := (\partial\mathcal{P}_4^{c0+}) \cap V_r$, $F_r := (\partial\mathcal{P}_4^{c0}) \cap V_r = \mathcal{F}_4^{c0} \cap V_r$, $F_r^+ := \mathcal{F}_4^{c0+} \cap V_r$, $E_r := S \cap V_r$ とおく. F_r は $3(x+y)^2 + (x-y)^2 = 12(r+1)$ で定まる楕円で,

$$F_r^+ = \{(x, y) \in F \mid 9(x+y)^2 - (x-y)^2 \geq 6^2, x+y \leq 0\}$$

である. F_r は $r > 0$ のとき楕円の弧であり, $r > 0$ のときその2端点 P_1 , P_2 は

$$(x, y) = \left(\frac{\pm 3\sqrt{r} - \sqrt{r+4}}{2}, \frac{\mp 3\sqrt{r} - \sqrt{r+4}}{2} \right)$$

である. \bar{E} は6次曲線で, パラメータ表示

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^3} - \frac{r}{s} - 3s \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(s^3 - rs - \frac{3}{s} \right) \quad \textcircled{1}$$

を持つ. E_r は r に依存しない既約6次有理曲線で, 以下のようなパラメータ表示を持つ.

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^3} - \frac{r}{s} - 3s \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(s^3 - rs - \frac{3}{s} \right) \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$r > 0$ のとき E_r と F_r は2点 P_1, P_2 で接し, この2点が F_r^+, E_r の共通端点になっている. さらに P_r は凸集合であることに注意して, $r > 6$ の場合に C_r を図示すると, 図1のようなグラフになる.

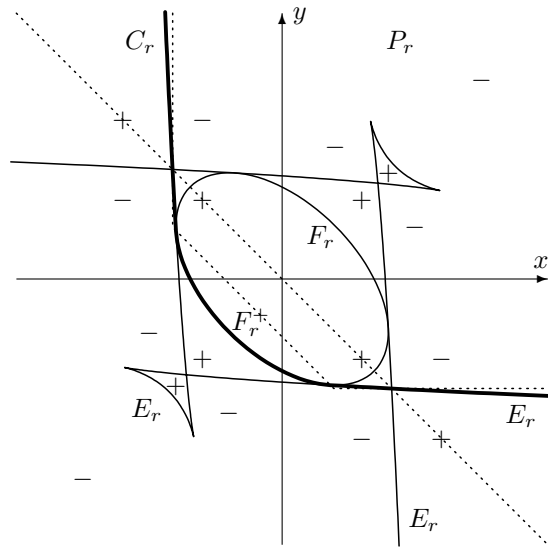


図 1. $r > 6$

既約 6 次曲線 E_r は原点と直線 $x + y = 0$ について対称な 2 本の分枝に分かれて見え, それぞれの分枝は $s = \pm \sqrt{\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 36}}{6}}$ において 2 個の尖点を持ち, $x = y = \pm 2\sqrt{r-2}$ において 1 個の結節点を持ち. さらに 2 つの分枝の交点が E_r の別の結節点になっている. 直線 $x + y = 0$ 上にある E_r の結節点の座標は $(x, y) = (\pm 2\sqrt{r+2}, \mp 2\sqrt{r+2})$ である. P_r の境界 C_r は太線で図示した曲線である. P_r は太線より右上の部分である. この P_r が (1), (2), (3), (4) または (5) を満たす領域として特徴づけられることは容易にわかる.

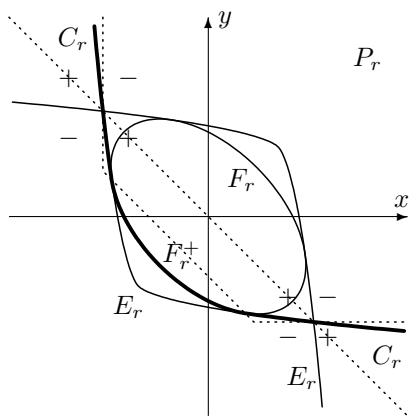


図 2. $0 \leq r \leq 6$

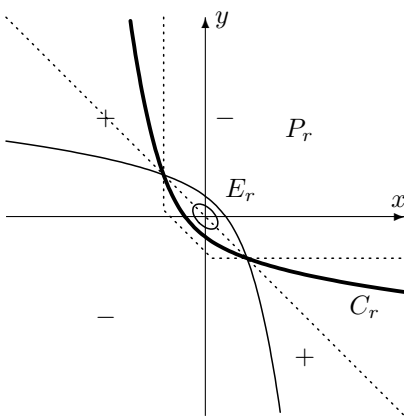


図 3. $-1 \leq r < 0$

$0 \leq r \leq 6$ の場合，グラフは図 2 のようになる． $r > 6$ の場合にあった E_r の 4 個の尖点と 2 個の結節点は消滅する．しかし， P_r が (1), (2), (3), (4) または (5) を満たす領域として特徴づけられることは同じである．

$-1 \leq r < 0$ の場合，グラフは右上の図 3 のようになり，6 次曲線 E_r と楕円 F_r が接しなくなる．よって， $C_r = E_r$ となる．この場合 P_r は (1), (2), (3) または (4) を満たす領域として特徴づけられる．

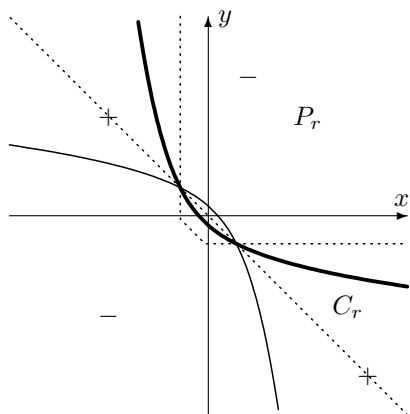


図 4. $-2 < r < -1$

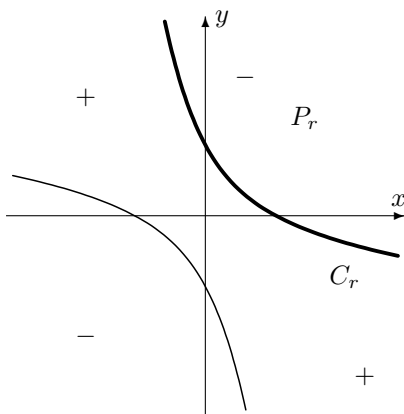


図 5. $r < -2$

$-2 < r < -1$ の場合，グラフは図 4 のようになり，楕円 F_r は消滅する．この場合， P_r は (1), (2), (3) または (4) を満たす領域として特徴づけ

られる .

$r \leq -2$ の場合 , グラフは図 5 のようになり , P_r は (6) を満たす領域として特徴づけられる . \square

注意 6.4.4. $\text{disc}_4^{c+}(1, p, p, q) = (4r - p^2 - 8)^2(r + 2p + 2)(r - 2p + 2)$ であるので , $p = q$, $4r = p^2 + 8$ で定まる曲線は \mathcal{P}_4^{c0+} 内の disc_4^{c+} の零点集合上にある . この曲線上の点に対応する不等式は $(S_2 - tS_{1,1})^2 \geq 0$ である .

6.4.3. \mathcal{P}_4^c の構造

ステップ 1 ~ 2. 特性多様体 $X_4^c = X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^c)$ の構造は , 定理 6.2.2(1) の通りであり , ステップ 1 は完了している . ステップ 2 に移る . 定理 6.2.4 より , $\partial\mathcal{P}_4^c$ は丁度 2 の面成分より成り , 1 つは主成分 \mathcal{F}_4^c で , もう 1 つは \mathcal{P}_4^{c0} である . \mathcal{H}_4^c の基底として $s_0 = S_4 - US_1$, $s_1 := S_{3,1} - US_1$, $s_2 := S_{1,3} - US_1$, $s_3 := S_{2,2} - US_1$, $s_4 := US_1$ を選ぶ . 主判別式は公式 1.25(1) を利用すれば計算できるが , 結果は長い多項式になる . 斉次座標で表現すると見難くなるので , \mathcal{H}_4^c の中のモニック多項式

$$f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 + vs_4 \in \mathcal{H}_4^c$$

について , 非斉次系で表わす .

$$\begin{aligned} \text{disc}_4^c(1, p, q, r, v) = & (3(r+1) - (p^2 + pq + q^2))(2p + 2q + r + 5)^3 \\ & - v(p^4 + q^4 + 34p^3q + 34pq^3 + 39p^2q^2 \\ & + 2(p+q)(5p^2 + 7pq + 5q^2)r - (2p^2 + pq + 2q^2)r^2 \\ & + 86p^3 + 86q^3 - 12(v-16)(p^2q + pq^2) - (v-84)(p^2 + q^2)r \\ & + (v+18)pqr - 22(p+q)r^2 + 8r^3 - 57(v-2)(p^2 + q^2) \\ & + (v^2 - 63v + 51)pq - 2(13v + 126)(p+q)r + 2(3v - 106)r^2 \\ & + 2(7v^2 + 3v - 139)(p+q) + 8(19v - 70)r \\ & - (v^3 + 20v^2 - 162v + 388)) \end{aligned}$$

また , 局所錐は以下ようになる .

定理 6.4.5. For $-1/2 \leq k \leq 1$, let $-1/2 \leq k \leq 1$ に対して

$$e_k^X(a, b, c) := (k(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca))^2$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 S_4 - 2kT_{3,1} + (2k^2 + 1)S_{2,2} - (2k - 2)US_1, \\
k(s, t) &= \frac{S_{1,1}(s, t, 1)}{S_2(s, t, 1)} = \frac{st + s + t}{s^2 + t^2 + 1} \in [-1/2, 1], \\
\mathbf{e}_{s,t}^A(a, b, c) &:= \mathbf{e}_{k(s,t,1)}^X(a, b, c)
\end{aligned}$$

とおく． \mathcal{P}_4^c は 5 次元の PSD 錐であって，以下が成立する．

(1) $(s, t) \in \mathbb{R}^2 - \{(1, 1)\}$ に対し，

$$\mathcal{L}_{s,t}^c = \{\alpha \mathbf{g}_{s,t}^A + \beta \mathbf{e}_{s,t}^A \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+\}$$

(2) $s > 0, t > 0$ かつ $(s, t) \neq (1, 1)$ のとき， $\mathcal{L}_{s,t}^{c+} := \mathcal{L}_{s,t}^c$ である．

(3) \mathcal{P}_4^c の端元は以下のいずれかの多項式の正の定数倍である．

$$\mathbf{g}_{p,q}^X, \quad \mathbf{g}_\infty^X, \quad \mathbf{e}_k^X \quad (-1/2 \leq k \leq 1)$$

証明. (1), (2) 定理 6.1.34(1) より， $(s, t) \neq (1, 1)$ のとき $\dim \mathcal{L}_{s,t}^c = N - 2 = 2$ である．また， $s > 0, t > 0$ のとき $\dim \mathcal{L}_{s,t}^{c+} = 2$ であり， $\mathcal{L}_{s,t}^c \subset \mathcal{L}_{s,t}^{c+}$ である．

$$f_{s,t,\alpha,\beta} := \alpha \mathbf{g}_{s,t}^A + \beta \mathbf{e}_{s,t}^A$$

とおく． $\mathbf{g}_{s,t}^A \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ ， $\mathbf{e}_{s,t}^A \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ なので， $\alpha \geq 0$ and $\beta \geq 0$ ならば $f_{s,t,\alpha,\beta} \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ である．

$f_{s,t,\alpha,0} \in \partial \mathcal{P}_4^c$ なので，命題 6.1.36(1) より $f_{s,t,\alpha,-\beta} \notin \mathcal{P}_4^c$ である．また， $s > 0, t > 0$ の場合は $f_{s,t,\alpha,-\beta} \notin \mathcal{P}_4^{c+}$ である．

$\alpha < 0$ の場合を考える． $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ のとき 関数 $k(s, t)$ の値域は， $-1/2 \leq k \leq 1$ であり， $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ のとき $k(s, t)$ の値域は， $0 \leq k \leq 1$ である．この値域の内点に属する k_0 を 1 つ取るとき， $k(s, t) = k_0$ を満たす (s, t) 全体の集合はある 2 次曲線の区間 $K(k_0)$ をなす．よって， $(s, t) \neq (s', t') \in K(k(s, t))$ を取れば， $\mathbf{e}_{s,t}^A(s', t', 1) = 0$ なので，

$$f_{s,t,\alpha,1}(s', t', 1) = \alpha \mathbf{g}_{s,t}^A(s', t', 1) < 0$$

となり， $f_{s,t,\alpha,1} \notin \mathcal{P}_4^c$ ($s > 0, t > 0$ のときは $f_{s,t,\alpha,1} \notin \mathcal{P}_4^{c+}$) がわかる．

したがって， $\mathcal{L}_{s,t}^c$ と $\mathcal{L}_{s,t}^{c+}$ は $\mathbf{g}_{s,t}^A, \mathbf{e}_{s,t}^A$ によって生成される凸錐である．

(3) は (1) からわかる． \square

以上でステップ 1 ~ 3 は終了したが，最後のステップ 4 が難しい．図形的解析から，以下が予想されるが，厳密な証明は得られていない．

予想 6.4.6. $f = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} + (v - 1 - 2p - r)US_1 \in \mathcal{H}_4^c$ が任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し $f(a, b, c) \geq 0$ を満たすための必要十分条件は，以下の (1), (2), (3) のいずれか 1 つを満たすことである．

- (1) $v = 0$ かつ $\text{disc}_4^{c0}(1, p, q, r) \geq 0$.
- (2) $0 < v \leq 27$ かつ $\text{disc}_4^c(1, p, q, r, v) \geq 0$ かつ $4r + 4(u + 2\sqrt{3}u + 1) \geq (p + q)^2$.
- (3) $v > 27$ かつ $\text{disc}_4^c(1, p, p, r, v) \geq 0$ かつ $r \geq \frac{(p + q)^2}{16} + 2$.

次の定理の十分条件の部分は Cirtoaje と Zhou によって証明された．逆の部分が，予想として提示されたものである．

定理 6.4.7. (Cirtoaje-Zhou 予想) $f \in \check{\mathcal{H}}_4^c$ をとり，

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} + vUS_1 \\ \alpha_f &:= 1 + p + q + r + v = \frac{1}{3}f(1, 1, 1) \\ \beta_f &:= 6 + 3p + 3q + 2r + v \\ \gamma_f &:= 2(1 + p + q) \\ \delta_f &:= 2 + 2r - v - (p^2 + pq + q^2 + p + q) \\ \varphi_f(x) &:= 2\sqrt{\alpha_f}x^3 - \beta_fx^2 + \gamma_f\sqrt{\alpha_f}x + \delta_f \end{aligned}$$

とおく．このとき，任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の (1), (2) のいずれかが成立することである．

- (1) $\alpha_f \geq 0$ かつ，ある $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ が存在して $\varphi_f(x) \geq 0$ が成り立つ．
- (2) $f = (S_2 - \kappa S_{1,1})^2$ ($\exists \kappa \in \mathbb{R}$) の形である．すなわち， $p = q$ かつ $p^2 - 4p = 4r$ かつ $p^2 + 2p = 2v$ が成り立つ．

また，(2) を満たさない f が \mathcal{P}_4^{c0} に属するための必要十分条件は， $\varphi_f(x) \geq 0$ を満たす x が開区間 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 内にただ 1 つだけ存在することである．

証明. (2) を満たす f が $\check{\mathcal{P}}_4^c$ に属することは明らかなので, $f \in \check{\mathcal{H}}_4^c$ が (1) を満たす場合を考える. $\varphi_f(x_0) \geq 0$ を満たす $x_0 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ をひとつ取り固定する.

$$\begin{aligned} p_1 &:= \frac{3p - 2\sqrt{\alpha_f}x_0 + 2x_0^2}{3 - x_0^2}, & q_1 &:= \frac{3q - 2\sqrt{\alpha_f}x_0 + 2x_0^2}{3 - x_0^2}, \\ r_1 &:= \frac{3r - \alpha_f + 2\sqrt{\alpha_f}x_0 - 3x_0^2}{3 - x_0^2}, & v_1 &:= \frac{3v - 2\alpha_f + 2\sqrt{\alpha_f}x_0}{3 - x_0^2}, \\ f_1(a, b, c) &:= S_4 + p_1 S_{3,1} + q_1 S_{1,3} + r_1 S_{2,2} + v_1 U S_1, \\ e_1(a, b, c) &:= e_{x_0/(x_0 - \sqrt{\alpha_f})}^X(a, b, c) \end{aligned}$$

とおく. 数式処理ソフトを使って計算すると,

$$\begin{aligned} 3f &= (3 - x_0^2)f_1 + (x_0 - \sqrt{\alpha_f})^2 e_1 \geq (3 - x_0^2)f_1 \\ f_1(1, 1, 1) &= 1 + p_1 + q_1 + r_1 + v_1 = 0 \\ \frac{p_1^2 + p_1 q_1 + q_1^2}{3} - 1 - r_1 &= -\frac{3\varphi_f(x_0)}{(3 - x_0^2)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

であることが確認できる. ($f_1 \in \mathcal{P}_4^{c0}$ に注意せよ.)

$$f = \frac{3 - x_0^2}{3} g_{p_1, q_1}^X + \frac{\varphi_f(x_0)}{3 - x_0^2} g_\infty^X + \frac{(x_0 - \sqrt{\alpha_f})^2}{3} e_1$$

であるので, $f \in \mathcal{P}_4^c$ が得られる.

逆に, (2) を満たさない $f \in \check{\mathcal{P}}_4^c$ が (1) を満たすことを証明する.

まず, $\alpha_f = \frac{1}{3}f(1, 1, 1) \geq 0$ である.

$$\begin{aligned} \varphi_f(\sqrt{3}) &= -4 \left(\sqrt{\alpha_f} - \frac{\sqrt{3}}{4}(p + q + 4) \right)^2 - \frac{(p - q)^2}{4} \leq 0 \\ \varphi_f(-\sqrt{3}) &= -4 \left(\sqrt{\alpha_f} + \frac{\sqrt{3}}{4}(p + q + 4) \right)^2 - \frac{(p - q)^2}{4} \leq 0 \end{aligned}$$

に注意する.

Case 1: まず, $f \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ の場合を考える.

$$p_2 = p(s, t), q_2 = q(s, t), -1/2 \leq k < 1, f = \frac{\alpha_2 g_{p_2, q_2}^X + \beta_2 e_k^X}{\alpha_2 + \beta_2 k^2} \text{ とおく.}$$

(この仮定は $f \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ より弱い仮定である.)

$$r_2 = \frac{p_2^2 + p_2q_2 + q_2^2}{3} - 1, \quad v_2 = -p_2 - q_2 - \frac{p_2^2 + p_2q_2 + q_2^2}{3} \text{ とおくととき,}$$

$$p = \frac{\alpha_2 p_2 - 2\beta_2 k}{\alpha_2 + \beta_2 k^2}, \quad q = \frac{\alpha_2 q_2 - 2\beta_2 k}{\alpha_2 + \beta_2 k^2},$$

$$r = \frac{\alpha_2 r_2 + \beta_2(2k^2 + 1)}{\alpha_2 + \beta_2 k^2}, \quad v = \frac{\alpha_2 v_2 - \beta_2(2k - 2)}{\alpha_2 + \beta_2 k^2}$$

に注意して $\alpha_f, \varphi_f(x)$ を計算すると, $\varphi_f\left(\frac{\sqrt{\alpha_f k}}{k-1}\right) = 0$ が直接的な計算で得られる (複雑な計算なので数式処理ソフトで確かめてみよ). ここで,

$$\left| \frac{\sqrt{\alpha_f k}}{k-1} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}\beta_2 k}{\sqrt{\alpha_2 + \beta_2 k^2}} \right| < \sqrt{3}$$

である. 特に $k = \frac{S_{1,1}(s,t,1)}{S_{2}(s,t,1)}$ の場合, つまり $f \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ の場合には,

$x = \frac{\sqrt{\alpha_f k}}{k-1}$ が $\varphi_f(x) = 0$ の重根になることが数式処理ソフトを利用して確認でき, $\varphi_f(\sqrt{3}) \leq 0$ なので $\varphi_f(x) \geq 0$ を満たす $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ はただ1つである.

Case 2: $f \in \mathcal{P}_4^0$ の場合を考える. $3\alpha_f = f(1,1,1) = 0$,

$$\varphi_f(x) = -(5 + 2p + 2q + r)x^2 + (3 + 3r - p^2 - pq - q^2)$$

となる. 定理 6.4.2(1) より,

$$\varphi_f(0) = 3(r+1) - (p^2 + pq + q^2) \geq 0$$

である. なお, $\varphi_f(\sqrt{3}) \leq 0$ なので, $5 + 2p + 2q + r \geq 0$ であり, $\varphi_f(x) = 0$ を満たす $0 \leq x < \sqrt{3}$ が存在する. $f \notin \partial\mathcal{P}_4^0$ の場合は, $\varphi_f(0) > 0$ であることに注意する.

Case 3: 一般の $f \in \mathcal{P}_4^c$ について考える. \mathcal{P}_4^c において, $\mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_\infty^X$ 上の点と点 f を通る直線と $\partial\mathcal{P}_4^c$ の交点を考えて, ある $\delta \geq 0$ が一意的に存在して, $f_0 := f - \delta \mathfrak{g}_\infty^X \in \partial\mathcal{P}_4^c$ となる.

$$f_0 = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + (r - \delta)S_{2,2} + (v + \delta)US_1$$

なので, $\alpha_{f_0} = \alpha_f, \delta_{f_0} = \delta_f - 3\delta, \varphi_{f_0}(x) = \varphi_f(x) - \delta(3 - x^2)$ が成り立つ.

Case 3-1: $f_0 \in \mathcal{L}_{s,t}^c$ の場合 . Case 1 の結果から , $\varphi_{f_0}(x_0) = 0$ を満たす $x_0 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ が存在する . すると , $\varphi_f(x_0) = \varphi_{f_0}(x_0) + \delta(3 - x_0^2) \geq 0$ である . よって , 条件 (1) が成立する .

Case 3-2: $f_0 \in \mathcal{P}_4^{c0}$, $f_0 \notin \mathcal{F}_4^{c0}$ の場合 . Case 2 の結果から , $\varphi_{f_0}(0) > 0$ である . よって , $\varphi_f(0) \geq \varphi_{f_0}(0) > 0$ で , (ii) が成立する .

なお , Case 3-1 の場合も , Case 3-2 の場合も , $f \notin \mathcal{F}_4^{c0}$ ならば , $\varphi_f(x_0) > 0$ であるので , $\varphi_f(x) \geq 0$ を満たす $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ は複数存在する . \square

6.4.4. \mathcal{P}_4^{c+} の構造

定理 6.2.4(2) で証明したように , $\mathcal{P}_4^{c+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_4^c)$ は高々4個の面成分 \mathcal{F}_4^{c++} , \mathcal{E}_4^{c+} , \mathcal{P}_4^{c0+} , $\mathcal{F}(O_4)$ しか持たない . \mathcal{P}_4^{c0+} は既に研究したように面成分である . 次の定理のように , 残りの3個の面成分である .

定理 6.4.8. 5次元の PSD 錐 \mathcal{P}_4^{c+} について以下が成り立つ .

- (1) $\mathcal{F}_4^{c+} = \text{Cls} \left(\bigcup_{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2 - \{(1,1)\}} \mathcal{L}_{s,t}^c \right)$ は面成分である .
- (2) $\mathcal{E}_4^{c+} = \{ \alpha_1 \mathbf{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathbf{g}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathbf{h}_s + \alpha_4 US_1 \mid s \geq 0, \alpha_i \geq 0 \}$ は面成分である .
- (3) $\mathcal{P}_4^{c\infty+} = \mathcal{L}_{0,0}^{c+} = \mathbb{R}_+ \cdot US_1 + \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$ である .
- (4) \mathcal{F}_4^{c+} の主判別式は disc_4^c であり , \mathcal{E}_4^{c+} の端判別式は disc_4^{c0+} である .

証明. (1) 定理 6.4.5(2) より , $s > 0, t > 0$ のとき $\mathcal{L}_{s,t}^{c+} = \mathcal{L}_{s,t}^c$ なので , \mathcal{F}_4^{c+} は $\bigcup_{s>0, t>0} \mathcal{L}_{s,t}^c$ の閉包である .

(2) $f = \alpha_1 \mathbf{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathbf{g}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathbf{h}_s + \alpha_4 US_1$ は $f(0, s, 1) = 0$ を満たすので , $s \geq 0, \alpha_i \geq 0$ のとき $f \in \mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ である .

逆に , $s > 0$ のとき $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c+} = 3$ なので , $\mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ の任意の元 f は , ある $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ により , $f = \alpha_1 \mathbf{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathbf{g}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathbf{h}_s + \alpha_4 US_1$ と表せる . この表し方は一意的ではないが , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}_+$ と選べることを示す .

$$(s^2 + 1)^2 \mathbf{e}_{0,s}^A + 3s \mathbf{h}_s = s^2 \mathbf{g}_{0,s}^A + 3(s^2 - s + 1)^2 US_1$$

に注意する．よって， f において，(i) 「 $\alpha_2 \geq 0$ かつ $\alpha_4 = 0$ 」または，(ii) 「 $\alpha_2 = 0$ かつ $\alpha_4 \geq 0$ 」と仮定してもよい．

(i) の場合に， $f = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{g}_{0,s} + \alpha_3 \mathfrak{h}_s$ が $f \in \mathcal{P}_4^{c+}$ ならば， $\alpha_1 \geq 0$ ， $\alpha_3 \geq 0$ であることを示す．

$f(1, 1, 1) = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A(1, 1, 1)$ だから， $\alpha_1 \geq 0$ でなければならない．

$\alpha_1 \geq 0$ ， $\alpha_2 \geq 0$ より $\alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{g}_{0,s} \in \mathcal{F}_4^{c+}$ であるが， $\mathfrak{h}_s \notin \mathcal{F}_4^{c+}$ と命題 6.1.36(1) を用いると， $\alpha_3 \geq 0$ がわかる．

(ii) の場合に， $f = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \in \mathcal{P}_4^{c+}$ ， $\alpha_4 \geq 0$ ならば $\alpha_1 \geq 0$ ， $\alpha_3 \geq 0$ であることを示す．

$f(0, 0, 1) = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A(0, 0, 1)$ だから， $\alpha_1 \geq 0$ でなければならない．

$$\mathfrak{e}_{0,s}^A(0, 1/s, 1) = 0, \quad US_1(0, 1/s, 1) = 0$$

$$\mathfrak{h}_s(0, 1/s, 1) = \frac{(s-1)^2(s+1)^2}{s^3} \neq 0$$

に注意すると， $f(0, 1/s, 1) = \alpha_3 \mathfrak{h}_s(0, 1/s, 1)$ より， $\alpha_3 \geq 0$ が得られる．

以上より， $s > 0$ のとき，

$$\mathcal{L}_{0,s}^{c+} = \{ \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{g}_{0,s} + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \mid \alpha_i \geq 0 \}$$

が証明された．あとは簡単である．

(3) $\partial \mathcal{P}_4^{c\infty+} = (\mathcal{F}_4^{c+} \cup \mathcal{E}_4^{c+} \cup \mathcal{P}_4^{c0+}) \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ である． $\mathcal{F}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty} = \mathcal{L}_{0,0}^{c0}$ ， $\mathcal{L}_{0,0}^{c0+} \subset \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$ ， $\mathcal{P}_4^{c0+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty} = \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} = \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$ である．

$\mathcal{E}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ を決定しよう． $f = \alpha_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{e}_{0,s} + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \in \mathcal{E}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ をとる． $\mathfrak{g}_{0,s}^A$ ， $\mathfrak{e}_{0,s}^A$ ， \mathfrak{h}_s ， US_1 の中で， S_4 の項を持つのは $\mathfrak{g}_{0,s}^A$ と $\mathfrak{e}_{0,s}$ だけなので， S_4 の係数を比較して， $\alpha_1(s^2+1)^2 + \alpha_2 s^2 = 0$ でなければならない．

$$(s^2+1)^2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + 3s \mathfrak{h}_s = s^2 \mathfrak{g}_{0,s}^A + 3(s^2-s+1)^2 US_1$$

であったから，

$$f = \left(\alpha_3 + \frac{3\alpha_1}{s} \right) \mathfrak{h}_s + \left(\alpha_4 - \frac{3(s^2-s+1)^2}{s^2} \right) US_1$$

と書ける．そこで，最初から， $f \in \mathcal{E}_4^+ \cap \mathcal{H}_4^\infty$ を， $f = \alpha \mathfrak{h}_s + \beta US_1$ の形に書いておく． $f(0, 1, 1) = \alpha \mathfrak{h}_s(0, 1, 1)$ で $\mathfrak{h}_s(0, 1, 1) > 0$ だから， $\alpha \geq 0$ であ

る． $h_s(0, 1, 1) \in \mathcal{P}_4^{c0+}$, $h_s \notin \mathcal{P}_4^{c0+}$ だから，命題 6.1.36(1) より $\beta < 0$ ならば $f \notin \mathcal{P}_4^{c+}$ である．

以上より，(3) がわかる．

(4) は相対定理からわかる． \square

以上でステップ 1・2 は完了したが，ステップ 3 については幾何学的考察から予想はできるが，それを代数的に表現する方法がわからない．ステップ 4 については，適当な基本半代数的集合への分割方法を式で表現できていない．

定理 6.4.9. 今までと同じ記号を用いる．

$$f(a, b, c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} + vUS_1 \in \check{\mathcal{H}}_4^c$$

をとるとき，任意の $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (1) ~ (4) のいずれかが成立することである．

(1) $\alpha_f \geq 0$ かつ，ある $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ が存在して $\varphi_f(x) \geq 0$ が成り立つ．

(2) $p = q$ かつ $p^2 - 4p = 4r$ かつ $p^2 + 2p = 2v$ が成り立つ．

(3) $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ の実数解 $s \geq 0$ で，

$$\gamma_3 := r + 3s^2 + 2ps - \frac{1}{s^2}$$

$$\delta_3 := v + (2s + p)(s - 1)(s^2 + 1) + \frac{p}{s}$$

とおくとき， $\gamma_3 \geq 0$, $\gamma_3 + \delta_3 \geq 0$ を満たす s が存在する．

(4) $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ の実数解 $s \geq 0$ で，

$$t := 2s^2 + ps$$

$$\gamma_4 := r + 3s^2 + 2ps - \frac{1}{s^2}$$

$$\delta_4 := v + (s - 1)^2 p + \frac{2s^5 - 3s^4 + s^2 - 2s + 1}{s^2}$$

とおくとき， $t \geq 1$, $\gamma_4 \geq 0$ かつ $\gamma_4 \geq \delta_4$ が成り立つようなものが存在する．

この s は (自動的に) $\frac{\sqrt{p^2 + 8} - p}{4} \leq s \leq \frac{\sqrt{q^2 + 8} + q}{2}$ を満たす．

証明. 必要条件であることを示す. $f \in \mathfrak{F}_4^{c+}$ であると仮定する. $\partial\mathcal{P}_4^{c+} = \mathfrak{F}_4^{c+} \cup \mathcal{E}_4^{c+} \cup \mathcal{P}_4^{c0+} \cup \mathcal{P}_4^{c\infty+}$ であった. 点 f と点 $\mathfrak{g}_\infty^X = S_{2,2} - US_1 \in \partial\mathcal{P}_4^{c+}$ を通る直線 ℓ をとり, $\ell \cap (\partial\mathcal{P}_4^{c+})$ に属する \mathfrak{g}_∞^X 以外の点 f_1 をとる. $f = uf_1 + (1-u)\mathfrak{g}_\infty^X$ ($0 < u \leq 1$) と書ける. $f_0 = uf_1$ とおくと f_0 はモニックである. $f_0 \in \mathfrak{F}_4^{c+}$ または $f_0 \in \mathcal{E}_4^{c+}$ または $f_0 \in \mathcal{P}_4^{c0+}$ である.

(I) $f_0 \in \mathfrak{F}_4^{c+}$ の場合を考える. すると, $f_0 \in \mathfrak{F}_4^{c+} \subset \mathfrak{F}_4^c \subset \mathcal{P}_4^c$, $\mathfrak{g}_\infty^X \in \mathcal{P}_4^c$ なので $f \in \mathcal{P}_4^c$ となる. よって, 条件 (1) または (2) が成立する.

(II) $f_0 \in \mathcal{E}_4^{c+}$ の場合を考える. $f_0 = \alpha_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1$ ($\exists s, \alpha_i \in \mathbb{R}_+$) と書ける. ところで,

$$(s^2 + 1)^2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + 3s\mathfrak{h}_s = s^2 \mathfrak{g}_{0,s}^A + (s^2 - s + 1)^2 US_1$$

であった. この関係式を使うと f_0 は次の ①, ② のいずれかの形に書ける.

$$f_0 = \alpha \mathfrak{g}_{0,s}^A + \beta \mathfrak{e}_{0,s}^A + \gamma US_1, \quad (\exists s, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+) \quad \text{①}$$

$$f_0 = \alpha \mathfrak{g}_{0,s}^A + \beta \mathfrak{h}_s + \gamma US_1, \quad (\exists s, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+) \quad \text{②}$$

(II-1) ① の場合を考える. ① の両辺の $S_4, S_{3,1}, S_{1,3}$ の係数を比較すると,

$$1 = \alpha + \beta \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2},$$

$$p = \alpha \frac{1 - 2s^2}{s} - \frac{2\beta s}{(s^2 + 1)}, \quad q = \alpha \frac{s^2 - 2}{s} - \frac{2\beta s}{(s^2 + 1)}$$

である. この 3 式から α, β を消去すると, $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ が得られる. この 4 次方程式のある実数解 $s \geq 0$ が ① を満たす s と一致するはずである. その s を固定して考える. このとき,

$$\alpha = \frac{2s^2 + ps + 2}{3}, \quad \beta = -\frac{(s^2 + 1)^2(2s^2 + ps - 1)}{3s^2}$$

が成り立つ. f に $q = 2s^3 + ps^2 - 2/s$ を代入して q を消去した後に数式処理ソフトで計算すると,

$$f = \frac{2s^2 + ps + 2}{3} \mathfrak{g}_{0,s}^A - \frac{(s^2 + 1)^2(2s^2 + ps - 1)}{3s^2} \mathfrak{e}_{0,s}^A + \gamma_3(S_{2,2} - US_1) + (\gamma_3 + \delta_3)US_1 \quad \text{③}$$

が成り立つことがわかる．ここで，

$$f_0 = \frac{2s^2 + ps + 2}{3} g_{0,s}^A - \frac{(s^2 + 1)^2(2s^2 + ps - 1)}{3s^2} g_{0,s}^A + (\gamma_3 + \delta_3)US_1$$

で， $\gamma_3(S_{2,2} - US_1) = \gamma g_\infty^X$ である． $f = f_0 + (1-u)g_\infty^X$ ($0 < u \leq 1$) であったから，①とあわせて， $\gamma_3 \geq 0$, $\gamma_3 + \delta_3 \geq 0$ がわかる．よって，(3) が成立する．

(II-2) ②の場合を考える． f_0 はモニックなので， $f_0 = g_{0,s}^A + \beta h_s + \gamma US_1$ と書ける．この両辺の $S_{3,1}$, $S_{1,3}$ の係数を比較すると，

$$p = \frac{1 - 2s^2}{s} + \beta, \quad q = \frac{s^2 - 1}{s} - \beta s^2$$

である．この2式から β を消去すると， $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ が得られる．この4次方程式の解の中に適切な s が存在するはずである．以下，その適切な解 s について考える．

$$\frac{1 - 2s^2}{s} - p = \beta \geq 0 \text{ であるから, } s \geq 0 \text{ に注意すると, } s \geq \frac{\sqrt{p^2 + 8} - p}{4}$$

でないといけない．また，

$$0 = 2s^4 + ps^3 - qs - 2 = (2s^2 + ps)s^2 - qs - 2 \geq s^2 - qs - 2$$

であるから， $s \leq \frac{\sqrt{q^2 + 8} + q}{2}$ である．ちょっと面倒な計算を頑張っていると，

$$f - g_{0,s}^A - \beta h_s = \gamma_4 S_{2,2} + \delta_4 US_1$$

が得られる．他方

$$f = g_{0,s}^A + \beta h_s + \delta US_1 + (1-u)g_\infty^X$$

($\delta \geq 0$, $0 < u \leq 1$) であったので， $\gamma_4 = 1 - u \geq 0$, $\delta_4 - \gamma_4 = \delta \geq 0$ が成り立つ．よって，(4) が得られる．

(III) $f_0 \in \mathcal{P}_4^{c0+}$ の場合を考える． $g_\infty^X \in \mathcal{P}_4^{c0+}$ より， g_∞^X と $f_1 \in \mathcal{P}_4^{c0+}$ を通る直線 ℓ は $\partial \mathcal{P}_4^{c0+}$ と g_∞^X 以外の点で交わる．よって， $f_0 \in \partial \mathcal{P}_4^{c0+}$ である． $\partial \mathcal{P}_4^{c0+} \subset \mathcal{F}_4^{c+} \cup \mathcal{E}_4^{c+} \cup \mathcal{P}_4^{c\infty+}$ なので，上で扱った場合に帰着される．

十分条件であることは，上の証明から容易にわかる． \square

6.4.5. \mathcal{P}_4^s の構造

本項の目的は以下の定理を証明することである．証明は本項の最後に完結する．

定理 6.4.10. $f = S_4 + pT_{3,1} + rS_{2,2} + (v - 1 - 2p - r)US_1 \in \mathcal{H}_4$ について，任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a, b, c) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は， $v \geq 0$ であって，次の条件 (1) または (2) または (3) が成り立つことである．

- (1) $v = 0$ かつ $r \geq p^2 - 1$.
- (2) $0 < v \leq 27$ かつ $\text{disc}_4^c(1, p, p, r, v) \geq 0$ かつ $r \geq p^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$.
- (3) $v > 27$ かつ $\text{disc}_4^c(1, p, p, r, v) \geq 0$ かつ $r \geq \frac{p^2}{4} + 2$.

証明に先立って，記号の設定から始める． $G := \mathfrak{G}_3$, $\Phi_d^s = \Phi_{\mathcal{H}_d^s}$, $\Phi_d^{s_0} = \Phi_{\mathcal{H}_d^{s_0}}$, $\mathcal{P}_d^s = \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^s)$, $\mathcal{P}_d^{s_0} = \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^{s_0})$ とおく． $\mathcal{H}_4^{s_0}$ の基底として $s_0 = S_4 - US_1$, $s_1 = T_{3,1} - 2US_1$, $s_2 = S_{2,2} - US_1$ を選ぶ．また， \mathcal{H}_4^s の基底として s_0, s_1, s_2 and $s_3 = US_1$ を選ぶ． \mathcal{P}_4^s と並行して $\mathcal{P}_4^{s_0}$ を調べておく必要がある．

ステップ 1 ~ 2. $X_4^s := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^s)$ と $X_4^{s_0} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{s_0})$ ，およびその判別式を求める．

s_i 達から a, b, c を消去すると以下が得られる．

$$\begin{aligned} F_4^{s_0}(x_0, x_1, x_2) &:= x_1^2 + (x_0 - 2x_2)^2 - x_0^2 \\ X_4^{s_0} &= \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid F_4^{s_0}(x_0, x_1, x_2) \leq 0\} \\ F_4^s(x_0, x_1, x_2, x_3) &:= (x_1 + 3x_3)^2 - (x_0 + 2x_2 + 3x_3)(x_2 + 3x_3) = 0 \\ X_4^s &= \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid F_4^{s_0}(x_0, x_1, x_2) \leq 0 \text{ and } F_4^s(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\} \end{aligned}$$

命題 6.2.8, 命題 6.2.9 と上の結果から，以下のことがわかる． $\Delta^0(X_4^{s_0}) = \phi$, $\Delta^1(X_4^{s_0}) = \{\Phi_4^{s_0}(\overline{L_s^b})\}$, $\Delta^2(X_4^{s_0}) = \{\Phi_4^{s_0}(A_s^\circ)\}$ であり，また， $\Delta^0(X_4^s) = \{\Phi_4^{s_0}(\mathbf{1})\}$, $\Delta^1(X_4^s) = \{\Phi_4^s(L_s^b)\}$, $\Delta^2(X_4^s) = \{\Phi_4^s(A_s^\circ)\}$ である．ここで， $\mathbf{1} = (1 : 1 : 1)$, $L_s^b := \{(s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid s \neq 1\}$, and $A_s^\circ := \{(s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid s + t + 1 > 0, s < t < 1\}$ である． $X_4^{s_0}$ は平面上の領域であり， $\text{Zar}(X_4^s)$ は

線織面 (2 次の錐) であるので, それらの双対多様体は退化して低い次元しか持たない. よって, $\mathcal{P}_4^{s_0}$ と \mathcal{P}_4^s は主成分を持たない. 次に, $\mathcal{F}(\Phi_4^{s_0}(\mathbf{1})) = \mathcal{P}_4^{s_0}$ であることに注意する. ここで $\mathcal{P}_4^{s_0}$ は唯一の面成分しか持たなかった. 以上より以下が得られた.

命題 6.4.11. $\mathcal{P}_4^{s_0}$ について以下が成り立つ.

- (1) $f = pS_4 + qT_{3,1} + rS_{2,2} - (p + 2q + r)US_1 \in \mathcal{H}_4^{s_0}$ に対し $f \in \mathcal{P}_4^{s_0}$ となるための必要十分条件は $p \geq 0$ かつ $p(r + q) \geq r^2$ が成り立つことである.
- (2) $\mathcal{P}_4^{s_0}$ に端元は $\mathfrak{g}_{p,p}^X$ ($p \in \mathbb{R}$) または $S_{2,2} - US_1$ の正の定数倍である.

次に, $\Phi_4^s(L_s^b)$ について考える. $\mathcal{F}_4^s := \mathcal{F}(\Phi_4^s(L_s^b))$ とおく. 相対定理より, \mathcal{F}_4^s の判別式は $\text{disc}_4^c(p_0, p_1, p_1, p_2, p_3)$ である.

$\text{Zar}(X_4^s)$ の双対多様体は, $8p_0^2 + p_1^2 - 4p_1p_2 = 0$ かつ $3p_0 - 3p_1 - 3p_2 + p_3 = 0$ で定義される. よって, 点 $(s : t : 1) \in A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における端元は $e_{s,t}^A$ である. 以上より, \mathcal{P}_4^s のすべての端元が以下のように決定され, ステップ 1 と 2 は完了する.

命題 6.4.12. \mathcal{P}_4^s の点 $(s : t : 1) \in A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における局所錐を $\mathcal{L}_{s,t}^s$ と書くことにする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $s \neq 1, t \neq 1, s \neq t$ かつ $s + t + 1 \neq 0$ のとき, $\mathcal{L}_{s,t}^s = \mathbb{R} \cdot e_{s,t}^A$ である.
- (2) $s = 1$ または $t = 1$ または $s = t$ または $s + t + 1 = 0$ のとき, $\mathcal{L}_{s,t}^s = \mathbb{R} \cdot \mathfrak{g}_{s,t}^A + \mathbb{R} \cdot e_{s,t}^A$ である.

ステップ 3 ~ 4. \mathcal{P}_4^s の形状は, 以上の議論でほぼ分かっているが, それを半代数的集合として不等式で記述するという課題が残っている. そのために, 1 つ補題を用意しておく.

命題 6.4.13.

$$g(x, t) := 108\sqrt{3}t^3 + 36(10 - 3x)t^2 - \sqrt{3}(x + 2)^2(4x + 47)t + 6(x + 2)^4$$

$$h(x, v) = (4v + x^2 - 44x + 52)^2 + 128(x - 4)^3$$

とおく.

- (1) $0 < t < 3\sqrt{3}$, $x < 12$ のとき $g(x, t) > 0$ である .
 (2) $v > 27$ のとき , 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $h(x, v) > 0$ である .

証明. (1) $g(x, t)$ を t についての 3 次関数と考える .

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = 324\sqrt{3}t^2 + 72(10 - 3x)t - \sqrt{3}(x + 2)^2(4x + 47)$$

なので , t についての 2 次方程式 $\frac{\partial g(x, t)}{\partial t} = 0$ の小さくないほうの実数解は , $g_1(x) := 12x^3 + 225x^2 + 372x + 964$ として ,

$$t_1(x) := \frac{\sqrt{g_1(x)} - 2(10 - 3x)}{18\sqrt{3}}$$

である .

Case 1: $g_1(x) < 0$ の場合 . $g(x, t)$ の t^3 の係数は正なので , $t \geq 0$ において $g(x, t) > g(x, 0) = (x + 2)^4 \geq 0$ である .

Case 2: $g_1(x) \geq 0$, $x < 12$ の場合 . $g(x, t)$ の t^3 の係数は正なので , $t \geq 0$ においては $g(x, t) \geq \max\{g(x, t_1), g(x, 0)\}$ である . $g(x, 0) = (x + 2)^4 \geq 0$ なので , $g(x, t_1) \geq 0$ を示せばよい . $g(x, y)$ を $\frac{\partial g(x, t)}{\partial t}$ で割った余りを利用して計算すると ,

$$g(x, t_1) = \frac{1}{81}(g_2(x) - g_1(x)^{3/2})$$

$$\text{ただし } g_2(x) = 378x^4 + 2331x^3 + 13986x^2 + 21636x + 32696$$

が得られる .

$$g_2(x)^2 - g_1(x)^3 = 108(12 - x)^3(x + 2)^4(16x^2 + 25x + 58)$$

なので , $x < 12$ のとき $g(x, t_1) > 0$ である .

Case 3: $0 < t < 3\sqrt{3}$, $x \geq 12$ の場合 .

$$t_1(x) := \frac{\sqrt{g_1(x)} - 2(10 - 3x)}{18\sqrt{3}}$$

とすると , $x \geq -2$ で $t_1(x)$ は単調増加なので , $x \geq 12$ のとき $t_1(x) \geq t_1(12) = \frac{49\sqrt{3}}{9} > 3\sqrt{3}$ である .

$$g(x, \sqrt{3}) = 3(2x^4 + 4x^3 - 141x^2 - 1520x + 11456) > 0$$

の確認は容易である．また， $g(x, 0) > 0$ であった． $g(x, t)$ は t に関する3次関数で t^3 の係数は正で，極小値をとる点は $t = t_1(x) > 3\sqrt{3}$ であるので， $x > 12, 0 < t < 3\sqrt{3}$ において $g(x, t) > 0$ となる．

(2) $x > 4$ であれば $(x - 4)^3 > 0$ なので， $h(x, v) > 0$ である． $x \leq 4$ のときは，

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (x - 4)^2((x + 24)^2 + 512) + 8(v - 27)(2(v - 27) + (x - 4)(x - 40)) \\ &\geq 16(v - 27)^2 > 0 \end{aligned}$$

である． □

定理 6.4.10 の証明．一般に，部分ベクトル空間 $V \subset \mathcal{H}_4^s$ に対し， V 内のモニック多項式全体の集合を \check{V} と書く．

$f(1, 1, 1) = 3v$ なので， $v \geq 0$ は $f \in \mathcal{P}_4^s$ であるための必要条件である． $v = 0$ のときは，(1) が必要十分条件であることは，定理 2.3.3a から従う．以下， $v > 0$ の場合を考える．

変数と定数を区別するため， $\check{\mathcal{H}}_4^s$ の座標系を (p, r, v) の代わりに (x, y, z) を用いる． $v > 0$ を定数とし， $\check{\mathcal{H}}_4^s$ 内で平面 $z = v$ 定まる平面を H_v とし， $T_v := \mathcal{P}_4^s \cap H_v$ ， $F_v := \mathcal{F}_4^s \cap H_v$ とおく．また， $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ で定まる H_v 上の曲線を C_v とおくと， $F_v \subset C_v$ であって，曲線 C_v は，パラメータ表示

$$x = t + \frac{v(2t + 1)}{(t + 2)^3}, \quad y = t^2 - 1 + \frac{v(-t^3 + 2t^2 + 3t + 2)}{(t + 2)^3}$$

($t \in \mathbb{P}^1 - \{-2\}$) で定まる有理曲線である．このパラメータ表示を用いて C_v のグラフを描くと，下図のようになる． T_v の境界 F_v は，図の太線で示した曲線である． $v > 27$ か $0 < v \leq 27$ によって，グラフの特徴が若干異なる．

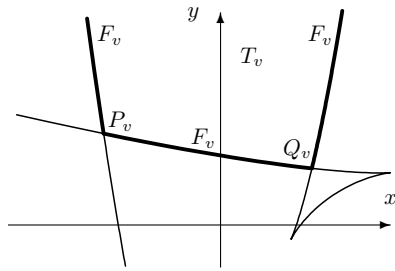


図 1. $v > 27$

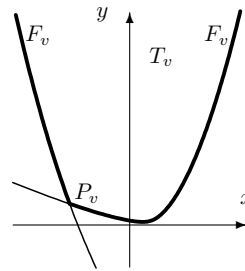


図 2. $0 < v < 27$

$v > 0$ のとき，曲線 C_v は点

$$P_v : (x, y) = \left(-2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2, \frac{v + 2\sqrt{3v} + 9}{3} \right)$$

に結節点を持つ．さらに， $v > 27$ のとき

$$Q_v : (x, y) = \left(2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2, \frac{v - 2\sqrt{3v} + 9}{3} \right)$$

も結節点である． Q_v は $0 < v < 27$ のとき T_v 内の孤立零点として現れる． P_v, Q_v はいずれも e_k^X に対応する点である．

(2) $0 < v \leq 27$ の場合を考える．曲線 $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ と放物線 $y = x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ の交点を求める． $t := \sqrt{v} > 0$ とおく． $y = -(t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)$ を $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, t^2)$ に代入すると，以下のようになる．

$$\text{disc}_4^c(1, x, x, (x^2 - (t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)), t^2) = -\sqrt{3}t \left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}t + 2 \right)^2 g(x, t)$$

ただし

$$g(x, t) := 108\sqrt{3}t^3 + 36(10 - 3x)t^2 - \sqrt{3}(x + 2)^2(4x + 47)t + 6(x + 2)^4$$

前補題より， $0 < t < 3\sqrt{3}$ ， $x < 12$ のとき $g(x, t) > 0$ であるので，

$$\text{disc}_4^c(1, x, x, (x^2 - (t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)), t^2) = 0 \text{ ならば } x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}t - 2 \text{ である．}$$

よって，放物線 $y = x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ と曲線 $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ の交点は，点 P_v のみである．したがって， $y \geq x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ によつ

て, $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) \geq 0$ で定まる領域から, T_v に属さない部分だけが切り落とされていることがわかる.

(3) $v > 27$ の場合を考える. 放物線 $y = x^2/4 + 1$ は 2 点 P_v, Q_v を通る. この放物線と $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ の交点は P_v, Q_v の 2 点のみであることを証明する. 交点の x 座標は,

$$\text{disc}_4^c\left(1, x, x, \frac{x^2}{4} + 2, v\right) = -\frac{(3(x+2)^2 - 4v)^2 h(x, v)}{256}$$

の根である. ここで, $h(x, v)$ は前補題に登場した多項式である. $h(x, v) > 0$ であったから, $\text{disc}_4^c(1, x, x, x^2/4 + 2, v) = 0$ の実数解は, $3(x+2)^2 - 4v = 0$ の解, すなわち, $x = \pm 2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2$ のみであり, これは曲線 $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ の特異点 P_v および Q_v であった. したがって, $y \geq x^2/4 + 1$ によって, $\text{disc}_4^c(1, x, x, y, v) \geq 0$ で定まる領域から, T_v に属さない部分だけが切り落とされていることがわかる. \square

6.5. 3変数5次斉次巡回不等式

6.5.1. $\mathcal{P}_5^{s_0+}$ の構造

半代数的集号 $\mathcal{P}_5^{s_0+}$ を不等式で表すことは第 2 章で完了しているが, その中のどれが判別式で, どのような性格の判別式であるか確認しておこう. また, 端元も決定しておこう. 定石通り, アルゴリズム 6.1.30 のステップ 1 から始める.

$\mathcal{H}_5^{s_0}$ の基底として $s_0 = S_5 - US_{1,1}$, $s_1 = T_{4,1} - 2US_{1,1}$, $s_2 = T_{3,2} - US_{1,1}$, $s_3 = US_2 - US_{1,1}$ を選ぶ. これらから a, b, c を消去すると $X_5^{s_0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_5^{s_0})$ のザリスキー閉包の定義多項式が以下の F_{50} であることわかり, \mathbb{P}_+^2 の境界の像を調べると, $X_5^{s_0+}$ の境界が以下の F_{51} で与えられることがわかる.

$$F_{50}(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_1^2 - x_0x_2 + x_1x_2 - x_2^2 - 2x_0x_3 - 5x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0,$$

$$F_{51}(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 - 2x_1x_3 \leq 0$$

$F_{51}(s_0, s_1, s_2, s_3) = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a+b+c)^4 \leq 0$ であることに注意する. $\Delta^2(X_5^{s_0+}) = \{\text{Reg}(X_5^{s_0+})\}$, $\Delta^1(X_5^{s_0+}) = \{\Phi_5^{s_0}(L_{s_+}^b), \Phi_5^{s_0}(L_{s_+}^0)\}$, $\Delta^0(X_5^{s_0+}) = \{\Phi_5^{s_0}(0:0:1), \Phi_5^{s_0}(0:1:1)\}$ であることは既に証明されている.

次に, ステップ 2 を実行する. $\Phi_5^{s_0}(0:0:1) = (1:0:0)$ なので $\mathcal{F}(\Phi_5^{s_0}(0:0:1))$ は気にしなくてよい.

命題 6.5.1. $\mathcal{P}_5^{s_0+}, \mathcal{P}_5^{s_+}$ は主成分を持たない.

証明. $\mathcal{P}_5^{s_+}$ について $\mathcal{F}_5^{s_+}$ が面成分でないことを示す. $0 \neq f \in \text{Int}(\mathcal{P}_5^{s_+})$ と仮定する. ある $0 < s < t < 1$ に対し $f \in \mathcal{L}_{s,t}^{s_+}$ と仮定してよい. また, どの $u \geq 0$ に対しても $f \notin \mathcal{L}_{0,u}^{s_+}, f \notin \mathcal{L}_{u,1}^{s_+}$ である. 一般に, $g \in \mathcal{H}_5^s$ に対し

$$M(g) := \max \{g(a) \mid a \in \partial A_s\}, \quad m(g) := \min \{g(a) \mid a \in \partial A_s\}$$

とする. $\partial A_s = \{(u:1:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid 0 \leq u \leq 1\} \cup \{(1:1:u) \in \mathbb{P}_+^2 \mid u \geq 1\} \cup \{(0:u:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid 0 \leq u \leq 1\}$ である. $f \notin \mathcal{L}_{0,u}^{s_+}, f \notin \mathcal{L}_{u,1}^{s_+}$ より, $m(g) > 0$ である. また, $M(S_5) < +\infty$ である. よって, 十分小さい $0 < \varepsilon \ll 1$ に対し, $m(f - \varepsilon S_5) > 0$ である. よって ε が十分小さければ $f - \varepsilon S_5 \in \mathcal{P}_5^{s_0+}$ となるはずである. しかし, 実際には $f(s, t, 1) - \varepsilon S_5(s, t, 1) < 0$ であり, 矛盾する.

$\mathcal{E}(X_5^{s_0+})$ が面成分であると仮定して矛盾を導く.

$0 \neq f, g \in \text{Int}(\mathcal{E}(X_5^{s_0+}))$ を, 以下の条件を満たすようにとれる.

- (a) ある $0 < s_1 < t_1 < 1, 0 < s_2 < t_2 < 1$ が存在して, $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$, $f \in \mathcal{L}_{s_1, t_1}^{s_0+}, g \notin \mathcal{L}_{s_1, t_1}^{s_0+}, f \notin \mathcal{L}_{s_2, t_2}^{s_0+}, g \in \mathcal{L}_{s_2, t_2}^{s_0+}$.
- (b) どの $u \geq 0$ に対しても $f, g \notin \mathcal{L}_{0,u}^{s_0+}$.
- (c) どの $u \geq 0, u \neq 1$ に対しても $f, g \notin \mathcal{L}_{u,1}^{s_0+}$.

このとき, $m(f/g) > 0$ または $m(g/f) > 0$ の少なくとも一方が成り立つ. $m(f/g) > 0$ と仮定してよい. $0 < \varepsilon < m(f/g)$ となる定数 ε を取れば, $f - mg \in \mathcal{P}_5^{s_0+}$ である. しかし, $f(s_1, t_1, 1) - \varepsilon g(s_1, t_1, 1) < 0$ であり, 矛盾する. □

定理 6.5.2. 命題 6.2.9 の記号を用いる .

$$d_5(p, q, r) := \left(4(p+1)(p-2)(2p-1) - 9q(2p-1) - 9r(p+1) \right)^2 \\ - \left((2p-1)^2 - 3(2q+r+2) \right)^3$$

とし, $O := \Phi_5^{s0}(0:0:1) = (1:0:0:0)$ とおく .

(1) $P := \Phi_5^{s0}(0:1:1) = (1:1:1:0)$ とおくと, 以下が成り立つ .

$$\check{\mathcal{F}}(P) = \mathcal{A}'_1 \cup \mathcal{A}'_2$$

$$\mathcal{A}'_1 := \{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid p+q+1=0, -3 \leq p \leq -1, r \geq p^2 \}$$

$$\mathcal{A}'_2 := \{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid p+q+1=0, -1 \leq p, 2p+r+1 \geq 0 \}$$

(2) $C_1 := \Phi_5^{s0}(L_{s+}^b) = \{ \Phi_5^{s0}(s:1:1) \mid s > 0 \}$ とおくと, 以下が成り立つ .

$$\check{\mathcal{F}}(C_1) = \{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid 4q = (p+1)^2 + 4, p \leq -3, d_5(p, q, r) \geq 0 \}$$

(3) $C_2 := \Phi_5^{s0}(L_{s+}^0) = \{ \Phi_5^{s0}(0:s:1) \mid s > 0 \}$ とおくと, 以下が成り立つ .

$$\mathcal{F}(C_1) = \mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2 \cup \mathcal{B}'_3$$

$$\mathcal{B}'_1 := \{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid d_5(p, q, r) = 0, p < -3, 4q \geq (p+1)^2 + 4 \}$$

$$\mathcal{B}'_2 := \left\{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid \begin{array}{l} d_5(p, q, r) = 0, -3 \leq p \leq -1, \\ p+q+1 \geq 0, (q, r) \neq (-p-1, -2p-1) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{B}'_3 := \left\{ (p, q, r) \in \check{\mathcal{H}}_5^{s0} \mid \begin{array}{l} d_5(p, q, r) = 0, -1 \leq p, \\ p+q+1 \geq 0, 2p+r+1 \leq 0 \end{array} \right\}$$

(4) \mathcal{P}_5^{s0+} の面成分は, $\mathcal{E}(C_1), \mathcal{E}(C_2), \mathcal{E}(P), \mathcal{E}(O)$ の 4 つである .

(5) $d_5(p, q, r) = \text{disc}(C_2)$ であり, $4q - (p+1)^2 - 4 = \text{disc}(C_1)$ である . また, $p+q+1 = \text{disc}(P), p_0 = \text{disc}(O)$ である .

証明. 定理 2.4.1 の証明と対比して考えれば, すぐわかる . \square

系 6.5.3. \mathcal{P}_5^{s0+} の端元については, 以下が成り立つ .

(1) $\mathcal{F}(C_1)$ の端元は以下の f_s と g_s の正の定数倍である .

$$f_s(a, b, c) := S_5 + (s^3 + s^2 - 1)T_{3,2} \\ - (2s^3 + 5s^2 + 4s + 1)US_2 + (3s^2 + 4s + 2)US_{1,1}$$

$$g_s(a, b, c) := T_{4,1} + (s^2 - 1)T_{3,2} - 2(s+1)^2US_2 + (4s+2)US_{1,1}$$

ただし「 $t < -3$ かつ $(t+3)^2 \leq 4s^2(s+t+1)$ 」または「 $-3 \leq t \leq -1$ かつ $s+t+1 \geq 0$ 」または「 $t \geq -1$ かつ $s \geq 0$ 」である． $s \geq 0$ のとき $f_s(s, 1, 1) = 0$, $g_s(s, 1, 1) = 0$ であることに注意する．

(2) $\mathcal{F}(C_2)$ の端元でようなモニック多項式は以下の $h_{p,v}$ である．

$$h_{p,v} = S_5 + pT_{4,1} + \frac{p^2 + 2p + 5}{4}T_{3,2} - \frac{p^2 + 6p - 2v + 7}{2}US_2 - vUS_{1,1}$$

ここで, (p, v) は以下の不等式を満たすものとする．

$$32p^3 + 51p^2 + 114p + 203 - 36pv - 36v \geq 4(4p^2 + 2p - 3v - 2)^{3/2}$$

$s > 0$, $p = -(2s^2 - s + 2)/s$ のとき $h_{p,v}(0, s, 1) = 0$ であることに注意する．

6.5.2. \mathcal{P}_5^{c+} の構造

$s_0 := S_5 - US_2$, $s_1 := S_{4,1} - US_2$, $s_2 := S_{3,2} - US_2$, $s_3 := S_{2,3} - US_2$, $s_4 := S_{1,4} - US_2$, $s_5 := US_2 - US_{1,1}$ を \mathcal{H}_5^{c0} の基底として選び, \mathcal{H}_5^c の基底を上記の s_0, \dots, s_5 に加えて $s_6 := US_{1,1}$ と選ぶ．後で分かるが, $S_5 - US_{1,1}$ を s_0 として選ぶより, 上の選び方のほうが優れているのである． $X_5^{c0+} := \Phi_5^{c0}(\mathbb{P}_+^2)$, $C = \partial(X_5^{c0+})$ とおく． $\Delta^2(X_5^{c0+}) = \{\text{Reg}(X_5^{c0+})\}$, $\Delta^1(X_5^{c0+}) = \{\text{Reg}(C)\}$, $\Delta^0(X_5^{c0+}) = \{\text{Sing}(C)\}$ である．したがって $\partial\mathcal{P}_5^{c0+}$ の面成分は, 主成分 \mathcal{F}_5^{c0+} , 端成分 \mathcal{E}_5^{c0+} , 無限遠成分 $\mathcal{L}_{0,0}^{c0+}$ の 3 つである．主成分 \mathcal{F}_5^{c0+} については, またよくわかっていない．以下, 端成分 \mathcal{E}_5^{c0+} について研究する．定理 6.5.7, 定理 6.5.6 等で述べた不等式に対応する以下の多項式を定義する．

$$\mathcal{H}_{0,s}^{c0} := \{f \in \mathcal{H}_5^{c0} \mid f(0, s, 1) = 0\}$$

$$F_{1,s}(a, b, c) := 3s^4s_0 - (4s^5 - 1)s_1 + (s^8 - 4s^3)s_4$$

$$F_{2,s}(a, b, c) := 2s_1 - 3ss_2 + s^3s_4$$

$$F_{3,s}(a, b, c) := s_1 - 3s^2s_3 + 2s^3s_4$$

$$F_{4,s}(a, b, c) := s_5$$

これらが, $F_{i,s}(0, s, 1) = 0$, $F_{i,s}(1, 1, 1) = 0$ という等号成立条件を満たすことは容易にわかる． $F_{i,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ であることは後で証明する．

命題 6.5.4. $s > 0$ のとき, $F_{1,s}, F_{2,s}, F_{3,s}, F_{4,s}$ は $\mathcal{H}_{0,s}^{c0}$ の基底である．

証明. $F_{1,s}, F_{2,s}, F_{3,s}, F_{4,s}$ が線形独立であることはすぐわかる. また, $F_{i,s}(0, s, 1) = 0$ も計算ですぐ確かめられる. $\dim \mathcal{H}_{0,s}^{c_0} = \dim \mathcal{H}_5^{c_0} - 2 = 4$ なので, $F_{1,s}, F_{2,s}, F_{3,s}, F_{4,s}$ は $\mathcal{H}_{0,s}^{c_0}$ の基底である. \square

Mathematica 等を用いて,

$$\left\{ \left(\frac{F_{2,s}(x, y, 1)}{F_{1,s}(x, y, 1)}, \frac{F_{3,s}(x, y, 1)}{F_{1,s}(x, y, 1)}, \frac{F_{4,s}(x, y, 1)}{F_{1,s}(x, y, 1)} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\}$$

で定まる代数的集合を描いてもらうと, それが $X_{s,t}^{c_0} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{L}_{s,t}^{c_0})$ で, $\Delta^i(X_{s,t}^{c_0})$ を求めて, 各 $D \in \Delta^i(X_{s,t}^{c_0})$ に対して $\mathcal{E}(D)$ を計算すれば, $\mathcal{L}_{s,t}^{c_0}$ が決定できる. 必死に頑張れば出来そうなレベルではあるが, まだ計算できていない. 数学の専門雑誌に投稿できる程度の結果になるので, 気力のある人はトライしてみてください.

$\text{Zar}(\mathcal{L}_{s,t}^{c_0})$ の基底も計算はしてみのだが, 項数が異常に多い多項式が登場するので, 綺麗にまとめられないと発表に耐えられない.

定理 6.5.5. $f = S_5 + xS_{4,1} + yS_{1,4} + zS_{3,2} + wS_{2,3} + uUS_2 + vUS_{1,1} \in \mathcal{H}_5^c$ に対して $(x, y, z, w, u, v) \in \mathbb{R}^6$ を対応させて, $\check{\mathcal{H}}_5^c = \mathbb{R}^6$ と考える. このとき, $\mathcal{P}_5^{c_+}$ の端判別式 $\text{disc}_5^{c_+}$ は以下の通りである. 端判別式定理より, $\text{disc}_5^{c_+}$ は $US_2, US_{1,1}$ の係数 u, v を含む項を持たず, $\mathcal{P}_5^{c_0+}$ の端判別式と一致する.

$$\text{disc}_5^{c_+}(x, y, z, w)$$

$$\begin{aligned} := & -27x^4y^4 - 4x^3y^2w^3 - 4x^2y^3z^3 + 18x^3y^3zw + x^2y^2z^2w^2 \\ & + 144x^4y^2w + 144x^2y^4z - 6x^3y^2z^2 - 6x^2y^3w^2 + 16x^3w^4 + 16y^3z^4 \\ & - 80x^3yzw^2 - 80xy^3z^2w + 18x^2yz^3w + 18xy^2zw^3 - 4x^2z^2w^3 \\ & - 4y^2z^3w^2 - 36x^3y^3 - 192x^4yz - 192xy^4w - 128x^4w^2 - 128y^4z^2 \\ & + 24x^2yw^3 + 24xy^2z^3 - 27x^2z^4 - 27y^2w^4 - 746x^2y^2zw \\ & + 144x^3z^2w + 144y^3zw^2 - 72xzw^4 - 72yz^4w + 356xyz^2w^2 + 16z^3w^3 \\ & + 256x^5 + 256y^5 + 160x^3yw + 160xy^3z + 1020x^2yz^2 + 1020xy^2w^2 \\ & + 560x^2zw^2 + 560y^2z^2w - 630xz^3w - 630yzw^3 + 108z^5 + 108w^5 \\ & - 50x^2y^2 - 1600x^3z - 1600y^3w - 900xw^3 - 900yz^3 - 2050xyzw \\ & + 825z^2w^2 + 2000x^2w + 2000y^2z + 2250xz^2 + 2250yw^2 \end{aligned}$$

$$-2500xy - 3750zw + 3125.$$

証明. \mathcal{P}_5^{c0+} と \mathcal{P}_5^{c+} の端判別式は同じだから, \mathcal{P}_5^{c0+} の端判別式を求める.
以下の連立方程式から α_2, α_3, s を消去する.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(4s^5 - 1)}{3s^4} + 2\alpha_2 + \alpha_3, & y &= \frac{s^8 - 4s^3}{3s^4} + s^3\alpha_2 + 2s^3\alpha_3, \\ z &= -3s\alpha_2, & w &= -3s^2\alpha_3. \end{aligned}$$

すると, $\text{disc}_5^{c+} = 0$ が得られる. \square

\mathcal{P}_5^{s0+} の判別式 $4q - (p+1)^2 - 4$ は,

$$\text{disc}_5^{c+}(p, p, q) = (p+q+1)(5-3p+q)^3(4q - (p+1)^2 - 4)^2$$

の中に 2 乗の因数として現れる. このことは, $\mathcal{E}_5^{s+} \subset \text{Sing}(\mathcal{E}_5^{c+})$ であることを意味する.

$F_{4,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ であることは自明であるが, $F_{1,s}, F_{2,s}, F_{3,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ の証明は, かなり厄介である. $F_{2,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ の証明から始める.

6.6. 3 変数 6 次斉次巡回不等式

6.6.1. 端判別式

\mathcal{H}_6^{c0} の基底として, $s_0 := S_6 - 3U^2, s_1 := S_{5,1} - 3U^2, s_2 := S_{1,5} - 3U^2,$
 $s_3 := S_{4,2} - 3U^2, s_4 := S_{2,4} - 3U^2, s_5 := S_{3,3} - 3U^2, s_6 := US_3 - 3U^2,$
 $s_7 := US_{2,1} - 3U^2, s_8 := US_{1,2} - 3U^2$ を選ぶ.

$$\mathcal{H}_{0,s}^{c0} = \{f \in \mathcal{H}_6^{c0} \mid f(0, s, 1) = 0\}$$

$$G_{1,s}(a, b, c) := s^4 s_0 - (2s^6 - 1)s_3 + (s^8 - 2s^2)s_4$$

$$G_{2,s}(a, b, c) := 2s_1 - 3ss_3 + s^3 s_4$$

$$G_{3,s}(a, b, c) := 2s^3 s_2 + s_3 - 3ss_4$$

$$G_{4,s}(a, b, c) := s_3 + s^2 s_4 - 2ss_5$$

$$G_5(a, b, c) := s_6 - s_7$$

$$G_6(a, b, c) := s_6 - s_8$$

$$G_7(a, b, c) := s_6$$

とおく．まず， G_1, s, \dots, G_7 が $\mathcal{H}_{0,s}^{c0}$ の基底であることから始める．なお， $\mathcal{L}_{s,t}^{c0} \subset \mathcal{P}_6^{c0}$ や $\mathcal{L}_{s,t}^{c0} \subset \mathcal{P}_6^{c0+}$ の基底は，たった6個の多項式を印刷するのに何十ページも必要なほど項数が異常に多い多項式で，とても印刷に耐えられない．

命題 6.6.2. $s > 0$ のとき， G_1, s, \dots, G_7 はベクトル空間 $\mathcal{H}_{0,s}^{c0}$ の基底である．

証明. $G_{i,s}$ を G_i と書く． G_1, \dots, G_7 が線形独立であること， $G_i(0, s, 1) = 0$ ， $G_i(1, 1, 1) = 0$ を満たすことはすぐわかる．また， $\dim \mathcal{H}_{0,s}^{c0} \leq \dim \mathcal{H}_6^0 - 2 = 9 - 2 = 7$ であるので，結論を得る． \square

定理 6.6.3. $f = s_0 + xs_1 + ys_2 + zs_3 + ws_4 + us_5 + x_6s_6 + x_7s_7 + x_8s_8 + x_9s_9 \in \mathcal{H}_6^0$ に対して $(x, y, z, w, u, x_6, x_7, x_8, x_9) \in \mathbb{R}^9$ を対応させて $\mathcal{H}_6^c = \mathbb{R}^9$ と考える．このとき， \mathcal{P}_6^{c+} の端判別式は以下の disc_6^{c+} である． disc_6^{c+} は \mathcal{P}_6^{c0+} の端判別式でもある，

$$\begin{aligned} & \text{disc}_6^{c+}(x, y, z, w, u) \\ := & 256x^5y^5 - 27x^4y^2w^4 - 27x^2y^4z^4 - 192x^4y^4zw - 6x^3y^3z^2w^2 \\ & - 4x^2y^2z^3w^3 + 144x^4y^3w^2u + 144x^3y^4z^2u + 18x^3y^2zw^3u \\ & + 18x^2y^3z^3wu - 128x^4y^4u^2 - 80x^3y^3zwu^2 + x^2y^2z^2w^2u^2 \\ & - 4x^3y^2w^2u^3 - 4x^2y^3z^2u^3 + 16x^3y^3u^4 - 1600x^5y^3w \\ & - 1600x^3y^5z - 36x^3y^3z^3 - 36x^3y^3w^3 + 108x^4w^5 + 108y^4z^5 \\ & + 1020x^4y^2zw^2 + 1020x^2y^4z^2w + 24x^3yz^2w^3 + 24xy^3z^3w^2 \\ & + 16x^2z^3w^4 + 16y^2z^4w^3 + 144x^2y^2z^4w + 160x^4y^3zu \\ & + 160x^3y^4wu - 630x^4yw^3u - 630xy^4z^3u - 746x^3y^2z^2wu \\ & - 746x^2y^3zw^2u - 72x^3zw^4u - 72y^3z^4wu - 80x^2yz^3w^2u \\ & - 80xy^2z^2w^3u + 560x^4y^2wu^2 + 560x^2y^4zu^2 + 356x^3yzw^2u^2 \\ & + 356xy^3z^2wu^2 - 6x^2y^2z^3u^2 - 6x^2y^2w^3u^2 - 4x^2z^2w^3u^2 \\ & - 4y^2z^3w^2u^2 + 24x^3y^2zu^3 + 24x^2y^3wu^3 + 16x^3w^3u^3 + 16y^3z^3u^3 \\ & + 18x^2yz^2wu^3 + 18xy^2zw^2u^3 - 72x^3ywu^4 - 72xy^3zu^4 \\ & + 320x^4y^4 - 50x^4y^2z^2 - 50x^2y^4w^2 + 2250xy^5z^2 + 2250x^5yw^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 144x^3yw^4 + 144xy^3z^4 + 9768x^3y^3zw + 160x^3yz^3w + 160xy^3zw^3 \\
& - 900x^4zw^3 - 900y^4z^3w - 576x^2zw^5 - 576y^2z^5w - 5428x^2y^2z^2w^2 \\
& - 128x^2z^4w^2 - 128y^2z^2w^4 - 96xyz^3w^3 + 144x^2y^2zw^4 - 64z^4w^4 \\
& + 2000x^5y^2u + 2000x^2y^5u - 2050x^4yzwu - 2050xy^4zwu \\
& - 682x^3y^2w^2u - 682x^2y^3z^2u - 192x^2yz^4u - 192xy^2w^4u \\
& + 3272x^2yzw^3u + 3272xy^2z^3wu + 320xz^2w^4u + 320yz^4w^2u \\
& - 208x^3y^3u^2 + 825x^4w^2u^2 + 825y^4z^2u^2 + 1020x^3yz^2u^2 \\
& + 1020xy^3w^2u^2 + 24x^2w^4u^2 + 24y^2z^4u^2 + 144x^2z^3wu^2 \\
& + 144y^2zw^3u^2 - 1584xyz^2w^2u^2 + 16z^3w^3u^2 - 900x^4yu^3 \\
& - 900xy^4u^3 - 630x^3zwu^3 - 630y^3zwu^3 - 108x^2yw^2u^3 - 108xy^2z^2u^3 \\
& - 72xz^3w^3u^3 - 72yz^3wu^3 - 27x^2z^2u^4 - 27y^2w^2u^4 + 324xyzwu^4 \\
& + 108x^3u^5 + 108y^3u^5 - 2500x^5yz - 2500xy^5w - 1700x^2y^4z \\
& - 1700x^4y^2w + 248x^2y^2z^3 + 248x^2y^2w^3 + 256x^2z^5 \\
& + 256y^2w^5 + 2000x^4z^2w + 2000y^4zw^2 - 13040x^3yzw^2 \\
& - 13040xy^3z^2w + 4816x^2z^2w^3 + 4816y^2z^3w^2 + 512z^5w^2 \\
& + 512z^2w^5 - 640xyzw^4 - 3750x^5wu - 3750y^5zu - 12330x^3y^2zu \\
& - 12330x^2y^3wu - 1600x^3z^3u - 1600y^3w^3u - 120x^3w^3u \\
& - 120y^3z^3u + 560x^3z^2w^2u + 560y^3z^2w^2u + 10152x^2yz^2wu \\
& + 10152xy^2zw^2u + 768xw^5u + 768yz^5u - 2496xz^3w^2u \\
& - 2496yz^2w^3u + 2250x^4zu^2 + 2250y^4wu^2 + 1980x^3ywu^2 \\
& + 1980xy^3zu^2 - 4536x^2zw^2u^2 - 4536y^2z^2wu^2 - 4464xyz^3u^2 \\
& - 4464xyw^3u^2 - 576z^4wu^2 - 576zw^4u^2 + 3942x^2yzu^3 \\
& + 3942xy^2wu^3 + 2808xz^2wu^3 + 2808yzw^2u^3 + 162x^2wu^4 \\
& + 162y^2zu^4 + 108z^3u^4 + 108w^3u^4 - 486xzu^5 - 486ywu^5 \\
& + 3125x^6 + 410x^3y^3 + 3125y^6 + 15600x^3yz^2 + 15600xy^3w^2 \\
& + 1500y^4z^2 + 1500x^4w^2 - 192x^2w^4 - 192y^2z^4 - 10560x^2z^3w \\
& - 10560y^2zw^3 + 8748x^2y^2zw - 640xyz^4w + 15264xyz^2w^2 \\
& - 1024z^6 - 4352z^3w^3 - 1024w^6 + 2250x^4yu + 2250xy^4u \\
& + 19800x^3zwu + 19800y^3zwu + 16632x^2yw^2u + 16632xy^2z^2u \\
& + 6912xz^4u + 6912yw^4u - 5760xzw^3u - 5760yz^3wu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 15417x^2y^2u^2 - 2412x^2y^2zwu^2 - 9720x^2z^2u^2 - 9720y^2w^2u^2 \\
& - 22896xyzwu^2 + 8208z^2w^2u^2 - 1350x^3u^3 - 1350y^3u^3 + 5832xw^2u^3 \\
& + 5832yz^2u^3 - 6318xyu^4 - 4860zwu^4 + 729u^6 - 22500x^4z \\
& - 22500y^4w - 1800xy^3z - 1800x^3yw - 21888xyz^3 - 21888xyw^3 \\
& - 6480x^2zw^2 - 6480y^2z^2w + 9216z^4w + 9216zw^4 - 31320x^2yzu \\
& - 31320xy^2wu - 3456xz^2wu - 3456yzw^2u - 27540x^2wu^2 \\
& - 27540y^2zu^2 - 8640z^3u^2 - 8640w^3u^2 + 21384xzu^3 + 21384ywu^3 \\
& + 540x^2y^2 + 43200x^2z^2 + 43200y^2w^2 + 31968xyzw - 17280z^2w^2 \\
& + 27000x^3u + 27000y^3u + 46656yz^2u + 46656xw^2u \\
& + 15552xyu^2 + 3888zwu^2 - 8748u^4 \\
& - 32400x^2w - 32400y^2z - 13824z^3 - 13824w^3 - 77760xzu \\
& - 77760ywu + 38880xy + 62208zw + 34992u^2 - 46656
\end{aligned}$$

証明. \mathcal{P}_6^{c+} と \mathcal{P}_6^{c0+} の端判別式は等しいので, \mathcal{P}_6^{c+} の端判別式を求めればよい.

$G_{1,s} + \sum_{i=2}^7 \alpha_i G_{i,s}$ と f の係数を比較すると,

$$\begin{aligned}
x &= 2\alpha_2, \quad y = 2s^3\alpha_3, \quad z = \frac{1-2s^6}{s^4} - 3s\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\
w &= \frac{s^8-2s^2}{s^4} + s^3\alpha_2 - 3s^2\alpha_3 + s^2\alpha_4, \quad u = -2s\alpha_4
\end{aligned}$$

を得る. これから, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, s$ を消去すると, $\text{disc}_6^{c+}(x, y, z, w, u) = 0$ が得られる. \square

系 6.6.4. $f = S_6 + pT_{5,1} + qT_{4,2} + rS_{3,3} + sUS_3 + tUT_{2,1} - 3(1 + 2p + 2q + r + s + 2t)U^2 \in \check{\mathcal{H}}_6^{s0}$ に $(p, q, r, s, t) \in \mathbb{R}^5$ を対応させることにより $\check{\mathcal{H}}_6^{s0} = \mathbb{R}^5$ と考える. このとき, $\mathcal{P}_6^{s0+}, \mathcal{P}_6^{s+}$ の端判別式は以下の通りである.

$$\begin{aligned}
\text{disc}_6^{s+}(p, q, r) &:= 8p^4 + p^2q^2 - 4p^3r - 42p^2q - 4q^3 + 18pqr \\
&\quad + 9p^2 + 36q^2 + 54pr - 27r^2 - 108q + 108
\end{aligned}$$

証明. $\text{disc}_6^{c+}(p, p, q, q, r) = (2p-2q+r-2)(2p+2q+r+2) \text{disc}_6^{s+}(p, q, r)^2$ よりわかる. \square

6.7. 4 変数 4 次斉次対称不等式

4 変数 3 次巡回不等式についても PSD 錐 $\mathcal{P}_{4,3}^{c0+}$ の構造は決定できているが、最終的な定理の記述する時に登場する不等式や定数が繁雑で、実用上使いにくく定理である。本書では、その解説は割愛して、4 変数 4 次対称不等式について、最終的な結果が簡明な $\mathcal{P}_{4,4}^{s0}$ と $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ に関する定理だけを照会する。

6.7.1. $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathcal{G}_3$ の構造

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ 上の d 次斉次式全体 (0 を含む) のなすベクトル空間を $\mathcal{H}_{n,d}$ とし、その中の巡回多項式、対称多項式全体のなす部分ベクトル空間をそれぞれ $\mathcal{H}_{n,d}^c, \mathcal{H}_{n,d}^s$ と書く。 $\mathcal{H}_{n,d}^c, \mathcal{H}_{n,d}^s$ の中で $f(1, \dots, 1) = 0$ を満たすもの全体のなす部分ベクトル空間を $\mathcal{H}_{n,d}^{c0}, \mathcal{H}_{n,d}^{s0}$ と書く。これらをまとめて \mathcal{H}_a^b と表すとき、 \mathcal{H}_a^b 内の $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathbb{P}_+^{n-1}$ 上の PSD 錐をそれぞれ $\mathcal{P}_a^b, \mathcal{P}_a^{b+}$ と書く。例えば、 $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+} = \mathcal{P}(\mathbb{P}_+^3, \mathcal{H}_{4,4}^{s0})$ である。

4 変数対称不等式を扱う場合 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathcal{G}_4$ の構造が重要になる。ここで、 \mathcal{G}_n は n 次対称群である。まず、複素代数幾何の復習から始める。

X_0, \dots, X_{n-1} の k 次基本対称式を σ_k とするとき、 $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_{n-1}]$ 内の対称多項式は σ_k ($k \in \mathbb{N}$) の複素数係数多項式で表せるので、

$$\mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_{n-1}]^{\mathcal{G}_n} \cong \mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$$

である。 $\text{Proj}(\mathbb{C}[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, \dots, n)$ であり、右辺は重み付き射影空間である。したがって、

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}/\mathcal{G}_n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, \dots, n)$$

である。 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, \dots, n)$ 内の \mathbb{R} -値点全体の集合は実代数多様体の構造を持ち、それを $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, \dots, n)$ と書く。 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathcal{G}_n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, \dots, n)$ であるが、 $=$ ではない。

命題 6.7.1. $n \in \mathbb{N}, \mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ とし、

$$A := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n = 0 \\ \text{の解はすべて実数である} \end{array} \right\}$$

と置き, $A_0 := A - \{0\}$ と置く. このとき, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, \dots, n)$ 内で半代数的部分集合 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$ を定義する不等式系は, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 内の半代数的部分集合 A_0 を定める. 特に, n 次方程式の判別式は $\text{Zar}(\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n))$ の定義方程式である.

証明. $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, \dots, n)$, $X := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$, $R_0 := \mathbb{R}^n - \{0\}$ と略記する.

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し, $f_{\mathbf{a}}(x) := x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n = 0$ と書くことにする. $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R_0$ に対し, $a_k = \sigma_k(\lambda)$ ($1 \leq k \leq n$) で $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ を定めると, $f_{\mathbf{a}}(x) = 0$ の解が λ なので $\mathbf{a} \in A_0$ である. $\rho: R_0 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ を自然な全射とする. $\sigma_k(c\lambda) = c^k \sigma_k(\lambda) = c^k a_k$ なので, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbf{a} \in A$ を対応させる写像から, $\varphi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}$ が誘導され, $\varphi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$ である. また, φ は自然な全射 $\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}$ と一致する.

X は P 内の基本的半代数的集合とは限らないので, $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ と基本的半代数的閉部分集合 X_i 達の和集合に分解する. $A_i := (\rho \circ \varphi)^{-1}(X_i) \cap R_0 \subset R_0$ と置けば, \mathbb{P} 内で X_i を定義する不等式系は R_0 内で A_i を定義する. $A_0 = A_1 \cup \dots \cup A_r$ であるので, 定理が得られた. \square

命題 6.7.2. 半代数多様体 A に有限群 G が作用しているとし, $\pi: A \rightarrow A/G$ を自然な全射とする. $A_0 \subset A$ が半代数的閉集合で $\pi(A_0) = A/G$ かつ $\pi: \text{Int}(A_0) \rightarrow \pi(\text{Int}(A_0))$ が同型写像であるとき, A_0 は A/G の基本領域であるという.

例 6.7.3. (1) $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ とするとき, 以下の A_c は A/G の基本領域である.

$$A_c := \left\{ (s_0 : \dots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid \begin{array}{l} s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1} + 1 \geq 0 \\ s_0 \leq 1, s_1 \leq 1, \dots, s_{n-1} \leq 1 \end{array} \right\}$$

(2) $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ とするとき, 以下の A_c^+ は A/G の基本領域である.

$$A_c^+ := \left\{ (s_0 : \dots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid 0 \leq s_0 \leq 1, \dots, 0 \leq s_{n-1} \leq 1 \right\}$$

(3) $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $G = \mathfrak{S}_{n+1}$ とするとき, 以下の A_s は A/G の基本領域である.

$$A_s := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid \begin{array}{l} s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 \geq 0 \\ s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq 1 \end{array} \right\}$$

(4) $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, $G = \mathfrak{S}_{n+1}$ とするとき, 以下の A_s^+ は A/G の基本領域である.

$$A_s^+ := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n \mid 0 \leq s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq 1 \right\}$$

命題 6.7.4. $\pi: \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\subset} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4)$ を $\pi(a) = (S_1(a) : S_{1,1}(a) : S_{1,1,1}(a) : U(a))$ で定めるとき, 以下が成り立つ.

(1) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3/\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3, 4)$ の特異点は 3 点 $Q_0 := (0, 1, 0, 0)$, $Q'_0 := (0, 0, 1, 0)$, $Q''_0 := (0, 0, 0, 1)$ であり, この 3 点は巡回型商特異点である. $\pi^{-1}(Q_0) \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 = \phi$, $\pi^{-1}(Q''_0) \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 = \phi$ であり.

$$\pi^{-1}(Q_0) \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 = \{ \sigma(-1 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid \sigma \in \mathfrak{S}_4 \}$$

である.

(2) $\Delta^2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{D_1\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{C_1, C_2\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{Q_0, Q_1, Q_6\}$ である. ここで, D_1, C_i, Q_i は以下の通りである.

$$D_1 := \{ \pi(s : t : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid s + t + 2 > 0, s < t \}$$

$$C_1 := \{ \pi(s : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid s \neq -3, 1 \}$$

$$C_2 := \{ \pi(s : s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid -1 < s < 1 \}$$

$$Q_1 := \pi(1 : 1 : 1 : 1) = (4, 6, 4, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4)$$

$$Q_2 := \pi(-1 : -1 : 1 : 1) = (0, -2, 0, 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4)$$

(3) $\Delta^2(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{D_1^+, D_0\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{C_1^+, C_3, C_4\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4) = \{Q_1, Q_3, Q_4, Q_5\}$ である. ここで, D_1^+, D_0, C_1^+, C_i and Q_i は以下の通りである.

$$D_1^+ := \{ \pi(s : t : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid 0 < s < t, s \neq 1, t \neq 1 \}$$

$$D_0 := \{ \pi(0 : s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid 0 < s < t < 1 \}$$

$$C_1^+ := \{ \pi(s : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid 0 < s < 1 \text{ or } s > 1 \}$$

$$C_3 := \{ \pi(0 : s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 2, 3, 4) \mid 0 < s < 1 \text{ or } 1 < s \},$$

$$C_4 := \{\pi(0:0:s:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4) \mid 0 < s < 1\}$$

$$Q_3 := \pi(0:1:1:1) = (3,3,1,0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$$

$$Q_4 := \pi(0:0:1:1) = (2,1,0,0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$$

$$Q_5 := \pi(0:0:0:1) = (1,0,0,0) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$$

- (4) $\text{Zar}(D_1)$ の定義方程式は以下の判別式 F である．また， $C_1 \cup C_2 \subset \text{Sing}(V(F))$ である．

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2, s_3, s_4) &:= \sum_{0 \leq i < j \leq 3} (a_i - a_j)^2 \\ &= 256s_4^3 - 192s_1s_3s_4^2 - 128s_2^2s_4^2 + 144s_2s_3^2s_4 - 27s_3^4 \\ &\quad + 144s_1^2s_2s_4^2 - 6s_1^2s_3^2s_4 - 80s_1s_2^2s_3s_4 + 18s_1s_2s_3^3 + 16s_2^4s_4 \\ &\quad - 4s_2^3s_3^2 - 27s_1^4s_4^2 + 18s_1^3s_2s_3s_4 - 4s_1^3s_3^3 - 4s_1^2s_2^3s_4 + s_1^2s_2^2s_3^2 \end{aligned}$$

ここで $s_i = \sigma_i$ である．

- (5) $\overline{C_1}$ は点 Q_1 で尖点を持ち， $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ 上のある 3 次曲線と同型である．
 (6) C_2 は開線分 (Q_1Q_2) と同型である．
 (7) $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathfrak{S}_4$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1:2:3:4)$ 内で，以下の不等式で定まる基本的半代数的閉集合である． $F(s_1, s_2, s_3, s_4) \geq 0$, $8s_2 \leq 3s_1^2$, $64s_4 - 16s_2^2 + 16s_1^2s_2 - 16s_1s_3 - 3s_1^4 \leq 0$.

証明. (1) ~ (6) は基本領域を危点集合に分解して，各成分の像を考察すればすぐわかる．(7) は 4 次方程式がのすべての解が実数である条件からわかる． \square

6.7.2. $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ の構造

$\mathcal{P}_{4,4}^{s_0} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, \mathfrak{H}_{4,4}^{s_0})$ の構造を考察する． $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ または $A = \mathbb{P}_+^3$ の斉次座標系を $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ で表す．形式的に $a_{4n+i} = a_i$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおき，

$$S_4 := \sum_{i=0}^3 a_i^4, \quad T_{3,1} := \sum_{i=0}^3 a_i^3(a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}), \quad S_{2,2} := \sum_{0 \leq i < j \leq 3} a_i^2 a_j^2$$

$$T_{2,1,1} := \sum_{i=0}^3 a_i^2(a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+1}a_{i+3} + a_{i+2}a_{i+3}), \quad U := a_0a_1a_2a_3$$

と置く．本項の主定理は次の定値である．

定理 6.7.5.

$$f = S_4 + pT_{3,1} + qS_{2,2} + rT_{2,1,1} - (4 + 12p + 6q + 12r)U \in \check{\mathcal{H}}_{4,4}^{s_0}$$

が任意の実数 a_0, a_1, a_2, a_3 に対して $f(a_0, a_1, a_2, a_3) \geq 0$ を満たすための必要十分条件は,

$$p + r \geq 0 \quad \text{かつ} \quad -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8 \geq 0$$

である. また, $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ の端元は, \mathfrak{g}_t ($t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$) または $S_{2,2} + 6U - T_{2,1,1}$ の正の定数倍である. ここで,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_t(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 3(S_4 - 4U) \\ &\quad - 2(t+1)(T_{3,1} - T_{2,1,1}) + (t^2 + 2t - 1)(S_{2,2} - 6U), \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_{\infty}(a_0, a_1, a_2, a_3) := S_{2,2} - 6U$$

である.

上の定理の証明は本項の最後で完結する. まず, $s_0 := S_4 - 4U$, $s_1 := T_{3,1} - 12U$, $s_2 := S_{2,2} - 6U$, $s_3 := T_{2,1,1} - 12U$ を $\mathcal{H}_{4,4}^{s_0}$ の基底として選び, $\Phi_4^{s_0}(a) = (s_0(a) : s_1(a) : s_2(a) : s_3(a))$ により $\Phi_4^{s_0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \cdots \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ を定める. $\text{Bs } \mathcal{H}_{4,4}^{s_0} = \{(1 : 1 : 1 : 1)\}$ なので $\Phi_4^{s_0} : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \cdots \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ は $\mathbf{1} := (1 : 1 : 1 : 1)$ で正則でないが, *bvf1* で連続写像であり, $\Phi_4^{s_0}(\mathbf{1}) = (2 : 3 : 1 : 1) =: P_1$ である. $X_4^{s_0} := \Phi_4^{s_0}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3)$ の構造を調べる. 点 $Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ における $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ の局所錐を $\mathcal{L}_Q^{s_0}$ と書く事にする.

補題 6.7.6. $\text{Zar}(\partial X_4^{s_0}) = V(G_5)$ である. ここで, G_5 は以下の多項式である.

$$\begin{aligned} G_5(x_0, x_1, x_2, x_3) &:= -3x_0x_1^4 + 4x_1^5 + 6x_0^2x_1^2x_2 - 24x_0x_1^3x_2 + 14x_1^4x_2 \\ &\quad - 3x_0^3x_2^2 + 20x_0^2x_1x_2^2 - 48x_0x_1^2x_2^2 + 16x_1^3x_2^2 + 34x_0^2x_2^3 + 16x_0x_1x_2^3 \\ &\quad + 8x_1^2x_2^3 + 44x_0x_2^4 - 48x_1x_2^4 - 72x_2^5 + 12x_0^2x_1^2x_3 + 12x_0x_1^3x_3 \\ &\quad - 36x_1^4x_3 - 12x_0^3x_2x_3 + 20x_0^2x_1x_2x_3 + 120x_0x_1^2x_2x_3 - 56x_1^3x_2x_3 \\ &\quad - 76x_0^2x_2^2x_3 - 32x_0x_1x_2^2x_3 - 64x_1^2x_2^2x_3 - 32x_0x_2^3x_3 + 112x_1x_2^3x_3 \\ &\quad + 144x_2^4x_3 - 12x_0^3x_3^2 - 40x_0^2x_1x_3^2 - 112x_1x_2^3x_3 + 144x_2^4x_3 - 12x_0^3x_3^2 \\ &\quad - 40x_0^2x_1x_3^2 - 18x_0x_1^2x_3^2 + 104x_1^3x_3^2 + 14x_0^2x_2x_3^2 - 104x_0x_1x_2x_3^2 \\ &\quad + 84x_1^2x_2x_3^2 + 64x_0x_2^2x_3^2 + 16x_1x_2^2x_3^2 - 152x_2^3x_3^2 + 28x_0^2x_3^3 \end{aligned}$$

$$+ 12x_0x_1x_3^3 - 136x_1^2x_3^3 + 8x_0x_2x_3^3 - 56x_1x_2x_3^3 + 32x_2^2x_3^3 \\ - 3x_0x_3^4 + 84x_1x_3^4 + 14x_2x_3^4 - 20x_3^5$$

証明. G_5 は既約多項式で,

$$G_5(s_0, s_1, s_2, s_3) = 16(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^4 \prod_{i < j} (a_i - a_j)^2 \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2$$

を満たす. よって, $\partial_a X_4^{s_0} = V(G_5) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ である. \square

双有理連続写像 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\Omega_4 \rightarrow X_4^{s_0}$ が存在するので, $C_1, L_1, L_2 \subset X_4^{s_0}$ を以下のように定める. まず,

$$G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_0 \\ C_1 := \{ \Phi_4^{s_0}(t : 1 : 1 : 1) \mid t \in \mathbb{R} \} \\ = \{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_2 = x_3, G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \} \\ L_1 := \{ \Phi_4^{s_0}(t : t : 1 : 1) \mid t \in \mathbb{R} \} \\ = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid \begin{array}{l} x_0 = 2x_2, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ (x_2/x_0) \geq 1/3 \end{array} \right\} \\ P_2 := (0 : 1 : 0 : 1) = (0 : -1 : 0 : -1) \\ = \lim_{u \rightarrow -\infty} (2 : u : 1 : u) = \Phi_4^{s_0}(-1 : -1 : 1 : 1)$$

と置く. L_1 は 2 点 P_1, P_2 を端点とする線分である. 最後に,

$$L_2 := \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid \begin{array}{l} x_0 = 2x_2, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ (x_2/x_0) \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

とおく. L_2 は P_2 と $(2 : -1 : 1 : 1)$ を端点とする線分であり, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 : (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ 内で $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$ で定義される平面の像になっている.

補題 6.7.7. $s_2 - s_3 \in \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0} \subset \mathcal{E}(C_1) \subset \partial \mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ である.

証明. $b_2 := \frac{1}{2}((a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2)$, $b_3 := a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2 + a_2^2 a_3 + a_2 a_3^2 + a_3^2 a_1 + a_3 a_1^2 - 6a_1 a_2 a_3$ とおく. すると,

$$s_2 - s_3 = b_2 \left(a_0 - \frac{b_3}{2b_2} \right)^2 + \frac{3(a_1 - a_2)^2 (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2}{4b_2} \geq 0$$

である. したがって, $s_2 - s_3 \in \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0}$ である. \square

上の補題は $X_4^{s_0}$ は $(x_2 - x_3)/x_0 \geq 0$ で定まる半空間の部分集合であることを意味する．ここで, $C_1 \subset X_4^{s_0}$ は平面 $x_2 - x_3 = 0$ 上の曲線であることに注意する．

補題 6.7.8. $X_4^{s_0}$ の凸包は以下の Y である．

$$Y := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) \leq 0, (x_2 - x_3)/x_0 \geq 0\}$$

証明. $E := V(G_2)$ とおく． $G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ のとき $x_0 = \frac{x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2}{3x_2}$ である．この x_0 を $G_5(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ に代入すると次を得る．

$$\begin{aligned} G_5\left(\frac{x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2}{3x_2}, x_1, x_2, x_3\right) \\ = -\frac{4(x_2 - x_3)^2(x_1 - 2x_2 - x_3)^2(x_1 + 2x_2 - x_3)^4}{9x_2^3} \end{aligned}$$

このことは $E \cap \partial X_4^{s_0} \subset C_1 \cup L_1 \cup L_2$ であることを意味する．前項のような $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3/\mathcal{G}_4$ の基本領域 $A_s \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ を取り, $\Phi_4^{s_0}$ の定義域を制限して $\varphi := \Phi_4^{s_0}|_{A_s} : A_s \rightarrow X_4^{s_0}$ とする．すると, $\varphi^{-1}(C_1) \subset \partial A_s$, $\varphi^{-1}(L_1) \subset \partial A_s$, $\varphi^{-1}(L_2) \subset \partial A_s$ である．このときは, $\partial X_4^{s_0}$ と E は C_1, L_1 あるいは L_2 において交わらないことを意味する． $X_4^{s_0} \cap \text{Int}(Y) \neq \emptyset$ なので, $X_4^{s_0} \subset Y$ であることがわかる． $C_1 \cup \{P_2\} \subset X_4^{s_0}$ であることに注意する． $C_1 \cup \{P_2\}$ の凸包は Y であるので, Y は $X_4^{s_0}$ の凸包である． \square

$\Delta^i(X_4^{s_0})$ を求めるのは易しくないが, $\Delta^i(Y)$ を求めるのは簡単であり, この問題では $\Delta^i(Y)$ のほうを利用して $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ を決定すればよい．つまり,

$$\partial \mathcal{P}_{4,4}^{s_0} = \cup \{\mathcal{E}(D) \mid D \in \Delta^i(Y) (0 \leq i \leq 3)\}$$

である．

補題 6.7.9. $\Delta^2(Y) = \{E_0, E_1\}$, $\Delta^1(Y) = \{C_1\}$, $\Delta^0(Y) = \{P_2\}$ である．ここで, E_1, E_2 は以下の半代数曲面である．

$$E_0 := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, (x_2 - x_3)/x_0 > 0\}$$

$$E_1 := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) < 0, x_2 = x_3\}$$

証明. Y は C_1 を底とし P_2 を頂点とする錐体の表面であった. \square

E_1 は平面上の領域であるので $\mathcal{E}(E_1)$ は $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ の面成分ではない. $E = \text{Zar}(E_0)$ は線織面であるので, $\mathcal{E}(E_2)$ も面成分ではない. したがって, 次が得られた.

補題 6.7.10. $\partial\mathcal{P}_{4,4}^{s_0} = \mathcal{E}(C_1) \cup \mathcal{E}(P_2)$.

$\mathcal{E}(C_1)$ を求めよう. 点 $P_t := \Phi_4^{s_0}(t : 1 : 1 : 1) \in C_1$ における E の接平面は

$$T_{E, P_t} := \{(x_0 : \cdots : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid 3x_0 - 2(t+1)(x_1 - x_3) + (t^2 + 2t - 1)x_2 = 0\}$$

である. 次に, 点 P_t における端元を求める.

$$\mathfrak{g}_t(a_0, a_1, a_2, a_3) := 3s_0 - 2(t+1)(s_1 - s_3) + (t^2 + 2t - 1)s_2,$$

$$\mathfrak{g}_{\infty}(a_0, a_1, a_2, a_3) := s_2$$

とおく. $\mathfrak{g}_t \in \text{Zar}(\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0})$ である. $\Phi_4^{s_0}(-1 : -1 : 1 : 1) = P_2$ なので $\mathfrak{g}_t(-1, -1, 1, 1) = 0$ である. \mathfrak{g}_1 に対応する平面 $3x_0 - 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ は, L_1 において $\partial X_4^{s_0}$ に接する. よって, 任意の $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ に対して $\mathfrak{g}_1(t : t : 1 : 1) = 0$ である. \mathfrak{g}_{-3} に対応する平面 $3x_0 + 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$ は, L_2 において $X_4^{s_0}$ に接する. よって, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$ のとき $\mathfrak{g}_{-3}(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = 0$ である. 任意の $P \in C_1$ に対して $\dim \mathcal{L}_P^{s_0} \leq 2$ であるので, 次の補題が得られる.

補題 6.7.11. $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ に対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_t + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

$$\mathcal{E}(C_1) = \bigcup_{t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1} \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0}$$

また, $f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 \in \check{\mathcal{H}}_{4,4}^{s_0}$ と表示するとき $\mathcal{E}(C_1)$ is の判別式は

$$\text{disc}_1(p, q, r) := -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8$$

である．よって， $\mathcal{E}(C_1)$ は以下のように表せる．

$$\mathcal{E}(C_1) = \left\{ \sum_{i=0}^3 p_i s_i \in \mathcal{H}_{4,4}^{s_0} \mid p_0^2 \operatorname{disc}_1 \left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \frac{p_3}{p_0} \right) \geq 0 \right\}$$

証明. モニックな $f \in \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0}$ は以下の形に書ける．

$$f = s_0 - \frac{2(t+1)}{3}(s_1 - s_3) + \frac{t^2 + 2t - 1}{3}s_2 + \alpha(s_2 - s_3)$$

$p = -2(t+1)/3$, $q = \alpha + (t^2 + 2t - 1)/3$, $r = -\alpha + 2(t+1)/3$ から t と α を消去すると $\operatorname{disc}_1(p, q, r) = 0$ が得られる． \square

定理 6.7.5 の証明. $\mathcal{E}(0 : -1 : 0 : -1)$ は $\{\mathfrak{g}_t \mid t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1\}$ で生成される閉凸錐である． $f = p_0 s_0 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 \in \mathcal{E}(P_2)$ を取る． $\operatorname{Zar}(\mathcal{E}(0 : -1 : 0 : -1))$ は $p_1 + p_3 = 0$ で定まる平面である．よって，

$$\mathcal{E}(P_2) = \left\{ \sum_{i=0}^3 p_i s_i \in \mathcal{H}_{4,4}^{s_0} \mid p_1 + p_3 = 0, -9p_1^2 + 12p_0 p_2 + 8p_0^2 \geq 0 \right\}$$

である．したがって， $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0}$ の端元は， \mathfrak{g}_t ($t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$) または $s_2 - s_3$ の正の定数倍である．

$f = s_0 + p s_1 + q s_2 + r s_3 \in \mathcal{H}_{4,4}^{s_0}$ とモニックな非斉次形に表すとき，任意の $a \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ に対し $f(a) \geq 0$ となるための必要十分条件は， $p + r \geq 0$ かつ $-9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8 \geq 0$ である． \square

6.7.3. $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の構造

$\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+, \mathcal{H}_{4,4}^{s_0})$ の構造を考察する．前項と同じ記号を用いる．本項の主定理は次の定理である．

定理 6.7.12. $\mathcal{H}_{4,4}^{s_0}$ 内のモニック多項式

$$f = S_4 + pT_{3,1} + qS_{2,2} + rT_{2,1,1} - (4 + 12p + 6q + 12r)U \in \mathcal{H}_{4,4}^{s_0}$$

について，任意の $a_0 \geq 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$ に対して $f(a_0, a_1, a_2, a_3) \geq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の「(1) または (2)」かつ「(3) または (4)」が成り立つことである．

- (1) $p \leq -4$ かつ $p^2 \leq 4q - 8$.
 (2) $p \geq -4$ かつ $2p + q + 2 \geq 0$.
 (3) $p \leq -2/3$ かつ $9p^2 \leq 12p + 12q + 12r + 8$.
 (4) $p \geq -2/3$ かつ $3q + 3r \geq 1$.

また, $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の端元は, f_t^{ab} ($0 \leq t \leq 5$), f_t^c ($t \geq 5$), $S_{2,2} + 6U - T_{2,1,1}$, $T_{3,1} - 2S_{2,2}$, または $T_{2,1,1} - 12U$ の正の定数倍である. ここで,

$$\begin{aligned} f_t^{ab}(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 3S_4 - 2(t+1)T_{3,1} + 2(2t-1)S_{2,2} \\ &\quad + (t^2+3)T_{2,1,1} - 12(t^2+1)U \\ f_t^c(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 9S_4 - 6(t+1)T_{3,1} + (t^2+2t+19)S_{2,2} \\ &\quad + 2(t^2+5t-8)T_{2,1,1} - 6(5t^2+10t-19)U \end{aligned}$$

である.

この定理の証明は本項の最後で完結する. $A := \mathbb{P}_+^3$ の座標系を $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ とし, $X_4^{s_0+} := \Phi_4^{s_0}(\mathbb{P}_+^3)$ とおく. 実は, $X_4^{s_0+}$ の構造は結構複雑で記述も複雑になる. ただ, 幸いにも最終的な結果は上の定理のように簡明になる. $\mathcal{H}_{4,4}^{s_0}$ の基底 s_0, s_1, s_2, s_3 は前項と同じとする. $\Delta(X_4^{s_0+})$ を記述するために,

$$\begin{aligned} P_3 &:= (1 : 2 : 1 : 1) = \Phi_4^{s_0}(0 : 1 : 1 : 1) \\ P_4 &:= (2 : 2 : 1 : 0) = \Phi_4^{s_0}(0 : 0 : 1 : 1) \\ P_5 &:= (1 : 0 : 0 : 0) = \Phi_4^{s_0}(0 : 0 : 0 : 1) \\ C_1 &:= \{\Phi_4^{s_0}(t, 1, 1, 1) \mid t > 0\} \\ C_3 &:= \{\Phi_4^{s_0}(0, t, 1, 1) \mid 0 < t < 1 \text{ or } t > 1\} \\ C_4 &:= \{\Phi_4^{s_0}(0, 0, t, 1) \mid 0 < t < 1\} \\ (P_i P_j) &:= \{tP_i + (1-t)P_j \mid 0 < t < 1\} \end{aligned}$$

とおく. 添え字は 6.7.1 項の記号に対応している. さらに, C_1 を $0 < t < 1$, $1 < t < 5$, $5 < t$ の 3 つの开区間に分割して順に C_1^a, C_1^b, C_1^c と書く. また, $C_1^{ab} = C_1^a \cup \{\Phi_4^{s_0}(1 : 1 : 1 : 1)\} \cup C_1^b$ とおく. 一般に (PQ) は開線分 PQ を表わし, 閉線分は $[PQ] = (PQ) \cup \{P, Q\}$ で表す. 単に PQ と書いたら直線 PQ を表すものとする.

補題 6.7.13. 上で定義した C_1, C_3, C_4 に対して以下が成り立つ .

(1) $Zar(C_1)$ は平面 $V(x_2 - x_3)$ 上で以下の方程式で定まる 2 次曲線である .

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_0x_2 + 3x_2^2 = 0$$

特に, $Zar(C_1)$ は非特異である . また, C_1 の端点は $\Phi_4^{s_0}(0 : 1 : 1 : 1) = P_3$ と $\Phi_4^{s_0}(\infty : 1 : 1 : 1) = P_5$ である .

(2) $Zar(C_3)$ の特異点は $\Phi_4^{s_0}(0, 1, 1, 1) = P_3$ のみである . また, C_3 の端点は $\Phi_4^{s_0}(0 : 0 : 1 : 1) = P_4$ と $\Phi_4^{s_0}(0 : \infty : 1 : 1) = P_5$ である .

(3) $Zar(C_4)$ は平面 $V(x_3)$ 上で以下の方程式で定まる 2 次曲線である .

$$x_1^2 - 2x_2^2 - x_0x_2 = 0$$

また, C_4 の端点は $\Phi_4^{s_0}(0 : 0 : 1 : 1) = P_4$ と $\Phi_4^{s_0}(0 : 0 : 1 : 0) = P_5$ である .

証明. C_i の定義から消去法を実行すればすぐわかる . □

補題 6.7.14. 今までの記号に加えて ,

$$G_3(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)(x_0 + 2x_2)$$

$$G_4(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_3)^2 - (x_0 - x_3)^2 + (x_0 - 2x_2 + x_3)^2$$

$$D := \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid G_3(x) = 0 \text{ and } G_4(x) \leq 0\}$$

とおく . すると, $\partial X_4^{s_0+} \subset D \cup V(G_5)$ である .

証明. 以下の半代数曲面を考える .

$$\overline{D}_1 := \{\Phi_4^{s_0}(a : b : 1 : 1) \mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

$$D_\infty := \{\Phi_4^{s_0}(0 : a : b : 1) \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$$

とおく . $\overline{D}_1 \subset V(G_5)$ である . $G_3(\Phi(0 : a : b : 1)) = 0$ なので, $D_\infty \subset V(G_3)$ である .

$$G_4(\Phi(0, a, b, c)) = -3(a - b)^2(a - c)^2(b - c)^2(a + b + c)^2 \leq 0$$

であるので, $\overline{D}_1 \subset D$ である . 第 1 項のような基本領域 A_s^+ を取る .

$\Phi_4^{s_0} : \text{Int}(A_s^+) \longrightarrow \text{Int}(X_4^{s_0+})$ は同型写像であるので ,

$$\partial X_4^{s_0+} = \Phi_4^{s_0}(\partial A_s^+) = \overline{D}_1 \cup D_\infty \subset D \cup V(G_5)$$

であることがわかる . □

補題 6.7.15. 実数 $0 \leq u \leq 1$ に対して $R_u := \Phi_4^{s_0}(0:0:u:1) \in \overline{C_4}$ とおく. さらに,

$$P_6 := \Phi_4^{s_0}(5:1:1:1) = (38:21:3:3)$$

$$t_1(u) := (3u^2 - u + 3)/u$$

$$F_4 := \bigcup_{0 < u < 1} (Q(t_1(u))R_u)$$

$$f_4(x_0, x_1, x_2, x_3) := 3x_0x_2 - 3x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_0x_3 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - 19x_3^2$$

とおく. このとき以下が成り立つ.

- (1) $F_4 \subset V(f_4)$.
- (2) $V(f_4)$ は点 $P_7 := (20:3:-6:3)$ を頂点とする 2 次曲線の上の錐である.
- (3) $x \in X_4^{s_0+}$ ならば $f_4(x) \geq 0$ である.
- (4) F_4 は 2 次曲面 $V(f_4)$ 上の半代数的集合で, $\partial F_4 = \overline{C_4} \cup \overline{C_1^c} \cup [P_4P_6]$ である.
- (5) $V(f_4) \cap X_4^{s_0+} = C_1 \cup C_4 \cup \{P_3, P_4, P_5\}$.

証明. (1) と (2) は次の関係式と, 3 点 $Q(t_1(u)), R_u, P_7$ が同一直線上にあることからわかる.

$$f_4(\Phi_4^{s_0}(t, 1, 1, 1) + vP_7) = 0, \quad f_4(\Phi_4^{s_0}(0, 0, u, 1) + vP_7) = 0$$

(3) 今,

$$g(a_0, a_1, a_2, a_3) := 2a_2(3a_0 + a_3)(a_0 - a_1)^2(a_0 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2 + \frac{20}{3}a_3^2(a_0 - a_1)^2(a_0 - a_2)^2(a_1 - a_2)^2.$$

とおくと, $f_4(s_0, s_1, s_2, s_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} g(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \geq 0$ である.

(4) と (5) は上の事実から導かれる. □

補題 6.7.16. $t \geq 0$ に対して $Q(t) := \Phi_4^{s_0}(t:1:1:1) \in \overline{C_1}$ とおく. さらに,

$$(Q(t)P_4) := \{uQ(t) + (1-u)P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid 0 < u < 1\}$$

$$F_5^a := \bigcup_{0 < t < 1} (Q(t)P_4) \quad F_5^b := \bigcup_{1 < t < 5} (Q(t)P_4) \quad F_5 := F_5^a \cup (P_1P_4) \cup F_5^b$$

$$f_5(x_0, x_1, x_2, x_3) := 3x_0x_3 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

とおく . このとき以下が成り立つ .

- (1) $F_5 \subset V(f_5)$.
- (2) $(P_1P_4) \subset \partial X_4^{s0+}$.
- (3) 任意の $t \in [0, 1) \cup (1, 5]$ に対して $Q(t)P_4 \cap \partial X_4^{s0+} = \phi$.
- (4) $F_5^a \cap X_4^{s0+} = \phi$.
- (5) $F_5^b \cap X_4^{s0+} = \phi$.
- (6) $\partial F_5 = C_1^{ab} \cup [Q(0)P_4] \cup [Q(5)P_4]$.

証明. (1) は $f_5(vQ(t) + (1-v)P_4) = 0$ からわかる .

(2) $(P_1P_4) = \{\Phi_4^{s0}(v : v : 1 : 1) \mid 0 < v < 1\}$ なので , $(P_1P_2) \subset \partial X_4^{s0+}$ である .

(3) $V(f_2)$ は P_4 を頂点とし 2 次曲線を底とする錐である . また , 開線分 $(Q(t)P_4)$ は 2 次曲面 $V(f_2)$ 上にある . 数式処理ソフトで計算すると

$$G_5(vQ(t) + (1-v)P_4) = -(t-1)^6(1-v)^2v^2(v\alpha(t) + 16(9-t)(3+5t))$$

が得られる . ここで $\alpha(t) := 243 - 402t - 1603t^2 - 252t^3 + 1101t^4 - 114t^5 + 3t^6$ である . $\beta(t) := -16(9-t)(3+5t)/\alpha(t)$ とおく . $1 - \beta(t) = \frac{3(t-1)^2(t^2 - 18t - 15)^2}{\alpha(t)}$ なので , $\alpha(t) > 0$ かつ $0 \leq t \leq 5$ ならば $\beta(t) \geq 1$

であり , $\alpha(t) < 0$ かつ $0 \leq t \leq 5$ ならば $\beta(t) \leq 0$ である . これより , $t \in [0, 1) \cup (1, 5]$ ならば $(Q(t)P_4) \cap V(G_5) = \phi$ である .

$$G_3(vQ(t) + (1-v)P_4) = -(1-t)^3v((9-t) + v(-9 - 35t + 36t^2))$$

なので , 開線分 $(Q(t)P_4)$ と $V(G_4)$ は $v = (t-9)/(36t^2 - 35t - 9)$ のとき交わる . この交点を Q'_t と置く . また , $v_0(t) := (t-9)/(36t^2 - 35t - 9)$,

$$f(v, t) := G_4(vQ(t) + (1-v)P_4) = t(1-t)^3v(4(1-v) + 9tv(1-t))$$

と置く . すると ,

$$f(t, v_0(t)) = \frac{9(25-t)(9-t)(1-t)^4t^2}{(36t^2 - 35t - 9)^2} > 0$$

であるので , $t \in [0, 1) \cup (1, 5]$ のとき $Q'_t \notin D$ であることがわかる . したがって , $Q(t)P_4 \cap \partial X_4^{s0+} = \phi$ である .

(4) (2) より $F_5^a \cap X_4^{s_0^+} = \phi$ または $F_5^a \subset X_4^{s_0^+}$ である. $0 < t < 1$ のとき $0 < v_0(t) < 1$, $Q'_t \in (Q(t)P_4)$ である. $Q'_t \notin X_4^{s_0^+}$ なので $F_5^a \cap X_4^{s_0^+} = \phi$ である.

(5) 前補題より $(Q(5)P_4) \cap X_4^{s_0^+} = \phi$ であるので. $F_5^b \cap X_4^{s_0^+} = \phi$ である.

(6) は自明. □

補題 6.7.17. Y^+ は $X_4^{s_0^+} \subset \mathbb{P}_+^3$ の凸包とする. このとき, $\Delta^0(Y^+) = \{P_3, P_4, P_5\}$, $\Delta^1(Y^+) = \{C_1, C_4, (P_3P_4), (P_4P_5), (P_5P_3)\}$, $\Delta^2(Y^+) = \{F_1, \dots, F_5\}$ である. ここで, F_1, F_2, F_3 は以下のように定義される.

- (1) F_1 は平面 $V(x_3)$ 上で線分 $[P_4P_5]$ と弧 $\overline{C_4}$ で囲まれる半代数的開集合である. また, Y^+ は $x_3 \geq 0$ で定まる半空間に含まれる.
- (2) F_2 は平面 $V(x_2 - x_3)$ 上で線分 $[P_3P_5]$ と弧 $\overline{C_1}$ で囲まれる半代数的開集合である. また, Y^+ は $x_2 \geq x_3$ で定まる半空間に含まれる.
- (3) F_3 は平面 $V(x_1 - 2x_2)$ 上で 3 本の線分 $[P_3P_4]$, $[P_4P_5]$, $[P_5P_3]$ で囲まれる三角形の内部である. また, Y^+ は $x_1 \geq 2x_2$ で定まる半空間に含まれる.

証明. 任意の $a \in \mathbb{P}_+^3$ に対し $s_3(a) \geq 0$ であり, $P_4, P_5 \in Y^+ \cap V(x_3)$ なので, Y^+ のいずれかの面成分 (それを F'_1 とおく) は $\text{Zar}(F'_1) = V(x_3)$ を満たす. 任意の $a \in \mathbb{P}_+^3$ に対して $s_2(a) \geq s_3(a)$ であり, $P_3, P_5 \in Y^+ \cap V(x_2 - x_3)$ であるので Y^+ のいずれかの面成分 (それを F'_2 とおく) は $\text{Zar}(F'_2) = V(x_2 - x_3)$ を満たす. $a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{P}_+^3$ に対し,

$$s_1(a) - 2s_2(a) = \sum_{i < j} a_i a_j (a_i - a_j)^2 \geq 0$$

である. また, $P_3, P_4, P_5 \in Y^+ \cap V(x_1 - 2x_2)$ である. したがって, Y^+ のいずれかの面成分 (それを F'_3 とおく) は $\text{Zar}(F'_3) = V(x_1 - 2x_2)$ を満たす. $V(x_1 - 2x_2) \cap V(x_3) = P_4P_5$, $V(x_1 - 2x_2) \cap V(x_2 - x_3) = P_3P_5$ であることに注意しよう. 前補題より, $F'_3 = F_3$ でなければならない. すると, $F'_2 = F_2$, $F'_1 = F_1$ もわかる. □

$\Delta(Y^+)$ は 13 個の元から成るが, その 13 個の $D \in \Delta(Y^+)$ に対して $\mathcal{E}(D)$ を求める必要がある. 以下, その作業が延々と続く. まず, F_4 と F_5 の端元を調べる.

補題 6.7.18. $a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}_+^3$ に対して

$$f_t^{ab}(a) := 3s_0(a) - 2(t+1)s_1(a) + 2(2t-1)s_2(a) + (t^2+3)s_3(a)$$

$$f_t^c(a) := 9s_0(a) - 6(t+1)s_1(a) + (t^2+2t+19)s_2(a) + 2(t^2+5t-8)s_3(a)$$

$$g_u^c(a) := 3u^2s_0(a) - 6u(u^2+1)s_1(a) + 3(u^4+4u^2+1)s_2(a) + 2(3u^4+3u^3+2u^2+3u+3)s_3(a)$$

とおく. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $0 \leq t \leq 5$, $a \in \mathbb{P}_+^3$ に対し $f_t^{ab}(a) \geq 0$ である.
- (2) $t \geq 5$, $a \in \mathbb{P}_+^3$ に対し $f_t^c(a) \geq 0$ である.
- (3) $0 \leq u \leq 1$, $a \in \mathbb{P}_+^3$ に対し $g_u^c(a) \geq 0$ である.
- (4) $t_1(u) := (3u^2 - u + 3)/u$ とおく. すると $3g_u^c(a) = u^2 f_{t_1(u)}^c(a)$ である.
- (5) $f_t^{ab}(t, 1, 1, 1) = 0$, $f_t^{ab}(0, 0, 1, 1) = 0$, $f_t^c(t, 1, 1, 1) = 0$, $g_u^c(0, 0, u, 1) = 0$ が成り立つ.

証明. (1), (2), (3) 公式.1.25 のアルゴリズムで計算すると,

$$T_{\text{Zar}(F_5), Q(t)} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^{ab} \quad (0 \leq t \leq 5 \text{ のとき})$$

$$T_{\text{Zar}(F_4), Q(t)} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^c \quad (t \geq 5 \text{ のとき})$$

$$T_{\text{Zar}(F_4), R_u} = \mathbb{R}_+ \cdot g_u^c \quad (0 \leq u \leq 1 \text{ のとき})$$

が得られる.

(4), (5) は直接計算するだけ. □

$f_t^c = 3f_t^{ab} + (t-5)^2(s_2 - s_3)$, $f_5^c = 3f_5^{ab} = 3(3s_0 - 12s_1 + 18s_2 + 28s_3)$ という関係式があることに注意する. 上の議論から,

$$\mathcal{E}(F_1) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3, \quad \mathcal{E}(F_2) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3), \quad \mathcal{E}(F_3) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$$

であることがわかる. $\mathcal{E}(F_4) = \overline{\bigcup_{0 < t < 5} \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0+}}$, $\mathcal{E}(F_5) = \overline{\bigcup_{t > 5} \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0+}}$ であるので, 次の補題が得られる.

補題 6.7.19. $0 < t \leq 5$ のとき, $P = \Phi_4^{s_0}(t : 1 : 1 : 1) \in C_1$ とおけば,

$$\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0^+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

である. また, $t \geq 5$ のときは,

$$\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0^+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^c + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

である.

証明. $t > 0$ に対して $P = \Phi_4^{s_0}(t : 1 : 1 : 1) \in C_1$ と置く. $t \geq 5$ のときは $\overline{F_2}$ と $\overline{F_4}$ は点 P で接する. よって, $\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0^+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^c + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$ である. $0 < t \leq 5$ のときは, $\overline{F_2}$ と $\overline{F_5}$ が点 P で接する. よって, $\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0^+} = \mathbb{R}_+ \cdot f_t^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$ である. \square

注意 6.7.20. (1) $0 < t < 1$ または $1 < t$ のとき, $\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0} \subsetneq \mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s_0^+}$ である.

(2) $\Delta^2(Y^+)$ の 5 個の元 F_i ($i = 1, \dots, 5$) に対しては, どの $\mathcal{E}(F_i)$ も $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0^+}$ の面成分ではないことがわかった.

補題 6.7.21. $\Delta^1(Y^+)$ の 5 個の元については以下が成り立つ.

- (1) $\mathcal{E}((P_4P_5)) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり, これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0^+}$ の面成分ではない.
- (2) $\mathcal{E}((P_3P_5)) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり, これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0^+}$ の面成分ではない.
- (3) $\mathcal{E}((P_3P_4)) = \mathbb{R}_+ \cdot f_0^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$ であり, これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0^+}$ の面成分ではない.
- (4) $\mathcal{E}(C_4) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leq u \leq 1} \mathbb{R}_+ \cdot g_u^c$ であり. これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0^+}$ の面成分である.

. $f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 \in \check{\mathcal{H}}_{4,4}^{s_0}$ と表示するとき $\mathcal{E}(C_4)$ の判別式は以下の通りである.

$$\text{disc}_{C_4}(p, q, r) := -p^2 + 4q - 8, \quad (p \leq -4)$$

(5) $\mathcal{E}(C_1) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \left(\bigcup_{0 \leq t \leq 5} \mathbb{R}_+ \cdot f_t^{ab} \cup \bigcup_{5 \leq t \leq \infty} \mathbb{R}_+ \cdot f_t^c \right)$ であり, こ

れは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の面成分である. $\mathcal{E}(C_1)$ の判別式は以下の通りである.

$$\text{disc}_{C_1}(p, q, r) := -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8, \quad (p \leq -2/3)$$

証明. (1) $\overline{F_1}$ と $\overline{F_3}$ は開線分 (P_4P_5) で接するので, $\mathcal{E}((P_4P_5)) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ である.

(2), (3) も (1) と同様にしてわかる.

(4) 前補題より, $\mathcal{E}(C_4) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leq u \leq 1} \mathbb{R}_+ \cdot g_u^c$ がわかる.

$$p = -6u(u^2 + 1)/(3u^2), \quad q = (u^4 + 4u^2 + 1)/u^2, \\ r = 2(3u^4 + 3u^3 + 2u^2 + 3u + 3)/(3u^2) + v$$

から u, v を消去すると $\text{disc}_{C_4}(p, q, r) = 0$ が得られる. ここで, $0 < u \leq 1$ のとき $p = -6u(u^2 + 1)/(3u^2) \leq -4$ である.

(5) も (4) と同様にして証明できる. □

補題 6.7.22. $\Delta^0(Y^+)$ の 3 個の元については以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{E}(P_5) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり, これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の面成分であり, 無限遠平面上にある.

(2) $\mathcal{E}(P_3) = \mathbb{R}_+ \cdot f_0^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$ であり, これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の面成分で, 平面 $V(2p + q + r + 1)$ 上の領域である.

(3) $\mathcal{E}(P_4) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leq t \leq 5} \mathbb{R}_+ \cdot f_t^{ab}$ であり. これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の面成分で, 平面 $V(2p + q + 2)$ 上の領域である.

証明. 簡単に証明できる. □

結局 $\Delta(Y^+)$ の元 D の中で $\mathcal{E}(D)$ が $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の面成分になるものは, $D = C_1, C_4, P_3, P_4, P_5$ の 5 個であり,

$$\partial \mathcal{P}_{4,4}^{s_0+} = \mathcal{E}(C_1) \cup \mathcal{E}(C_4) \cup \mathcal{E}(P_3) \cup \mathcal{E}(P_4) \cup \mathcal{E}(P_5)$$

であることがわかった.

補題 6.7.23. $t \geq 5, 0 \leq u \leq 1$ のとき, f_t^c と g_u^c は $\mathcal{E}(F_4)$ に属する $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の単元である. $0 \leq t \leq 5$ のとき f_t^{ab} は $\mathcal{E}(F_5)$ に属する $\mathcal{S}_{4,4}^{s_0+}$ の単元である. また, $s_2 - s_3, s_1 - 2s_2, s_3$ も $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の単元である. $\mathcal{P}_{4,4}^{s_0+}$ の単元は, 以上に述べた 5 種類の正の定数倍以外には存在しない.

証明. ここまでに述べた通りである. □

定理 6.7.12 の証明は, ちょっと議論の流れが分かりにくかったかもしれないが, 以上で完了している. □