不等式正誤表

(2020 年 7 月 12 日版)

★ 前半に誤りや誤植の修正のみを列挙し，後半に改良できる結果を紹介します.

● 目次

目次のページ番号の中で，以下の 9 個のページ番号が間違っていて，正しいページ番号より 1 だけ小さい値になっていました.

● p.2, 系 1.1.2 行目

誤: $\geqq \dfrac{na_1a_2\cdots a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$

正: $\geqq \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$

● p.6, 定理 1.1.5 の 4 行目

修正前: が成り立つ.

修正後: が成り立つ．ただし，$s_0 = 1$ とする.

● p.6, 下から 2 行目

誤: $+i!(n-i)!s_i xy + \dfrac{(i+1)!}{2} \cdot (n-i-1)! y^2$

正: $+i!(n-i)!s_i xy + \dfrac{(i+1)!}{2} \cdot (n-i-1)! s_{i+1} y^2$

● p.7, 3 行目

誤: $\dfrac{(n!)^2}{4} D =$

正: $\dfrac{D}{(n!)^2} =$

● p.7, 下から 4 行目

誤: 狭義単調減

正: 狭義単調減少

● p.7, 下から 3 行目と下から 2 行目

誤: よって定議され，**広義単調減少** (2) で「$f(a) \leqq f(b)$」を「$f(a) \geqq f(b)$」に変更することによって定議される．

正: よって定義され，**広義単調減少**は (2) で「$f(a) \leqq f(b)$」を「$f(a) \geqq f(b)$」に変更することによって定義される．

● p.11, 定理 1.2.7

補足説明. 本書の証明では $f(x)$ が I で C^1 級 (少なくとも 1 回微分可能) であることを用いているが，実際には，$f(x)$ は下の広義凸であれば，連続である必要もない．以下，$f(x)$ の連続性を仮定しない証明を書いておく．

証明. n に関する帰納法で証明する．

(I) $n=2$ の場合．$a_2 \leqq b_2 \leqq b_1 \leqq a_1$ である．$a_1 > a_2$ の場合に証明すれば十分である．$a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ に注意して $s := \dfrac{b_1 - a_2}{a_1 - a_2} = \dfrac{a_1 - b_2}{a_1 - a_2} \geqq 0$ とおけば，$b_1 = sa_1 + (1-s)a_2$, $b_2 = (1-s)a_1 + sa_2$ である．$f(x)$ は下に

凸だから

$$\begin{aligned} sf(a_1)+(1-s)f(a_2) &\geqq f\bigl(sa_1+(1-s)a_2\bigr)=f(b_1) \\ (1-s)f(a_1)+sf(a_2) &\geqq f\bigl((1-s)a_1+sa_2\bigr)=f(b_2) \end{aligned}$$

であり，この 2 式を辺々加えて，$f(a_1)+f(a_2) \geqq f(b_1)+g(b_2)$ を得る．

(II) $n \geqq 3$ の場合．$t := b_n - a_n = (a_1+\cdots+a_{n-1})-(b_1+\cdots+b_{n-1}) \geqq 0$ とおき，$b_1, b_2,\ldots, b_{n-2}, t+b_{n-1}$ を降順に並べ変えたものを $b'_1,\ldots, b'_{n-1}$ とおく．$(a_1,\ldots,a_{n-1}) \succeq (b_1,\ldots,b_{n-2},b'_{n-1})$ が成立することは容易に確認できる．帰納法の仮定から，

$$f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1}) \geqq f(b'_1)+\cdots+f(b'_{n-1}) \qquad ①$$

が成り立つ．また，$(a_{n-1}, a_n) \succeq (t+b_{n-1}, b_n)$ なので，$f(a_{n-1})+f(a_n) \geqq f(t+b_{n-1})+f(b_n)$ である．これと ① を組み合わせると，$f(a_1)+\cdots+f(a_n) \geqq f(b_1)+\cdots+f(b_n)$ が得られる．

● p.11, 定理 1.2.8. の証明の 7 行目

誤: $p_k \geqq q_l$, $p_k \geqq p_l$ より，

正: $p_k \geqq q_k \geqq q_l \geqq p_l$ より，

証明を補足しておくと，以下の通りです．

$$\alpha = \frac{p_k q_k - p_l q_l}{p_k^2 - p_l^2} = \frac{q_k(p_k-p_l)+p_l(q_k-q_l)}{p_k^2-p_l^2} \geqq 0$$

$$\beta = \frac{p_k q_l - p_l q_k}{p_k^2 - p_l^2} = \frac{p_k(q_l-p_l)+p_l(p_k-q_k)}{p_k^2-p_l^2} \geqq 0$$

● p.13, 1 行目

誤: $= \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left(\alpha x_{\sigma(k)}^{p_k} x_{\sigma(l)}^{p_l} + \beta x_{\sigma(l)}^{p_l} x_{\sigma(k)}^{p_k}\right) X_\sigma$

正: $= \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left(\alpha x_{\sigma(k)}^{p_k} x_{\sigma(l)}^{p_l} + \beta x_{\sigma(l)}^{p_k} x_{\sigma(k)}^{p_l}\right) X_\sigma$

● p.13, 3 行目 (このままでも間違いではありませんが)

誤: $\geqq \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(x_{\sigma(k)}^{q_k}x_{\sigma(l)}^{q_l}\right)X_\sigma$

正: $= \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\left(x_{\sigma(k)}^{q_k}x_{\sigma(l)}^{q_l}\right)X_\sigma$

● p.13, 13 行目

誤: $n \geqq 3$ とし，$\mathfrak{I}_n^{n-1}$ では列 ① が存在すると仮定する.

正: $n \geqq 3$ とし，$\mathfrak{I}_d^{n-1}$ では列 ① が存在すると仮定する.

● p.13, 15 行目

誤: $\mathfrak{I}_d^{n-1}$ の元として考えれば,

正: $\mathfrak{I}_{d-p_1}^{n-1}$ の元として考えれば,

● p.13, 下から 3 行目

誤: $\mathbf{p}_{r+1} := (q_1, p_2+m_2, , \ldots, p_r+m_r, p_{r+1}+p_1-q_1, p_{r+2}, \ldots, p_n)$

正: $\mathbf{p}_{r+1} := (q_1, p_2+m_2, , \ldots, p_r+m_r, p_{r+1}+p_1-q_1-(m_1+\cdots+m_r), p_{r+2}, \ldots, p_n)$

● p.13, 下から 2 行目

誤: $\vdash_{1,3} \mathbf{p}_2 \vdash_{1,4}$

正: $\vdash_{1,3} \mathbf{p}_3 \vdash_{1,4}$

● p.14, 定理 1.3.1 の 7 行目

誤: である.

正: である．ただし，$(a_1,\ldots,a_n) \neq (0,\ldots,0)$, $(b_1,\ldots,b_n) \neq (0,\ldots,0)$ とする.

● p.19, 定理 1.3.6 の 6 行目

誤: $M_s < M_t$

正: $M_s \leqq M_t$

● p.19, 定理 1.3.6 の 13 行目

誤: $W_s < W_t$

正: $W_s \leqq W_t$

● p.26, 命題 2.1.1 の (2)

誤: (2) $3S_4 \geqq T_{3,1} \geqq 2S_{2,2} \geqq 2US_1$

正: (2) $2S_4 \geqq T_{3,1} \geqq 2S_{2,2} \geqq 2US_1$

● p.30, 4 行目 (例題 2.1.5(1) の解答)

誤: (1) $S_4 + 2S_{2,2} - 3US_1 = (S_4 - US_1) + (2S_{2,2} - 2US_1)$.

正: (1) $S_{2,2} - US_1$.

● p.30, 定理 2.1.6 の 7 行目

誤: m, r がともに偶数のとき (3) は

正: n, r がともに偶数のとき (3) は

● p.32, 下から 11 行目 (系 2.1.7 $(2')$)

誤: $(2')$ $S_4 \geqq S_{3,1}$, $S_{2,2} \geqq US_3$

正: $(2')$ $S_4 \geqq S_{3,1}$, $S_{2,2} \geqq US_1$

● p.35, 1 行目 (例題 2.1.10(2))

誤: $(a^3+b^3+c^3)^4 \geqq (a^4+b^4+c^4)^3$

正: $(a^3+b^3+c^3)^4 \geqq 3(a^4+b^4+c^4)^3$

(不等式自体はウソではありませんが)

● p.35, 4 行目 (例題 2.1.10(4))

誤: $\geqq (a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3$

正: $\geqq 27(a+b)^3(b+c)^3(c+a)^3$

(不等式自体はウソではありませんが)

● p.35, 下から 6 行目 (例題 2.1.10 解答 (4) の 2 行目)

誤: $4(3a^3+2b^2+c^3)$

正: $4(3a^3+2b^3+c^3)$

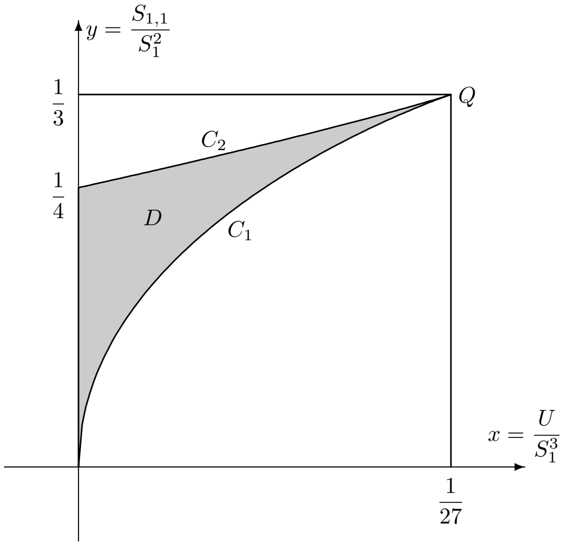
● p.37, 5 行目 (例題 2.1.11 解答 (4) の 4 行目)

誤: $=(x^2+y^x+z^2)+$

正: $=(x^2+y^2+z^2)+$

● p.42, グラフ

グラグ中の P は Q の誤りです．以下のグラフと差し替えて下さい．



● p.43, 下から 5 行目 (補題 2.2.2 の証明の 1 行目)

誤: 前定理の ① を書き換えると,

正: $p = S_1$, $q = S_{1,1}$, $r = U$ として前定理の ① を書き換えると,

● p.55, 2 行目 (補定理 2.2.11 の 2 行目)

誤: $\big(\mathbb{R}_+\ddot{U} + (\mathfrak{C}_3^+)^b\big)$

正: $\big(\mathbb{R}_+ \cdot U + (\mathfrak{C}_3^+)^b\big)$

● p.57, 下から 3 行目

誤: xyz の最小値を $r_1 = \alpha_1\beta^2$,

正: xyz の最小値を $r_1 = \alpha_1\beta_2^2$,

● p.69, 下から 5 行目

誤: $2q + r + 2 = (-p + \beta)+$

正: $2q + r + 2 = 2(-p + \beta)+$

● p.70. 3 行目. 定理 2.3.8(1) の 3 行目.

誤: $k^2S_4 - 2kT_{3,1} + (2k^2 + 1)S_{2,2} - (k - 2)US_1$

正: $k^2S_4 - 2kT_{3,1} + (2k^2 + 1)S_{2,2} - (2k - 2)US_1$

● p.70. 4 行目. 定理 2.3.8(1) の 4 行目.

誤: $-1/2 \leqq k < 1$

正: $-1/2 \leqq k \leqq 1$

● p.70. 8 行目. 定理 2.3.8(1) の 8 行目. 以下の行を削除して下さい.

$L_{0,0} := \big\{\alpha\mathfrak{g}_{2,2} + \beta\mathfrak{l}_0 \;\big|\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_+\big\}$

● p.70. 9 行目. 定理 2.3.8(1) の 9 行目.

誤: $L_\infty := \left\{\alpha\mathfrak{g}_\infty + \beta\mathfrak{l}_0 \,\middle|\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_+\right\}$
正: $L_\infty := \left\{\alpha\mathfrak{g}_{2,2} + \beta\mathfrak{l}_0 \,\middle|\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}_+\right\}$

● p.70 の下から 2 行目型〜 p.71 の 10 行目．定理 2.3.8(1) の証明全部．

この定理 2.3.8(1) の証明は，直感に頼った不十分な点があり，厳密性に欠けるようです．正しい証明は，実代数幾何を利用した，もっと難しい証明で，後で体系立てて説明します．

● p.72．下から 10 行目．
誤: $0 = f(0) < f(\sqrt{3}\,) = 6(p+q) - (p^2+pq+q^2) - 15$
正: $0 = \varphi(0) < \varphi(\sqrt{3}\,) = 6(p+q) - (p^2+pq+q^2) - 15$

● p.73．3 行目．
誤: $\varphi_0(x_0) = 0$
正: $\varphi(x_0) = 0$

● p.75 〜 76, 例題 2.3.11

まず，例題 2.3.11(3) は間違いでした．以下のように訂正して下さい．

例題 2.3.11. (3) $S_4 + \beta S_{2,2} \geqq (\beta+1)S_{3,1}$ を満たす β は存在しない．

なお，例題 2.3.11 の解答を下記と差し替えて下さい．

解答. (1) $s = \sqrt[4]{3}$ として，$S_4 + \left(\dfrac{4\sqrt[4]{3}}{3} - 1\right)US_1 - \dfrac{4\sqrt[4]{3}}{3}S_{3,1} = \mathfrak{g}^A_{0,s} + \dfrac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{27}}{3}\mathfrak{h}_s \geqq 0$ である．

(2) $S_4 - (p+1)S_{3,1} + pS_{1,3} = \mathfrak{g}^A_{0,s} + q\mathfrak{h}_s$ が成立するような $(s,\, p,\, q)$ を求める．両辺の $S_{3,1},\, S_{1,3},\, S_{2,2}$ の係数に注目すると，連立方程式

$$-(p+1) = \frac{1-2s^2}{s} + q$$
$$p = \frac{s^2-2}{s} + s^2 q$$

$$0 = \frac{(s^2-1)^2}{s^2} - 2sq$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると，$q>0$ であるものは，$(s,\ p,\ q)\ \fallingdotseq (1.659046320,\ 1.379074434,\ 0.3362622802)$, $(0.6027559256, -2.379074434, 0.9255399651)$ の 2 つだけである．なお，後者は $S_4+\alpha S_{3,1} \geqq (\alpha+1)S_{1,3}$ を与える．また，連立方程式から p, q を消去すると s の 6 次方程式が得られる．

(3) $S_4 - p + 1S_{3,1} + pS_{2,2} = \mathfrak{g}^A_{0,s} + q\mathfrak{h}_s$ が成立するような (s, p, q) を求める．両辺の $S_{3,1}$, $S_{1,3}$, $S_{2,2}$ の係数に注目すると，連立方程式

$$-(p+1) = \frac{1-2s^2}{s} + q$$
$$0 = \frac{s^2-2}{s} + s^2q$$
$$p = \frac{(s^2-1)^2}{s^2} - 2sq$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると，$s \geqq 0$, $q>0$ であるような解は存在しないことがわかる．

(4) $S_4 + pS_{3,1} - (p+1)S_{2,2} = \mathfrak{g}^A_{0,s} + q\mathfrak{h}_s$ が成立するような (s, p, q) を求める．両辺の $S_{3,1}$, $S_{1,3}$, $S_{2,2}$ の係数に注目すると，連立方程式

$$p = \frac{1-2s^2}{s} + q$$
$$0 = \frac{s^2-2}{s} + s^2q$$
$$-(p+1) = \frac{(s^2-1)^2}{s^2} - 2sq$$

を得る．Mathematica を使ってこの連立方程式の数値解を求めると，$q>0$ であるものは，$(s, p, q) \fallingdotseq (0.6774488196, 5.077909402, 4.956680770)$ の 1 つだけである．

(5) $s = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおくとき，$S_4 + 2S_{3,1} - 2S_{1,3} - S_{2,2} = \mathfrak{g}^A_{0,s} + \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\mathfrak{h}_s \geqq 0$ である． □

● p.77. 5 行目.

誤: (1) 例題 2.3.11(6) より,

正: (1) 例題 2.3.11(5) より,

● p.77. 6 行目.

誤: (2) 例題 2.3.11(4) より,

正: (2) 例題 2.3.11(3) より,

● p.77. 8 行目.

誤: (3) 例題 2.3.11(5) から

正: (3) 例題 2.3.11(4) から

● p.82, 下から 5 行目. 定理 2.4.4 の 3 行前.

誤: これは, $U_2 \geqq U_{1,1}$ より,

正: これは, $S_2 \geqq S_{1,1}$ より,

● p.83, 3 行目. 定理 2.4.4 の証明の 1 行目

誤: $F(a,\, b,\, c,\, s) =$ (与式の左辺) とするとき.

正: $F(a,\, b,\, c,\, s) =$ (与式の左辺) とするとき,

● p.85, 2 行目. 定理 2.4.4 の証明の最後から 3 行目

誤: $\psi_6(k) := k^4(1 + k^2 - k^3 + k^5)$

正: $\psi_6(k) := k^4(2 + k^2 - k^3 + k^5)$

● p.86, 1 行目. 定理 2.4.7 の証明の 1 行目

誤: 与式の左辺を $\tilde{f}(a, b, c, s)$ とし.

正: 与式の左辺を $\tilde{f}(a, b, c, s)$ とし,

● p.87, 3 行目.

誤: $A_2(k,\, s) \leqq A_3(k,\, a)$ だから,
正: $A_2(k,\, s) \leqq A_3(k,\, s)$ だから,

● p.87, 最後から 2 行目.

誤: $\sum_{i=0}^{9} b_i(x)(1-m)m^i + b_{10}m^{10}$

正: $\sum_{i=0}^{9} b_i(x)(1-m)m^i + b_{10}(x)m^{10}$

● p.88, 9 〜 11 行目.

誤:

$$b_8(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 256x^7 + 89x^8$$
$$b_9(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 264x^7 + 98x^8$$
$$b_{10}(x) := 3 + 16x + 24x^2 - 6x^4 - 60x^5 + 224x^6 - 264x^7 + 97x^8$$

正:

$$b_8(x) := 3 + 16x + 24x^2 + 8x^7 - 8x^8$$
$$b_9(x) := 3 + 16x + 24x^2 + x^8$$
$$b_{10}(x) := 3 + 16x + 24x^2$$

● p.88, 下から 9 行目.

$c_1(s)$ の式の前に以下の $c_0(s)$ の式が欠落していました．追加してください.

$c_0(s) := 3(1 + 2s + 3s^2 + 3s^4 + 2s^5 + s^6)$

● p.89, 2 行目.

誤: $= \sum_{i=0}^{7} d_i(x)(1-k)k^i + d_8(x)k^8$

正: $= \sum_{i=0}^{7} d_i(x)(1-m)m^i + d_8(x)m^8$

● p.89, 18 行目. 定理 2.4.7 の証明の Step 2 の 3 行目

誤: $F(1-k(1-b),b,s)$

正: $F(1-k(1-b),b,1,s)$

● p.90, 9 行目.

誤: $\dfrac{1}{(1-s)^2}B_1((1-s)x,s)=\displaystyle\sum_{i=0}^{10}e_i(x)k^i$

正: $\dfrac{1}{(1-s)^2}B_1((1-s)x,s)=\displaystyle\sum_{i=0}^{10}e_i(x)s^i$

ついでに、11 〜 23 行目に登場する $e_i(k)$ の変数 k も x に修正してもらうほうが綺麗です. 数学的には k のままでもいいですが. ただし、下から 4 行明の 「$k+s \leqq 1$ のとき $B_1(k,\,s) \geqq 0$ である.」の部分の k は x に変更しないでください.

● p.91, 17 行目. Step 2-3 の 3 行目.

誤: $\dfrac{1}{(1-s)^2}B_2((1-s)x,s)=\displaystyle\sum_{i=0}^{10}g_i(x)k^i$

正: $\dfrac{1}{(1-s)^2}B_2((1-s)x,s)=\displaystyle\sum_{i=0}^{10}g_i(x)s^i$

● p.92, 例題 2.4.8

4 ケ所登場する $\sqrt[4]{5}$ がすべて $\sqrt[5]{4}$ の誤りです. 正しくは以下のようになります.

例題 2.4.8. $a \geqq 0,\, b \geqq 0,\, c \geqq 0$ のとき, 次の不等式を示せ.

$$S_5+\left(\frac{5\sqrt[5]{4}}{4}-1\right)US_2 \geqq \frac{5\sqrt[5]{4}}{4}S_{4,1}$$

解答. 定理 6.7.6 において, $s=\sqrt[5]{4}$ のとき,

$$\frac{s^8-4s^5+3s^4-4s^3+1}{3s^4}=1-\frac{5\sqrt[5]{4}}{4}$$

$$-\frac{4s^5-1}{3s^4}=-\frac{5\sqrt[5]{4}}{4}$$

なので，求める不等式を得る． □

● p.98 〜 99, 例題 2.5.2(1) とその解答.

例題 2.5.2(1) は斉次多項式ではないので定理 2.5.1 は適用できません．この解答は間違っています．問題と解答を削除して下さい．

● p.103, 例題 2.5.4(6) の 4 行目

誤: $2\delta^3+2\delta-1=0$

正: $2\delta^3+2\delta^2-1=0$

● p.112, 定理 2.5.6 の証明の終わりのほう

誤: $\psi_6(k):=18+2k-48k^2+96k^3+32k^4-402k^5+623k^6-167k^7-466k^8+432k^9+112k^{10}-360k^{11}+195k^{12}-35k^{13}$

正: $\psi_6(k):=6+12k-18k^2+20k^3+60k^4-60k^5-168k^6+361k^7-54k^8-140k^9+126k^{10}+48k^{11}-78k^{12}+21k^{13}$

● p.127, 下から 4 行目 (例題 3.1.3(16) の解答の最後の行)

誤: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$

正: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

● p.129, 例題 3.1.4(4)

(4) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\geqq\dfrac{a+b+c}{a+b+c+1}$

この問題は簡単すぎてポカです．出題意図は Cauchey の不等式の利用だったのですが，$\dfrac{a}{a+1}\geqq\dfrac{a}{a+b+c+1}$ を使えば簡単に証明できてしまって，意図通りの問題になっていませんでした．

● p.150, 11 行目 (例題 3.2.3(8) の解答の 6 行目)

誤: $= 3 + \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y} + \dfrac{y}{1-z}$

正: $= 3 + \dfrac{x}{1-x} + \dfrac{y}{1-y} + \dfrac{z}{1-z}$

● p.151, 1 行〜 11 行目. 例題 3.2.3(9) の解答

解答が完全に間違っていました．この方針では証明できないので，解答を完全に差し替えるしかありません．

[差し替え原稿]

(9) $x := \sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}$, $y := \sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $z := \sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ とおく．$b+c-a>0$ より，$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 - \sqrt{a}^2 = (b+c-a)+2\sqrt{bc} > 0$ なので，$x>0$ である．同様に，$y>0, z>0$ である．$b+c-a = x^2 - \dfrac{1}{2}(x-y)(x-z)$ なので，

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}$$

である．$s = \dfrac{(x-y)(x-z)}{2x^2}$ とおく．$2x^2-(x-y)(x-z) = 2(b+c-a) > 0$ なので，$s \leqq 1$ である．このとき，$\sqrt{1-s} \leqq 1-\dfrac{s}{2}$ である．よって，

$$\begin{aligned} 3 - \sum_3 \frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} &= \sum_3 \left(1-\sqrt{1-\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2}}\right) \\ &\geqq \sum_3 \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-y)(x-z)}{2x^2} = \frac{1}{4}\sum_3 x^{-2}(x-y)(x-z) \geqq 0 \end{aligned}$$

である．最後のところで，Schur の不等式を用いた． □

● p.163, 5 行目. 例題 3.3.5(2) の解答の 3 行目

誤: $+\dfrac{c^2a^2}{b^2}2(a^2+b^2+c^2)-$

正: $+\dfrac{c^2a^2}{b^2}+2(a^2+b^2+c^2)-$

● p.183, 12 行目.

誤: $M \leqq g(a_n) = f(a_n) + (n-1)f(a_1)$

正: $M \geqq g(a_n) = f(a_n) + (n-1)f(a_1)$

● p.195, 下から 5 行目.

誤: $\mathbf{b} = \left(\dfrac{a_1 + a_k}{2},\ {}_2, \ldots, a_{k-1},\ \dfrac{a_1 + a_k}{2},\ 0, \ldots, 0 \right)$

正: $\mathbf{b} = \left(\dfrac{a_1 + a_k}{2},\ a_2, \ldots, a_{k-1},\ \dfrac{a_1 + a_k}{2},\ 0, \ldots, 0 \right)$

● p.196, 下から 5 行目.

誤: を満たすある整数) 収束することを示す.

正: を満たすある整数) に収束することを示す.

● p.200, 系 4.1.21 の証明の 5 〜 6 行目.

誤: $+b\big(x_1^2+x_2^2-(x_1+x_2)^2\big)A+x_1x_2A = x_1x_2\big((b-3a)(x_1+x_2)+(1-2b)A\big)$

正: $+b\big(x_1^2+x_2^2-(x_1+x_2)^2\big)A+cx_1x_2A = x_1x_2\big((b-3a)(x_1+x_2)+(c-2b)A\big)$

● p.200, 系 4.1.21 の証明の下から 4 〜 3 行目.

誤: $+\left(x_1x_2 - \frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right)A = -\frac{(x_1-x_2)^2}{4}\big((b-3a)(x_1+x_2)+(1-2b)A\big)$

正: $+c\left(x_1x_2 - \frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right)A = -\frac{(x_1-x_2)^2}{4}\big((b-3a)(x_1+x_2)+(c-2b)A\big)$

● p.200, 最後の 2 行.

誤: 上の系が, $f(x_1,\ldots, x_n)$ が 4 次, 5 次の斉次多項式の場合にも成り立つか否かは興味があるところであるが，いまのところ，よくわかっていない.

正: 上の系は, $f(x_1,\ldots, x_n)$ が 4 次以上の斉次多項式の場合には成立しない.

● p.234, 下から 5 行目. 例題 5.2.1(2) の解答の 4 行目

誤: $= \dfrac{a+c}{b+d} + \dfrac{b+d}{a+d} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a+c}{b+d} \cdot \dfrac{b+d}{a+d}} = 2$

正: $= \dfrac{a+c}{b+d} + \dfrac{b+d}{a+c} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a+c}{b+d} \cdot \dfrac{b+d}{a+c}} = 2$

● p.239, 最後から 7 行目.

誤: 以下，本節では

正: 以下，本節では $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$,

● p.242, 13 行目.

誤: $(x_i, \ldots, x_j)$ を $\mathbf{x}$ の**セグメント**で

正: $(x_i, \ldots, x_j)$ を $\mathbf{x}$ は**セグメント**で

● p.270, 最下行.

誤: Drinfel'd が高校生時代に証明した定理 [16] を,

正: Drinfel'd が高校生時代に証明した定理 [17] を,

● p.272, 定理 5.2.28 の証明の 8 行目.

誤: $= \dfrac{m_i + m_{n+1-i} 2m_i m_{n+1-i}}{m_i m_{n+1-i}(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$

正: $= \dfrac{m_i + m_{n+1-i} + 2m_i m_{n+1-i}}{m_i m_{n+1-i}(1+m_i)(1+m_{n+1-i})}$

● p.278, 10 行目.

誤: [21] R. Muirhead,

正: [20] R. Muirhead,

● p.280, 左の列の 12 行目. 目次

参照するページ番号を以下のように修正して下さい.

LCF 定理　　179 → 180

改良部分

★ ここからは改良部分です.

● p.21, 第 1 章の末尾

以下の原稿を追加して下さい (証明はちょっと難しいので割愛します).

1.3.8. Hilbert の第 17 問題

定理 1.3.9. (E.Artin)　$f_1(x_1,\ldots, x_n)$, $f_2(x_1,\ldots, x_n)$ は互いに素な実数係数多項式で，$f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{f_2(x_1,\ldots,x_n)}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}$ とする．さらに，$f_1(a_1,\ldots, a_n) \neq 0$ であるような任意の有理数の組 $(a_1,\ldots, a_n)$ に対して $f(a_1,\ldots, a_n) \geqq 0$ が成り立つと仮定する．すると，ある自然数 r と，ある実数係数有理関数 $g_1(x_1,\ldots, x_n)$, $\ldots$, $g_r(x_1,\ldots, x_n)$ が存在して，

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{r} g(x_1,\ldots,x_n)^2$$

と書ける．さらに，f_1, f_2 が有理数係数多項式ならば，$g_1,\ldots, g_r$ を整数係数有理関数として選ぶことができる．

証明は実体の理論を用いるので定理 6.1.14 で与える．

上の定理において，f が実数係数多項式の場合，$g_1,\ldots, g_r$ を多項式として選べるとは限らない．これに関しては，Hilbert 自身が以下の定理を証明している．

定理 1.3.10. (Hilbert)　一般に，ある多項式 f が何個かの多項式の 2 乗の和として表せるとき，f は **SOS** (Sum Of Squares) であるという．2 以上の自然数 n と, 2 以上の偶数 d を固定する．

任意の実数 $a_1,\ldots, a_n$ に対して $f(a_1,\ldots, a_n) \geqq 0$ を満たすような任意の実数係数 d 次斉次多項式 f が SOS であるための必要十分条件は，$n = 2$ または $d = 2$ または $(n, d) = (3, 4)$ である．

証明は第 6.10.1 項で与える．

1.4. １変数不等式と２次斉次不等式

1.4.1. ２変数斉次不等式

1 変数多項式 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ に対し，

$$F(s,t) = c_n s^n + c_{n-1}s^{n-1}t + c_{n-2}s^{n-2}t^2 + \cdots + c_1 st^{n-1} + c_0 t^n$$

とおくと，

$$F(x,1) = f(x), \quad F(s,t) = t^n f(s/t)$$

という関係がある．そのため，1 変数多項式を扱うのと，2 変数斉次多項式を扱うのは，本質的にはほとんど同じことになる．実数 x と実射影直線の元 $(x{:}\,1) \in \mathbb{R}^1_{\mathbb{R}}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ と考えるとき，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ における $\mathbb{R}$ の補集合は 1 点 $(1{:}\,0)$ からなる集合であるが，複素関数論におけるリーマン球面と同じ考え方で，$(1{:}\,0) = \infty$ と考えることにし，この元を $\mathbb{R}$ の無限遠点と考えることにする．この考え方のもとで，$F(1,0)$ の符号を考えることは $f(\infty)$ の符号を考えることに相当する．したがって，$t \geqq 0$ の仮定のもとで不等式 $F(s,t) \geqq 0$ を考えることは,「$f(x) \geqq 0$ かつ $f(\infty) \geqq 0$」を考えることと同値になる．$f(x) \geqq 0$ を考察する代わりに $F(s,t) \geqq 0$ を考察することは変数が増えてしまって何のメリットもないように思うかもしれないが，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ はコンパクトであるので,「コンパクト集合上の連続関数はその上で最大値と最小値を取る」という定理等が使えるという利点がある．その典型例として，次の問題を考えてみたい．

問題 1.4.1. $f(x) := x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ が任意の $x \in \mathbb{R}_+$ (または任意の $x \in \mathbb{R}$) に対し $f(x) \geqq 0$ を満たすための必要十分条件を $f(x)$ の係数の不等式で表せ．

定義 1.4.2. n 次多項式 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ に対

し，(一時的に)

$$\mathbf{b}_i := \big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{i\text{ 個}},\, c_n,\, c_{n-1}, \cdots,\, c_0,\, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-i-2)\text{ 個}}\big)$$
$$\mathbf{c}_j := \big(\underbrace{0, \cdots, 0}_{j\text{ 個}},\, nc_n,\, (n-1)c_{n-1}, \cdots,\, c_1,\, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-j-1)\text{ 個}}\big)$$

とおき，行ベクトル $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}$ を縦に並べてできる $(2n-1)$ 次正方行列を (一時的に) M_n とする．そして，

$$D_n(c_n,\, c_{n-1}, \ldots,\, c_0) := (-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{c_0}\det M_n$$

とおき，$D_n(c_n, \ldots, c_0)$ を $f(x)$ の**判別式**という．

例えば，$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対し，$D_2(a, b, c) = b^2 - 4ac$ である．

判別式は

$$D_n(c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0) = D_n(c_0, c_1, \ldots, c_n)$$
$$D_n(c_n, -c_{n-1}, c_{n-2}, -c_{n-3}, \ldots, (-1)^n c_0) = D_n(c_n, c_{n-1}, \ldots, c_0)$$

という等式を満たすことが知られている．

1.4.2. 3 次不等式

次の問題を極値解析と，PSD 錐を用いる，2 通りの方法で解いてみよう．

問題 1.4.4. $f(x) := x^3 + ax^2 + bx + c$ が任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) \geqq 0$ となるための条件を a, b, c の不等式で表せ．

(I) まず，極値解析の標準的な解法で解いてみよう．

命題 1.4.5. 任意の $x \geqq 0$ に対して $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は以下の (1), (2), (3) のいずれかが成立することである．

(1) $a \geqq 0, b \geqq 0$ かつ $c \geqq 0$.

(2) $a^2 \leqq 3b$ かつ $c \geqq 0$.

(3) $a^2 > 3b, c \geqq 0$ かつ $2a^3 - 9ab + 27c \geqq 2(a^2 - 3b)^{3/2}$.

証明. $c = f(0) \geqq 0$ は必要条件である．$f'(x) = 0$ の小さくないほうの根を $x_0 := \bigl(\sqrt{a^2 - 3b} - a\bigr)/3$ とおく．(i) x_0 が虚数の場合，(ii) $x_0 < 0$ の場合，(iii)「$x_0 \geqq 0$ かつ $f(x_0) \geqq 0$ の場合」に分けて考察すれば，高校程度の簡単な議論で，上の命題が証明できる． □

(II) 問題 1.4.4 を PSD 錐の理論を用いて解いた結果を紹介しておく．

命題 1.4.6. 任意の $x \geqq 0$ に対し $x^3 + ax^2 + bx + c \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つことである．

(1) $a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ かつ $c \geqq 0$.

(2) $c = 0$ かつ $a^2 - 4b \leqq 0$.

(3) $c > 0$ かつ $D_3(1, a, b, c) = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2 \leqq 0$.

証明. PSD 錐を利用した証明は第 6.2 節で与えるが，ここでは命題 1.4.5 を基にした証明を紹介しておく．

$\breve{D}_3 := -D_3(1, a, b, c)$ とおく．すると

$$(2a^3 - 9ab + 27c)^2 - 2^2(a^2 - 3b)^3 = 27\breve{D}_3$$

が成り立つ．もし $\breve{D}_3 \geqq 0$, $a^2 \geqq 3b$, $b \leqq 0$ かつ d $c \geqq 0$ ならば，

$$2c(2a^3 - 9ab + 27c) = \breve{D}_3 + b^2(a^2 - 3b) - b^3 + 27c^2 \geqq 0$$

が成り立つ．さらに，もし，$a^2 - 3b < 0$, $a < 0$, $b \geqq 0$ かつ $c \geqq 0$ であれば，

$$\breve{D}_3 = (b^2 - 4ac)(3b - a^2) + 6(-a)bc + b^3 + 27c^2 \geqq 0$$

が成り立つ．したがって，$c \geqq 0$ かつ「$a < 0$ または $b < 0$」という条件下に,「$2a^3 - 9ab + 27c \geqq 2(a^2 - 3b)^{3/2}$ または $a^2 \leqq 3b$」であることと $\breve{D}_3 \geqq 0$ であることは同値になる． □

1.4.3. 4 次不等式

本章の定理の証明は，すべて第 6.3 節で与える．

定理 1.4.7. 4 次関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対し，

$$\mathrm{sep}_1(a, b, c, d) := \left(a - \frac{c}{\sqrt{d}}\right)^2 - 16\bigl(b + 2\sqrt{d}\bigr)$$

$$\mathrm{sep}_2(a,b,c,d) := \left(a + \frac{c}{\sqrt{d}}\right)^2 - 16\bigl(b - 2\sqrt{d}\bigr)$$

とおく．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は次の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つことである．

(1) $c = d = 0$ かつ $a^2 - 4b \leqq 0$.

(2) $d > 0$, $-2\sqrt{d} \leqq b < 6\sqrt{d}$, $D_4(1, a, b, c, d) \geqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_1(a, b, c, d) \leqq 0$.

(3) $d > 0$, $b \geqq 6\sqrt{d}$, $D_4(1, a, b, c, d) \geqq 0$, $\mathrm{sep}_1(a, b, c, d) \leqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_2(a, b, c, d) \leqq 0$.

上の定理において「任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) > 0$ となるための必要十分条件」を考えるときは，(1), (2), (3) 内の $\leqq$ や $\geqq$ を $<$ や $>$ に置き換えればよいが，幾何学的には「閉凸錐の内部 (開核) を求める」という作業が必要であるので，分離多項式 (第 6 章で説明する) については等号 (=) を取り除いてはいけない場合があることを注意しておく．なお．

$$\begin{aligned}D_4(a,b,c,d) &= a^2b^2c^2 - 4b^3c^2 - 4a^3c^3 + 18abc^3 - 27c^4 - 4a^2b^3d \\ &\quad + 16b^4d + 18a^3bcd - 80ab^2cd - 6a^2c^2d + 144bc^2d \\ &\quad - 27a^4d^2 + 144a^2bd^2 - 128b^2d^2 - 192acd^2 + 256d^3\end{aligned}$$

である．

定理 1.4.8. 4 次関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathrm{sep}_2^-(a,b,c,d) &:= a + \frac{c}{\sqrt{d}} + 4\sqrt{b - 2\sqrt{d}} \\ \mathrm{sep}_3^-(a,c,d) &:= a\sqrt{d} + c \\ \mathrm{sep}_4^-(b,c,d) &:= c + 2\sqrt{bd + 2d^{3/2}} \\ \mathrm{sep}_5^-(a,b,d) &:= a + 2\sqrt{b + 2\sqrt{d}}\end{aligned}$$

とおく．任意の非負実数 $x \geqq 0$ に対して $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は以下の (1) 〜 (5) のいずれかが成立することである．

(1) $d = 0$ かつ命題 1.4.6 内の条件 (1) 〜 (3) のいずれかが成り立つ.

(2) $d > 0$, $\mathrm{sep}_3^-(a, c, d) \geqq 0$ かつ $D_4(1, a, b, c, d) \leqq 0$.

(3) $d > 0$, $b > -2\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) \geqq 0$, $\mathrm{sep}_4^-(b,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_5^-(a,\ b,\ d) \geqq 0$.

(4) $d > 0$, $-2\sqrt{d} < b \leqq 6\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) < 0$ かつ $D_4(1,\ a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$.

(5) $d > 0$, $b > 6\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) < 0$, $\mathrm{sep}_2^-(a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $D_4(a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$.

「任意の $x > 0$ に対し $f(x) > 0$ となるための必要十分条件」を求めるのは,「閉でも開でもない凸錐」が登場するので，少し注意を要するが，$d = 0$ の場合を慎重に考えればそれほど難しくないだろう.

2.2.2. 凸錐

多項式型不等式は，1 つ 1 つの不等式を考察するのではなく，似たような形の不等式をまとめて，不等式の集合として考察する方法が有用である．まず，不等式の集合は，幾何学的には凸錐になっている．

定義 2.2.4. $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\}$ とおく．$\mathbb{R}^n$ 内の空でない部分集合 C が**凸錐**であるとは，「$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ ならば，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ に対して $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in C$」が成り立つことをいう．

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対し，

$$\mathbb{R}_+ \cdot A := \{\alpha\mathbf{x} \mid \alpha \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in A\}$$

は凸錐になる．$\mathbb{R}_+ \cdot A$ を A によって**生成される**凸錐という．A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば，$\mathbb{R}_+ \cdot A$ は閉凸錐であることに注意する．

凸錐 C を含む $\mathbb{R}^n$ の最小の部分ベクトル空間の次元を $\dim C$ と書く．$\dim C = n$ であるとき，C は**非退化**であるという．$\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in C$ は，$\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in C$ が $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ を満たせば必ず $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{x}$ となるとき，C の**端元** (extremal) であるという．端元は C の境界上にあるが，逆は正しくない．$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が C の端元のとき，原点を始点とする半直線 $\mathbb{R}_+ \cdot \mathbf{x}$ を C の**端射線** (extremal ray) であるという．

例えば，C が多角錐 (n 角錐) の場合には，C の端射線は C の辺であり，C の端射線は n 個である．他方，C が円錐の場合には，すべての母線が端射線になる．一般に，閉凸錐 C の構造を決定するには，その端射線を決定することが有用である．

容易にわかるように，勝手な元 $f \in C$ を取るとき，ある何個かの端元 $f_1, \ldots, f_r$ をうまく選んで $f = f_1 + \cdots + f_r$ ($r < \dim C$) と表すことができる．

C が凸錐のとき，

$$C^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } \mathbf{y} \in C \text{ に対し } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geqq 0\}$$

は $\mathbb{R}^n$ 内の閉凸錐 (閉集合かつ凸錐) になる．$C^\perp$ を C の**双対凸錐**という．ここで，$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ はベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の内積である．一般に，凸錐 C に対し

$\left(C^{\perp}\right)^{\perp}$ は C の閉包と一致する．したがって，C が閉凸錐ならば $\left(C^{\perp}\right)^{\perp}=C$ が成り立つ．

一般に R-ベクトル空間 V や凸錐 C に対して $\mathbb{P}(V):=(V-\{0\})/\mathbb{R}^{\times}$, $\mathbb{P}(C):=(C-\{0\})/\mathbb{R}_{+}^{\times}$ と書く．

定義 2.2.5.
$\mathcal{H}_d^c:=\left\{\ f(a,b,c)\ \middle|\ f \text{ は } d \text{ 次巡回多項式}\right\}$
$\mathcal{H}_d^{c0}:=\left\{\ f\in\mathcal{H}_d^c\ \middle|\ f(1,1,1)=0\right\}$
$\mathcal{H}_d^s:=\left\{\ f(a,b,c)\in\mathcal{H}_d^c\ \middle|\ f \text{ は対称多項式}\right\}$
$\mathcal{H}_d^{s0}:=\mathcal{H}_d^s\cap\mathcal{H}_d^{c0}$
$\mathcal{P}_d^c:=\left\{\ f(a,b,c)\in\mathcal{H}_d^c\ \middle|\ \text{任意の } a,\,b,\,c\in\mathbb{R} \text{ に対し } f(a,\,b,\,c)\geqq 0\right\}$
$\mathcal{P}_d^{c+}:=\left\{\ f(a,b,c)\in\mathcal{H}_d^c\ \middle|\ \text{任意の } a,\,b,\,c\in\mathbb{R}_+ \text{ に対し } f(a,\,b,\,c)\geqq 0\right\}$
$\mathcal{P}_d^{c0}:=\mathcal{P}_d\cap\mathcal{H}_d^{c0}$
$\mathcal{P}_d^{c0+}:=\mathcal{P}_d^{+}\cap\mathcal{H}_d^{c0}$
$\mathcal{P}_d^s:=\mathcal{P}_d^c\cap\mathcal{H}_d^s$
$\mathcal{P}_d^{s+}:=\mathcal{P}_d^{c+}\cap\mathcal{H}_d^s$
$\mathcal{P}_d^{s0}:=\mathcal{P}_d^{c0}\cap\mathcal{H}_d^s$
$\mathcal{P}_d^{s0+}:=\mathcal{P}_d^{c0+}\cap\mathcal{H}_d^s$

とおく．これらは，いずれも閉凸錐であることに注意する．$\mathcal{P}_d^c$ 以下のものは，第 6 章で説明する PSD 錐と呼ばれるものである．例えば，$\mathcal{P}_d^c$ は 3 変数 d 次斉次巡回不等式全体のなす PSD 錐と呼ばれる．$\mathcal{P}_d^{c0}$ はその中で，$a=b=c$ のとき等号成立条件 $f(a,\,b,\,c)=0$ を満たすようなもの全体のなす PSD 錐である．また，$\mathcal{P}_d^{c+}$ は第 1 象限 $\mathbb{R}_+^3$ 上における 3 変数 d 次斉次巡回不等式全体のなす PSD 錐と呼ばれる．$\mathcal{P}_d^s$ は 3 変数 d 次斉次対称不等式全体のなす PSD 錐である．

命題 2.2.6. $d=2$ の場合は，以下が成立する．

$$\mathcal{H}_2^c=\mathcal{H}_2^s\cong\mathbb{R}^2,\quad \mathcal{H}_2^{c0}\cong\mathbb{R}^1$$
$$\mathcal{P}_2^{c0}=\mathcal{P}_2^{c0+}=\mathcal{P}_2^{s0}=\mathcal{P}_2^{s0+}=\mathbb{R}_+\cdot(S_2-S_{1,1})$$
$$\mathcal{P}_2^c=\mathcal{P}_2^s=\mathbb{R}_+\cdot(S_2-S_{1,1})+\mathbb{R}_+\cdot(S_2+2S_{1,1})$$
$$\mathcal{P}_2^{c+}=\mathcal{P}_2^{s+}=\mathbb{R}_+\cdot(S_2-S_{1,1})+\mathbb{R}_+\cdot S_{1,1}$$

証明. 命題 2.1.2 よりすぐ得られる. □

上の命題の意味は，例えば 3 変数 2 次斉次多項式 f で任意の実数 a, b, c に対して $f(a, b, c) \geqq 0$ を満たすものは，ある非負実数 α, β により，

$$f = \alpha(S_2 - S_{1,1}) + \beta(S_2 + 2S_{1,1})$$

と書ける，ということである．つまり，$S_2 - S_{1,1} \geqq 0$ と $S_2 + 2S_{1,1} \geqq 0$ という 2 つの不等式が本質的で，それ以外の不等式はこの 2 つの不等式の 1 次結合として誘導される，ということである．そのため，$\mathcal{P}_d^?$ ($? = c$, $c0$, $c0+$, s,...) の構造を調べることは大変重要である．

定義 2.2.7. 指数 (i, j, k) の集合 I_d を

$$B_d := \left\{S_{i,j,k} \;\middle|\; (i, j, k) \in I_d\right\}$$

が $\mathcal{H}_d^c$ の基底になるように取る．$N := \#I_d - 1$ とおく．$\mathcal{H}_d^c \cong \mathbb{R}^{N+1}$, $\mathcal{H}_d^{c0} \cong \mathbb{R}^N$ である．B_d の元を適当な順番に並べて $s_0, \ldots, s_N$ とする．例えば，$I_3 = \{(3,0,0), (2,1,0), (1,2,0), (1,1,1)\}$, $I_4 = \{(4,0,0), (3,1,0), (1,3,0), (2, 2, 0), (2,1,1)\}$ と選ぶことができる．

$\mathcal{H}_d^c$ の元 f は，その S_d の係数が 1 であるとき**モニック**と呼ぶことにする．また，f が S_d の項を持たないとき，f は**無限遠点にある**という．

$$\breve{\mathcal{H}}_d^c := \left\{ f \in \mathcal{H}_d^c \;\middle|\; f \text{ はモニック}\right\}$$
$$\mathcal{H}_d^{c\infty} := \left\{ f \in \mathcal{H}_d^c \;\middle|\; f \text{ は無限遠点にある}\right\}$$

とおく．$\breve{\mathcal{H}}_d^c$ は $\mathbb{P}(\mathcal{H}_d^c) \cong \mathbb{P}^N$ のアフィン開集合とみなすことができ，その補集合が $\mathcal{H}_d^{c\infty}$ の $\mathbb{P}^N$ における像 $\mathbb{P}(\mathcal{H}_d^{c\infty})$ である．一般に，$\mathcal{H}_d^c$ 内の凸錐 C に対して，

$$\breve{C} := C \cap \breve{\mathcal{H}}_d^c$$

と書くことにする．$\breve{C}$ は $\breve{\mathcal{H}}_d^c$ 内の凸集合である．

命題 2.2.8. (次元定理) $\dim \mathcal{H}_d^c = \lceil (d+1)(d+2)/6 \rceil$ である．

証明. $\#I_d = \lceil (d+1)(d+2)/6 \rceil$ より，すぐわかる. □

命題 2.2.9. $N := \lceil (d+1)(d+2)/6 \rceil - 1$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

$$\dim \mathcal{P}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^{c} = N+1$$
$$\dim \mathcal{P}_d^{c0+} = \dim \mathcal{H}_d^{c0} = N$$

証明. $f(a,b,c) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k S_{\mathbf{i}_k}(a,b,c)$ とする．$(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ であれば，任意の $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ である．よって，$\mathbb{R}_+^{N+1} \subset \mathcal{P}_d^{+}$ で，$\dim \mathcal{P}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^{c} = N+1$ である．また，$f(a,b,c) > 0$ であれば $-f(a,b,c) < 0$ であるから，$f \in \mathcal{P}_d^{c+}$ ならば $-f \notin \mathcal{P}_d^{c+}$ であり，閉凸錐 $\mathcal{P}_d^{c+}$ は原点を通る直線を含まない．双対閉凸錐の一般論から，原点を通る直線を含まない閉凸錐の双対凸錐の次元は，もとの凸錐の次元と等しいので，$\dim \mathcal{P}_d^{c+} = N+1$ が成立する．

$\mathcal{P}_d^{c0+}$ も原点を通る直線を含まないので，$\dim \mathcal{P}_d^{c0+} = \dim \mathcal{P}_d^{c+} - 1 = N$ である． □

次の命題の証明は定理 6.2.18 で述べるが，PSD 錐の境界に属する不等式は等号成立条件を持っている．比喩的に言うと,「ぎりぎり成立する不等式」には等号成立条件があり，等号成立条件を持たない不等式は「ゆるい不等式」あるいは「甘い不等式」なのである．

命題 2.2.10. (1) C は $\mathcal{P}_d^{c}$, $\mathcal{P}_d^{c+}$, $\mathcal{P}_d^{s}$, $\mathcal{P}_d^{s+}$ のいずれかとし，$f \in C$ とする．このとき，ある $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ($C = \mathcal{P}_d^{c+}$, $\mathcal{P}_d^{c+}$ の場合は $a, b, c \in \mathbb{R}_+$) が存在して $f(a, b, c) = 0$ となるための必要十分条件は，f が C の境界に属することである．

(2) C は $\mathcal{P}_d^{c0}$, $\mathcal{P}_d^{c0+}$, $\mathcal{P}_d^{s0}$, $\mathcal{P}_d^{s0+}$ のいずれかとし，$f \in C$ とする．もし，$a = b = c$ でない (a, b, c) ($C = \mathcal{Q}_d^{+}$, $\mathcal{P}_d^{s0+}$ の場合は $a, b, c \in \mathbb{R}_+$) が存在して $f(a, b, c) = 0$ を満たすならば，f は C の境界に属する．

面成分の厳密な定義は定義 6.2.17 で与えるが，ここでは，実代数幾何の知識を必要としない便宜的な定義を与えておく．

定義 2.2.11. C は $\mathbb{R}^n$ 内の非退化な閉凸錐とする．C の $\mathbb{R}^n$ における境界を ∂C で表す．一般に，実数係数 n 変数斉次多項式 $f = f(x_1,\ldots, x_n)$ に対して，

$$V(f) := \left\{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(a_1,\ldots, a_n) = 0\right\}$$

とおく．もし，ある既約多項式 f をうまく選んだとき，$V(f) \cap \partial C$ が $V(f)$ の $(n-1)$ 次元の開集合を含むならば，$V(f) \cap \partial C$ は C の**面成分**であるという．

命題 2.2.10 より，$\mathcal{P}_d^{c0} \subset \partial\mathcal{P}_d^c$, $\mathcal{P}_d^{c0+} \subset \partial\mathcal{P}_d^{c+}$ であることがわかるが，もっと強く，次の命題が成り立つ．

命題 2.2.12. $\mathcal{P}_d^{c0}$ は $\mathcal{P}_d^c$ の面成分である．また，$\mathcal{P}_d^{c0+}$ は $\mathcal{P}_d^{c+}$ の面成分である．同様に，$\mathcal{P}_d^{s0}$ は $\mathcal{P}_d^s$ の面成分であり，$\mathcal{P}_d^{s0+}$ は $\mathcal{P}_d^{s+}$ の面成分である．

証明. $\mathcal{H}_d^{c0}$ は $\mathcal{H}_d^c$ の超平面で，$\mathcal{P}_d^{c0} = \mathcal{P}_d^c \cap \mathcal{H}_d^{c0}$ であるから，$\mathcal{P}_d^{c0}$ は $\mathcal{P}_d^c$ の面成分である．

$\mathcal{P}_d^{c0+}$ についても同様である． □

2.2.3. 3 次巡回不等式の基本定理

判別式の解釈にはいろいろな流儀があるが，多項式のなすある線形系の中で，ある一定の条件 (例えば重根を持つとか) を満たす多項式の族 (のザリスキー閉包) が超平面になる場合，その超平面を定義方程式を判別式という，という解釈もある．

定理 2.2.13. ($\mathcal{P}_3^{c+}$ の構造定理. [1], [2]) 3 変数 3 次斉次巡回多項式

$$\begin{aligned} &f(a,b,c) \\ &= p_0(a^3+b^3+c^3) + p_1(a^2b+b^2c+c^2a) + p_2(ab^2+bc^2+ca^2) + p_3abc \end{aligned}$$

について，任意の $a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の条件 (1), (2) のいずれかが成立することである．

(1) $p_0 \geqq 0, 3p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3 \geqq 0$ かつ $D_3(p_0, p_1, p_2, p_0) \geqq 0$

(2) $p_0 \geqq 0$, $p_1 \geqq 0$ and $p_2 \geqq 0$ かつ $3p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3 \geqq 0$

ここで D_3 は定義 1.4.2 で定義した 3 次方程式の判別式である．

$$D_3(p_0, p_1, p_2, p_0) = p_1^2p_2^2 - 4p_0p_2^3 - 4p_0p_1^3 + 18p_0^2p_1p_2 - 27p_0^2p_1^2$$

を $\mathcal{P}_3^{c+}$ の**端判別式**という．

証明は定理 6.5.3 で行う． □

定理 2.2.14.

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_s(a,b,c) &:= s^2S_3 - (2s^3-1)S_{2,1} + (s^4-2s)S_{1,2}\\ &\qquad\qquad - 3(s^4 - 2s^3 + s^2 - 2s + 1)U\\ \mathfrak{f}_\infty(a,b,c) &:= S_{1,2} - 3U\end{aligned}$$

とおく．これらは，$\mathcal{P}_3^{c+}$ の端元で，$\mathfrak{f}_s(0,s,1) = 0$, $\mathfrak{f}_s(1,1,1) = 0$ を満たす．また，$\mathfrak{f}_\infty(0,1,0) = 0$, $\mathfrak{f}_\infty(1,1,1) = 0$ である．逆に，$\mathcal{P}_3^{c+}$ の端元は，$\mathfrak{f}_s$ $(\exists s \in \mathbb{R}_+)$, または $\mathfrak{f}_\infty$ または $U = abc$ の正の定数倍の多項式である．

証明. $\mathfrak{f}_s(0,s,1) = 0$, $\mathfrak{f}_s(1,1,1) = 0$ は Mathematica 等を用いて，計算で確かめるだけである．端元に関する部分の証明は定理 6.5.1 で行うことにし，ここでは，任意 $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ に対して，$\mathfrak{f}_s(a,b,c) \geqq 0$ であることを証明しておく．

$\mathfrak{f}_s(b,a,c) = s^4\mathfrak{f}_{1/s}(a,b,c)$ なので，$0 \leqq a \leqq b \leqq c = 1$ と仮定して $\mathfrak{f}_s(a,b,c) \geqq 0$ を示せばよい．$k := (1-b)/(1-a)$ とおく．$0 \leqq a \leqq b$ より $0 \leqq k \leqq 1$ である．これより，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{f}_s(a,b,c) = \mathfrak{f}_s(a, 1-k(1-a), 1)\\ &= (1-a)^2\Big\{a(1-ks)^2(k+s^2) + \big(1+(1-k)s^2\big)(1-k-s)^2\Big\}\\ &\geqq 0\end{aligned}$$

を得る． □

例題 2.2.15. $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ のとき，以下の不等式を証明せよ．

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}S_3 + \big(3 - \sqrt[3]{4}\big)U \geqq S_{2,1}$

(2) $S_3 + \dfrac{\sqrt{16\sqrt{2}+13}-1}{2}S_{2,1} \geqq \dfrac{\sqrt{16\sqrt{2}+13}+1}{2}S_{1,2}$

（3） $S_3 + 2S_{2,1} \geqq 3S_{1,2}$

（4） $64S_3 + 159S_{2,1} \geqq 223S_{1,2}$

（5） $a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2(2c - b) + b^2(2a - c) + c^2(2b - a)$

（6） $S_3 + 6S_{2,1} \geqq 3S_{1,2} + 12U$

（7） $4(a + b + c)^3 \geqq 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$

解答. どの問題も，定理 2.2.13 を適用すれば機械的に証明されるが，$\mathfrak{f}_s \geqq 0$ の形の不等式については，s の値を書いておく.

(1) は $\mathfrak{f}_s \geqq 0$ において，$s = \sqrt[3]{2}$ とした場合である．等号成立条件は，$a = b = c$ の他，$(a : b : c) = (0 : s : 1)$ またはその巡回置換の場合である．以下の問題でも s の値が分かれば，同様である.

(2) は $\mathfrak{f}_s \geqq 0$ において，$s = \dfrac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} = 0.53101\cdots$ とした場合である.

(5) (左辺) − (右辺) $= S_3 + S_{2,1} - 2S_{1,2}$ を使う.

$$S_3 + S_{2,1} - 2S_{1,2} = a(a - c)^2 + b(b - a)^2 + c(c - b)^2 \geqq 0$$

という初等的な証明もある.

(6) $a(a + b - 2c)^2 + b(b + c - 2a)^2 + c(c + a - 2b)^2 \geqq 0$ を展開しても証明できる.

(7) $s = 1/2$ として，(左辺)−(右辺) $= 4S_3 - 15S_{2,1} + 12S_{1,2} - 3U = 4\mathfrak{f}_2 \geqq 0$ である. □

最後に，斉次とは限らない 3 次対称不等式については，後で述べる系 4.1.22 が役に立つことを注意しておく.

2.3. 4 次斉次不等式

2.3.2. 4 次巡回不等式の基本定理

$\mathcal{P}_4^c$, $\mathcal{P}_4^{c+}$ を決定したいのであるが，$\mathcal{P}_4^{c0}$, $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の構造のほうがずっと単純である．以下の定理は Cîrtoaje が 2009 年に証明したものである．彼の証明は解析学を利用したものであるが，現在では，第 6 章で説明する実代数幾何を使う証明のほうが簡明である.

定理 2.3.4. ($\mathcal{P}_4^{c0}$ の構造定理, [2], [10])

$$f(a,b,c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} - (p+q+r+1)US_1 \in \breve{\mathcal{H}}_4^0$$

をとる．任意の $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a,\ b,\ c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，

$$3(r+1) \geqq p^2 + pq + q^2$$

が成り立つことである．

$$\mathrm{disc}_4^{c0}(p,q,r) := 3(r+1) - (p^2 + pq + q^2)$$

を $\mathcal{P}_4^{c0}$ の**主判別式**という．

証明は第 6.6 節で行う． □

$\mathcal{P}_4^{c0}$ の端元は，以下のように記述できるが，あまり単純ではない．

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{p,q}^X(a,b,c) &:= S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} \\
&\quad + \left(\frac{p^2+pq+q^2}{3} - 1\right) S_{2,2} - \left(p + q + \frac{p^2+pq+q^2}{3}\right) US_1 \\
\mathfrak{g}_\infty^X(a,b,c) &:= S_{2,2} - US_1 \\
\mathfrak{p}(s,t) &:= -\frac{2S_{3,1}(s,t,1) - S_{1,3}(s,t,1) - U(s,t,1)S_1(s,t,1)}{S_{2,2}(s,t,1) - U(s,t,1)S_1(s,t,1)} \\
\mathfrak{g}_{s,t}^A(a,b,c) &:= \mathfrak{g}_{\mathfrak{p}(s,t),\mathfrak{p}(t,s)}^X(a,b,c)
\end{aligned}$$

とおく．ただし，$\mathfrak{p}(1,1) := -2$, $\mathfrak{p}(0,0) = \infty \in \mathbb{P}^1$, $\mathfrak{g}_{0,0}^A(a,b,c) = \mathfrak{g}_\infty^X(a,b,c)$ とする．Mathematica を使って

$$\mathfrak{g}_{s,t}^A(s,t,1) = 0, \quad \mathfrak{g}_{s,t}^A(1,1,1) = 0$$

であることが確認できる．これらは，$\mathcal{P}_4^{c0}$ の端元である．

定理 2.3.5. ($\mathcal{P}_4^{c0}$ の端元, [2], [10]) (1) $(s,\ t) \neq (0,0)$ に対して $f(s,t,1) = 0$ を満たす $\mathcal{P}_4^{c0}$ の端元は，$\mathfrak{g}_{s,t}^A(a,b,c)$ の正の定数倍である．

(2) $f(0,0,1) = 0$ を満たす $\mathcal{P}_4^{c0}$ の端元は，$\mathfrak{g}_\infty^X(a,b,c)$ の正の定数倍である．

証明は第 6.6 節で行う． □

$\mathcal{P}_4^{c0+}$ の構造は $\mathcal{P}_4^{c0}$ より複雑で，初等的な言い方で表現すると次のようになる．

定理 2.3.6. ($\mathcal{P}_4^{c0+}$ の構造定理, [2], [10])　上のように $\mathrm{disc}_4^{c0}(p,q,r) := 3(r+1)-(p^2+pq+q^2)$ とし，さらに，

$$\begin{aligned}&\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,q,r) := D_4(1,p,r,q,1)\\&= p^2q^2r^2 - 4p^3q^3 + 18p^3qr + 18pq^3r - 4p^2r^3 - 4q^2r^3\\&\qquad - 27p^4 - 27q^4 + 16r^4 - 6p^2q^2 - 80pqr^2\\&\qquad + 144p^2r + 144q^2r - 192pq - 128r^2 + 256\end{aligned}$$

とおく．ここで D_4 は refadza で定義した 4 次方程式の判別式である．

$$f(a,b,c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} - (1+p+q+r)US_1 \in \breve{\mathcal{H}}_4$$

について，任意の $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a,\ b,\ c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (1) 〜 (6) のいずれかが成立することである．

(1) $r \geqq -2,\ p \leqq -2\sqrt{r+2},\ p+q \geqq 0,$ かつ $\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,q,r) \leqq 0$
(2) $r \geqq -2,\ q \leqq -2\sqrt{r+2},\ p+q \geqq 0,$ かつ $\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,q,r) \leqq 0$
(3) $r \geqq -2,\ -\sqrt{r+4} \leqq p+q \leqq 0,\ p \geqq -2\sqrt{r+2},\ q \geqq -2\sqrt{r+2},$ かつ $\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,q,r) \geqq 0$
(4) $r \geqq -2,\ p \geqq -2\sqrt{r+2},\ q \geqq -2\sqrt{r+2},$ かつ $p+q \geqq 0$
(5) $r \geqq 0,$ かつ $\mathrm{disc}_4^{c0}(p,q,r) \geqq 0$
(6) $r \leqq -2,\ p+q \geqq 0$ かつ $\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,q,r) \leqq 0$

証明は第 6.6 節で行う．$\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,\ q,\ r)$ を $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の**端判別式**という．第 6 章で説明するが，$\mathrm{disc}_4^{c0+}(p,\ q,\ r)$ は $\mathcal{P}_4^{c+}$ の端判別式でもある．$\mathcal{P}_4^{c0}$ の主判別式 $\mathrm{disc}_4^{c0}(p,\ q,\ r)$ は $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の主判別式でもある．$\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元は，以下の定理のようになる．

定理 2.3.7. ($\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元, [2], [10])　上のように $\mathfrak{g}_{p,q}^X,\ \mathfrak{g}_\infty^X$ 等を定め，さらに，

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_s(a,b,c) &:= S_{3,1} + s^2S_{1,3} - 2sS_{2,2} - (s-1)^2US_1\\\mathfrak{h}_\infty(a,b,c) &:= S_{1,3} - US_1\end{aligned}$$

とおく．$\mathcal{P}_4^{c0+}$ は 4 次元の凸錐であって，以下が成立する．

(1) $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元は，$\mathfrak{g}_{s,t}^A$ $(\exists s \geqq 0,\, \exists t \geqq 0)$, または $\mathfrak{h}_s$ $(\exists s \geqq 0)$, $\mathfrak{h}_\infty$ の正の定数倍である．

(2) $\mathcal{P}_4^{c0+}$ に属する多項式 $f(a,\, b,\, c)$ で，$f(s,\, t,\, 1) = 0$ $(s > 0,\, t > 0)$ を満たすものは，$\mathfrak{g}_{s,t}^A$ の正の定数倍である．

(3) $\mathcal{P}_4^{c0+}$ に属する多項式 $f(a,\, b,\, c)$ で，$f(0,\, s,\, 1) = 0$ $(s > 0)$ を満たすものは，ある $t_1,\, t_2 \geqq 0$ により，

$$f = t_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A(a,b,c) + t_2 \mathfrak{h}_s(a,b,c)$$

と書くことができる．

証明は第 6.6 節で行う．

系 2.3.8. 3 変数 4 次対称多項式

$$f(a,b,c) = S_4 + pT_{3,1} + qS_{2,2} - (1 + 2p + q)US_1$$

について考える．

(1) 任意の実数 $a,\, b,\, c$ に対して $f(a,\, b,\, c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，$\mathrm{disc}_4^{c0}(p,p,q) = 3(q + 1 - p^2) \geqq 0$ が成り立つことである．

(2) 任意の非負実数 $a,\, b,\, c$ に対して $f(a,\, b,\, c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (i) または (ii) の一方が成り立つことである．

  (i) $p \leqq -1$ かつ $r + 1 \geqq q^2$

  (ii) $p > -1$ かつ $2p + r + 2 \geqq 0$

$\mathfrak{g}_{s,t}^A(a,b,c)$ が対称多項式となる条件，つまり，$\mathfrak{p}(s,t) = \mathfrak{p}(t,s)$ となる条件を考える．

$$\mathfrak{p}(s,t) - \mathfrak{p}(t,s) = -3\frac{(s-1)(t-1)(s-t)(s+t+1)}{S_{2,2}(s,t,1) - S_{2,1,1}(s,t,1)}$$

なので，$s = 1,\, t = 1,\, s = t$ または $s + t + 1 = 0$ の場合に限って $\mathfrak{g}_{s,t}^A(a,b,c)$ は対称多項式になる．

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p}(s,s) &= -\frac{s+1}{s} \\
\mathfrak{p}(s,1) &= \mathfrak{p}(1,s) = -s - 1 \\
\mathfrak{p}(s,-s-1) &= 1
\end{aligned}$$

であることに注意しよう．また，

$$\mathfrak{g}_{p,p}^X = S_4 + pT_{3,1} + (p^2-1)S_{2,2} - (p^2+2p)US_1$$

である．

定理 2.3.9. 定理 2.3.4, 定理 2.3.6 の記号を用いる．また，$k \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_k^X(a,b,c) &:= \bigl(k(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)\bigr)^2 \\
&= k^2 S_4 - 2kT_{3,1} + (2k^2+1)S_{2,2} - (2k-2)US_1 \\
k(s,t) &= \frac{S_{1,1}(s,t,1)}{S_2(s,t,1)} = \frac{st+s+t}{s^2+t^2+1} \\
\mathfrak{e}_{s,t}^A(a,b,c) &:= \mathfrak{e}_{k(s,t,1)}^X(a,b,c)
\end{aligned}$$

とおく．また $f(a,b,c)$ は 4 次斉次巡回多項式とする．

(1) $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $(s,\, t) \neq (1,\, 1)$ は定数とする．$f(s,t,1)=0$ を満たし，かつ，任意の $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ を満たすような 4 次斉次巡回多項式 f は，ある実数 $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ をうまく選んで，

$$f = \alpha \mathfrak{g}_{s,t}^A + \beta \mathfrak{e}_{s,t}^A$$

と表すことがせきる．

(2) (Cirtoaje-Zhou 予想) $f \in \breve{\mathfrak{H}}_4^c$ をとり，

$$\begin{aligned}
&f(a,b,c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} + vUS_1 \\
&\alpha_f := 1+p+q+r+v = \frac{1}{3}f(1,1,1) \\
&\beta_f := 6+3p+3q+2r+v \\
&\gamma_f := 2(1+p+q) \\
&\delta_f := 2+2r-v-(p^2+pq+q^2+p+q) \\
&\varphi_f(x) := 2\sqrt{\alpha_f}x^3 - \beta_f x^2 + \gamma_f\sqrt{\alpha_f}x + \delta_f
\end{aligned}$$

とおく．このとき，任意の $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の (i), (ii) のいずれかが成立することである．

(i) $\alpha_f \geqq 0$，かつ，ある $x \in (-\sqrt{3},\, \sqrt{3}\,)$ が存在して $\varphi_f(x) \geqq 0$ が成り立つ．

(ii) $f = (S_2 - \kappa S_{1,1})^2$ $(\exists \kappa \in \mathbb{R})$ の形である．すなわち，$p = q$ かつ $p^2 - 4p = 4r$ かつ $p^2 + 2p = 2v$ が成り立つ．

また，(ii) を満たさない f が $\mathcal{P}_4^{c+}$ に属するための必要十分条件は，$\varphi_f(x) \geqq 0$ を満たす x が開区間 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 内にただ 1 つだけ存在することである．

証明は第 6.6 節で行う．

定理 2.3.10. ($\mathcal{P}_4^{c+}$ の構造定理) 定理 2.3.4, 定理 2.3.6, 定理 2.3.9 の記号を用いる．$f(a, b, c)$ は 4 次斉次巡回多項式とする．

(1) 定数 $s > 0$, $t > 0$, $(s, t) \neq (1, 1)$ を固定する．$f(s, t, 1) = 0$ を満たし，かつ，任意の a, b, $c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a, b, c) \geqq 0$ を満たすような 4 次斉次巡回多項式 f は，ある実数 $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ をうまく選んで，

$$f = \alpha \mathfrak{g}_{s,t}^A + \beta \mathfrak{e}_{s,t}^A$$

と表すことがせきる．

(2) 定数 $s \geqq 0$ を固定する．$f(0, s, 1) = 1$ を満たし，かつ，任意の a, b, $c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a, b, c) \geqq 0$ を満たすような 4 次斉次巡回多項式 f は，ある実数 $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0$, $\alpha_3 \geqq 0$, $\alpha_4 \geqq 0$ をうまく選んで，

$$f = \alpha_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 U S_1$$

と表すことがせきる．

(3) 任意の a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a,\ b,\ c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (i) 〜 (iv) のいずれかが成立することである．

(i) $\alpha_f \geqq 0$ かつ，ある $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ が存在して $\varphi_f(x) \geqq 0$ が成り立つ．

(ii) $p = q$ かつ $p^2 - 4p = 4r$ かつ $p^2 + 2p = 2v$ が成り立つ．

(iii) $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ の実数解 $s \geqq 0$ で，

$$\gamma_3 := r + 3s^2 + 2ps - \frac{1}{s^2}$$
$$\delta_3 := v + (2s + p)(s - 1)(s^2 + 1) + \frac{p}{s}$$

とおくとき，$\gamma_3 \geqq 0$, $\gamma_3 + \delta_3 \geqq 0$ を満たす s が存在する．

(iv) $2s^4+ps^3-qs-2=0$ の実数解 $s \geqq 0$ で，

$$t := 2s^2+ps$$
$$\gamma_4 := r+3s^2+2ps-\frac{1}{s^2}$$
$$\delta_4 := v+(s-1)^2p+\frac{2s^5-3s^4+s^2-2s+1}{s^2}$$

とおくとき，$t \geqq 1, \gamma_4 \geqq 0$ かつ $\gamma_4 \geqq \delta_4$ が成り立つようなものが存在する．この s は (自動的に) $\dfrac{\sqrt{p^2+8}-p}{4} \leqq s \leqq \dfrac{\sqrt{q^2+8}+q}{2}$ を満たす.

証明は第 6.6 節で与える．

2.4. 5 次斉次不等式

2.4.1. 5 次対称不等式の基本定理

補題 2.4.1. $f(a,a,a)=0$ を満たす 5 次斉次対称多項式

$$f(a,b,c) := S_5+pT_{4,1}+qT_{3,2}+rUS_2-(1+2p+2q+r)US_{1,1} \in \breve{\mathfrak{H}}_5^{s0}$$

に対し，

$$f(x,1,0) \geqq 0 \qquad (\forall x \geqq 0)$$

であるための必要十分条件は，次の (1), (2) のいずれか一方が成立することである．

(1) $p \geqq -3$ かつ $p+q+1 \geqq 0$

(2) $p < -3$ かつ $4q \geqq (p+1)^2+4$

証明. まず，$f(1,1,0)=2(p+q+1)$ なので，$p+q+1 \geqq 1$ は必要条件である．

$$\begin{aligned} f(x,1,0) &= (x^5+1)+p(x^4+1)+q(x^3+x^2) \\ &= (1+x)(1+(p-1)x+(1-p+q)x^2+(p-1)x^3+x^4) \end{aligned}$$

なので，$\alpha := p-1, \beta := 1-p+q$ とし，

$$\begin{aligned} g(x) &:= (1+(p-1)x+(1-p+q)x^2+(p-1)x^3+x^4) \\ &= x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\alpha x+1 \end{aligned}$$

$$= x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\alpha\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+(\beta-2)\right)$$

を考察する．$y = x + 1/x$ とおくと，

$$\begin{aligned}&「f(x,1,0) \geqq 0\ (\forall x \geqq 0)」\\ \Longleftrightarrow\ &「g(x) \geqq 0\ (\forall x \geqq 0)」\\ \Longleftrightarrow\ &「h(y) := y^2+\alpha y+(\beta-2) \geqq 0\ (\forall y \geqq 2)」\end{aligned}$$

が成立する．$h(y) = \left(y+\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\dfrac{4\beta-8-\alpha^2}{4}$ に注意して，この 2 次関数の $y \geqq 2$ における最小値を考察する．

$\alpha \geqq -4$ (つまり $p \geqq -3$) のときは，

$$h(2) = 2\alpha+\beta+2 = p+q+1 = f(1,1,0)$$

が最小値であるので，(1) の条件を得る．

なお，$p+q+1=0$ のとき，$f(x,\,1,\,0) = (x-1)^2((x-1)^2+(p+3)x)$ なので，$f(x,\,1,\,0)=0$ となるのは $x=1$ の場合に限る．

$\alpha < -4$ (つまり $p < -3$) のときは，

$$h\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4\beta-8-\alpha^2}{4} = \frac{4q-(p+1)^2-4}{4}$$

が最小値であるので，(2) の条件を得る．ここで，$4q \geqq (p+1)^2-4$ ならば $p+q+1 \geqq 1$ であることに注意する．

なお，$4q = (p+1)^2+4$ のとき，

$$f(x,1,0) = \frac{(2x^2+(p-1)x+2)^2}{4}$$

なので，$f(x,\,1,\,0)=0$ となるのは，$x = \dfrac{1-p\pm\sqrt{(1-p)^2-16}}{4}$ の場合に限る． □

補題 2.4.2. $f(a,b,c) := S_5+pT_{4,1}+qT_{3,2}+rUS_2-(1+2p+2q+r)US_{1,1} \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}$ に対し，

$$\begin{aligned}d(p,q,r) := {}& 4(p+1)(p-2)(2p-1)-9(q(2p-1)+r(p+1))\\ &-\left((2p-1)^2-3(2q+r+2)\right)^{3/2}\end{aligned}$$

とおく．このとき，

$$f(x,1,1) \geqq 0 \qquad (\forall x \geqq 0)$$

であるための必要十分条件は，$p+q+1 \geqq 0$ かつ，次の (1) 〜 (4) のいずれかが成立することである．

(1) $p \geqq -1$ かつ $4p+2q+r+3 \geqq 0$

(2) $p < -1$ かつ $(2p-1)^2 < 3(2q+r+2)$

(3) $4p+2q+r+3 < 0$ かつ $d(p,q,r) \geqq 0$

(4) $p < -1$ かつ $(2p-1)^2 \geqq 3(2q+r+2)$ かつ $d(p,q,r) \geqq 0$

証明. $f(0,1,1) = 2(p+q+1)$ なので，$p+q+1 \geqq 1$ は必要条件である．

$$f(x,1,1) = (x-1)^2\bigl(x^3+2(p+1)x^2+(4p+2q+r+3)x+2(p+q+1)\bigr)$$

なので，

$$g(x) := x^3+2(p+1)x^2+(4p+2q+r+3)x+2(p+q+1)$$

とおく，$g'(x) = 3x^2+4(p+1)x+(4p+2q+r+3)$ である．

Case 1: 2 次方程式 $g'(x) = 0$ が正の実数解を持たない場合を考える．

放物線 $y = g'(x)$ の軸が $x = -\dfrac{2(p+1)}{3}$ であることを考えると，2 次方程式 $g'(x) = 0$ が正の実数解を持たないための必要十分条件は,「$p+1 \geqq 0$ かつ $g'(0) \geqq 0$」または「$p+1 < 0$ かつ $g'(-2(p+1)/3) > 0$」である．ここで，

$$g'\left(-\frac{2(p+1)}{3}\right) = \frac{3(2q+r+2)-(2p-1)^2}{3}$$

である．$g'(x) = 0$ が正の実数解を持たない場合には，$x > 0$ で $g'(x) > 0$ なので，$x \geqq 0$ で $g(x) \geqq 0$ であるための必要十分条件は $g(0) \geqq 0$ である．よって，条件 (1), (2) を得る．

Case 2: 2 次方程式 $g'(x) = 0$ が正の実数解 x_0 を持つ場合を考える．

そのためには，$g'(0) < 0$ または「$p+1 < 0$ かつ $g'(-2(p+1)/3) \leqq 0$」であることが必要十分である．ただし，$g'(0) < 0$ ならば $g'(-2(p+1)/3) < 0$ なので，$g'(x) = 0$ が正の実数解 x_0 を持てば，$3(2q+r+2) < (2p-1)^2$

である．いずれにせよ，一般に，$3(2q+r+2) < (2p-1)^2$ の場合，2 次方程式 $g'(x)=0$ の小さくないほうの根は，

$$x_0 = \frac{\sqrt{(2p-1)^2-3(2q+r+2)}-2(p+1)}{3}$$

である．$g(x)$ は $x=x_0$ のとき極小になり，$x \geqq x_0$ で単調増加である．よって，$g(0) \geqq 0$ かつ $g(x_0) \geqq 0$ であることが，任意の $x \geqq 0$ に対して $g(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件である．$27g(x_0) = 2d(p,q,r)$ なので，条件 (3), (4) を得る． □

定理 2.4.3. $f(a,a,a)=0$ を満たす 5 次斉次対称多項式

$$f(a,b,c) := S_5 + pT_{4,1} + qT_{3,2} + rUS_2 - (1+2p+2q+r)US_{1,1} \in \breve{\mathfrak{H}}_5^{s0}$$

に対し，

$$\begin{aligned} d_5(p,q,r) := &\Big(4(p+1)(p-2)(2p-1) - 9q(2p-1) - 9r(p+1)\Big)^2 \\ &- \Big((2p-1)^2 - 3(2q+r+2)\Big)^3 \end{aligned}$$

とおく．このとき，任意の $a \geqq 0, b \geqq 0, c \geqq 0$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の (1) 〜 (4) のいずれかが成立することである．

(1) $p \geqq -1$ かつ $p+q+1 \geqq 0$ かつ $2p+r+1 > 0$

(2) $p \geqq -1$ かつ $p+q+1 \geqq 0$ かつ $2p+r+1 \leqq 0$ かつ $d_5(p,q,r) \geqq 0$

(3) $-3 \leqq p < -1$ かつ $p+q+1 \geqq 0$ かつ $d_5(p,q,r) \geqq 0$ かつ $(q,r) \neq (-p-1,\, -2p-1)$

(4) $p \leqq -3$ かつ $4q \geqq (p+1)^2+4$ かつ $d_5(p,q,r) \geqq 0$

証明. 定理 2.3.1 より，補題 2.4.1, 補題 2.4.2 の条件を同時に満たす (p, q, r) の範囲 $\breve{\mathfrak{P}}_5^{s0+}$ を考えればよい．いま，p を定数として固定して，p における $\breve{\mathfrak{P}}_5^{s0+}$ の切り口

$$S_{5,p}^+ = \left\{(q,r) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (p,q,r) \in \breve{\mathfrak{P}}_5^{s0+}\right\}$$

を考える．

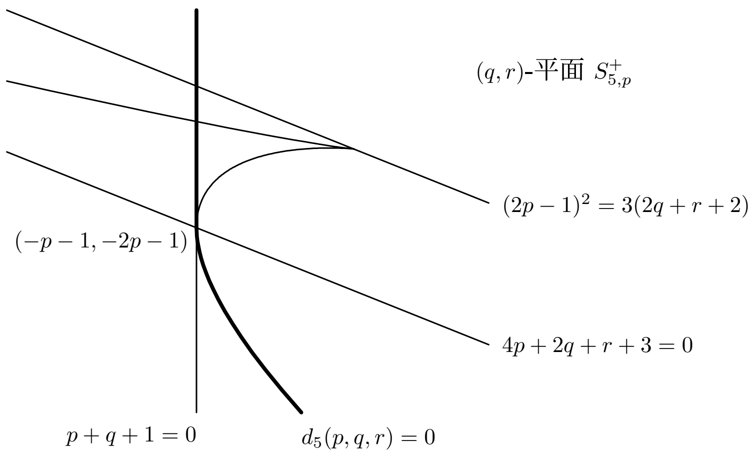
$(q,\,r)$-平面 $S^+_{5,p}$ 上において，曲線 $d_5(p,q,r)=0$ はパラメータ表示

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{27(2t+1)^3}\cdot\Big(-3^6t^3+(p+1)\Big(4(8p^2-65p+116)t^3 \\ &\qquad +6(8p^2-38p-19)t^2+3(8p^2-11p-73)t+(4p^2+8p-23)\Big)\Big) \\ r &= \frac{1}{27(2t+1)^3}\cdot\Big(-8(2p-1)^3t^3-3(2p-1)^2(8p+23)t^2 \\ &\qquad -6(2p-1)(p+4)(4p+7)t-(p+4)^2(8p+5)\Big) \end{aligned}$$

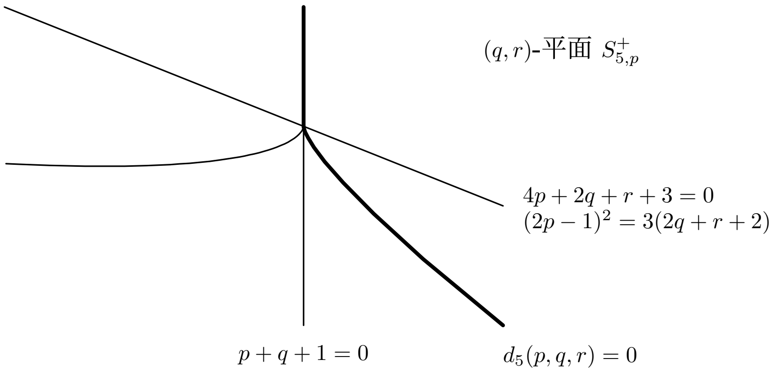
を持つ 3 次有理曲線で，点

$$(q,r)=\left(\frac{4p^3+12p^2-15p-23}{27},\ -\frac{(2p-1)^3}{27}\right)$$

に単純尖点を持っている．この尖点は直線 $(2p-1)^2=3(2q+r+2)$ 上にある．曲線 $d_5(p,q,r)=0$ と直線 $p+q+1=0$ の接点は $(q,r)=(-p-1,\,-2p-1)$ で，接点でないほうの交点は $(q,r)=(-p-1,\,p^2)$ である．このことに注意して，$p>-1,\,p=-1,\,p<-1$ の場合に分けてグラフを描いてみる．

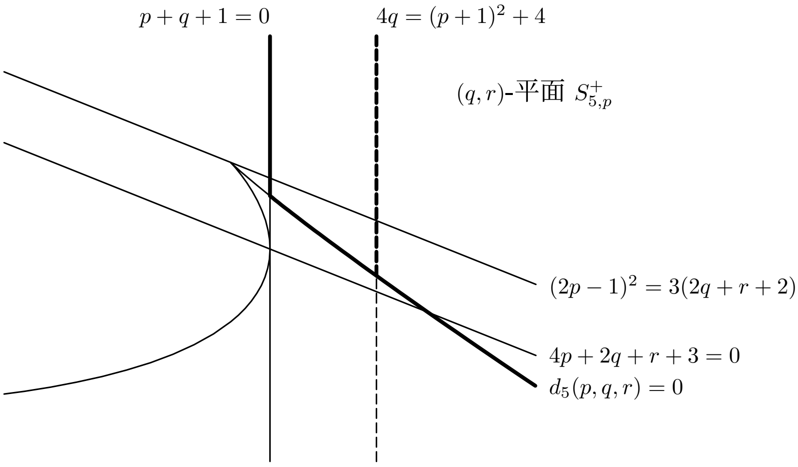


$p>-1$ の場合



$p=-1$ の場合

p の値によって，尖点と直線 $p+q+1=0$ の位置関係が変化することに注意しよう.



$p<-1$ の場合

$p<-1$ の場合，点 $(q,r)=(-p-1,\,-2p-1)$ は条件

$$4(p+1)(p-2)(2p-1)-9(q(2p-1)+r(p+1)) \geqq 0$$

より $S^+_{5,p}$ に属さない．あとは，細かい説明を要しないであろう. □

第 6 章

実代数幾何の応用

本章は，ガロア理論や代数幾何学の初歩的知識を仮定して議論を進める．

6.1.　実閉体と実代数多様体

6.1.1.　実閉体

定義 6.1.1.　K は体であり全順序集合でもあり，任意の $a, b, c, d \in K$ に対して，

(1) $a \geqq b$, $c \geqq d$ ならば $a + c \geqq b + d$.

(2) $a \geqq b$ ならば $-a \leqq -b$.

(3) $a > 0$, $b > 0$ ならば $ab > 0$.

が成り立つとき，K は**順序体**であるという．

K_1, K_2 が順序体のとき，写像 $f\colon K_1 \to K_2$ が体としての準同型 (中への同型) 写像であり，かつ「$a > b$ ならば $f(a) > f(b)$」を満たすとき，**順序準同型**であるという．同型も同様．

1 つの体を順序体にするような順序は一通りとは限らない．例えば $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ においては，通常の順序 $\geqq$ 以外に,「$a + b\sqrt{2} \succeq c + d\sqrt{2} \iff a - b\sqrt{2} \geqq c - d\sqrt{2}$」として順序 $\succeq$ を定めると，$\succeq$ についても K は順序体になる．

定義 6.1.2. K は体とする．部分集合 $X \subset K$ に対して，

$$\Sigma(X) := \left\{ a_1^2 + \cdots + a_n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}.\ a_1, \ldots, a_n \in X \right\}$$

と書くとにする．$-1 \notin \Sigma(K)$ のとき，K は**実体**であるという．

K が実体であって，任意の代数拡大体 $L \supsetneqq K$ について L が実体にならないとき，K は**実閉体**であるという．

命題 6.1.3. (1) 順序体は実体である．

(2) 順序体や実体の標数は 0 である．

証明. (1) K は順序体であると仮定する．$a \in K$ に対し，$a > 0$ ならば順序体の定義の (3) から $a^2 > 0$ であり，$a < 0$ ならば $-a > 0$ だから $a^2 = (-a)^2 > 0$ である．よって，$a \in K$ ならば $a^2 \geqq 0$ である．これより，$a \in \Sigma(K)$ ならば $a \geqq 0$ である．$1 = 1^2 > 0$ だから $-1 < 0$ であり，$-1 \notin \Sigma(K)$ である．

(2) 体 K の標数が素数 $p > 0$ であるとすると，$-1 = \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{p-1\text{ 個}} \in \Sigma(K)$ だから K は実体でない．(1) より K は順序体でない． □

命題 6.1.4. K は標数 0 の体とする．

(1) $a, b \in \Sigma(K)$ ならば $a + b \in \Sigma(K)$ かつ $ab \in \Sigma(K)$.

(2) $a \in \Sigma(K), a \neq 0$ ならば $1/a \in \Sigma(K)$.

(3) K が実体でないならば $\Sigma(K) = K$.

証明. (1) $a = a_1^2 + \cdots + a_n^2, b = b_1^2 + \cdots + b_m^2$ ならば，$ab = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i b_j)^2 \in \Sigma(K)$ である．$a + b \in \Sigma(K)$ は自明.

(2) $\dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a} \right)^2 \in \Sigma(K)$.

(3) K が実体でないとすると，$-1 \in \Sigma(K)$ である．任意の $a \in K$ をとると，

$$a = \left(\frac{a+1}{2} \right)^2 + (-1) \left(\frac{a-1}{2} \right)^2 \in \Sigma(K)$$

なので，$K = \Sigma(K)$. $\square$

命題 6.1.5. K は実閉体で，$a \in K$ とする．

(1) もし $a \in \Sigma(K)$ ならば，ある $b \in K$ が存在して $a = b^2$ と書ける．

(2) もし $a \notin \Sigma(K)$ ならば，ある $b \in K$ が存在して $a = -b^2$ と書ける．

(3) $-\Sigma(K) = \{a \in K \mid -a \in \Sigma(K)\}$ とおくと，

$$K = \Sigma(K) \cup (-\Sigma(K)), \quad \Sigma(K) \cap (-\Sigma(K)) = \{0\}$$

である．

(4) $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である．

証明. (1) $\overline{K}$ を K の代数閉包とし，$a \in K$ に対し $\sqrt{a} \in \overline{K}$ を考える．$\sqrt{a} \notin K$ と仮定してみる．$K(\sqrt{a}) \supsetneqq K$ だから $K(\sqrt{a})$ は実体でない．よって，ある $n \in N$ と $b_i + c_i\sqrt{a} \in K(\sqrt{a})$ $(\exists b_i, \exists c_i \in K.\ i = 1, \ldots, n)$ により，

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + c_i\sqrt{a}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2\sqrt{a}\sum_{i=1}^{n} b_i c_i$$

と書ける．$B := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \in \Sigma(K) \subset K$, $C := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \in \Sigma(K) \subset K$ だから，$\sqrt{a} \notin L$ の係数は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i c_i = 0$. よって，$1 + B + aC = 0$ で $1 + B > 0$ だから前命題より $-a = (1 + B)/C \in \Sigma(K)$ である．$a \neq 0$ であるが，もし $a \in \Sigma(K)$ ならば，前命題から $-1 = (-a)/a \in \Sigma(K)$ となり矛盾する．

対偶をとれば，$a \in \Sigma(K)$ ならば $\sqrt{a} \in K$ である．

(2) $b = -a$ とおいて上の議論を使うと，もし $\sqrt{-a} \notin K$ ならば $a = -b \in \Sigma(K)$ となる．対偶を取ると，$a \notin \Sigma(K)$ ならば $\sqrt{-a} \in K$ である．

(3) 上の議論から，$a \in K$ ならば $\sqrt{a} \in K$ または $\sqrt{-a} \in K$ である．$\sqrt{a} \in K$ ならば $a \in \Sigma(K)$ であり，$\sqrt{-a} \in K$ ならば $a \in (-\Sigma(K))$ なので，$\Sigma(K) \cup (-\Sigma(K)) = K$ である．

$a \in \Sigma(K) \cap (-\Sigma(K))$ を取る．$a = -b^2$ $(\exists b \in K)$ と書ける．もし，$a \neq 0$ ならば $b \neq 0$ で，$a \in \Sigma(K)$ だから，$-1 = a/b^2 \in \Sigma(K)$　となり矛盾する．

(4) $n=1$ のときは自明．$n \geqq 2$ のとき，$a_1 \neq 0$ とすると，$-1 = \sum_{i=2}^{n}(a_i/a_1)^2 \in \Sigma(K)$ となり矛盾する．よって，$a_1 = 0$ である．同様に，$a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ である．　□

実閉体とは限らない実体 K の中には $\Sigma(K) \cup (-\Sigma(K)) \subsetneqq K$ となるものもある．例えば有理関数体 $K = \mathbb{R}(X)$ は実体であるが，$X \notin \Sigma(\mathbb{R}(X)) \cup (-\Sigma(\mathbb{R}(X)))$ である．

命題 6.1.6. K が実閉体ならば，K を順序体にするような順序が一意的に存在する．

証明. $a, b \in K$ に対して，「$a \geqq b \Longleftrightarrow a - b \in \Sigma(K)$」によって $\geqq$ を定める．$\Sigma(K) \cup (-\Sigma(K)) = K$ なので，任意の $a, b \in K$ に対し $a \geqq b$ または $b \geqq a$ の少なくとも一方が成り立つ．$\Sigma(K) \cap (-\Sigma(K)) = \{0\}$ なので，$a \geqq b$ かつ $b \geqq a$ ならば $a = b$ が成り立つ．$a \geqq b, b \geqq c$ ならば $a - c = (a-b) + (b-c) \in \Sigma(K)$ なので $a \geqq c$ であり，$\geqq$ は K 上の全順序であることがわかる．さらに，$\geqq$ が定義 6.1.1(1) ～ (3) を満たすことも $\Sigma(K)$ の性質からすぐわかる．よって，K は $\geqq$ について順序体になる．

K を順序体とするような別の順序 $\succeq$ が存在したと仮定する．$a \succeq b$ ならば $a - b \succeq 0$ である．$\sqrt{a-b} \in K$ または $\sqrt{b-a} \in K$ であるが，もし $\sqrt{b-a} \in K$ ならば $b - a = c^2$ $(\exists c \in K)$ となり，定義 6.1.1(3) より $b - a = c^2 \succeq 0$ でなければならない．よって $a = b$ となり，$\sqrt{a-b} \in K$ である．いずれにせよ $\sqrt{b-a} \in K$ が成立し，$b - a \in \Sigma(K)$ がわかる．よって，$a \geqq b$ である．同様に，$b \succeq a$ ならば $b \geqq a$ なので，$a \succeq b$ と $a \geqq b$ は同値になる．　□

定理 6.1.7. K は体で，$a \in K, a \notin \Sigma(K)$ であると仮定する．すると，K の代数拡大体であるような実閉体 K^* で，K^* 上の順序で $a < 0$ となるようなものが存在する (一意的とは限らない)．特に，実体は (一般には複数の) 順序体の構造を持つ．

証明. $\overline{K}$ を K の代数閉包とし，

$$\mathcal{A} := \{L \mid L \text{ は体で } K \subset L \subset \overline{K} \text{ で } a \notin \Sigma(L)\}$$

とおく．$\mathcal{A}$ は包含関係に関して空でない帰納的順序集合であるので，Zorn の補題により極大元 L_1 を持つ．命題 6.1.4(3) より L^* は実体である．

$$\mathcal{B} := \{L \mid L \text{ は実体で } L_1 \subset L \subset \overline{K}\}$$

も帰納的順序集合だから極大元 K^* を持つ．$K^* \subsetneqq L \in \mathcal{B}$ となる L はないから K^* は実閉体である．K^* を順序体にするような順序 $>$ が一意的に存在する．この順序を L_1, K に制限して考える．

$\sqrt{-a} \notin L_1$ と仮定すると $L_1(\sqrt{-a}) \supsetneqq L_1$ だから，L_1 の極大性により $a \in \Sigma\left(L_1(\sqrt{-a})\right)$ である．よって，

$$a = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i + c_i\sqrt{-a}\right)^2 \quad (\exists n \in \mathbb{N}.\ \exists b_i, \exists c_i \in L_1)$$

と書ける．$B := \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, $C := \sum_{i=1}^{n} c_i^2$ とおくと $\sum_{i=1}^{n} b_i c_i = 0$ で $a = B - aC$ となる．命題 6.1.4 より $a = B/(C+1) \in \Sigma(L_1)$ となり矛盾する．よって，$\sqrt{-a} \in \mathrm{L}_1$ で $-a = \left(\sqrt{-a}\right)^2 > 0$ となる．この不等式は K^* で成立していて $a < 0$ である．□

定理 6.1.8. (1) K が実閉体ならば $K(\sqrt{-1})$ は代数閉体である．
(2) K が実体で，$K(\sqrt{-1})$ が代数閉体ならば，K は実閉体である．

証明. (1) K は実閉体とする．

(i) $f(x) \in K[x]$ が奇数次のモニック多項式ならば，$f(a) = 0$ を満たす $a \in K$ が存在することを $d := \deg f(x)$ に関する帰納法で証明する．

$d = 1$ ならば自明なので $d \geqq 3$ とする．$f(x)$ が可約ならば奇数次の既約因子を持つので，$f(X)$ が既約な場合に証明すればよい．K の代数閉包 $\overline{K}$ における $f(x) = 0$ の勝手な根 α を取るとき，$\alpha \notin K$ である．$K(\alpha) \supsetneqq K$ なので $K(\alpha)$ は実体でない．よって，ある $n \in \mathbb{N}$ と $b_1, \ldots, b_n \in K(\alpha)$ により，$-1 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

と書ける．また，$b_i \in K(\alpha) = K[\alpha]$ なので，$b_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} c_{ij}\alpha^j$ $(\exists c_{ij} \in K)$ と書ける．$g_i(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{d-1} c_{ij}x^j$, $g(x) = 1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} g_i(x)^2 \in K[x]$ とおく．$g(\alpha) = 0$ なので，$g(x)$ は $f(x)$ の倍数で，$g(x) = f(x)h(x)$ $(\exists h(x) \in K[x])$ と書ける．$\deg g(x)$ は偶数，$\deg f(x)$ は奇数なので，$\deg f(x)$ は奇数で，$\deg h(x) \leqq d-2$ である．帰納法の仮定から $h(\beta) = 0$ を満たす $\beta \in K$ が存在する．すると，$g(\beta) = 0$ となり，$-1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i(\beta) \in \Sigma(K)$ となって，K が実体であることと矛盾する．

(ii) $C := K(\sqrt{-1}\,)$ とし，$a \in C$ ならば $\sqrt{a} \in C$ であることを証明する．$a = b + c\sqrt{-1}$ $(a, b \in K)$ とする．

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+c^2}+b}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+c^2}-b}{2}}\right)^2 = b + c\sqrt{-1}$$

なので，$\sqrt{a} \in C$ である．

(iii) $C := K(\sqrt{-1}\,)$ とし，$\overline{K}$ を C を含む代数閉包とする．$\omega \notin K(\sqrt{-1}\,)$ となる $\omega \in \overline{K}$ が存在したと仮定して矛盾を導く．

C を含む K の有限次ガロア拡大 L を取る．ガロア群を $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ とし，G の 2-シロー群 S を取る．

$$M := \bigl\{a \in L \bigm| \text{任意の } \sigma \in S \text{ に対し } \sigma(a) = a\bigr\}$$

とすると，M の K 上の拡大次数は $[M : K] = \#G/\#S$ で，これは奇数である．勝手な $\alpha \in M$ の K 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ は奇数次であるが．(i) より $f_\alpha(x)$ は 1 次式であり，$M = K$ となる．よって，$G = S$ で $\#G = 2^n$ と書ける．$n \geqq 2$ と仮定して矛盾を導こう．

$$H = \bigl\{\sigma \in G \bigm| \text{任意の } a \in C \text{ に対し } \sigma(a) = a\bigr\}$$

とおく．$\#(G/H) = 2$ だから $\#H = 2^{n-1}$ である．p-群や巾零群の理論でよく知られているように，H の部分群 I で，$\#I = 2^{n-2}$ を満たすものが存在する．I に対応する C の 2 次拡大 $C(\sqrt{\alpha})$ $(\exists\alpha \in C)$ が存在する．し

かし，(ii) の結果から $\sqrt{\alpha} \in C$ で，これは矛盾である．よって，$n=1$ で $C = \overline{K}$ である．

(2) $K(\sqrt{-1})$ が代数閉体ならば，$K \subsetneqq L \subset K(\sqrt{-1})$ を満たす体 L は $L = K(\sqrt{-1})$ 以外になく，$K(\sqrt{-1})$ は実体でないから，K は実閉体である．　□

上の定理の (2) からわかるように，$\mathbb{R}$ は実閉体である．

6.1.2. Tarski-Seidenberg 原理

K は実閉体とする．$E := \{-1, 0, 1\}$ とし，$a \in K$ に対し，$a > 0$ なら $\mathrm{sign}(a) = 1$, $a = 0$ なら $\mathrm{sign}(a) = 0$, $a < 0$ なら $\mathrm{sign}(a) = -1$ と約束する．d を非負整数，s は自然数とする．E の元を成分とする s 行 $2N+1$ 列の行列全体の集合を $\widehat{W}_{s,N}$ とし，$W_{s,d} = \bigsqcup_{N=0}^{d} \widehat{W}_{s,N}$ とおく．一般に，d 次以下の 1 変数多項式 $0 \neq f_i(x) \in K[x]$ $(i = 1,\ldots, s)$ に対して，E の元を成分とする行列 $S(f_1, \ldots, f_s)$ を以下のように定義する．まず，$f_1,\ldots, f_s$ の K 内での根全体を $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$ とする．形式的に，$\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{N+1} = +\infty$ とおく．各開区間 $I_k := (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ $(k = 0,\ldots, N)$ 上では，$\mathrm{sign}(f_i(x))$ は一定であるので，その値を $\mathrm{sign}(f_i(I_k)) \in E$ と定める．$p_{i,k} := \mathrm{sign}(f_i(I_k))$, $q'_{i,k} := \mathrm{sign}(f_i(\alpha_k))$ とし，符号を並べた長さ $2s+1$ の行ベクトル $S(f_i)$ を

$$S(f_i) := \big(p_{i,0},\, q_{i,1},\, p_{i,1},\, q_{i,2},\, p_{i,2}, \ldots,\, p_{i,N-1},\, q_{i,N},\, p_{i,N}\big)$$

と定める．行ベクトル $S(f_1),\ldots, S(f_s)$ を縦に並べてできる s 行 $2N+1$ 列の符号の行列を $S(f_1, \ldots, f_s)$ と書く．ここで，$N \leqq sd$ だから，$S(f_1, \ldots, f_s) \in W_{s,d}$ である．

$K = \mathbb{R}$ の場合に次の補題を証明する．

補題 6.1.9.　写像 $\varphi : W_{2s,d} \longrightarrow W_{s,d}$ で以下の条件 $(*)$ を満たすものが存在する．

$(*)$ h, $f_2,\ldots, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が d 次以下の多項式 で $\deg h \geqq 1$ であるならば，h を h', $f_2,\ldots, f_s$ で割った余りをそれぞれ $r_1,\ldots, r_s$ とする

とき，

$$S(h, f_2, \ldots, f_s) = \varphi\big(S(h', f_2, \ldots, f_s, r_1, \ldots, r_s)\big)$$

が成り立つ．ここで，$h' = \dfrac{d}{dx}h(x)$ である．

証明．$w \in \widehat{W}_{s,N} \subset W_{2s,d}$ をとる．w の $(i,\, j)$-成分を w_{ij} $(1 \leqq i \leqq 2s,\ 1 \leqq j \leqq 2N+1)$ とする．$w = S(h',\, f_2,\ldots,\, f_s,\, r_1,\ldots,\, r_s)$ を満たす d 次以下の $h,\, f_2,\ldots,\, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が存在しないときは $\varphi(w)$ の値はどのように定めてもよいから，$w = S(h',\, f_2,\ldots,\, f_s,\, r_1,\ldots,\, r_s)$ を満たす d 次以下の $h,\, f_2,\ldots,\, f_s \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$ が存在する場合に，$h,\, f_2,\ldots,\, f_s$ を知らない状態で $\varphi(w)$ の値を定理の結論を満たすように定めることができることを示せばよい．

考察として，$h',\, f_2,\ldots,\, f_s,\, r_1,\ldots,\, r_s$ の $\mathbb{R}$ 内での根全体が $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_N$ であったと仮定してみよう．形式的に $f_1 = h'$ とおく．$1 \leqq p \leqq s$ に対し，$w_{p,2i} = 0$ であることと $f_p(\alpha_i) = 0$ は同値である．そこで

$$A := \big\{ i \;\big|\; 1 \leqq i \leqq N \text{ で，ある } 1 \leqq p \leqq s \text{ に対し } w_{p,2i} = 0 \big\}$$

とおき，$L = \#A$ とし，A の元全体を $i_1 < \cdots < i_L$ とおく．$\alpha_{i_1} < \cdots < \alpha_{i_L}$ が $h',\, f_2,\ldots,\, f_s$ の根全体である．

(I) $L = 0$ の場合．$f_1 = h',\, f_2,\ldots,\, f_s$ は根を持たず，w の各行は定符号 $(w_{ij} = \varepsilon_i \in E)$ である．すると h は単調増加または単調減少な多項式だから，根 α_1 を 1 個だけ持ち $N = 1$ である．v の 1 行目は $(-\varepsilon_1,\, 0,\, \varepsilon_1)$ で，i 行目 $(2 \leqq i \leqq s)$ は $(\varepsilon_i,\, \varepsilon_i,\, \varepsilon_i)$ である．このように定まる v を用いて $\varphi(w) = v$ と定めればよい．

(II) 以下，$L \geqq 1$ の場合を考える．今 $k \in \{1,\ldots,\, L\}$ が与えられたとき $w_{p,2i_k} = 0$ を満たす $p \in \{1,\ldots,\, s\}$ が存在する．このとき $f_p(\alpha_{i_k}) = 0$ である．$h = q_p f_p + r_p$ $(\exists q_p \in \mathbb{R}[x])$ なので，$h(\alpha_{i_k}) = r_p(\alpha_{i_k})$ が成り立つ．よって，$\mathrm{sign}(h(\alpha_{i_k})) = w_{s+p,i_k}$ である．後の便宜上，$u_{i_k} := w_{s+p,i_k}$ とおく．u_k は $w_{p,2i_k} = 0$ を満たす p の選び方に依存しないで定まる．以下，h の根のある場所をさがそう．

区間 $I_0 := (-\infty,\, \alpha_{i_1})$ では，$\mathrm{sign}(h'(x)) = w_{1,1} \neq 0$ である．よって，I_0

上の h の根は高々1 個である．$w_{1,1}w_{1,i_1}=1$ のとき $m_0:=1$, それ以外のとき $m_0:=0$ と定めると，$m_0=1$ のときに限って I_0 上に h の根がある．

区間 $I_k:=(\alpha_{i_k},\alpha_{i_{k+1}})$ $(1\leqq k\leqq L-1)$ 上では，$w_{1,i_k}w_{1,i_{k+1}}=-1$ のとき $m_k:=1$, それ以外のとき $m_k:=0$ と定めると，$m_k=1$ のときに限って I_k 上に h の根がある．I_k 上の h の根は高々1 つで重根ではない．

区間 $I_L:=(\alpha_{i_N},+\infty)$ 上では，$\mathrm{sign}(h'(x))=w_{1,2N+1}\neq 0$ である．そこで，$w_{1,2i_L}w_{1,2N+1}=1$ のとき $m_L:=1$, それ以外のとき $m_L:=0$ と定めると，$m_L=1$ のときに限って I_L 上に h の根がある．

$$B_1:=\left\{k\in\mathbb{Z}\,\middle|\,0\leqq k\leqq L \text{ かつ } m_k=1\right\}$$
$$B_2:=\left\{i\in A\,\middle|\,w_{2,2i}w_{3,2i}\cdots w_{s,2i}=0\right\}$$

とおき，$M=\#B_1+\#B_2$ とおく．$h, f_2,\ldots, f_s$ の相異なる根全体の個数は M である．B_1 の元 l を J_l と書く．B_2 の元 i はある $1\leqq k\leqq L$ により $i=i_k$ と書ける．$i<J_l\iff k\leqq l$, $J_l<i\iff l<k$ とし，B_1, B_2 上では通常の順序で，$B:=B_1\sqcup B_2$ に順序を定める．B は全順序集合になる．B の元は $h, f_2,\ldots, f_s$ の相異なる根全体 $\beta_1<\cdots<\beta_M$ に対応している．β_k に対応する B の元を $\psi(k)$ $(1\leqq k\leqq M)$ と書くことにする．$\psi\colon\{1,\ldots,M\}\to B$ は順序を保つ全単射である．$\psi(k)\in B_2$ なら $\beta_k=\alpha_{\psi(k)}$ であり，$\psi(k)=J_l\in B_1$ なら $\beta_k\in I_l$ である．

さて，$v:=\varphi(w)$ を定めよう．v は s 行 M 列行列とし，その (i,j)-成分を v_{ij} とする．

(i) $i=1$ の場合．これは，h の符号変化に対応する行である．

もし，$\psi(k)\in B_2$ $(1\leqq k\leqq M)$ ならば，$v_{1,2k}:=u_{\psi(k)}=\mathrm{sign}(h(\alpha_{\psi(k)}))$ とおく．もし，$\psi(k)\in B_1$ ならば $h(\beta_k)=0$ だから，$v_{1,2k}:=0$ とおく．

奇数列目については，まず，h の増減を考え，$v_{1,1}:=-w_{1,1}$ とおく．$1\leqq k\leqq M$ に対しては帰納的に以下のように定める．もし $v_{1,2k}\neq 0$ ならば β_k の前後で h の符号は変わらないので，$v_{1,2k+1}:=v_{1,2k}$ とおく．$v_{1,2k}=0$ の場合は $h(\beta_k)=0$ なので以下のようにする．$\psi(k)\in B_1$ ならば，$h'(\beta_k)\neq 0$ だから，h のグラフは β_k で横断的に x 軸を横切る．そこで，$v_{1,2k+1}:=-v_{1,2k-1}$ とおく．$\psi(k)\in B_2$ の場合は $\beta_k=\alpha_{\psi(k)}$ は h の重根なので少し難しい．もし，$w_{1,2\psi(k)-1}w_{1,2\psi(k)+1}=1$ ならば，h は β_k を奇数重根

にを持つから $v_{1,2k+1} := -v_{1,2k-1}$ とおく．もし，$w_{1,2\psi(k)-1}w_{1,2\psi(k)+1} = -1$ ならば，h は β_k を奇偶数重根にを持つから $v_{1,2k+1} := v_{1,2k-1}$ とおく．以上で，v の 1 行目が定まった．

(ii) $2 \leqq i \leqq s$ の場合．これは，f_i の符号変化に対応する行で，それは W の i 行目から簡単に決定できる．$1 \leqq k \leqq M$ に対し，もし $\psi(k) \in B_2$ ならば，$\beta_k = \alpha_{\psi(k)}$ だから，$v_{i,2k} := w_{i,2\psi(k)}$，$v_{i,2k-1} := w_{i,2\psi(k)-1}$，$v_{i,2k+1} := w_{i,2\psi(k)+1}$ とおけばよい．もし $\psi(k) \in B_1$ ならば $f_i(\beta_k) \neq 0$ なので，$\psi(k) = J_l$ とするとき，$v_{i,2k-1} = v_{i,2k} = v_{i,2k+1} := w_{i,2i_l+1}$ が $I_l \ni \beta_k$ 上での f_i の符号である．　□

上の補題において $h, f_2,\ldots, f_s \in \mathbb{Z}[x]$ ならば，$h', r_1,\ldots, r_s \in \mathbb{Z}[x]$ であることに注意する．半代数的集合の一般的定義は後で与えるが，さしあたって特別な場合を考える．

定義 6.1.10.　K は実閉体，$R \subset K$ は部分整域とする．ある $n \in \mathbb{N}$ と $m_1,\ldots, m_n \in \mathbb{N}$ と，n 変数多項式 $f_{i,j} \in R[x_1,\ldots, x_n]$ および不等号または等号 $*_{i,j} \in \{>, =\}$ をうまく選んで，

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \bigm| f_{i,j}(a_1, \ldots, a_n) *_{i,j} 0\big\}$$

と表せる集合 A を K^n 内の R-係数の**半代数的集合**という．$R = K$ の場合には「K-係数の」という語は省略する．

さらに，K を含む実閉体 L に対し，

$$A \otimes_K L := \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \big\{(a_1, \ldots, a_n) \in L^n \bigm| f_{i,j}(a_1, \ldots, a_n) *_{i,j} 0\big\}$$

と書くことにする．

補題 6.1.11.　K は実閉体とし，自然に $\mathbb{Z} \subset K$ と考える．

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=0}^{m_i} h_{i,k}(y_1, \ldots, y_n)x^k \in \mathbb{Z}[x, y_1, \ldots, y_n] - \{0\}$$

$(m_i = \deg_x f_i;\ i = 1,\ldots, s)$ とし，$d = \max\{m_1,\ldots, m_s\}$ とする．また，W は $W_{s,d}$ の部分集合とする．このとき，以下の条件を満たす $\mathbb{Z}$-係数の半代数的集合 $\mathcal{B}(W) \subset K^n$ が存在する．

$$S(f_1, \ldots, f_s) \in W \quad \Longleftrightarrow \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{B}(W)$$

ただし，S は $y_1,\ldots, y_n$ を定数と考え，f を x の多項式とみなして定義する．

証明. $m_1 \geqq \cdots \geqq m_s$ と仮定してよい．

非負整数が降順に並んだ有限列全体の集合を A とし，A に順序を以下のように定義する．$K = (k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_s)$, $L = (l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_t)$ とするとき，$k_1 = l_1,\ldots, k_{r-1} = l_{r-1}$, $k_r > l_r$ $(\exists r \in \mathbb{N})$ であるとき $K > L$ であると定義する．

$M := (m_1,\ldots, m_s) \in A$ に関する帰納法で証明する．

M が A の極小元の場合は，$m_1 = \cdots = m_s = 0$ で，$f_i = h_{i,0}(y_1,\ldots, y_n)$ だから，連立不等式 $S(h_{1,0}, \ldots, h_{s,0}) \in W$ によって定まる半代数的集合を $\mathcal{B}(W)$ とすればよい．

$M > \min A$ の場合を考える．$\deg_x f_1 \leqq \cdots \leqq \deg_x f_s$ と仮定してよい．$\deg_x f_s \geqq 1$ である．f_i 達は $\mathbb{Z}$-係数多項式だから，前補題を適用することができる．前補題の写像 $\varphi : W_{2s,d} \longrightarrow W_{s,d}$ を取り，$W' = \varphi^{-1}(W)$ とおく．すると，$S(f_1,\ldots, f_s) \in W$ と，$S(f_1', f_2,\ldots, f_s, r_1,\ldots, r_s) \in W'$ は同値となる．$(\deg_x f_1', \deg f_2,\ldots, \deg_x f_s, \deg_x r_1,\ldots, \deg_x r_s)$ を降順に並べ替えた順列 L は A の中で M より小さいから，帰納法の仮定によって，

$$S(f_1', \ldots, r_s) \in W' \quad \Longleftrightarrow \quad (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{B}(W')$$

を満たす半代数的集合 $\mathcal{B}(W')$ が存在する．そこで，$\mathcal{B}(W) = \mathcal{B}(W')$ とおけばよい． □

定理 6.1.12. (Tarski-Seidenberg の定理)　K は実閉体とし，一般に K の拡大体 L に対し，正射影 $\pi_L\colon L^{n+r} \to L^n$ を $\pi_L(a_1,\ldots, a_{n+r}) = (a_1,\ldots, a_n)$ で定める．

(1) A が K^{n+r} の内の $\mathbb{Z}$-係数の半代数的集合ならば，$\pi_K(A)$ も K^n 内の $\mathbb{Z}$-係数の半代数的集合である．

(2) A は K^{n+r} の内の K-係数の半代数的集合であるとする．すると，ある $n \in \mathbb{N}$ と $m_1,\ldots, m_n \in \mathbb{N}$ と，ある n 変数多項式 $g_{i,j} \in K[x_1,\ldots, x_n]$ および不等号または等号 $*_{i,j} \in \{>, =\}$ をうまく選べば，K を含む任意の実閉体 $L \supset K$ に対して，

$$\pi_L(A \otimes_K L) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \{(a_1, \ldots, a_n) \in L^n \mid g_{i,j}(a_1, \ldots, a_n) *_{i,j} 0\}$$

が成り立つ．言い替えれば，$\pi_L(A \otimes_K L) = \pi_K(A) \otimes_K L$ が成り立つ．

(3) A が K^{n+r} の内の K-係数の半代数的集合ならば，$\pi_K(A)$ も K^n 内の K-係数の半代数的集合である．

証明. (1) $r = 1$ の場合を考える．$\pi_K(x, y_1,\ldots, y_n) = (y_1,\ldots, y_n)$ と仮定しておく．ある $f_1,\ldots, f_s \in \mathbb{R}[x, y_1,\ldots, y_n]$ と，$\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_s \in E = \{-1, 0, +1\}$ によって，

$$A = \{(x, y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{sign}(f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \varepsilon_i \ (i = 1,\ldots, s)\}$$

と書ける場合に証明すれば十分である．$\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_s$ を縦に並べた列ベクトルを ε とする．$A \in W_{s,d}$ で A の少なくとも 1 つの列ベクトルが ε と一致するような A 全体の集合を W とする．このとき，$\varphi(A) = \mathfrak{B}(W)$ であり，前補題より，これは K^n 内の $\mathbb{Z}$-係数の半代数的集合である．

$r \geqq 2$ の場合は，$\pi_i \colon K^{n+i} \longrightarrow K^{n+i-1}$ $(i = 1,\ldots, r)$ を $\pi_i(a_1,\ldots, a_{n+i}) = (a_1,\ldots, a_{n+i-1})$ で定まる正射影とし，$\pi_K = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_r$ と分解して考えれば，$r = 1$ の場合に帰着される．

(2) $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l} \bigcap_{j=1}^{k_i} \{(b_1, \ldots, b_{n+r}) \in K^{n+r} \mid f_{i,j}(b_1, \ldots, b_{n+r}) *'_{i,j} 0\}$

$(f_{i,j}(x_1,\ldots,x_{n+r}) \in K[x_1,\ldots, x_{n+r}], *'_{i,n} \in \{>, =\})$ と表わせたとする．すべての $f_{i,j}(x_1,\ldots,x_{n+1})$ $(1 \leqq j \leqq k_i, 1 \leqq i \leqq l)$ に現れるすべての項の係数を適当な順序で 1 列に並べて $c_1,\ldots, c_N$ とし，$f_{i,j}$ に現れる係数 c_k を不定元 x_{n+r+k} $(1 \leqq k \leqq N)$ で置き換えてできる多項式を $F_{i,j}(x_1,\ldots, x_{n+r+N})$ とする．$F_{i,j}$ の各項の係数は 1 か 0 なので，$F_{i,j} \in \mathbb{Z}[x_1,\ldots, x_{n+r+N}]$ で

ある．

$$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{l} \bigcap_{j=1}^{k_i} \left\{ (b_1, \ldots, b_{n+r+N}) \in K^{n+r+N} \;\middle|\; F_{i,j}(b_1, \ldots, b_{n+r+N}) *'_{i,j} 0 \right\}$$

とおく．$\tilde{\pi}\colon L^{n+r+N} \to L^{N+n}$ を

$$\tilde{\pi}(a_1, \ldots, a_{n+r+N}) = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+r+1}, \ldots, a_{n+r+N})$$

で定める．(1) より，ある $n \in \mathbb{N}$ と $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ と，ある $G_{i,j} \in K[x_1, \ldots, x_{n+N}]$ および $*_{i,j} \in \{>, =\}$ をうまく選べば，

$$\tilde{\pi}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \left\{ (a_1, \ldots, a_{n+N}) \in K^{n+N} \;\middle|\; G_{i,j}(a_1, \ldots, a_{n+N}) *_{i,j} 0 \right\}$$

となる．そこで，$x_{n+r+1}, \ldots, x_{n+r+N}$ に $c_1, \ldots, c_N$ を代入して $g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) := G_{i,j}(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_N)$ とおき，

$$A_L = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m_i} \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in L^n \;\middle|\; g_{i,j}(a_1, \ldots, a_n) *_{i,j} 0 \right\}$$

とおけば，$\pi_L(A \otimes_K L) = A_L$ となる．

(3) は (2) で $L = K$ とした場合からわかる．　□

6.1.3.　Hilbert の第 17 問題

定理 6.1.13. (Artin-Lang の定理)　K と L は実閉体で L は K の拡大体であるとする．また，$A \subset K^n$ は K-係数の半代数的集合であるとする．このとき，もし $A \otimes_K L \neq \phi$ ならば $A \neq \phi$ である．

証明. n に関する帰納法で証明する．$n = 0$ ならば $K^0 = L^0 = \{0\}$ だから，$A \otimes_K L \neq \phi$ ならば $A = \{0\} \neq \phi$ である．

$n \geqq 1$ とし，$n-1$ まで定理は正しいと仮定する．$\pi_L\colon L^n \to L^{n-1}$ は正射影で，$\pi = \pi_L|_K\colon K^n \to K^{n-1}$ はその K^n への制限とする．$A \otimes_K L \neq \phi$ ならば $\pi_L(A \otimes_K L) \neq \phi$ である．前定理より $\pi_L(A \otimes_K L) = \pi(A) \otimes_K L$ が成り立つ．すると，帰納法の仮定から $\pi(A) \neq \phi$ である．よって，$A \neq \phi$ である．　□

ここで定理 1.3.9 の証明を与える．

定理 6.1.14. (Artin の定理)　$f_1(x_1,\ldots, x_n)$, $f_2(x_1,\ldots, x_n)$ は互いに素な実数係数多項式で，$f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{f_2(x_1,\ldots,x_n)}{f_1(x_1,\ldots,x_n)}$ とする．さらに，$f_1(a_1,\ldots, a_n) \neq 0$ であるような任意の有理数の組 $(a_1,\ldots, a_n)$ に対して $f(a_1,\ldots, a_n) \geqq 0$ が成り立つと仮定する．すると，ある自然数 r と，ある実数係数有理関数 $g_1(x_1,\ldots, x_n), \ldots, g_r(x_1,\ldots, x_n)$ が存在して，

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x_1,\ldots,x_n)^2$$

と書ける．さらに，f_1, f_2 が有理数係数多項式ならば，$g_1,\ldots, g_r$ を整数係数有理関数として選ぶことができる．

証明. 有理関数体 $K := \mathbb{R}(x_1,\ldots, x_n)$ は，$-1 \notin \Sigma(K)$ を満たすので実体である．

$f_0 := f f_1^2 = f_1 f_2 \in K[x_1,\ldots, x_n]$ を考える．多項式の連続性から任意の $(a_1,\ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $f_0(a_1,\ldots, a_n) \geqq 0$ である．もし，$f_0 = g_1^2+\cdots+g_r^2$ $(\exists g_i \in K)$ が証明できれは，$f = (g_1/f_1)^2 + \cdots + (g_r/f_1)^2$ となるので，最初から f は多項式であると仮定してよい．

$f \notin \Sigma(K)$ と仮定して矛盾を導こう．定理 6.1.7 より，K の代数拡大体であるような実閉体 K^* で，K^* 上の順序で $f < 0$ となるようなものが存在する．命題 6.1.5(2) より，ある $h \in K^*$ により，$f = -h^2$ と書ける．

$$F(t_0,t_1,\ldots,t_n) := t_0^2 f(t_1,\ldots,t_n) + 1 \in \mathbb{R}[t_0,t_1,\ldots,t_n]$$
$$A := \left\{(a_0,a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; F(a_0,\ldots, a_n) = 0\right\}$$

とおく．$K^*(t_0,\ldots, t_n)$ においては，$F(1/h,\, x_1,\ldots, x_n) = 0$ であるから，$A \otimes_K K^* \neq \phi$ である．Artin-Lang の定理より，$A \neq \phi$ となる．つまり，ある $a_0,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して，$a_0^2 f(a_1,\ldots, a_n) + 1 = 0$ となる．これより，$f(a_1,\ldots, a_n) < 0$ となり，仮定に矛盾する．

f が $\mathbb{Z}$-係数の場合には，上の証明で $\mathbb{R}$ の部分を $\mathbb{Q}$ と書き換えれば，$f \in \Sigma\left(\mathbb{Q}(x_1,\ldots,x_n)\right)$ がわかる．$\mathbb{Q}(x_1,\ldots, x_n)$ の元は，整数係数多項式の商で表せる．　□

6.1.4.　実代数多様体

以下の話は $\mathbb{R}$ を一般化して実閉体 K で議論することもできるが，K^n の位相に関する議論が必要になる．ただ，$\mathbb{R}$ を K に一般化しても，前項の Artin の定理のような有り難い応用も知られていないので，$\mathbb{R}$ の場合にのみ話をする．

本書では，実の場合も複素の場合も，代数多様体は既約かつ被約であると仮定する．また，非特異点を少なくとも 1 点は持つと仮定する．代数多様体 V の次元 $\dim V$ は，その構造層の局所環のクルル次元として定義されるが，非特異点の近傍では，その近傍の多様体としての次元と一致するものと仮定する．

例えば，$x^2+y^2=0$ とか $x^2+y^2+1=0$ で定まる (x, y)-平面 $\mathbb{R}^2$ 上の集合は実代数多様体ではない．また，例えば，$f_1,\dots, f_r \in \mathbb{R}[x_1,\dots, x_n]$ のとき，$\mathbb{R}^n$ 内で $f_1=\cdots=f_r=0$ で定まる集合 V_1 と，$f_1^2+\cdots+f_r^2=0$ で定まる集合 V_2 は，集合としては一致する．しかし，後者を $I_2=(f_1^2+\cdots+f_r^2)$ を定義イデアルとして定まる実アフィン多様体と考えるのは適切でない．V_1 も，もう少し条件を課さないと，実アフィン多様体にはならない．以下，本書における実代数多様体の正確な定義を述べる．

定義 6.1.15.　多項式環 $S=\mathbb{R}[x_1, x_2,\dots, x_n]$ のイデアル $I\subset S$ を取り，

$$V=\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n \mid \text{任意の } f\in I \text{ に対し } f(\mathbf{a})=0\},$$
$$I(V)=\{f\in S \mid \text{任意の } \mathbf{a}\in V \text{ に対し } f(\mathbf{a})=0\}$$

とおく．今，$V\neq\phi$ を仮定する．一般には，$\sqrt{I}\subset I(V)$ であるが，今 $\sqrt{I}=I(V)$ が成り立つと仮定する．$P(V):=S/I$ とおく．点 $\mathbf{a}=(a_1, a_2,\dots, a_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し，$\widetilde{\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}}:=\sum_{i=1}^{n} S\cdot(x_i-a_i)$ とおく．$\pi\colon S\to P(V)$ を自然な全射として，点 $\mathbf{a}\in V$ のとき，$\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}:=\pi(\widetilde{\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}})$ とおくと，$\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ は $P(V)$ の極大イデアルである．$S(\mathbf{a}):=P(V)-\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ は $P(V)$ の積閉集合である．$B\subset V$ を空でない部分集合とする．$S_B:=\bigcap_{\mathbf{a}\in B} S(\mathbf{a})$ も $P(V)$ の積閉集合であるので，S_B による $P(V)$ の局所化を $R(B)=\mathfrak{R}_V(B):=S_B^{-1}P(V)$ とおく．

$P(V)$ はネーター環であるので，$R(B)$ もネーター環である．$\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} := \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} R(V)$ とおくと，$\mathbf{a} \in V$ のとき $R(V)/\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} \cong P(V)/\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \cong S/\widetilde{\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}} \cong \mathbb{R}$ で，$\mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ は $R(V)$ の極大イデアルである．$\mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ を点 $\mathbf{a} \in V$ に対応する $R(V)$ の極大イデアルという．容易に分かるように，勝手な極大イデアル $\mathfrak{m} \subset R(V)$ を取るとき，$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathbf{a}}$ となるような点 $\mathbf{a} \in V$ がただ 1 つ存在する．

$\mathbb{R}^n$ の普通の距離空間としての位相から誘導される $V \subset \mathbb{R}^n$ の位相を**ユークリッド位相**という．U が V のユークリッド開集合 (ユークリッド位相での開集合) のとき，$R(U) = S_U^{-1} R(V)$ を U の**座標環**という．V 上の可換環の連接層 $\mathcal{R}_V$ を $\mathcal{R}_V(U) = R(U)$ によって定める．局所環付き空間 $(V, \mathcal{R}_V)$ を**広義実アフィン (代数) 多様体**という．$R(V)$ が 0 以外の零因子を持たないとき，V は**被約**であるという．$R(V)$ が整域であるとき，V は (狭義) **実アフィン (代数) 多様体** であるという．

$R(V)$ のイデアル J に対し

$$V(J) := \left\{ \mathbf{a} \in V \;\middle|\; \text{任意の } f \in J \text{ に対し } f(\mathbf{a}) = 0 \right\}$$

とおき，$\left\{ V(J) \;\middle|\; J \text{ は } R(V) \text{ のイデアル} \right\}$ を閉集合系として定まる V 上の位相を**ザリスキー位相**という．$V = V_1 \cup V_2$, $\phi \neq V_1 \subsetneqq V$, $\phi \neq V_2 \subsetneqq V$ を満たすザリスキー閉集合 (ザリスキー位相についての閉集合) V_1¡ V_2 が存在しないとき V は**既約**であるという．広義実アフィン多様体が既約かつ被約であることと，それが実アフィン多様体であることは同値である．$\mathrm{Krull\,dim}\, R(V) = \mathrm{Krull\,dim}\, P(V)$ を $\dim V$ と書き V の**次元**という．

V は広義実アフィン多様体とする．部分部分集合 $B \subset V$ に対し，B を含む最小の V のザリスキー閉集合を $\mathrm{Zar}(B)$ とか $\mathrm{Zar}_V(B)$ と書き，V における B の**ザリスキー閉包**という．他方，ユークリッド位相に関しての V における B の閉包は $\mathrm{Cls}_V(B)$ とか $\overline{B}$ と書き， 内部 (開核) は $\mathrm{Int}_V(B)$ とか B° と書く． また，V における B の**境界**を $\partial_V B := \mathrm{Cls}_V(B) - \mathrm{Int}_V(B)$ と書く．

$V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ はそれぞれ $R(V)$, $R(W)$ を座標環とする広義実アフィン多様体とする．$\mathbb{R}$-代数としての準同型写像 $\varphi^a \colon R(W) \longrightarrow R(V)$ が存在すると仮定する．このとき，点 $\mathbf{a} \in V$ に対し $\mathfrak{m}_{\mathbf{a}} \subset R(V)$ を対応する

極大イデアルとするとき，$(\varphi^a)^{-1}(\mathfrak{m}_{\mathbf{a}})$ は $R(W)$ の極大イデアルであり，ある点 $\mathbf{b} \in W$ に対応する．そこで，$\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$ によって**正則写像** $\varphi: V \to W$ を定義する．

$\varphi^a: R(W) \longrightarrow R(V)$ が同型写像であるとき，$\varphi: V \to W$ は**同型写像**であるといい，V と W は**同型**であるという．

V は広義実アフィン多様体とする．V のザリスキー開集合 U に対し，$R(U) \cong R(W)$ となるような広義実アフィン多様体 $(W, \mathcal{R}_W)$ が存在するとき，U は V の**アフィン開集合** であるという．

$P \in V$ に対し，局所環 $\mathcal{R}_{V,P}$ が正則局所環であるとき，P は V の**非特異点**であるという．P が V の非特異点でないとき，P は V の**特異点**であるという．V の特異点全体の集合を $\mathrm{Sing}(V)$，V の非特異点全体の集合を $\mathrm{Reg}(V)$ と書く．V が被約の場合，$I = I(V)$ が成り立つから，ヤコビアン判定法により $\mathrm{Reg}(V)$ は V の空でないザリスキー開集合になることが，複素代数多様体の場合と同様にして証明できる．さらに，V が既約で $\dim V = d$, $P \in \mathrm{Reg}(V)$ のとき，$\mathcal{R}_{V,P}$ は d 個の元からなる正則パラメータ系 $x_1,\ldots, x_n$ を持ち，これは P の十分小さなザリスキー開近傍 U の上で正則であり，U の局所座標系になる．したがって，V の位相的な次元と

$$\text{Krull}\dim P(V) = \text{Krull}\dim R(V) = \text{Krull}\dim \mathcal{R}_{V,P} = d$$

が一致する．

定義 6.1.16.　局所環付き空間 $(A, \mathcal{R}_A)$ が n 次元の**広義実代数多様体**であるとは，以下の (1), (2), (3) を満たす A のある有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^r$ が存在することをいう．

(1) 各 $i = 1,\ldots, r$ に対し，$(U_i, \mathcal{R}_A|_{U_i})$ は広義アフィン多様体である．

(2) 各 $i, j \in \{1,\ldots, r\}$ に対し，$U_i \cap U_j$ は U_i のアフィン開集合でザリスキー位相に関して稠密である．

(3) 対角写像 $\Delta: A \longrightarrow A \times A$ は閉埋入である．ここで，$A \times A$ のザリスキー位相は，広義アフィン代数多様体 $U_i \times U_j$ のザリスキー位相から誘導される位相である．

広義実代数多様体 A について，上のようにして定まる位相を**ザリスキー位**

相という．それに対し，各 U_i 上のユークリッド位相から誘導される位相を**ユークリッド位相**という．さらに，各 $\mathfrak{R}_A(U_i)$ が整域であるとき，**実代数多様体**であるという．このとき，$\mathfrak{R}_A(U_i)$ の分数体を，$\mathrm{Rat}(A) := Q\big(\mathfrak{R}_A(U_i)\big)$ と書き，A の**有理関数体**という．広義実代数多様体 A, B の間の**正則写像** $\varphi\colon A \to B$ は局所環付き空間としての射として定義する．

広義実代数多様体 A が**既約**であるとは，ザリスキー位相について既約な位相空間であることをいう．広義実代数多様体 A が**被約**であるとは，各点 $P \in A$ に対し，局所環 $\mathfrak{R}_{A,P}$ が 0 以外に巾零元を持たないことをいう．広義実代数多様体 A の**次元**は $\dim A = \max\limits_{P \in A} \mathrm{Krull}\dim \mathfrak{R}_{A,P}$ として定義する．

6.1.5.　半代数的集合

定義 6.1.17.　V は集合，$A_1,\ldots, A_n$ は V の部分集合とする．$A_1,\ldots, A_n$ と $\cap, \cup$, 及び補集合を表す記号 $V - A_i$ と何個かの括弧を用いて表すことのできる集合の式を，$A_1,\ldots, A_n$ の**ブール式**という．

例えば，$(A_1 \cap A_2) \cup (V - A_3)$ や $(A_1 - A_2) \cap A_3$ は A_1, A_2, A_3 のブール式である．

定義 6.1.18.　V は広義実代数多様体，$U \subset V$ はアフィン開集合，$R(U) = \mathfrak{R}_V(U)$ とする．ある有限個の U 上の正則関数 $f_1,\ldots, f_r \in R(U)$ によって，

$$\big\{x \in U \bigm| \text{すべての } i = 1,\ldots, r \text{ に対して } f_i(x) > 0\big\}$$

と表すことのできる集合を V の**基本的半代数的開 (部分) 集合**という．また，

$$\big\{x \in U \bigm| \text{すべての } i = 1,\ldots, r \text{ に対して } f_i(x) \geqq 0\big\}$$

と表すことのできる集合が V のユークリッド閉集合であるとき，これを V の**基本的半代数的閉 (部分) 集合**という．基本的半代数的開 (部分) 集合と基本的半代数的閉 (部分) 集合をあわせて基本的半代数的 (部分) 集合という．

$f_{ij} \in R(U)$ で，$*_{ij}$ が $>, \geqq$ または $=$ のいずれかであるとき，

$$\bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \big\{x \in U \bigm| f_{ij}(x) *_{i,j} 0\big\}$$

という形の集合は，U の半代数的部分集合であり，逆に U の半代数的部分集合はこのような形に表すことができる．

ある有限個の基本的半代数的集合のブール式で表すことのできる V の部分集合を，V の**半代数的 (部分) 集合**という．

上の定義において $U = \mathbb{R}^n$ で $(x_1,\ldots, x_n)$ がその座標系の場合，$R(U)$ は $\mathbb{R}$ 係数の n 変数多項式 $f_i(x_1,\ldots, x_n)$ 全体の集合であることに注意する．

$\mathbb{R}^n$ 自身は代数多様体であり，特に，半代数的集合である．また，$\mathbb{R}^n$ 内で $x_1 \geqq 0,\ldots, x_n \geqq 0$ で定まる集合 $\mathbb{R}^n_+$ は，$\mathbb{R}^n$ の基本的閉集合である．

以下，本章では，$\mathbb{R}^n$ を座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ を用いて考察する場合に，$\mathbb{R}^n : (x_1,\ldots, x_n)$ と書き，射影空間 $\mathbb{P}^n$ を斉次座標系 $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ を用いて考察する場合に，$\mathbb{P}^n : (x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ と書く．

補題 6.1.19.　V は $\mathbb{R}^n$ 内の閉部分アフィン多様体とする．このとき以下が成立する．

(1) A が V の基本的開集合ならば，$\mathbb{R}^n$ のある基本的開集合 B が存在して，$A = B \cap V$ と表すことができる．

(2) A が V の基本的閉集合ならば，$\mathbb{R}^n$ のある基本的閉集合 B が存在して，$A = B \cap V$ と表すことができる．

証明. (1) $S = \mathbb{R}[x_1,\ldots, x_n]$ とし, $\pi\colon S \to R(V)$ を自然な全射とする．V の勝手な基本的開集合

$$A := \left\{x \in V \;\middle|\; \text{任意の } i = 1,\ldots, r \text{ に対して } f_i(x) > 0\right\}$$

をとる．π は全射なので，$\pi(F_i) = f_i$ を満たす $F_i \in S$ が存在する．

$$B := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{任意の } i = 1,\ldots, r \text{ に対して } F_i(x) > 0\right\}$$

とおけば，B は $\mathbb{R}^n$ の基本的開集合で，$A = B \cap V$ となる．

(2) の証明も同様である．　□

命題 6.1.20.　V, W は実代数多様体で，$\varphi\colon V \to W$ は正則写像とする．A が W の半代数的部分集合ならば，$\varphi^{-1}(A)$ は V の半代数的部分集合である．

証明. まず，V, W がアフィン多様体の場合に証明する．V, W はある $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ の閉部分代数多様体である．$S(V) = \mathbb{R}[x_1,\ldots, x_m]$, $S(W) = \mathbb{R}[y_1,\ldots, y_n]$ とおく．座標環の全射 $\pi_1 : S(V) \longrightarrow R(V)$, $\pi_2 : S(W) \longrightarrow R(W)$ が存在する．

A が W の基本的半代数的部分集合の場合に証明すれば十分である．A は $\mathbb{R}^n$ の基本的半代数的部分集合でもあるので，ある $f_1,\ldots, f_r \in S(W)$ と不等号あるいは等号 $*_i \in \{ \geqq, >, = \}$ により，

$$A = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \text{各 } 1 \leqq i \leqq r \text{ に対して } f_i(\mathbf{y}) *_i 0\}$$

と書ける．$z_i = \varphi^*(\pi_2(y_i))$ とし，$\pi_1(g_i) = z_i$ となる $g_i \in S(V)$ をとる．このとき，

$$\varphi^{-1}(A) = V \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \text{各 } 1 \leqq i \leqq r \text{ に対して } f_i\bigl(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_n(\mathbf{x})\bigr) *_i 0\}$$

となり，これは V の半代数的部分集合である．

次に，V, W が一般の代数多様体の場合に証明する．U_W を W の勝手なアフィン開集合とする．$A \cap U_W$ は U_W の半代数的部分集合である．V の有限個のアフィン開集合 $U_1,\ldots, U_r$ により，$\varphi^{-1}(U_W) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ とできる．

$$\bigcup_{i=1}^{r}(\varphi^{-1}(A) \cap U_i) = \varphi^{-1}(A \cap U_W) = \bigcup_{i=1}^{r}(\varphi^{-1}(A \cap U_W) \cap U_r)$$

前半の議論により，$\varphi^{-1}(A \cap U_W) \cap U_i$ は U_i の半代数的部分集合だから，$\varphi^{-1}(A) \cap U_i$ も U_i の半代数的部分集合で，$\varphi^{-1}(A)$ は V の半代数的部分集合である．　□

定理 6.1.23. (Tarski-Seidenberg の定理)　V, W は実代数多様体で，$\varphi\colon V \to W$ は正則写像とする．A が V の半代数的部分集合ならば，$\varphi(A)$ は W の半代数的部分集合である．

証明. (I) V, W がアフィン多様体の場合に証明する．適当に $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ を選んで，V, W を $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ の閉部分アフィン多様体として埋め込めば，φ は $\mathbb{R}^r$ から $\mathbb{R}^n$ への多項式写像として表すことができる．$\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^n$ の座標系を

それぞれ $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_r)$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_n)$ で表す．

$$X = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{r+n} \,\middle|\, \mathbf{x} \in A,\, \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})\right\}$$

とおく．$\mathbf{x} \in V$ は多項式による不等式または等式，$\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ は多項式の等式であるから，X は $\mathbb{R}^{r+n}$ の半代数的部分集合である．$\pi\colon \mathbb{R}^{r+n} \to \mathbb{R}^n$ を $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ で定まる正射影とすれば $\pi(X) = \varphi(A)$ で，定理 6.1.12 より，これは半代数的集合である．

(II) V, W が一般の代数多様体の場合に証明する．W の任意のアフィン開集合 U に対して $\varphi(A) \cap U$ が半代数的であることを証明すればよい．$\varphi^{-1}(U)$ は V の有限個のアフィン開集合 $U_1,\ldots, U_t$ の合併集合として表すことができ，各 $A \cap U_i$ は半代数的だから，$\varphi(A \cap U_i)$ も第 3 段階の結果から半代数的で，その合併集合である $\varphi(A) \cap U$ も半代数的である． □

6.2.　PSD 錐の理論

6.2.1.　半代数多様体

実代数多様体とか半代数的集合の話は，過去からある理論であるが，半代数多様体以降の話は筆者自身の考案によるので，節を改めて話をする．

定義 6.2.1.　V は広義実代数多様体，A は V の半代数的部分集合で $\mathrm{Zar}(A) = V$ を満たすと仮定する．V のザリスキー位相，ユークリッド位相から誘導される A 上の位相を，それぞれ，A 上の**ザリスキー位相**，**ユークリッド位相**という．A のザリスキー開集合 U に対し，$\mathcal{R}_A(U) := \mathcal{R}_V(U)$ で A 上の層 $\mathcal{R}_A$ を定める．$(A, \mathcal{R}_A)$ と同型な局所環付き空間を**広義半代数多様体** という．

任意の点 $P \in A$ に対し，局所環 $\mathcal{R}_{A,P}$ が 0 以外の巾零元を持たないとき，A は**被約**であるという．また，$\mathrm{Zar}(A)$ が既約のとき，A は**既約**であるという．もし，A が既約かつ被約なとき，$(A, \mathcal{R}_A)$ と同型な局所環付き空間を，**半代数多様体** と呼ぶ．

A の**境界**と**代数的境界**を，

$$\partial A := A - \mathrm{Int}(A), \quad \partial_a A := \mathrm{Zar}(\partial_Z A)$$

で定義する．A の特異点集合と正則点集合を

$$\mathrm{Sing}(A) := \mathrm{Sing}(\mathrm{Zar}(A)) \cap A, \quad \mathrm{Reg}(A) := A - \mathrm{Sing}(A)$$

と定義する．

広義半代数多様体 A, B の間の**正則写像** $\varphi\colon A \to B$ は局所環付き空間としての射として定義する．広義半代数多様体 A の**次元** は $\dim A = \max\limits_{P \in A} \mathrm{Krull}\dim \mathfrak{R}_{A,P}$ として定義する．

例 6.2.2. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ は実射影空間とする．

$\mathbb{P}^n_+ := \big\{(X_0 : \cdots : X_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \bigm|$ 任意の $0 \leqq i < j \leqq n$ に対して $X_iX_j \geqq 0\big\}$ は半代数多様体である．正則写像 $f\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ を $f(X_0 : \cdots : X_n) = (X_1^2 : \cdots : X_n^2)$ で定まるとき，$f(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) = \mathbb{P}^n_+$ であることに注意する．

定義 6.2.3. A, B は広義半代数多様体, $\varphi\colon A \to B$ は正則写像, $C := \varphi(B)$ とする．Tarski-Seidenberg の定理より C は半代数的集合である．C 上の可換環の層 $\mathfrak{R}_C$ を以下のように定める．

A と B がアフィンの場合に定義すれば十分である．$R_A := \mathfrak{R}_A(A)$, $R_B := \mathfrak{R}_B(B)$ とし，$\varphi^*\colon R_B \to R_A$ は φ から誘導される準同型写像とする．$R := R_B/\operatorname{Ker}\varphi^*$ とおく．点 $P \in C$ に対応する極大イデアルを $\mathfrak{m}_P \subset R$ とし，

$$S := \bigcap_{P \in C} (R - \mathfrak{m}_P), \quad R_C := S^{-1}R$$

とおく．R_C は R_B-多元環である．C の構造層を $\mathfrak{R}_C := \widetilde{R_C}$ と定め，$(C, \mathfrak{R}_C)$ を φ の**像**という．誤解のない場合，$(C, \mathfrak{R}_C)$ を単に $C = \varphi(A)$ と書く．

また，$\varphi\colon A \longrightarrow \varphi(B)$ が広義半代数多様体としての同型写像であるとき，$\varphi\colon A \to B$ は**埋入写像**であるという．$A \subset B$ はいずれも広義半代数多様体とする．包含写像 $A \to B$ が埋入写像であるとき，A は B の**部分多様体**であるという．

ある $n \in \mathbb{N}$ と埋入写像 $A \to \mathbb{R}^n$ が存在するとき，A は**アフィン**であるという．

定理 6.2.4. 任意の広義半代数多様体はアフィンである．

証明. 勝手な実代数多様体 V が半代数多様体としてアフィンであることを証明すれば十分である．V の有限開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^r$ を取る．各 U_j は $\mathbb{R}^n$ の閉部分多様体であると仮定してよい．ここで，n は j に依存しない自然数として選べる．$\mathbb{R}^n$ の座標系を $(x_1,\ldots, x_n)$ とし，$s_i := 1/(x_i^2+1)$, $t_i := x_i/(x_i^2+1)$ とする．また，点 $P \in V - U_j$ に対しては $s_i(P) = 0$, $t_i(P) = 0$ と定める．すると，s_i, t_i は V 上の正則関数 (実解析的関数) になる．関数の集合 $F_j := \bigl\{s_i, t_i \bigm| 1 \leqq i \leqq n\bigr\}$ は写像 $\Phi_j\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ を定め，これは V 上で正則になる．また，容易にわかるように広義半代数多様体としての埋入写像である．$\square$

V, W は非特異実代数多様体で $\dim V = n$, $\dim W = m$ とし，$\varphi\colon V \to W$ は正則写像とする．点 $a \in V$ を取り $b := \varphi(a)$ とおく．点 a の開近傍 $U_V \subset V$ と b の開近傍 $U_W \subset W$ を，$\varphi(U_V) \subset U_W$，かつ U_V, U_W が a, b を原点とする局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$, $(y_1,\ldots, y_m)$ を持つように選ぶ．φ は $y_j = \varphi_j(x_1,\ldots, x_n)$ $(j = 1,\ldots, m)$ で定義されるとする．$\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$ の点 a における値を (j, i)-成分とする m 行 n 列の行列を J_a とする．J_a は点 a における φ の**ヤコビ行列**と呼ばれる．よく知られているように $\operatorname{rank} J_a$ は局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$, $(y_1,\ldots, y_m)$ の選び方に依存せず定まる．そこで,

$$\operatorname{Sing}(\varphi) := \bigl\{a \in V \bigm| \operatorname{rank} J_a < \dim \varphi(V)\bigr\}$$

と定義する．

定理 6.2.5. V が完備ならば $\partial\bigl(\varphi(V)\bigr) \subset \varphi\bigl(\operatorname{Sing}(\varphi)\bigr)$ が成り立つ．

証明. $r := \dim \varphi(V)$ とし，点 $a \in V$ が $\operatorname{rank} J_a = r$ を満たすと仮定する．局所座標系の添え字を適当に並び替えることにより，J_a の左上の r 次正方小行列の行列式が

$$\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1\leqq i\leqq r,\, 1\leqq j\leqq r} \neq 0$$

を満たすと仮定してよい．$U' := \bigl\{(x_1,\ldots, x_n) \in U_V \bigm| x_{r+1} = \cdots = x_n = 0\bigr\}$ とおく．可微分多様体論でよく知られているヤコビアン判定法より，U_V が

十分小さいユークリッド開集合ならば，$\varphi\big|_{U'}\colon U' \longrightarrow \varphi(U')$ は同型写像である．よって，$b \notin \partial\bigl(\varphi(V)\bigr)$ である．対偶をとると，定理の結論が得られる．　□

実代数多様体 V が特異点を持つ場合には，暫定的に

$$\mathrm{Sing}(\varphi) := \mathrm{Sing}\left(\varphi\big|_{\mathrm{Reg}(V)}\right)$$

と定義することにしよう．すると，次が成り立つ．

系 6.2.6.　V は完備実代数多様体とし，$A \subset V$ は半代数的閉部分集合で．$\mathrm{Zar}_V(A) = V$ を満たすとする．すると，

$$\partial\bigl(\varphi(A)\bigr) \subset \varphi\bigl(\mathrm{Sing}(\varphi) \cup \mathrm{Sing}(A) \cup \partial A\bigr).$$

が成り立つ．

6.2.2.　臨界集合

定義 6.2.7. (臨界集合)　A は広義半代数多様体で，$\dim A = n$ とする．以下，$\Delta^i(A)$ $(i = 0, \ldots, n)$ を n に関する帰納法で定義する．$n = \dim A = 0$ の場合には，A は有限個の点から成る集合で $A = \{P_1, \ldots, P_m\}$ (各 P_i は点) と書ける．このとき，$\Delta^0(A) := \{P_1, \ldots, P_m\}$ とおき，$i \neq 0$ に対しては $\Delta^i(A) := \phi$ と定める．

$n = \dim A \geqq 1$ の場合を考える．$\mathrm{Zar}(A)$ の既約成分の中で n 次元のもの全体を $Z_1, \ldots, Z_r$ とする．

$$A_i := \mathrm{Int}\bigl(Z_i - \mathrm{Sing}(A)\bigr)$$

とおき，$\Delta^n(A) := \bigl\{A_1, \ldots, A_r\bigr\}$ と定める．$i \neq j$ のとき $Z_i \cap Z_j \cap \mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Sing}(A)$ であることに注意する．$\mathrm{Zar}(A)$ の既約成分の中で $(n-1)$ 次元以下のもの全体を $Y_1, \ldots, Y_k$ とし，$B_j := Y_j - (A_1 \cup \cdots \cup A_r)$ とおき，

$$B := \mathrm{Sing}(A) \cup \partial A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

とする．すると，B は広義半代数的集合で $\dim B < \dim A$ である．$\Delta^i(B)$ は定義されているので，$i \neq n$ に対しては $\Delta^i(A) := \Delta^i(B)$ と定める．また，

$$\Delta(A) := \Delta^0(A) \cup \Delta^1(A) \cup \cdots \cup \Delta^n(A)$$

とおく．$D \in \Delta(A)$ のとき，D は A の**臨界集合** (critical set) であるという．D は非特異半代数多様体で $\partial D = \phi$ であることに注意する．

例 6.2.8.　$\mathbb{P}^2_+$ は三角形 (周を含む) と半代数多様体として同型である．したがって，$\Delta^0(\mathbb{P}^2_+) = \{(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)\}$, $\Delta^2(\mathbb{P}^2_+) = \{\mathrm{Int}(\mathbb{P}^2_+)\}$ であり，$\Delta^1(\mathbb{P}^2_+)$ は $\Delta^0(\mathbb{P}^2_+)$ 内の 2 点を結ぶ 3 本の開線分から成る．

定義 6.2.9. (符号付線形系)　A は広義半代数多様体，$\mathfrak{L}$ はある可逆 $\mathfrak{R}_A$-加群層とする．また，$\mathfrak{R}_A^{\mathrm{an}}$ は解析的関数の芽の層とし，ある可逆 $\mathfrak{R}_A^{\mathrm{an}}$-加群層 $\mathfrak{J}$ が存在し，$\mathfrak{I} \otimes_{\mathfrak{R}_A} \mathfrak{R}_A^{\mathrm{an}} = \mathfrak{J} \otimes_{\mathfrak{R}_A^{\mathrm{an}}} \mathfrak{J}$ と満たし，さらに，各点 $a \in A$ に対し，ある a のアフィン開近傍 $a \in U \subset A$ と $e_U \in H^0(U, \mathfrak{J})$ が存在して $\mathfrak{I}|_U = \mathfrak{R}_A|_U \cdot e_U^2$ を満たすと仮定する．すると，勝手な for $f \in H^0(A, \mathfrak{H})$ に対して，ある $g_U \in H^0(U, \mathfrak{R}_A)$ が存在して $f|_U = g_U e_U^2$ を満たす．そこで，$f(a)$ の符号 $\mathrm{sign}(f(a)) \in \{0, \pm 1\}$ を $\mathrm{sign}(f(a)) = \mathrm{sign}(g_U(a))$ によって定義する．$\mathfrak{I}$ は A 上の**符号付可逆層**であるという．また，有限次元部分ベクトル空間 $\mathfrak{H} \subset H^0(A, \mathfrak{I})$ を A 上の $\mathfrak{H}$ は A 上の**符号付線形系**という．

例 6.2.10.　実射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ の斉次座標系を $(X_0 : \cdots : X_n)$ とする．実数係数 d 次斉次多項式 $f(X_0, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}[X_0, \ldots, X_n]$ 全体の集合と $\{0\}$ の合併集合を $\mathfrak{H}_{n+1,d}$ という記号で表す．

$f \in \mathfrak{H}_{n+1,d}$, $a \in \mathbb{P}^n_+$ に対して $f(a)$ の値は定義されないが，$f(a)$ の符号は $\sqrt{f(a)}$ が実数として存在するとき $f(a) \geqq 0$ であるとして定まる．$f(a) \geqq 0$ かつ $f(a) \neq 0$ のとき $f(a) > 0$ である．よって，$\mathfrak{H}_{n+1,d}$ は $\mathbb{P}^n_+$ 上の符号付線形系である．

また，d が偶数ならば，任意の $f \in \mathfrak{H}_{n+1,d}$ と $a \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ に対して $f(a)$ の符号は上と同様にして定まる．よって，$\mathfrak{H}_{n+1,d}$ は $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ 上の符号付線形系である．

定義 6.2.11.　A は広義半代数多様体, $\mathfrak{H}$ は A 上の線形系とする．

$$\mathrm{Bs}\,\mathfrak{H} := \left\{ a \in A \;\middle|\; \text{任意の } f \in \mathfrak{H} \text{ に対して } f(a) = 0 \right\}$$

$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ と定め，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の**基点集合** とか**固定点集合**という．

$N := \dim \mathcal{H} - 1$ とおき，$N \geqq 1$ かつ $A \not\subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ であると仮定する．$U := V - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ とおく．ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の基底 $\{s_0,\ldots, s_N\}$ を取る．$\mathcal{L}$ は可逆層なので，$a \in U$ に対して a の十分小さい開近傍 $a \in W \subset U$ を取れば，ある $e \in \mathcal{L}(W)$ と $f_0,\ldots, f_N \in \mathcal{R}_A(W)$ が存在して，$s_i = f_i e$ $(i = 0,\ldots, N)$ と書ける．そこで，

$$\Phi(a) = \big(f_0(a) : \cdots : f_N(a)\big) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$$

を対応させる写像 $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ を

$$\Phi_{\mathcal{H}} : V \cdots \to \mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$$

$\Phi_{\mathcal{H}}$ と書き，線形系 $\mathcal{H}$ **が定める有理写像**という．$U = A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ を $\Phi_{\mathcal{H}}$ の**定義域** という．

もし $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H} = \phi$ で $\Phi_{\mathcal{H}} : A \longrightarrow \Phi_{\mathcal{H}}(A)$ が同型写像であるとき，$\mathcal{H}$ は**非常に豊富**であるという．

定理 6.2.12. G は $n+1$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ の部分群とし，$\pi\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G$ は自然な全射とする．

$$\mathcal{H}^G_d := \big\{ f \in \mathcal{H}_{n+1,d} \bigm| \text{任意の } \sigma \in G \text{ に対し } \sigma(f) = f \big\}$$

とおく．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G$ は正規半代数多様体である．

(2) $d \in \mathbb{N}$ が群の位数 $\#G$ の倍数ならば，$\pi(\mathcal{H}^G_d)$ は $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G$ 上の非常に豊富な線形系である．

証明. (1) X が非特異複素代数多様体で有限群 G が X に作用しているとき，X/G は正規複素代数多様体であることが知られている．このことから，(1) が導かれる．

(2) π を係数拡大して $\pi\colon \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}/G$ に延長して考える．H を $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ の超平面とし．$D := \sum_{\sigma\in G} \sigma(H)$ とおく．$\pi_* D$ は複素代数多様体 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}/G$ 上の非常に豊富な因子である．したがって，$\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d)^G$ は $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}/G$ 上の非常に豊富な可逆送である．したがって $\pi(\mathcal{H}^G_d)$ も $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G$ 上で非常に豊富である． □

6.2.3. PSD 錐

定義 6.2.13. A は広義半代数多様体, $\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系とする．

$$\mathcal{P}(A,\mathcal{H}) := \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; \text{任意の } a \in A \text{ に対して } f(a) \geqq 0 \right\}$$

と定め $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A,\mathcal{H})$ を A 上の $\mathcal{H}$ 内の**半正定値錐**とか **PSD 錐**という．

$U := A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ と仮定する．$\Phi_{\mathcal{H}}$ による U の像の閉包を

$$X(A,\mathcal{H}) := \mathrm{Cls}\left(\Phi_{\mathcal{H}}(U)\right)$$

$X(A,\mathcal{H})$ と書き，$X(A,\mathcal{H})$ を $\mathcal{P}(A,\mathcal{H})$ の**特性多様体**という．

また，$\{s_0,\ldots,s_N\}$ を $\mathcal{H}$ の基底とし，

$$\widetilde{X}(A,\mathcal{H}) := \bigcup_{x\in A} \mathbb{R}_+ \cdot \left(s_0(x),\cdots,s_N(x)\right) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

とおく．さらに，$\widetilde{X}(A,\mathcal{H})$ を含む $\mathbb{R}^{N+1}$ 内の最小の閉凸錐を $\mathcal{C}(A,\mathcal{H})$ と書き，$\mathcal{P}(A,\mathcal{H})$ の**特性錐**という．

例 6.2.14. G は $n+1$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ の部分群で，d は G の位数 $\#G$ の正の倍数であるとする．すると，$X(\mathbb{P}^n_+,\mathcal{H}^G_d) \cong \mathbb{P}^n_+/G$, $X(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}},\mathcal{H}^G_d) \cong \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G$ である．

定理 6.2.15. A は広義半代数多様体, $\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系で $A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ と仮定する．$X := X(A,\mathcal{H})$ とし，$\mathcal{H}_1$ は $\mathbb{P}(\mathcal{H}^\vee)$ 上の 1 次斉次式全体 (0 を含む) のなす線形系とする．このとき，

$$\Phi^*_{\mathcal{H}} : \mathcal{P}(X,\mathcal{H}_1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(A,\mathcal{H})$$

は同型写像である．

証明. $U := A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ とおく．$f \in \mathcal{H}$, $a \in \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ ならば $f(a) = 0$ であるので，

$$\mathcal{P}(U,\mathcal{H}) = \mathcal{P}(A,\mathcal{H})$$

であることに注意する．定義 6.2.13 の記号で，$s_i = \Phi^*_{\mathcal{H}} X_i$ $(0 \leqq i \leqq N)$ である．$f = \displaystyle\sum_{i=0}^N p_i s_i \in \mathcal{H}$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$ を取る．$g = \displaystyle\sum_{i=0}^N p_i X_i$ とおけば $f = \Phi^*_{\mathcal{H}}(g)$

が成り立つ．$a \in \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ に対しては $f(a)=0$ であるので，任意の $a \in A$ に対して $f(a) \geqq 0$ であることと，任意の $P \in X$ に対して $g(P) \geqq 0$ であることは同値である．これより，結論を得る． □

定理 6.2.16. (半代数性定理) A は半代数多様体，$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系で，$A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ を満たすものとする．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ はユークリッド空間 $\mathcal{H}$ 内の半代数的閉凸錐である．

(2) $\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は特性錐 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ の双対錐である．

証明. (1) 前定理により $A = X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ の場合に証明すればよい．

(i) まず，A が $\mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ 内の基本的半代数的閉部分集合に場合に証明する．

$$A = \left\{x \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \text{任意の } i = 1,\ldots, r \text{ に対して } f_i(x) \geqq 0\right\}$$

($f_i \in \mathbb{R}[x_0,\ldots, x_N]$ は偶数次の斉次多項式) と表すことができる．

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{N+1} \;\middle|\; f_i(x) \geqq 0 \ (\forall i) \text{ かつ } x \cdot y < 0\right\}$$

(ここで $x \cdot y = x_0y_0 + \cdots + x_Ny_N$) とおくと，$B$ も半代数的集合である．$\pi_2 : \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ を $\pi_2(x, y) = y$ で定まる正射影とする．すると．

$$\pi_2(B) = \left\{y \in \mathbb{R}^{N+1} \;\middle|\; \text{ある } \exists x \in A \text{ に対して } x \cdot y < 0\right\}$$

も Tarski-Seidenberg 原理より半代数的集合である．よって，$\mathcal{P}(A, \mathcal{H}) = \mathbb{R}^{N+1} - \pi_2(\widetilde{C})$ は半代数的である．

(ii) $A \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ が一般の広義半代数多様体の場合を考える．ある基本的半代数的閉部分集合 $B_1,\ldots, B_k \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ により $A = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ と表せる．$\mathcal{P}(A, \mathcal{H}) = \mathcal{P}(B_1, \mathcal{H}) \cap \cdots \cap \mathcal{P}(B_k, \mathcal{H})$ である．よって，$\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は半代数的である．

(2) の証明も (1) と同様である． □

定義 6.2.17. (面成分) C は $\mathbb{R}^N$ または $\mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ の半代数的凸閉部分集合で，$\dim C = n$ とする．臨界集合 $D \in \Delta^{n-1}(C)$ を取る．D が $D \subset \partial C$ を満たすとき，D の閉包 $\overline{D}$ を C あるいは ∂C の**面成分**であるという．

定理 6.2.18. (境界定理)　A はコンパクト広義半代数多様体，$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系とし，$\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は非退化で，$\dim \mathcal{P} \geqq 2$ であると仮定する．$f \in \mathcal{P}$ を取る．

(1) ある $a \in A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ に対して $f(a) = 0$ であれば，$f \in \partial\mathcal{P}$ である．

(2) $f \in \partial\mathcal{P}$ かつ $\partial\mathcal{P} \neq \mathcal{P}$ ならば，$f(a) = 0$ を満たす $a \in A$ が存在する．

証明.　(1) $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2, \mathcal{H}) = \mathcal{P}(A_1, \mathcal{H}) \cap \mathcal{P}(A_2, \mathcal{H})$ なので，A が既約で $\mathcal{H} \subset \mathrm{Rat}(A)$ の場合に証明すれば十分である．$a \notin \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ なので，$g(a) > 0$ を満たす $g \in \mathcal{P}$ が存在する．すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f(a) - \varepsilon g(a) < 0$ である．つまり，$f - \varepsilon g \notin \mathcal{P}$ である．よって $f \in \partial\mathcal{P}$ である．

(2) $\mathcal{H}$ の基底 $s_0,\ldots, s_N$ を $s_0,\ldots, s_N \in \mathcal{P}$ となるように取り，この基底により $\Phi_{\mathcal{H}}\colon A \cdots \to X \subset \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ を定める．定理 6.2.15 より $A = X$ と仮定してよい．

$$W_i := \left\{(X_0 \colon \cdots \colon X_N) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \;\middle|\; X_0^2 + \cdots + X_N^2 \leqq 3X_i^2\right\}$$

とおく．$W_0 \cup \cdots \cup W_N = \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ である．

$f \in \partial\mathcal{P}$ が任意の $a \in A = X$ に対し $f(a) > 0$ を満たすと仮定する．$g \in \mathrm{Int}(\mathcal{P})$ を取る．$f_i := f/X_i$ と $g_i := g/X_i$ は W_i 上の正則関数とみなせる．W_i はコンパクトなので，ある $\varepsilon_i > 0$ が存在して任意の $a \in X \cap W_i$ に対し $f_i(a) \pm \varepsilon_i g_i(a) > 0$ を満たす．そこで，$\varepsilon := \min\{\varepsilon_0,\ldots, \varepsilon_N\}$ とおけば，$f \pm \varepsilon g \in \mathcal{P}$ となる．よって $f \notin \partial\mathcal{P}$ である．　□

定義 6.2.19. (双対多様体)　$\mathbb{P} = \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ とし，$\mathbb{P}$ 内の超平面全体の集合を $\mathbb{P}^\vee$ と書く．$D \subset \mathbb{P}$ は非特異半代数多様体で $\partial D = \phi$ を満たすものとする．このとき $\Delta(D) = \{D\}$ である．点 $x \in D$ に対し $T_{D,x} := T_{\mathrm{Zar}(D),x} \subset \mathbb{P}$ とおく．ここで，$T_{\mathrm{Zar}(D),x}$ は点 x における実代数多様体 $\mathrm{Zar}(D)$ の接空間である．このとき，

$$D^\vee := \left\{H \in \mathbb{P}^\vee \;\middle|\; \text{ある点 } x \in D \text{ に対し } H \supset T_{D,x}\right\}$$

と定義し，$D^\vee$ を D の**双対多様体**と言う．D が非特異で既約であるので，$D^\vee$ は既約である (非特異とは限らない)．したがって，$D^\vee$ も半代数多様体である．

$D^\vee$ 自体を求めるのは難しいが，$\mathrm{Zar}(D^\vee)$ は以下のようにして求められる．

公式 6.2.20. (1) A はコンパクト広義半代数多様体，$\mathfrak{H}$ は A 上の符号付線形系とする．$X = X(A, \mathfrak{H})$ とし，それ以外の記号は今までと同じとする．$P \in A$ とし $x := \Phi_{\mathfrak{H}}(P) \in D \in \Delta^r(X)$ とおく．$B := \Phi_{\mathfrak{H}}^{-1}(D) \subset A$ とし，$\Phi_{\mathfrak{H}}\colon B \to D$ は不分岐有限写像であると仮定し，さらに点 P の B における局所座標系 $(t_1,\ldots, t_r)$ が存在すると仮定する．$\{s_0,\ldots, s_N\}$ を $\mathfrak{H}$ の基底とする．関数 $p_0s_0 + \cdots + p_Ns_N \in \mathfrak{H}$ と点 $(p_0,\ldots, p_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ を同一視して考える．$(p_0 : \cdots : p_N)$ は $\mathbb{P}(\mathfrak{H})$ の斉次座標系とみなすことができる．このとき，

$$T_{D,x} := \left\{ \left(\cdots : s_i(P) + \sum_{j=1}^{r} v_j \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P) : \cdots \right) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; (v_1,\ldots, v_r) \in \mathbb{R}^r \right\}$$

である．したがって，$\mathrm{Zar}(D^\vee)$ の判別式 $\mathrm{disc}(D) = \mathrm{disc}_D(p_0,\ldots, p_N)$ は以下の連立方程式から媒介変数 $t_1,\ldots, t_r$ を消去することによって得られる．

$$\sum_{i=0}^{N} p_i s_i(P(t_1, \ldots, t_r)) = 0$$
$$\sum_{i=0}^{N} p_i \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P(t_1, \ldots, t_r)) = 0 \quad (j = 1,\ldots, r)$$

ここで $P(t_1,\ldots, t_r)$ は点 P の座標を表す関数である．この消去法の計算は，通常，コンピュータに頼らざるを得ないが，コンピュータも太刀打ちできない場合も多い．

(2) $\dim D = N - 1$ の場合を考える．すると, $\mathrm{Zar}(D)$ は $\mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$ 内である既約多項式 $h(x_0,\ldots, x_N)$ によって定義される超曲面である．この場合，$h_i = \dfrac{\partial h}{\partial x_i}$ とおくと，

$$T_{D,x} = \left\{(x_0 : \cdots : x_N) \in \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}} \;\middle|\; h_0(P)x_0 + \cdots + h_N(P)x_N = 0\right\}$$

と書ける．したがって，$\mathrm{Zar}(D^\vee)$ の判別式 $\mathrm{disc}(D) = \mathrm{disc}_D(p_0,\ldots, p_N)$ は，以下の連立方程式から $x_0,\ldots, x_N$ を消去することによって得られる．

$$p_0x_0 + \cdots + p_Nx_N = 0$$
$$p_i = h_i(x_0, \ldots, x_N) \qquad (i = 0,\ldots, N)$$

(3) $D \in \Delta^0(X)$ の場合は D は 1 点で $x = D = (b_0 : \cdots : b_N)$ と書ける．この場合，$\mathrm{Zar}(P^\vee)$ は $b_0p_0 + \cdots + b_Np_N = 0$ で定まる超平面であり，これが判別式 $\mathrm{disc}(D) = b_0p_0 + \cdots + b_Np_N$ である．

定理 6.2.21. (主定理) $X \subset \mathbb{P} := \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ はコンパクト広義半代数多様体とし，$\mathcal{P} := \mathcal{P}(X, \mathcal{H}_1)$ を考える．$\pi : (\mathcal{H}_1 - \{0\}) \to \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ は自然な全射とする．$\mathbb{P}(\mathcal{P}) := \pi(\mathcal{P} - \{0\}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$ とおく．$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}_1^\vee)$ なので $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1) = \mathbb{P}^\vee$ であることに注意する．このとき．

$$\partial\mathbb{P}(\mathcal{P}) \subset \bigcup_{D \in \Delta(X)} D^\vee.$$

が成り立つ．

証明. $0 \neq f \in \partial\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_1$ を取る．1 次斉次式 f に対応する超平面を $H_f \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}_1^\vee)$ とする．$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}_1 = \phi$ なので境界定理から $f(x) = 0$ を満たす点 $x \in X$ が存在する．$x \in D$ となる臨界集合 $D \in \Delta(X)$ を取る．任意の $y \in D$ に対して $f(y) \geqq 0$ なので，$H_f \supset T_{D,x}$ である．よって $H_f \in D^\vee$ である． □

注意 6.2.22. もし $D \in \Delta(X)$ が $X \cap \mathrm{Int}(\mathbb{P}(\mathcal{C}(X, \mathcal{H}_1))) \neq \phi$ を満たしたとすると．$D^\vee \not\subset \mathcal{P}$ となる．したがって，$\partial\mathbb{P}(\mathcal{P}) = \bigcup_{D \in \Delta(X)} D^\vee$ は必ずしも成立しない．

定義 6.2.23. (判別式) 前定理と同じ仮定のもと，$D \in \Delta(X)$ に対して．

$$\mathcal{F}(D) := \mathrm{Cls}_{\mathcal{H}_1}(\pi^{-1}(D^\vee) \cap \partial\mathcal{P}).$$

と定義する． もし $\mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D))$ が $\mathcal{H}_1$ の超曲面であるとき．$\mathcal{F}(D)$ は $\mathcal{P}$ の面成分になる．また，超曲面 $\mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D))$ の定義方程式を，$\mathcal{P}$ の面成分 $\mathcal{F}(D)$ の**判別式**という．

例 6.2.24. d は正の偶数とする．$\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ 上の d 次斉次式全体 (0 を含む) の集合を $\mathcal{H}_{n,d}$ とし，$\mathcal{P}_{n,d} := \mathcal{P}(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}, \mathcal{H}_{n,d})$ とおく．$X_{n,d} := X(\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}, \mathcal{H}_{n,d})$ とするとき，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}}(d)$ は非常に豊富なので，$X_{n,d} \cong \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ である．

したがって，$\Delta^{n-1}(X_{n,d}) = \{X_{n,d}\}$ で，$i \neq n-1$ に対しては $\Delta^i(X_{n,d}) = \phi$ となる．これより $\partial\mathcal{P}_{n,d}$ は既約であることがわかる．

定理 6.2.21 を用いると，$\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ を求める以下のアルゴリズムが得られる．

アルゴリズム 6.2.25. A はコンパクト広義半代数多様体，$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系で $A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ を満たすものとする．

ステップ 1. 特性多様体 $X = X(A, \mathcal{H})$ とその臨界集合への分解 $\Delta(X)$ を代数幾何を用いて求める．

ステップ 2. 各臨界集合 $D \in \Delta(X)$ に対し，双対多様体のザリスキー閉包 $\mathrm{Zar}(D^\vee) = \mathrm{Zar}(D)^\vee$ を公式 6.2.20 を用いて計算する．

ステップ 3. $S := \displaystyle\bigcup_{D \in \Delta(X)} \mathrm{Zar}(D)^\vee$ によって $\mathcal{H}$ は何個かのブロック $B_1, \ldots, B_k$ に切り分けられる．ここで，各 B_i は $\partial B_i \subset S$, $\mathrm{Int}(B_i) \cap S = \phi$ を満たす．もし，ある点 $a \in A$ に対して $f(a) < 0$ となる $f \in B_i$ が 1 つでも存在すれば $\mathrm{Int}(B_i) \cap \mathcal{P} = \phi$ である．逆に，$f \in \mathcal{P}$ となる $0 \neq f \in B_i$ が 1 つでも存在すれば，$\overline{B_i} \subset \mathcal{P}$ である．$\mathcal{P}$ は何個かの $\overline{B_i}$ の和集合であり，かつ，凸錐である．この性質を利用して $\mathcal{P}$ を決定する．なお，各 B_i は半代数的集合であることが知られているが，本書では証明は割愛する．

ステップ 4. 上のようにして得られた $\mathcal{P}$ は基本的半代数的集合ではない場合もある．その場合は，上手に $\mathcal{P}$ を基本的半代数的集合の和集合として表す必要がある．つまり，$\mathcal{P}$ を何個かの不等式によって表したいからである．このステップも時として結構難しい．

$\mathcal{P}$ を基本的半代数的集合の和集合として表すためには，幾つかの不等式を追加して $\mathcal{P}$ を分割する必要がある．このとき追加する不等式 (あるいはその 0 でないほうの辺の式) を**分割式** (separator) という．

6.2.4.　局所錐

上で述べたアルゴリズム 6.2.25 の各段階は結構難しい場合が多く，それを実行するための補助的な道具を用意しておく．以下の局所錐の概念は，ス

テップ 2 を実行するときに特に役に立つ．

定義 6.2.26. (局所錐)　A は広義半代数多様体，$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系，$\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とする．A の部分集合 I に対して，

$$\mathcal{H}_I := \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; \text{任意の } a \in I \text{ に対して } f(a) = 0 \right\}$$
$$\mathcal{P}_I := \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_I$$

と定める．$\mathcal{P}_I$ を I における $\mathcal{P}$ の**局所錐**という．特に，$I = \{a\}$ の場合には $\mathcal{P}_{\{a\}}$ を $\mathcal{P}_a$ と書く．

命題 6.2.27.　上の定義の仮定と記号のもと，以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{P}_I$ は $\mathcal{H}_I$ 内の半代数的閉凸錐である．

(2) $\mathcal{P}_I = \mathcal{P}(A, \mathcal{H}_I)$ である．

(3) I と J が A の部分集合のとき．$(\mathcal{P}_I)_J = \mathcal{P}_{(I \cup J)}$ が成り立つ．

証明. (1) $\mathcal{P}$ は凸錐であるので，$f, g \in \mathcal{P}_I \subset \mathcal{P}$ ならば任意の $0 \leqq t \leqq 1$ に対し $(1-t)f + tg \in \mathcal{P}_I \in \mathcal{P}$ である．$(1-t)f(a) + tg(a) = 0$ $(\forall a \in I)$ であるので，$(1-t)f + tg \in \mathcal{P}_I$ である．よって $\mathcal{P}_I$ は凸錐である．$\mathcal{P}_I = \mathcal{P} \cap \mathrm{Zar}(\mathcal{H}_I)$ なので $\mathcal{P}_I$ は閉集合である．

(2), (3) は自明である．

PSD 錐 $\mathcal{P}$ に対して，$\mathcal{P}$ の端元全体の集合を

$$\mathcal{E}(\mathcal{P}) := \left\{ f \in \mathcal{P} \;\middle|\; f \text{ は } \mathcal{P} \text{ の端元} \right\}$$

と書くことにする．

定理 6.2.28. (局所錐定理)　$A, \mathcal{H}, \mathcal{P}$ は今までと同じとし，さらに，A はコンパクトであると仮定する．

(1) $\partial \mathcal{P} \subset \bigcup_{a \in A} \mathcal{P}_a$ が成り立つ．

(2) $I - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ ならば $\mathcal{P}_I \subset \partial \mathcal{P}$ である．

(3) A は既約で $A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H} \neq \phi$ であると仮定する．$\mathcal{U} := \bigcup_{a \in A - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}} \mathcal{P}_a$ とおく．このとき，$\mathrm{Cls}(\mathcal{U}) = \partial \mathcal{P}$ が成り立つ．

(4) $0 \neq f \in \mathcal{P}_a$ を取る．f が $\mathcal{P}$ の端元であるための必要十分条件は f が $\mathcal{P}_a$ の端元であることである．

証明. (1) $0 \neq f \in \partial\mathcal{P}$ を取る．定理 6.2.18 より，ある $a \in A$ に対して $f(a) = 0$ なので $f \in \mathcal{P}_a$ である．

(2) $f \in \mathcal{P}_I$ を取る．$I \not\subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ なので $f(a) = 0$ を満たす $a \in I - \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ が存在する．境界定理より $f \in \partial\mathcal{P}$ である．

(3) 定理 6.2.18 より，$\mathcal{U}$ は $\partial\mathcal{P}$ のある空でない開集合を部分集合として含む．$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}$ は A のザリスキー閉集合なので，$\dim(\partial\mathcal{P} - \mathcal{U}) < \dim \partial\mathcal{P}$ である．よって $\mathrm{Cls}(\mathcal{U}) = \partial\mathcal{P}$ である．

(4) f が $\mathcal{P}$ の端元であるとき f が $\mathcal{P}_a$ の端元であることは自明である．

$f \in \mathcal{P}_a$ が $\mathcal{P}$ が端元でないと仮定する．すると，ある $g, h \in \mathcal{P} - \mathbb{R}_+ \cdot f$ で $f = g + h$ を満たすものが存在する．$g(a) \geqq 0$, $h(a) \geqq 0$ で $g(a) + h(a) = f(a) = 0$ なので $g(a) = h(a) = 0$ となる．つまり $g, h \in \mathcal{P}_a$ となり矛盾する．よって，f は $\mathcal{P}_a$ の端元でない．□

定理 6.2.29. (面成分定理)　X は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ の半代数的閉部分集合で，$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ のどの超平面にも X は含まれないと仮定する．$\mathcal{H}_1$ は $\mathbb{P}_N$ 上の 1 次斉次式全体 (0 を含む) のなすベクトル空間とし，$\mathcal{P} := \mathcal{P}(X, \mathcal{H}_1)$ とする．$D \in \Delta^r(X)$ $(r < m := \dim X)$ を取る．

(1) $\dim \mathcal{P}_x \leqq N - r$ が成り立つ．

(2) $\mathcal{F}(D) = \mathrm{Cls}\left(\bigcup_{x \in D} \mathcal{P}_x\right)$ である．

証明. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1$ とし，$f \in \mathcal{H}$ に対し，$f = 0$ で定まる $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ の超平面を H_f と書く．また $T_{D,P} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^N$ は D の点 $P \in D$ における接空間とする．

(1) $\mathcal{P}$ は非退化なので点 P に任意のユークリッド開近傍 U に対し $\dim(U \cap \mathcal{P}) = N + 1$ が成り立つ．D は非特異なので $\dim T_{D,x} = \dim D = r$ である．$T_{D,P} \subset H_f$ という条件は，f が線形独立な $r + 1$ 個の点で 0 になることを意味する．よって，$\dim \mathcal{P}_P \leqq \dim \mathcal{P} - (r + 1) = N - r$ である．

(2) $\supset$ は自明である．$\subset$ を示す．勝手な $f \in D^\vee \subset \mathrm{Int}(\mathcal{F}(D))$ を取る．すると，ある点 $x \in D$ で $f(x) = 0$ となる．よって，$f \in \mathcal{P}_x$ である．□

上で述べたように $\dim \mathcal{H}_x = \dim \mathcal{H} - 1 = N$ である．また，$r \geqq 2$ ならば $\dim \mathcal{P}_x \leqq N - r$ である．したがって，$\mathcal{P}_x$ は $\mathcal{H}_x$ の中で退化している．

公式 6.2.30. $\mathrm{Zar}(\mathcal{P}_P)$ の基底の求め方を説明しておく．公式 6.2.20 と同じ仮定と記号を用いる．$\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ と $X = X(A, \mathcal{H})$ は定理 6.2.29 の仮定を満たすとする．$D \in \Delta^r(X)$ と $P \in B := \Phi_{\mathcal{H}}^{-1}(D)$ を取る．$\Phi_{\mathcal{H}}\colon B \to D$ は不分岐有限写像であると仮定する．さらに点 P の B における局所座標系 $(t_1,\ldots, t_r)$ が存在すると仮定する．$f = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} p_i s_i \in \mathcal{P}_P$ を取る．$f \in \mathcal{H}_P$ なので

$$\sum_{i=0}^{N} p_i s_i(P(t_1, \ldots, t_r)) = 0. \qquad ①$$

である．$(p_0,\ldots, p_N)$ は $T_{D,\Phi_{\mathcal{H}}(P)}$ と直交するので，

$$\sum_{i=0}^{N} p_i \frac{\partial s_i}{\partial t_j}(P(t_1, \ldots, t_r)) = 0 \qquad ②$$

$(j = 1,\ldots, r)$ が成り立つ．①，②を $(p_0,\ldots, p_N)$ についての連立方程式と考えてその解を求めると，$\mathcal{P}_P \neq 0$ の場合には，それが $\mathrm{Zar}(\mathcal{P}_P)$ の基底を与える．なお，①，②は公式 6.2.20(1) で登場した方程式と同じであることに注意する．

6.2.6.　相対定理

定理 6.2.34. (相対定理 H) V は $\mathbb{R}$ 上の代数多様体，A は V のコンパクト広義半代数多様体，$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系とする．$\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とする．部分ベクトル空間 $0 \neq \mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ に対し，$\mathcal{P}' := \mathcal{P}(A, \mathcal{H}')$ とおく．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}'$, $\partial\mathcal{P}' \subset \partial\mathcal{P} \cap \mathcal{H}'$.

(2) $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}' = \phi$ で $\mathcal{P}$ が非退化ならば，$\mathcal{P}'$ は非退化である．

(3) 任意の点 $a \in A$ に対し，$(\mathcal{P}')_a = \mathcal{P}_a \cap \mathcal{H}'$ が成り立つ．

(4) $0 \neq f \in \mathcal{P}'$ に対し，f が $\mathcal{P}$ の端元であれば，f は $\mathcal{P}'$ の端元である．

証明. (1), (3), (4) は自明である.

(2) もし $\dim \mathcal{P}'$ が退化していれば，その双対錐 $\mathfrak{C}(A, \mathcal{H}')$ は原点を含む直線 L を含む．$\rho : \mathfrak{C}(A, \mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{C}(A, \mathcal{H}')$ を包含写像 $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ から誘導される正射影とする．ρ は射影線形なので $\rho^{-1}(L)$ も直線を含む．これは $\mathcal{P}$ が退化することを意味する． □

注意 6.2.35. $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}' \neq \phi$ の場合には $\mathcal{P}'$ は退化する可能性がある．その例を示す．$A = \mathbb{P}^n_+$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n+1,d}$, $d \geqq 2$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ とおく．a は A の内点とする．$\mathcal{H}_a = \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; f(a) = 0 \right\}$ とおく．$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}_a = \{a\}$ であることに注意する．このとき，$\mathcal{P}(\mathbb{P}^n_+, \mathcal{H}_a) = \mathcal{P}_a$ である．しかし，$\mathcal{P}_a = 0$ となることがあり，退化する場合がある．

定理 6.2.36. (相対定理 A) A はコンパクト半代数多様体，$B \subset A$ は閉部分半代数多様体で $\mathrm{Zar}_A(B) = A$ を満たすものとする．$\mathcal{H}$ は A 上の符号付線形系とする．$Y := X(B, \mathcal{H})$, $X := X(A, \mathcal{H})$ とし，$D_A := \mathrm{Reg}(X) \in \Delta(X)$, $D_B := \mathrm{Reg}(Y) \in \Delta(Y)$ を取る．$\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$, $\mathcal{P}' := \mathcal{P}(B, \mathcal{H})$ とおく．今，$\mathcal{P}$ は非退化であり，$\dim \mathcal{F}(D_B) = \dim \mathcal{P}' - 1$ であると仮定する．すると $\mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D_A)) = \mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D_B))$　が成り立つ.

証明. $B \subset A$ なので $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ である．$N := \dim \mathcal{H} - 1$ とおく．$N = \dim \mathcal{P} \leqq \dim \mathcal{P}' = \dim \mathcal{F}(D_B) \leqq \dim \mathcal{F}(D_A) \leqq N$ より，これらの値は一致する．$B \subset A$ なので $D_B \subset D_A$, $D_A^\vee \subset D_B^\vee$, $\mathcal{F}(D_A) \subset \mathcal{F}(D_B)$ が成り立つ．$D_A^\vee$ と $D_B^\vee$ は既約で $\dim \mathcal{F}(D_B) = \dim \mathcal{F}(D_A) = N$ であるので，$\mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D_A)) = \mathrm{Zar}(\mathcal{F}(D_B))$ を得る． □

定理 6.2.37. (閉包定理) C は $\mathbb{R}^m$ 内の半代数的閉凸錐とする.

(1) F は C の面成分，$P, Q, R \in \mathbb{R}^m$ は相異なる点で Q は線分 PR の内点であるとする．このとき，もし $P \in C$, $P \notin F$, $Q \in F$ ならば $R \notin C$ である.

(2) C は直線を含まないと仮定する．F_0, F_1,..., F_r は C の面成分で $\partial C = F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_r$ が成り立つと仮定する．すると，

$$\partial F_0 = (F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_r) \cap F_0$$

が成り立つ．

証明. (1) もし $R \in C$ なら $P, R \in F$ となってしまう．
(2) 明らか． □

6.2.7. $A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{P}^n_{+}$ の場合

PSD 錐 $\mathcal{P}$ が非退化でないと適用できない定理があるが，以下は $\mathcal{P}$ が非退化であるための十分条件を与える．

定理 6.2.38. d は自然数で $A = \mathbb{R}^{n+1}_{+}$，または d は偶数で $A = \mathbb{R}^{n+1}$ であるとする．また，$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{n+1,d}$ は A 上の符号付線形系とする．このとき，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H} = \phi$ ならば，$\mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ は非退化である．

証明. (1) まず，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{n+1,d}$ の場合に証明する．A を含む $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ の座標系を $(a_0 : \cdots : a_n)$ で表す．$s_0 := \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i^d \in \mathcal{H}$ とおく．$s_0 \in \mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H})$ に注意する．

$\mathcal{P}$ が退化したと仮定する．すると $\mathcal{P}$ の双対錐 $\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ は，原点 P を通るある直線 L を含む．$\mathcal{C}(A, \mathcal{H})$ は $\widetilde{X}(A, \mathcal{H})$ によって生成されるから，ある $P_1, \ldots, P_r \in \widetilde{X}(A, \mathcal{H})$ とある $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}_+$ が存在して，斉次座標について $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i P_i = 0$ を満たす．P_i は a_i の像であるとすれば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i s_0(a_i) = 0$ が成り立つ．ところが $s_0(a_i) > 0$ であるので矛盾する．

(2) 一般の $\mathcal{H}$ に対しては，(1) と定理 6.2.34(2) から結論が得られる． □

A は非特異半代数多様体とし，有限群 G が A に作用している場合を考える．$\pi\colon A \longrightarrow A/G$ を自然な全射とする．また，作用の固定点集合を

$$A^G := \{\mathbf{a} \in A \mid 任意の\ \sigma \in G\ に対して\ \sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\}$$

と書く．複素代数多様体の場合と同様に，$\mathrm{Sing}(A/G) \subset \pi(A^G)$ である．

例 6.2.39. $A=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ に巡回群 $G=\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ が自然に作用する場合を考える．このとき，固定点集合は $A^G=\{\mathbf{1}\}$ で，1 点 $\mathbf{1}:=(1:1:\cdots:1)$ のみから成る集合である．また，$\mathrm{Sing}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G)=\{\pi(\mathbf{1})\}$ である．

定理 6.2.40. $A=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ または $A=\mathbb{P}_+$ とし，G は対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ の部分群とする．G の位数を $g:=\#G$ とし，$X^G_d:=X(A,\mathcal{H}^G_d)$ とおく．

(1) $d=kg+2m$ $(k\geqq 1,\ m\geqq 0)$ で $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^G_d=\phi$ ならば $A/G\cong X^G_d$ である．

(2) $A=\mathbb{P}^n_+$, $d\geqq g$ かつ $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^G_d=\phi$ ならば $A/G\cong X^G_d$ である．

証明. $f\in\mathcal{H}^G_d$ に対し $V(f):=\{x\in A \mid f(x)=0\}$ とおく．有理写像 $\Phi_{\mathcal{H}^G_d}:A\cdots\to X^G_d$ は $A\xrightarrow{\pi}A/G\xrightarrow{\Psi^G_d}X^G_d$ と分解する．

(1) $A=\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ の場合に証明すれば十分である．$d=kg$ の場合には，定理 6.2.12(2) より $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}/G\cong X^G_d$ である．

次に，$d=kg+2m$ の場合を考える．$S_2:=a_0^2+\cdots+a_n^2$ とし，単射 $\iota:\mathcal{H}^G_{kg}\xrightarrow{\times S_2^m}\mathcal{H}^G_d$ をを $\iota(f)=fS_2$ で定義する．$V(S_2^m)=V(S_2)=\phi$ なので正則写像 $\rho:X^G_d\longrightarrow X^G_{kg}$ が存在する．$\Phi_{\mathcal{H}^G_{kg}}=\rho\circ\Phi_{\mathcal{H}^G_d}$ であることに注意する．Ψ^G_{kg} は同型写像であるので Ψ^G_d も同型写像である．

(2) $d=n+1+l$ の場合を考える．$S_1:=a_0+\cdots+a_n$ とし，単射 $\iota:\mathcal{H}^G_g\xrightarrow{\times S_1^{d-g}}\mathcal{H}^G_d$ を $\iota(f)=fS_1^{d-g}$ で定める．$A\cap V(S_1^{d-g})=\phi$ なので，正則写像 $\rho:X^G_d\longrightarrow X^G_g$ が存在する．この後は (1) の証明と同様である．　□

6.3.　2 変数斉次不等式

6.3.1.　2 変数斉次不等式

この節では $F(a,b)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}c_ia^ib^{n-i}\in\mathcal{H}_{2,n}$ に対し $c_n=1$ であるとき F は**モニック**であるといい，$c_n=0$ であるとき F は**無限遠**にあるということにする．部分ベクトル空間 $V\subset\mathcal{H}_{2,n}$ に対し

$$\check{V}:=\{F\in V \mid F\ \text{はモニック}\},\quad V^\infty:=\{F\in V \mid F\ \text{は無限遠にある}\}$$

と書くことにする．さて，

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n}^{+} := \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{P}_{+}^{1}, \boldsymbol{\mathcal{H}}_{2,n}), \quad \boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n} := \boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}_{2,n})\\
&\Phi_{2,n} := \Phi_{\boldsymbol{\mathcal{H}}_{2,n}}\\
&X_{2,n}^{+} := \Phi_{2,n}(\mathbb{P}_{+}^{1}), \quad X_{2,n} := \Phi_{2,n}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{1})
\end{aligned}
$$

とおく．簡単のためしばしば $\boldsymbol{\mathcal{H}} := \boldsymbol{\mathcal{H}}_{2,n}$, $\Phi := \Phi_{2,n}$, $\boldsymbol{\mathcal{P}} := \boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n}^{+}$ または $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n}$, $X := X_{2,n}^{+}$ または $X_{2,n}$ と略記する．$\boldsymbol{\mathcal{P}}$ の点 $(p\colon 1) \in A$ における局所錐を $\boldsymbol{\mathcal{L}}_p$ と書き, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ の点 $(1\colon 0)$ における局所錐を $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\infty \subset \boldsymbol{\mathcal{H}}_{2,n}^{\infty}$ と書く．

考察 6.3.1.　(1) $A = \mathbb{P}_{+}^{1}$ の場合を考える．

$\Phi_{2,n}\colon \mathbb{P}_{+}^{1} \longrightarrow X_{2,n}^{+}$ は同型写像なので, $X^{\circ} := \mathrm{Int}(X_{2,n}^{+})$, $P_0 := \Phi_{2,n}(0\colon 1)$, $P_\infty := \Phi_{2,n}(1\colon 0)$ とおくとき，$\Delta^1(X_{2,n}^{+}) = \{X^{\circ}\}$, $\Delta^0(X_{2,n}^{+}) = \{P_0, P_\infty\}$ となる．よって，$\mathrm{disc}(P_0) = c_n$, $\mathrm{disc}(P_\infty) = c_0$, $\mathrm{disc}(X^{\circ}) = D_n$ が $\boldsymbol{\mathcal{P}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n}^{+}$ のすべての判別式である．したがって，

$$\partial \boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n}^{+} \subset V_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(c_n) \cup V_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(c_0) \cup V_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(D_n)$$

となる．

(2) n が偶数で $A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{1}$ の場合を考える．

$\Phi_{2,n}\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{1} \to X_{2,n}$ は同型写像なので，$\Delta^1(X_{2,n}) = \{X_{2,n}\}$, $\Delta^0(X_{2,n}^{+}) = \phi$ である．$\mathrm{disc}(X_{2,n}) = D_n$ であり，

$$\partial \boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,n} \subset V_{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(D_n)$$

が得られる．この場合，良い分離多項式を見つけることが大切な課題になる．

6.3.2.　$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{2,3}^{+}$ の構造

本節では，PSD 錐の理論を用いた命題 1.4.6 の証明を与える．もう一度命題を書いてから，証明しよう．

命題 6.3.2.　任意の $x \geqq 0$ に対し $x^3 + ax^2 + bx + c \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，次の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つことである．

(1)　$a \geqq 0$ かつ $b \geqq 0$ かつ $c \geqq 0$.

(2)　$c = 0$ かつ $a^2 - 4b \leqq 0$.

(3)　$c > 0$ かつ $D_3(1, a, b, c) = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c + 18abc - 27c^2 \leqq 0$.

証明. $c=f(0)\geqq 0$ は必要条件であるので，$c\geqq 0$ と仮定しておく．

(I) $c=0$ の場合は，$x\geqq 0$ に対し $f(x)\geqq 0$ と $x^2+ax+b\geqq 0$ は同値になり，それは (1)「$a\geqq 0$ かつ $b\geqq 0$」または (2)「$a^2-4b\leqq 0$」と同値になる．

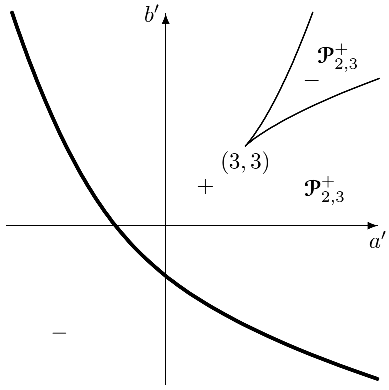


図 6.3.1. $D_3(1,a',b',1)=0$ のグラフ

(II) $c>0$ の場合を考える．$a':=a/\sqrt[3]{c}$, $b':=b/\sqrt[3]{c^2}$, $c':=c/\sqrt[3]{c^3}=1$, $x':=x/\sqrt[3]{c}$ を考えることにより，問題は $c=1$ の場合に帰着される．(a,b)-平面上で $D_3(1,a,b,1)=0$ で定まる 4 次曲線のグラフは図 6.3.1 のようになる．この 4 次曲線上に境界を持つ凸集合は一意的で，図の太線で囲まれた部分しかない．よって，命題 1.4.6 が得られる． □

6.3.3. $\mathcal{P}_{2,4}$ の構造

本節では，定理 1.4.7 の証明を与える．

定理 6.3.3. 4 次関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ に対し，

$$\mathrm{sep}_1(a,b,c,d):=\left(a-\frac{c}{\sqrt{d}}\right)^2-16\bigl(b+2\sqrt{d}\bigr)$$
$$\mathrm{sep}_2(a,b,c,d):=\left(a+\frac{c}{\sqrt{d}}\right)^2-16\bigl(b-2\sqrt{d}\bigr)$$

とおく．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は次の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つことである．

(1) $c = d = 0$ かつ $a^2 - 4b \leqq 0$.

(2) $d > 0,\ -2\sqrt{d} \leqq b < 6\sqrt{d},\ D_4(1,\ a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_1(a,\ b,\ c,\ d) \leqq 0$.

(3) $d > 0, b \geqq 6\sqrt{d}, D_4(1,\ a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0, \mathrm{sep}_1(a,\ b,\ c,\ d) \leqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_2(a,\ b,\ c,\ d) \leqq 0$.

証明. $d = f(0) \geqq 0$ は必要条件である．

(I) $d = 0$ の場合.

$f(x) \geqq 0\ (\forall x \in \mathbb{R})$ となるためには，$c = f'(0) = 0$ となることが必要である．すると $f(x) = x^2\bigl((x - a/2)^2 + (b - a^2/4)\bigr)$ なので，(1) が成立しないといけない．(1) が成立すれば $f(x) \geqq 0\ (\forall x \in \mathbb{R})$ となることは容易にわかる．

(II) $d > 0$ の場合を考える．

$a' := a/\sqrt[4]{a},\ b' := b/\sqrt{d},\ c' := c/\sqrt[4]{d^3},\ d' := d/\sqrt[4]{d^4} = 1,\ x' := x/\sqrt[4]{x}$ を考えることにより $d = 1$ の場合に帰着できる．

実数 b を固定して

$$V_b := \left\{(a, c) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \in \mathcal{H}_{2,4}\right\} \subset \mathcal{H}_{2,4}$$

とおき，$\mathcal{P}_{2,4}$ の切断面 $P_b := V_b \cap \mathcal{P}_{2,4}$ を考える．P_b は凸閉集合である．$x^4 - cx^3 + bx^2 - ax + 1 \in \mathcal{P}_{2,4}$ と $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \in \mathcal{P}_{2,4}$ は同値なので，$(a,\ c)$-平面の凸閉集合 P_b は直線 $a + c = 0$ に関して対称である．また，P_b の境界は $D_4(1, a, b, c) = 0$ で定まる曲線上 C_b にある．

(II-1) $b < -2$ の場合は V_b 上のそのような対称な凸閉集合は存在しない．よって $P_b = \phi$ である．なお，一般の d で議論したとき，$b' < -2$ は $b + 2\sqrt{d} < 0$ と同値であった．

(II-2) $b = -2$ の場合は $P_b = \{(0, 0)\}$ であり．これは (2) の場合に含まれる．

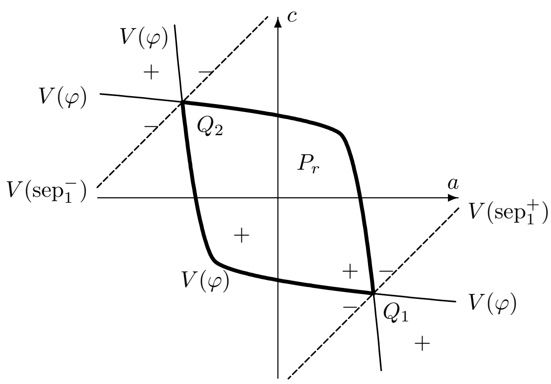


図 6.3.2. $-2 < r \leq 6$

(II-3) $-2 < b < 6$ の場合を考える．

$D_4(1, a, b, c, 1) = 0$ で定まる $(a,\, c)$-平面上 V_b 上の曲線 C_b は下記の Q_1, Q_2 に対応する点で結節点を持つ．

$$\begin{aligned} Q_1 &:= x^4 + 2\sqrt{b + 2\sqrt{d}}x^3 + bx^2 - 2\sqrt{bd + 2d^{3/2}}x + d \\ &= \left(x^2 + \sqrt{b + 2\sqrt{d}}x - \sqrt{d}\right)^2 \\ Q_2 &:= x^4 - 2\sqrt{b + 2\sqrt{d}}x^3 + bx^2 + 2\sqrt{bd + 2d^{3/2}}x + d \\ &= \left(x^2 - \sqrt{b + 2\sqrt{d}}x - \sqrt{d}\right)^2 \end{aligned}$$

C_b 上に境界を持つ対称凸閉集合は V_b 上では図 6.3.2 の太線で囲まれた部分しかなく，これが P_b である．例えば，下記の方程式の零点として定まる 2 直線によって $D_4(1, a, b, c) \geqq 0$ で定まる領域から P_b の部分だけをうまく切り出すことができる．

$$\begin{aligned} \mathrm{sep}_1^+(a, b, c, d) &= a - \frac{c}{\sqrt{d}} - 4\sqrt{b + 2\sqrt{d}} \\ \mathrm{sep}_1^-(a, b, c, d) &= a - \frac{c}{\sqrt{d}} + 4\sqrt{b + 2\sqrt{d}} \end{aligned}$$

ここで $Q_1 \in V(\mathrm{sep}_1^+)$, $Q_2 \in V(\mathrm{sep}_1^-)$ である．また，$\mathrm{sep}_1 = \mathrm{sep}_1^+ \cdot \mathrm{sep}_1^-$ であり，$\mathrm{sep}_1(a, b, c, d) \leqq 0$ が $\mathrm{sep}_1^+(a, b, c, d) \leqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_1^-(a, b, c, d) \geqq 0$

と同値である．$-2 < b' < 6$ は $-2\sqrt{d} < b < 6\sqrt{d}$ と同値なので，(2) が成り立つ．

なお，$2 \leqq r < 6$ のとき，

$$\begin{aligned} Q_3 &:= x^4 - 2\sqrt{b - 2\sqrt{d}}x^3 + bx^2 - 2\sqrt{bd - 2d^{3/2}}x + d \\ &= \left(x^2 - \sqrt{b - 2\sqrt{d}}x + \sqrt{d}\right)^2 \\ Q_4 &:= x^4 + 2\sqrt{b - 2\sqrt{d}}x^3 + bx^2 + 2\sqrt{bd - 2d^{3/2}}x + d \\ &= \left(x^2 + \sqrt{b - 2\sqrt{d}}x + \sqrt{d}\right)^2 \end{aligned}$$

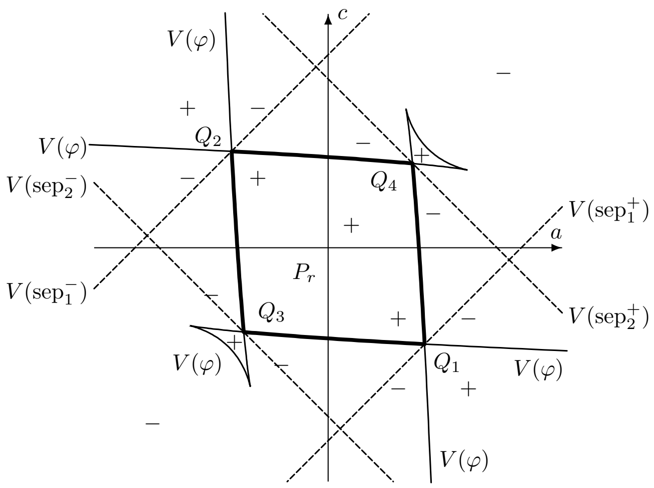


図 6.3.3. $r > 6$

に対応する 2 点も $V(D_4)$ の特異点であるが，これらは P_b の内部の点なので，結果に影響を与えない．

逆に，(2) が成立すれば $f(x) \geqq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となることは，上の考察から容易にわかる．

(II-4) $b \geqq 6$ の場合は，曲線 C_b が図 6.3.3 のようになるから，上と同様な議論で，P_b は図 6.3.3 の太線で囲まれた領域になる．この場合，(3) が成り立つ．

逆に，(2) または (3) が成り立つとき，$f(x) \geqq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となることは，上の議論を逆にとどって考えれば容易に分かる． □

6.3.4. $\mathcal{P}^+_{2,4}$ の構造

本節では，定理 1.4.8 の証明を与える．

定理 6.3.4. 4 次関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ に対し，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sep}_2^-(a,b,c,d) := a + \frac{c}{\sqrt{d}} + 4\sqrt{b - 2\sqrt{d}} \\
&\mathrm{sep}_3^-(a,c,d) := a\sqrt{d} + c \\
&\mathrm{sep}_4^-(b,c,d) := c + 2\sqrt{bd + 2d^{3/2}} \\
&\mathrm{sep}_5^-(a,b,d) := a + 2\sqrt{b + 2\sqrt{d}}
\end{aligned}$$

とおく．任意の非負実数 $x \geqq 0$ に対して $f(x) \geqq 0$ となるための必要十分条件は以下の (1) 〜 (5) のいずれかが成立することである．

(1) $d = 0$ かつ命題 1.4.6 内の条件 (1) 〜 (3) のいずれかが成り立つ．

(2) $d > 0$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $D_4(1,\ a,\ b,\ c,\ d) \leqq 0$.

(3) $d > 0$, $b > -2\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) \geqq 0$, $\mathrm{sep}_4^-(b,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $\mathrm{sep}_5^-(a,\ b,\ d) \geqq 0$.

(4) $d > 0$, $-2\sqrt{d} < b \leqq 6\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) < 0$ かつ $D_4(1,\ a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$.

(5) $d > 0$, $b > 6\sqrt{d}$, $\mathrm{sep}_3^-(a,\ c,\ d) < 0$, $\mathrm{sep}_2^-(a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$ かつ $D_4(a,\ b,\ c,\ d) \geqq 0$.

証明. $D_4(1,a,b,c,1) = 0$ のグラフによって $(a,\ b, c)$-空間 $\mathbb{R}^3$ は 6 個の領域に分割される．アルゴリズム 6.2.25 のステップ 3 で説明した性質に注意して図 6.3.4, 6.3.5, 6.3.6 を見れば，簡単に証明できる． □

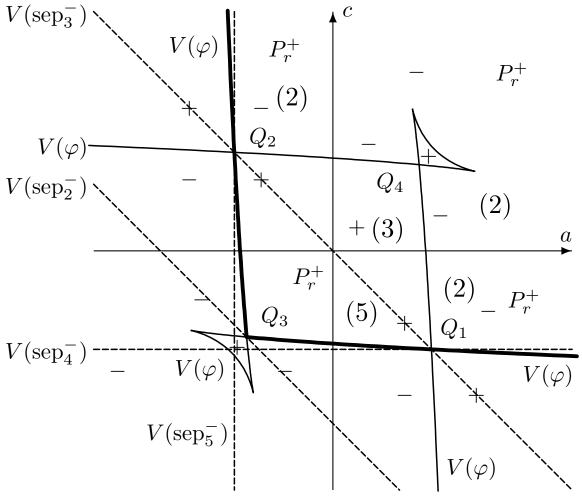
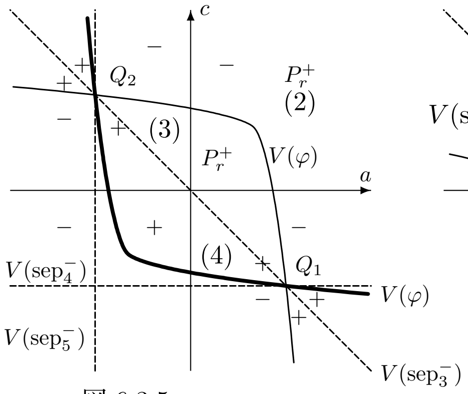


図 6.3.4. $r > 6$



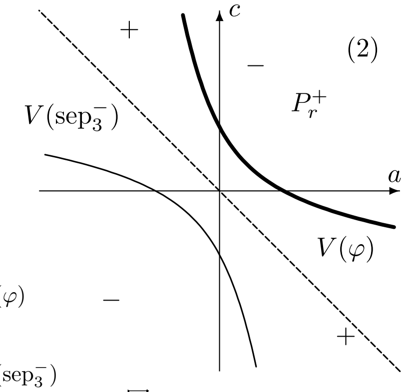


図 6.3.5. $-2 < r \leq 6$　　　図 6.3.6. $r < -2$

注意 6.3.5.　図 6.3.4, 6.3.5, 6.3.6 から分かるように，$D_4 = 0$ のグラフによって $\mathbb{R}^3$ は 6 個の領域に分割される．それぞれの領域において，そこに属する多項式の根は，実根と虚根の個数，実根の中で正のものと負のものの個数が同じになる．例えば，

$$g \in \left\{ f \in \check{\mathcal{H}}_{2,4} \;\middle|\; D_4(f) < 0,\ \mathrm{sep}_3^-(f) < 0 \right\}$$

の場合，4 次方程式 $g(x) = 0$ は 2 個の相異なる正の根と 2 個の虚根を持

つ．また，例えば，

$$g \in \left\{ f \in \breve{\mathcal{H}}_{2,4} \;\middle|\; D_4(f) > 0,\, b > 6\sqrt{d},\, \mathrm{sep}_2^-(f) < 0,\, a < 0,\, c < 0 \right\}$$

の場合，$g(x) = 0$ は 4 個の相異なる正の実根を持つ．

6.4.　巡回不等式

6.4.1.　$\mathbb{P}^2$ 上の巡回不等式

第 2 章の復習から始める．本節では主に f が 3 変数 d 次斉次巡回多項の場合を扱い，一部，f が対称多項式の場合も扱う．巡回群 $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は $A = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ または $A = \mathbb{P}^2_+$ に自然に作用していると考える．A の斉次座標系を $(a : b : c)$ で表す．以下，本章を通して 3 変数斉次多項式を扱う節では，$\mathcal{H}_{3,d}$, $\mathcal{P}^c_{3,d}$ 等の 3 は省略して，$\mathcal{H}_d$, $\mathcal{P}^c_d$ 等と書く．改めて定義を書くと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^c_d := \left\{ d \in \mathcal{H}_{3,d} \;\middle|\; f \text{ は 3 変数 } d \text{ 次巡回多項式} \right\} \cup \{0\} \\
&\mathcal{H}^{c0}_d := \left\{ f \in \mathcal{H}^c_d \;\middle|\; f(1,1,1) = 0 \right\} \\
&\mathcal{P}^c_d := \mathcal{P}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \mathcal{H}^c_d), \quad \mathcal{P}^{c+}_d := \mathcal{P}(\mathbb{P}^2_+, \mathcal{H}^c_d) \\
&\mathcal{P}^{c0}_d := \mathcal{P}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \mathcal{H}^{c0}_d), \quad \mathcal{P}^{c0+}_d := \mathcal{P}(\mathbb{P}^2_+, \mathcal{H}^{c0}_d)
\end{aligned}$$

である．以下は $\mathcal{H}^c_d$ に属する基本的な多項式である．

$$\begin{aligned}
&S_{i,j,k}(a,b,c) := a^i b^j c^k + b^i c^j a^k + c^i a^j b^k \\
&S_{i,j}(a,b,c) := a^i b^j + b^i c^j + c^i a^j \\
&S_i(a,b,c) := a^i + b^i + c^i, \quad U(a,b,c) := abc \\
&T_{i,j,k}(a,b,c) := S_{i,j,k}(a,b,c) + S_{j,i,k}(a,b,c) \\
&T_{i,j}(a,b,c) := T_{i,j,0}(a,b,c)
\end{aligned}$$

繁雑さを避けるため，上記の多項式については変数が a, b, c であるとき，$(a,\, b,\, c)$ を省略して書く．例えば，$S_i = a^i + b^i + c^i$, $U = abc$ である．

命題 6.4.1.　$d \geqq 3$ のとき以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^c_d = \phi$.

(2) $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{c0}_d = \{(1:1:1)\}$.

証明. (1) 定理 6.2.12(2) より $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^c_{3k}=\phi$ である．また，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^c_4\subset V(S_4)=\phi$ である．S_2 倍写像 $\iota:\mathcal{H}^c_d\xrightarrow{\times S_2}\mathcal{H}^c_{d+2}$ を考えれば $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^c_{d+2}\subset\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^c_d$ なので，結論を得る．

(2) 上の議論と同様である． □

定理 6.4.2. $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし，$\pi\colon\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\to\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ は自然な全射とする．また，

$$L:=\left\{(0:s:1)\in\mathbb{P}^2_+\;\middle|\;s>0\right\}$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ は正規実代数曲面で，$\Delta^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G)=\{\pi(1:1:1)\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G)=\phi$, $\Delta^2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G)=\{\mathrm{Reg}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G)\}$ である．

(2) $\mathbb{P}^2_+/G$ は 2 次元正規半代数多様体で，$\Delta^0(\mathbb{P}^2_+/G)=\{\pi(1:1:1),\pi(0:0:1)\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^2_+/G)=\{\pi(L)\}$, $\Delta^2(\mathbb{P}^2_+/G)=\{\mathrm{Reg}(\mathbb{P}^2_+/G)\}$ である．

証明. (1) $X^c_d:=X(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}},\mathcal{H}^c_d)$ とおくと，$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G\cong X^c_3$ である．後で証明するが，X^c_3 は $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ 内の超曲面である．または，次の命題で証明するように X^c_4 は実代数多様体で，双有理写像 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G\cdots\to X^c_4$ が存在する．いずれからも，$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ が実代数曲面であることがわかる．$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}/G$ は $\pi(1:1:1)$ に有理 2 重点を持ち，それ以外では非特異な複素代数曲面である．このことから結論を得る．

(2) は例 6.2.8 と (1) よりわかる．$\mathrm{Zar}(\pi(L))$ は $\pi(0:0:1)$ に尖点を持つ有理曲線である． □

次に特性多様体について述べる．

$$\Phi^c_d:=\Phi_{\mathcal{H}^c_d},\quad X^c_d:=X(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}},\mathcal{H}^c_d),\quad X^{c+}_d:=X(\mathbb{P}^2_+,\mathcal{H}^c_d)$$

とおく．$G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ として，$d\geqq 3$ のとき $X^{c+}_d\cong\mathbb{P}^2_+/G$ である．また，$d=3$ または $d\geqq 5$ のとき $X^c_d\cong\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ である．X^c_4 については，別途，調べておく必要がある．

命題 6.4.3. $P:=\Phi^c_4(1:1:1)\in X^c_4$ とおくと，$\Delta^0(X^c_4)=\{P\}$, $\Delta^1(X^c_4)=\phi$, $\Delta^2(X^c_4)=\{\,(X^c_4-\{P\})\}$ である．

証明. $\Phi_4^c : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \cdot \to X_4^c$ を係数拡大して有理写像 $\Phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \cdot \to \mathbb{P}(\mathcal{H}_4^c \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ に拡張する．また $\pi : \mathbb{P}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}/G$ も $\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{C}}/G$ に拡張する．ここで $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\mathbf{1} = (1:1:1)$, $Q_1 := (\omega : \omega^2 : 1)$ and $Q_2 := (\omega^2 : \omega : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ とおく．すると $(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)^G = \{\mathbf{1}, Q_1, Q_2\}$ であり，$\mathrm{Bs}(\mathcal{H}_4^c \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \{Q_1, Q_2\}$ である．したがって，有理写像 $\Phi_{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \cdots \to (X_4^c)_{\mathbb{C}}$ の不確定点集合は $\{Q_1, Q_2\}$ である．$L_{\mathbb{C}} := \bigl\{(a:b:c) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \bigm| a+b+c = 1\bigr\}$, $L := L_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 = V(S_1)$, $P := \pi(\mathbf{1})$, $P_1 := \pi_{\mathbb{C}}(Q_1)$, $P_2 := \pi_{\mathbb{C}}(Q_2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$, $C_{\mathbb{C}} := \pi_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$ and $C := \pi(L) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G$ とおく．$Q_1, Q_2 \in L_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G) = \{P, P_1, P_2\}$ であることに注意する．$\mathcal{H}_4^c$ に属する任意の関数は L 上では定数関数となるので，$\Phi_4^c(L)$ は 1 点である．他方，$\Psi_4^c : (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G - C) \longrightarrow (X_4^c - \Phi_4^c(L))$ が同型写像であることは容易にわかる．$\psi : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/G$ を 2 点 P_1, P_2 でのブロー・アップとし，この写像による $C_{\mathbb{C}}$ の強変換を $C_{\tilde{X}}$ とする．$C_{\tilde{X}}$ が第 1 種例外曲線であり，$\widetilde{X} \longrightarrow (X_4^c)_{\mathbb{C}}$ は $C_{\tilde{X}}$ のコントラクションである．$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \subset \widetilde{X}$ とみなせば，$\Psi_4^c : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/G \longrightarrow X_4^c$ は C の滑らかなコントラクションであることがわかる．したがって，X_4^c は完備実代数多様体である．また，$\mathrm{Sing}(X_4^c) = \{P\}$ で，この孤立特異点は A_1-型有理 2 重点である．　□

これまでに述べたことから次が得られる．

定理 6.4.4.　$d \geqq 3$ とし，$P := \Phi_d^c(1:1:1)$, $O := \Phi_d^c(0:0:1)$, $C_d := \bigl\{\Phi_d^c(0:s:1) \bigm| s > 0\bigr\}$ とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{P}_d^c := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^c)$ の境界は 2 つの面成分 $\mathcal{F}_d^c := \mathcal{F}(\mathrm{Reg}(X_d^c))$ と $\mathcal{F}(P)$ から成る．ここで，$\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0}$ である．

(2) $\mathcal{P}_d^{c+}$ の境界は高々4 個の面成分から成り，その 4 個は $\mathcal{F}_d^{c+} := \mathcal{F}(\mathrm{Reg}(X_d^{c+}))$, $\mathcal{E}_d^{c+} := \mathcal{F}(C_d)$, $\mathcal{F}(O)$, $\mathcal{F}(P)$ である．ただし，これらのうち幾つかは面成分にならない場合もある．また $\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0+}$ で，これは必ず面成分である．

(3) もし $\dim \mathcal{F}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ ならば，$\mathrm{disc}(\mathrm{Reg}(X_d^c)) = \mathrm{disc}(\mathrm{Reg}(X_d^{c+}))$ が成り立つ．

証明. (1) 定義から $\mathcal{F}(P) = \mathcal{P}_d^{c0}$ であり，これは超平面 $\mathcal{H}_d^{c0} \subset \mathcal{H}_d^c$ 上の半代数的閉凸錐である．$\mathcal{P}_d^c$ は非退化であったので，$\mathcal{F}_d^c \cup \mathcal{P}_d^{c0}$ はある非退化な凸錐を囲む．その凸錐は $\mathcal{P}_d^c$ 以外にあり得ない．したがって，$\mathcal{F}_d^c$ は $\mathcal{P}_d^c$ の面成分である．

(2) に証明も (1) と同様である．

(3) は相対定理 A より分かる． □

定義 6.4.5.　上の命題において，$\mathcal{F}_d^c$ を $\mathcal{P}_d^c$ の**主成分**であるといい，$\mathrm{disc}(\mathrm{Reg}(X_d^c))$ を $\mathcal{P}_d^c$ の**主判別式**という．

$\mathcal{P}_d^{c+}$ については，$\dim \mathcal{F}_d^{c+} = \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ であるとき，$\mathcal{F}_d^{c+}$ を $\mathcal{P}_d^{c+}$ の**主成分**といい，$\mathrm{disc}(\mathrm{Reg}(X_d^{c+}))$ を**主判別式**という．$\dim \mathcal{F}_d^{c+} < \dim \mathcal{H}_d^c - 1$ の場合，$\mathcal{P}_d^{c+}$ は**主成分を持たない**という．また，$\mathcal{E}_d^{c+}$ が面成分であるとき，$\mathcal{E}_d^{c+}$ は $\mathcal{P}_d^{c+}$ の**端成分**であるといい，$\mathrm{disc}(C_d)$ を **端判別式**という．

$\mathrm{disc}(P)$ は $f(1,1,1) = 0$ を表現する 1 次式，$\mathrm{disc}(O)$ は S_d の係数が 0 であることを表す 1 次式である．

$\mathcal{P}_d^{c0+}$ についても，同様に上記の諸概念を定義する．

命題 6.4.6. (主判別式定理) $\mathcal{P}_d^{c+}$ が主成分を持つ場合，$\mathcal{P}_d^{c+}$ と $\mathcal{P}_d^c$ の主判別式は一致する．

証明. 相対定理 A よりすぐわかる． □

定理 6.4.7. (端判別式定理)　$d \geqq 3$ のとき $h \in \mathcal{H}_{d-3}^c$ を適当に選んで，$\mathcal{H}_d^c$ の基底 $s_0,\ldots, s_N$ を $s_0,\ldots, s_{N-1} \in \mathcal{H}_d^{c0}$ かつ $s_0 = S_d - Uh$, $s_1 = S_{d-1,1} - Uh$, $s_2 = S_{d-2,2} - Uh,\ldots, s_{d-1} = S_{1,d-1} - Uh$ となるように選ぶ．また，$\mathcal{H}_d^c$ の元を $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} p_i s_i$ と表しておく．これに対応して $\mathcal{P}_d^{c0+}$, $\mathcal{P}_d^{c+}$ の端判別式をそれぞれ $\mathrm{disc}_d^{c0+}(p_0,\ldots, p_{N-1})$, $\mathrm{disc}_d^{c+}(p_0,\ldots, p_N)$ とする．すると，

$$\mathrm{disc}_d^{c0+}(p_0, \ldots, p_{N-1}) = \mathrm{disc}_d^{c+}(p_0, \ldots, p_N) = D_d(p_0, p_1, \ldots, p_{d-1}, p_0)$$

が成り立つ．ここで，D_d は定義 1.4.2 で定義された d 次方程式の判別式である．

証明. 点 $(0:t:1) \in \mathbb{P}_+^2$ における $\mathcal{P}_d^{c+}$, $\mathcal{P}_d^{c0+}$ の局所錐を $\mathcal{L}_{0,t}^{c+}$, $\mathcal{L}_{0,t}^{c0+}$ という記号で表す．$t > 0$ のとき $\mathcal{L}_{0,t}^{c+}$, $\mathcal{L}_{0,t}^{c0+}$ は主成分に含まれないから，$\dim \mathcal{E}_d^{c+} = N$, $\dim \mathcal{E}_d^{c0+} = N-1$ で，$\mathcal{P}_d^{c0+}$, $\mathcal{P}_d^{c+}$ は端成分 $\mathcal{E}_d^{c+}$, $\mathcal{E}_d^{c0+}$ を持つ．

$f = s_0 + p_1 s_1 + \cdots + p_N s_N \in \mathcal{L}_{0,t}^{c+} \subset \mathcal{E}_d^{c+}$ $(t > 0)$ は $f(0,t,1) = 0$ を満たす．任意の $x \geqq 0$ に対し $f(0,x,1) \geqq 0$ だから x についての方程式 $f(0,x,1) = 0$ は $x = t$ を重根に持つ．よって，f の判別式は 0 である．$S_{i,d-1}(0,x,1) = x^i$ $(1 \leqq i \leqq d-1)$, $S_d(0,x,1) = x^d + 1$, $U(0,x,1) = 0$ だから

$$f(0,x,1) = p_0 x^d + p_1 x^{d-1} + \cdots + p_{d-1} x + p_0$$

である．よって，$x(0,x,1)$ の判別式は $D_d(p_0,\ p_1, \ldots,\ p_{N-1},\ p_0)$ である．$D_d(p_0,\ p_1, \ldots,\ p_{N-1},\ p_0) = 0$, $\mathrm{disc}_d^{c+}(p_0, \ldots,\ p_N) = 0$, $\mathrm{disc}_d^{c0+}(p_0, \ldots,\ p_{N-1}) = 0$ で，D_d, disc_d^{c+}, disc_d^{c0+} は既約だから，これらは定数倍を除いて一致しないといけない． □

定理 6.4.8. $A = \mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$ または $\mathbb{P}_+^{n-1}$ とし，$\mathcal{P} := \mathcal{P}(A, \mathcal{H}_{n,d}^s)$, $X := X(A, \mathcal{H}_{n,d}^s)$, $\Phi := \Phi_{\mathcal{H}_{n,d}^s} \colon A \cdots \to X$ とおく．今 $\dim X = n-1$ が成り立つと仮定する．D は $\Delta^{n-1}(X)$ の (ただ 1 つの) 元とする．もし $d < 2n$ ならば $\mathcal{F}(D)$ は $\mathcal{P}$ の面成分ではない．つまり，$\mathcal{P}$ は主成分を持たない．

証明. $(a_0 \colon \cdots \colon a_{n-1})$ を $\mathbb{P}_\mathbb{R}^{n-1}$ の座標系とし，σ_i を $a_0, \ldots, a_{n-1}$ の i 次基本対称式とする $(1 \leqq i \leqq n)$．$B := A/\mathfrak{S}_n$ とし，$(b_1 \colon \cdots \colon b_n)$ を B の重み付き斉次座標系とする．また，$b_i = \sigma_i$ によって自然な全射 $\sigma \colon A \to B$ を定める．$N := \dim \mathcal{H}_{n,d}^s$ とおく．$\dim \mathcal{P} = N$ である．

今，$\mathcal{F}(D)$ が $\mathcal{P}$ の面成分であると仮定して矛盾を導く．$\Phi(a) \in D$ を満たす一般の点 $a \in A$ に対し $\dim \mathcal{P}_a = N - n$ が成り立つ．よって，ある $a^0 \in A$ を選ぶと $b^0 := \sigma(a^0) \in \mathrm{Int}(B)$, $\Phi(a^0) \in D$, $\mathcal{P}_{a^0} \neq 0$ が成り立つ．$0 \neq f \in \mathcal{P}_{a^0}$ を取る．f を B 上の関数と考える．$d < 2n$ で $\deg b_i = i$ なので，f は

$$f(b_1, \ldots, b_n) = g_1(b_1, \ldots, b_{n-1}) + b_n g_2(b_1, \ldots, b_{n-1})$$

という形に表せる．$b^0 = (b_1^0, \ldots, b_n^0)$ とする．$f(b^0) = 0$ であって，f は b_n に関して高々1 次であり，B 上で $f \geqq 0$ なので，

$$g_1(b_1^0, \ldots, b_{n-1}^0) = g_2(b_1^0, \ldots, b_{n-1}^0) = 0$$

が成り立つ．$b_1 = b_0, \ldots, b_{n-1} = b_{n-1}^0$ で定まる B 内の線分を L とする．任意の $b \in L$ に対して $f(b) = 0$ である．よって，もし $\sigma(a) \in L$ かつ $\Phi(a) \in D$ であれば $\mathfrak{P}_a = \mathfrak{P}_{a^0}$ となる．a_0 は一般の元なので $\dim \mathfrak{F}(D) < N - 1$ と退化して，$\mathfrak{F}(D)$ は面成分にならない．□

6.4.2.　3 変数対称不等式

3 変数対称不等式を調べるには，まず $\Delta(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$ と $\Delta(\mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3)$ を決定しておくのが有用である．まず，$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ の研究から始める．

$\pi\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ を自然な全射とする．π の基本領域として，

$$A_s := \left\{(s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; s + t + 1 \geqq 0,\ s \leqq t \leqq 1\right\}$$

を選ぶことができる．基本領域とは，$\pi(A_s) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ であって，π の定義域と地域を制限した写像 $\pi\colon A_s^\circ \longrightarrow \pi(A_s^\circ)$ が半代数多様体の同型写像であることを意味する．

よく知られているように，任意の対称多項式は基本対称式の多項式として表すことができるので，

$$\mathbb{C}[a, b, c]^{\mathfrak{S}_3} = \mathbb{C}[S_1,\, S_{1,1},\, U]$$

である．ここで左辺は $\mathbb{C}[a, b, c]$ 内の対称多項式全体の集合を表す．このことは，$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/\mathfrak{S}_3 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ であることを意味する．ここで，$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ は重み付き射影空間である．$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ の斉次座標 $(x_0 : x_1 : x_2)$ は $(S_1 : S_{1,1} : U)$ に対応するように選ぶ．$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1, 2, 3)$ は点 $(0 : 1 : 0)$ と点 $(0 : 0 : 1)$ を孤立特異点 (これらは有理 2 重点) として持つ他は非特異であることが知られている．π の係数拡大 $\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2/\mathfrak{S}_3$ を考える．$\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0 : 0 : 1)$ はすべて虚点であって $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ には属さない．よって $(0 : 0 : 1) \notin \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3$ である．他方 $\pi_{\mathbb{C}}^{-1}(0 : 1 : 0) \cap A_s = \{(-1 : 0 : 1)\}$ であって，$\mathrm{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \{(0 : 1 : 0)\}$ である．

ところで $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,3)$ は $\mathbb{R}$-スキームの構造を持つので，その $\mathbb{R}$-値点を定義することができき，それを $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ と定義する．$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ は実代数多様体である．集合としては $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ は $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ を次の同値関係で割って得られる商集合である．

$$\begin{aligned}&(x,y,z)\sim(x',y',z')\\ &\iff \quad \text{ある } c\in\mathbb{C}-\{0\} \text{ が存在して } x=cx',\ y=c^2y',\ z=c^3z'\end{aligned}$$

例えば $(0,-1,0)\sim(0,1,0)$ であるが，$c\in\mathbb{R}$ に限定するとこの同値関係が導けず，正しい定義にならない．

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ の半代数的閉部分集合であるが，$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3\neq\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ である．

一般に，$\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_n$ を $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,\cdots,n)$ の半代数的閉部分集合として不等式で表すことは，n 次方程式 $x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n^2}+\cdots+(-1)^na_n=0$ のすべての根が実数であることを $a_1,\ldots,a_n$ の不等式として表すことと同値である．特に，$n\geqq 5$ だと非常に繁雑になるが，$n=3,\,4$ の場合は簡単である．3 次方程式 $x^3-S_1x^2+S_{1,1}x-U=0$ のすべての解が実数である条件は，よく知られているように，

$$27U^2-18S_1S_{1,1}U+4S_1^3U+4S_{1,1}^3-S_1^2S_{1,1}^2=-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\leqq 0$$

である．これが，$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ 内での $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3$ の定義不等式である．斉次座標 $(x_0:x_1:x_2)$ で書き換えれば

$$27x_2^2-18x_0x_1x_2+4x_0^3x_2+4x_1^3-x_0^2x_1^2\leqq 0 \qquad ①$$

である．これより，以下が得られる．

命題 6.4.9.　$L^b_s:=\big\{(s:1:1)\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\ \big|\ s\in\mathbb{R}\cup\{\infty\},\ s\neq 1,\ s\neq -2\big\}$ とおく．すると，$\pi(L^b_s)$ は尖点を持つ $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 内の完備 3 次曲線と同型で，$\Delta^2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3)=\big\{\pi(A^\circ_s)\big\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3)=\big\{\pi(L^b_s))\big\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3)=\big\{\pi(1:1:1),\,\pi(-1:0:1)\big\}$ となる．

証明.　$\mathfrak{S}_3$ の適当な元により $\big\{(s:s:1)\in A_s\ \big|\ -1/2\leqq s\leqq 1\big\}$ は $\big\{(s:1:1)\in\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\ \big|\ s\leqq -2 \text{ または } s\geqq 1\big\}$ に変換することができることに注

意する．そこで A_s の 3 辺 (頂点を除く) を考えるかわりに L_s^b を利用することができる．簡単な計算から，$\pi(\overline{L_s^b})$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ 上で

$$27x_2^2 - 18x_0x_1x_2 + 4x_0^3x_2 + 4x_1^3 - x_0^2x_1^2 = 0$$

で定義される曲線で，$\mathrm{Sing}(\pi(\overline{L_s^b})) = \{\pi(1:1:1)\}$ である．

$L_1 := \{(s:-s-1:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid -2 \leqq s < -1\}$, $L_2 := \{(s:-s-1:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \mid -1 < s \leqq -1/2\}$ とおく．$\pi(1/s:-1/s-1:1) = \pi(s:-s-1:1)$ なので，$\pi(L_1) = \pi(L_2)$ であり，これは点 $(0:0:1)$ と点 $(0:-3:-2)$ を結ぶ開線分である．$\mathrm{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,3)) \cap \pi(L_1) = \phi$ なので．$\pi(L_1) \subset \mathrm{Reg}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$ である．よって，これは $\Delta^1(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$ に登場しない．また，$\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3) = \pi(\overline{L_s^b})$ である．さらに，$\pi(-1:0:1) = (0:0:1) \in \mathrm{Sing}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3)$, $\pi(-2:1:1) = (0:-3:-2) \notin \mathrm{Sing}(\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2/\mathfrak{S}_3))$ である．以上の考察から，結論が得られる．□

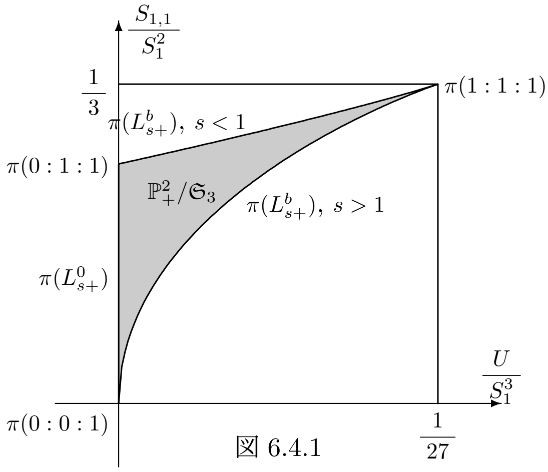


図 6.4.1

次に，$\mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3$ の構造を研究する．自然な全射 $\pi\colon \mathbb{P}_+^2 \to \mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3$ に関する基本領域として，

$$A_{s+} := \{(s:t:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid 0 \leqq s \leqq t \leqq 1\}$$

を選ぶことができる．$\mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3$ は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3)$ 内で ① と $x_1/x_0^2 \geqq 0$, $x_2/x_0^3 \geqq 0$ で定まる半代数的集合である．前命題の証明をあわせて考えると，次の命題が得られる．

命題 6.4.10. $\Delta^2(\mathbb{P}^2_+/\mathfrak{S}_3) = \bigl\{\pi(A^\circ_{s+})\bigr\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^2_+/\mathfrak{S}_3) = \bigl\{\pi(L^b_{s+})$, $\pi(L^0_{s+})\bigr\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}^2_+/\mathfrak{S}_3) = \bigl\{\pi(0:0:1), \pi(0:1:1), \pi(1:1:1)\bigr\}$ である．ここで，

$$L^b_{s+} := \bigl\{(s:1:1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \bigm| 0 < s < 1 \text{ or } 1 < s < \infty\bigr\},$$
$$L^0_{s+} := \bigl\{(0:s:1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \bigm| 0 < s < 1\bigr\}$$

である．

命題 6.4.11. 以上の記号のもと，

$$\mathcal{H}^s_d := \bigl\{f \in \mathcal{H}_d \bigm| f \text{ は対称多項式}\bigr\},$$
$$\mathcal{H}^{s0}_d := \bigl\{f \in \mathcal{H}_d \bigm| f(1,1,1) = 0 \text{ かつ } f \text{ は対称多項式}\bigr\}$$
$$L = \bigl\{(a:b:c) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \bigm| a+b+c = 0\bigr\}$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) d が 4 以上の偶数ならば $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d = \phi$, $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_d = \{(1:1:1)\}$ である．

(2) d が 3 以上の奇数ならば，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d \cap A_s = \{(-1:0:1)\}$ である．

(3) d が 5 以上の奇数ならば $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_d \cap A_s = \{(1:1:1), (-1:0:1)\}$ である．

(4) $d \geqq 3$ のとき，$\Phi^s_d(L)$ が 1 点になるのは $d = 3, 4, 5, 7$ の場合に限る．

証明. (1), (2), (3) S_2 倍写像 $\mathcal{H}^s_d \xrightarrow{\times S_2} \mathcal{H}^s_{d+2}$ を考えると $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_{d+2} \subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d \cup V(S_2) = \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d$ がわかる．$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_4 = \phi$ なので，4 以上の偶数 d に対して $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d = \phi$ である．$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_d = \{(1:1:1)\}$ の同様にわかる．

d が 5 以上の奇数ならば，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d \subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_3$, $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_d \subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_5$ である．

$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_3 \cap A_s \supset \{(-1:0:1)\}$, $\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_5 \cap A_s \supset \{(1:1:1), (-1:0:1)\}$ は直接的計算でわかる．

基本対称式を $\sigma_1 := S_1$, $\sigma_2 := S_{1,1}$ and $\sigma_3 := U$ とおくとき，$\mathcal{H}^s_d = (\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3])_d$ であって，$S_1(-1:0:1) = 0$, $U(-1:0:1) = 0$, $S_{1,1}(-1:0:1) = -1$ である．d が 3 以上の奇数のとき，単項式 $f(a,b,c) = \sigma_1^k\sigma_2^l\sigma_3^m$ が $k + 2l + 3m = d$ を満たせば，f は σ_1 か σ_3 の倍数なので，$f(-1,0,1) = 0$ である．$(-1:0:1) \in \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_d \subset \mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^s_3$ である．

$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}^{s0}_d$ についても同様である．

(4) $\left\{\sigma_1^k\sigma_2^l\sigma_3^m \;\middle|\; k+2l+3m=d\right\}$ の元の中で，$\sigma_2^l\sigma_3^m$ という形の元が 1 個しか存在しないのは，$d=3,\,4,\,5,\,7$ の場合に限る．$\sigma_2^l\sigma_3^m$ という形の元が 2 個以上存在すれば，$\Phi_d^s(L)$ は半代数曲線になる．　□

命題 6.4.12.　$X_d^+ := X(\mathbb{P}_+^2,\,\mathcal{H}_d^s)$ とおく．もし $d \geqq 4$ ならば $X_d^+ \cong \mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3$ である．

証明. $\Phi_d := \Phi_{\mathcal{H}_d^s} : \mathbb{P}_+^2 \to X_d^+$ は $\Phi_d\colon \mathbb{P}_+^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3 \xrightarrow{\Psi_d} X_d^+$ と分解できる．上で述べたことから $\Psi_4\colon \mathbb{P}_+^2/\mathfrak{S}_3 \longrightarrow X_4^+$ が同型写像であることは容易に確認できる．$\mathrm{Bs}\,S_1 \cap \mathbb{P}_+^2 = \phi$ なので S_1 倍写像 $\times S_1\colon \mathcal{H}_{s,d}^s \longrightarrow \mathcal{H}_{s,d+1}^s$ は同型写像 $X_{d+1}^{s+} \to X_d^{s+}$ を引き起こす．　□

6.5.　３変数３次斉次巡回不等式

6.5.1.　$\mathcal{P}_3^{c+}$ の構造

ここでは，第 2.2.3 項で述べた諸定理を証明する．定理 2.2.13 のように，

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_s(a,b,c) &:= s^2S_3 - (2s^3-1)S_{2,1} + (s^4-2s)S_{1,2}\\ &\qquad\qquad - 3(s^4-2s^3+s^2-2s+1)U\\ \mathfrak{f}_\infty(a,b,c) &:= S_{1,2} - 3U\end{aligned}$$

とおく．また，第 6.2.2 項，第 6.2.3 項の記号をそのまま用いる．$A := \mathbb{P}_+^2$ の斉次座標系を $(a:b:c)$ で表す．$G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし，$\mathcal{H}_d^c$ は前節と同じとし，$\mathcal{P}_d^{c+} := \mathcal{P}(A,\,\mathcal{H}_d^c)$ とおく．$\mathcal{P}_d^{c+}$ は非退化であった．

以下，$d=3$ の場合を考える．$\mathcal{H}_3^c$ の基底として $s_0 := S_3 - 3U,\ s_1 := S_{2,1} - 3U,\ s_2 := S_{1,2} - 3U,\ s_3 := U = abc$ を選ぶ．$\{s_0,\,s_1,\,s_2\}$ は $\mathcal{H}_3^{c0}$ の基底であることに注意する．このように基底を選ぶのが，結果的に最良のようである．

アルゴリズム 6.2.25 のステップ 1 〜 4 を実行してみよう．

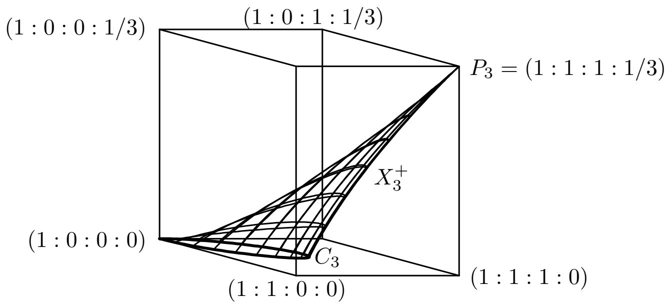
ステップ 1.　特性多様体 $X_3^c := X(\mathbb{P}_\mathbb{R}^2,\,\mathcal{H}_3)$ とその臨界集合への分解 $\Delta(X_3^c)$ を求める．

$x_i = s_i(a,b,s)$ $(i=0,\,1,\,2,\,3)$ から $a,\,b,\,c$ を消去すると，

$$F_3 := x_1^3 - x_0x_1x_2 + x_2^3 + x_0^2x_3 - 3x_0x_1x_3 + 9x_1^2x_3 - 3x_0x_2x_3 - 9x_1x_2x_3 + 9x_2^2x_3$$

が得られる．$F_3 = 0$ で定まる $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ 内の 3 次曲面が $X^c_3 := X(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}^c_3$ であり，これは $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ と同型である．その中で，$x_i x_3 \geqq 0$ $(0 \leqq i \leqq 2)$ で定まる半代数的閉集合が X^{c+}_3 である．$P_3 := (0 : 0 : 0 : 1)$, $O_3 := (1 : 0 : 0 : 0)$, $C_3 := \bigl(X^{c+}_3 \cap \{x_3 = 0\}\bigr) - \{P\}$ とおくと，前節で証明してように，$\Delta^0(X^{c+}_3) = \{P_3, O_3\}$, $\Delta^1(X^{c+}_3) = \{C_3\}$, $\Delta^2(X^{c+}_3) = \{\mathrm{Reg}(X^{c+}_3)\}$ である．

他方，$X^{c0+}_3 := X(\mathbb{P}^2_+, \boldsymbol{\mathcal{H}}^{c0}_3)$ は $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上で閉曲線 $C_3 \cup \{O_3\}$ で囲まれた領域であり，$\Delta^0(X^{c0+}_3) = \{O_3\}$, $\Delta^1(X^{c0+}_3) = \{C_3\}$, $\Delta^2(X^{c0+}_3) = \{\mathrm{Reg}(X^{c0+}_3)\}$ である．



ステップ 2. 各臨界集合 $D \in \Delta(X^{c+}_3)$ に対し，双対多様体のザリスキー閉包 $\mathrm{Zar}(D^\vee) = \mathrm{Zar}(D)^\vee$ を計算する．

多項式 $p_0 s_0 + \cdots + p_3 s_3 \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^c_3$ と点 $(p_0, \ldots, p_3) \in \mathbb{R}^4$ を同一視して考える．公式 6.2.20(3) より $\mathrm{disc}(O_3) = p_0$, $\mathrm{disc}(P_3) = p_0 + p_1 + p_2 + 3p_3$ である．公式 6.2.20(2) を用いて $\mathrm{Zar}(C^\vee_3)$ を計算すると，$\mathrm{Zar}(C_3)$ は $x_3 = 0$, $x_1^3 + x_2^3 - x_0 x_1 x_2 = 0$ で定まる半代数曲面 (2 次元半代数多様体) であることがわかる．定理 6.4.7 より，

$$\mathrm{disc}(C_3) = D_3(p_0, p_1, p_2, p_0) = -4p_0 p_1^3 - 4p_0 p_2^3 - 27p_0^4 + p_1^2 p_2^2 + 18 p_0^2 p_1 p_2$$

が端判別式である．

点 $(0 : s : 1) \in \mathbb{P}^2_+$ における $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{c+}_3$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{c0+}_3$ の局所錐を $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{c+}_{0,s}$, $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{c0+}_{0,s}$ という記号で表すことにする．定理 6.2.29(1) より，これらが 0 でなければ，$\dim \boldsymbol{\mathcal{L}}^{c+}_{0,s} = 2$, $\dim \boldsymbol{\mathcal{L}}^{c0+}_{0,s} = 1$ が成り立つ．公式 6.2.30 より，$\mathrm{Zar}(\boldsymbol{\mathcal{L}}^{c0+}_{0,s})$ の

基底として，

$$\mathfrak{f}_s(a,b,c) := s^2S_3-(2s^3-1)S_{2,1}+(s^4-2s)S_{1,2}-3(s^4-2s^3+s^2-2s+1)U$$

が選べることがわかる．$\mathcal{L}^{c0+}_{0,s}$ は半直線なのだから，$\mathcal{L}^{c0+}_{0,s} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_s$ である．定理 6.2.28(4) より，$\mathfrak{f}_s$ は $\mathcal{P}^{c+}_3$ の端元である．$\mathfrak{f}_s$ において $s \to +\infty$ とした極限は，$\mathfrak{f}_\infty(a,b,c) := s'_2 = S_{1,2}-3U$ である．次の定理により，ステップ 2 は完了する．

定理 6.5.1． 記号は上の通りとする．

(1) $\mathcal{P}^{c+}_3$ は主成分を持たない．

(2) $s>0$ に対し $\mathcal{L}^{c+}_{0,s} = \mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{f}_s + \mathbb{R}_+\cdot U$ である．

(3) $\mathcal{F}(O_3) = \mathbb{R}_+\cdot U + \mathbb{R}_+\cdot(S_{2,1}-3U)+\mathbb{R}_+\cdot(S_{1,2}-3U)$ である．

証明. (1) $\mathbb{P}^2_+$ 内で，$C_3\cup O_3$ で囲まれる領域を底とし P_3 を頂点とする閉錐体を Y とする．X^c_3 は P_2 を A_1 型有理 2 重点に持つ 3 次曲面の一部なので，閉曲線 $C_3\cup O_3$ 上の 1 点と P_3 を結ぶ開線分 I は X^c_3 と共有点を持たず X^c_3 で囲まれる領域の外側にある．他方，I は Y の境界上にある．よって，$\mathrm{Reg}(X^{c+}_3)\subset \mathrm{Int}(Y)$ である．したがって $\mathrm{Reg}(X^{c+}_3)^\vee$ は $\mathcal{P}^{c+}_3$ の外部にある．すなわち，$\mathcal{F}^{c+}_3$ は面成分でない．

(2) $f := \alpha\mathfrak{f}_s+\beta U$ —① とおく．$f(0,s,1)=0$ が成り立つ．したがって，$\alpha \geqq 0$, $\beta\geqq 0$ のとき $f\in\mathcal{L}^{c+}_{0,s}$ である．これと定理 6.2.29(1) より，$\dim\mathcal{L}^{c+}_{0,s}=2$ が得られる．

逆に，① の形の f が $f\in\mathcal{L}^{c+}_{0,s}$ を満たしたとする．すると，$\beta=f(1,1,1)\geqq 0$, $\alpha = (1/s^2)f(0,0,1)\geqq 0$ が成り立つ．以上から (2) がわかる．

(3) $\mathcal{F} := \mathcal{F}(O_3) = \mathcal{L}^{c+}_{0,0}$ とおく．定理 6.2.37(2) より，$\partial\mathcal{F} = \big(\mathcal{E}^{c+}_3\cup\mathcal{P}^{c0+}_3\big)\cap\mathcal{F}$ である．

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{c+}_3\cap\mathcal{F} &= \big(\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{f}_0+\mathbb{R}_+\cdot U\big)\cup\big(\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{f}_\infty+\mathbb{R}_+\cdot U\big)\\ \mathcal{P}^{c0+}_3\cap\mathcal{F} &= \mathcal{L}^{c0+}_{0,0} = \mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{f}_0\cup\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{f}_\infty\end{aligned}$$

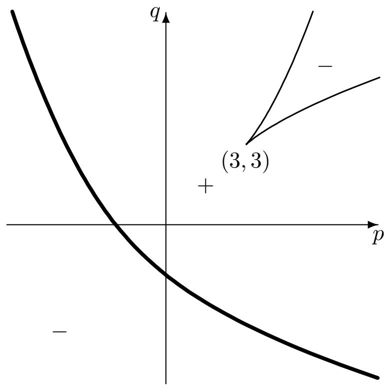
なので，$\mathcal{F} = \mathbb{R}_+\cdot U+\mathbb{R}_+\cdot(S_{2,1}-3U)+\mathbb{R}_+\cdot(S_{1,2}-3U)$ が得られる．□

注意 6.5.2.　$\Psi_3^c\colon X_3^{c+} \to X_3^{c0+}$ は $\Psi_3^c(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0 : x_1 : x_2)$ で定まる正射影とする．F_3 は x_3 については 1 次式であるので，Ψ_3^c は双有理写像で，ユークリッド位相に関する連続写像である．正則写像が特異点を非特異点に移すことはないのであるが，$\Phi_3^c(P_3) = (3 : 1 : 1) \in \mathrm{Reg}(X_3^{c0+})$ なので，点 P_3 において Ψ_3^c は正則写像ではない．複素代数幾何では有理写像が非正則点や不確定点で連続になることはないが，実代数幾何ではそういうことも起きるのである．

ステップ 3 とステップ 4. $\mathcal{P}_c^{c+}$ の判別式は 2 つの自明な判別式 $\mathrm{disc}(O_3) = p_0$, $\mathrm{disc}(P_3) = p_0 + p_1 + p_2 + 3p_3$ と，端判別式

$$\mathrm{disc}(C_3) = -4p_0p_1^3 - 4p_0p_2^3 - 27p_0^4 + p_1^2p_2^2 + 18p_0^2p_1p_2$$

の 3 つしか存在しない．$p := p_1/p_0$, $q := p_2/p_0$, $r := p_3/p_0$ とおいて $\mathrm{disc}_3^{c+}(p, q) := D_3(1, p, q, 1) = 0$ のグラフを $(p,\, a)$-平面 $\mathbb{R}^2$ 上に描くと以下のようになる．



$4p^3 + 4q^3 + 27 = p^2q^2 + 18pq$

このグラフ上に境界を持つ凸集合は，図の太線を境界とする領域であるので，ステップ 3 とステップ 4 が完了し，次の定理が得られる．

定理 6.5.3.　$\mathcal{H}_3^c$ 内のモニックな多項式 $f = S_3 + pS_{2,1} + qS_{1,2} + rU$ に対し，任意の $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ に対して $f(a, b, c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は次の (1), (2) のうちいずれかが成立することである．

(1) $3 + 3p + 3q + r \geqq 0$ かつ $4p^3 + 4q^3 + 27 \geqq p^2q^2 + 18pq$
(2) $3 + 3p + 3q + r \geqq 0$ かつ $p \geqq 0$ かつ $q \geqq 0$

斉次形で上の定理を書き換えれば定理 2.2.13 が得られる．また，ステップ 2 のところで系 6.5.4 が証明されている．

系 6.5.4. $\mathcal{P}_3^{c+}$ の端元は，$\mathfrak{f}_s$ $(s \in [0, \infty])$ の正の定数倍か，$U = abc$ の正の定数倍のいずれかである．

系 6.5.5. $\mathcal{H}_3^s$ は $\mathcal{H}_{3,3}$ 内の 3 変数 3 次対称多項式全体 (0 を含む) の集合とし，$\mathcal{P}(\mathbb{P}_+^3, \mathcal{H}_3^G)$ とおく．すると，$\mathcal{P}_{3,3}^{s+}$ は以下の 3 本の半直線 E_1, E_2, E_3 を稜 (辺) とする三角錐である．

$$E_1 := \mathbb{R}_+ \cdot (T_{2,1} - 6U) \quad E_2 := \mathbb{R}_+ \cdot (S_3 + 3U - T_{2,1}) \quad E_3 := \mathbb{R}_+ \cdot U$$

6.5.2. X_d^{c0} と X_d^{c0+} の構造

$\Phi_d^{c0} := \Phi_{\mathcal{H}_d^{c0}}$, $X_d^{c0} := X(\mathbb{P}_\mathbb{R}^2, \mathcal{H}_d^{c0})$, $X_d^{c0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_d^{c0})$ とおく．

定理 6.5.6. $d \geqq 3$ ならば $\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は 1 点である．すなわち，有理写像 $\Phi_d^{c0} : \mathbb{P}_\mathbb{R}^2 \cdots \to X_d^{c0}$ は不確定点 $(1:1:1)$ まで連続写像として拡張できる．さらに，$\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内部の非特異点である．

証明. $\mathbb{C}$ に係数拡大して考察する．$\rho_1 : Y' \longrightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ を点 $(1:1:1)$ でのブロー・アップとし，$E_1' := \rho_1^{-1}(1:1:1)$ とする．

まず，$d = 3$ の場合から考える．$s_0 := S_3 - 3U$, $s_1 := S_{2,1} - 3U$, $s_2 := S_{1,2} - 3U$ を $\mathcal{H}_3^{c0} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ の基底として選ぶ．

$$\begin{aligned}
&s_0(1+t, 1+ut+vt^2, 1) \\
&\qquad = 3(u^2 - u + 1)t^2 + (3(2u-1)v + (u^3+1))t^3 + O(t^4) \\
&s_1(1+t, 1+ut+vt^2, 1) \\
&\qquad = (u^2 - u + 1)t^2 + ((2u-1)v + u)t^3 + O(t^4) \\
&s_2(1+t, 1+ut+vt^2, 1) \\
&\qquad = (u^2 - u + 1)t^2 + ((2u-1)v + u^2)t^3 + O(t^4)
\end{aligned}$$

である．ここで，$O(t^4)$ は t について 4 次以上の項の和を表す．そこで，$\zeta_6=(1+\sqrt{-3})/2$ とし，$u^2-u+1=0$ の 2 根 $u=\zeta_6,\,\zeta_6^5$ に対し，点 $(1:1:1)$ を始点とする方向ベクトル $(1:u:1)$ に対応する E_1' 上の 2 点を y_2,y_3 とする．すると，$\mathrm{Bs}(\rho_1^*\mathcal{H}_3^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\{y_2,y_3\}$ である．$\rho_2:\widetilde{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}\longrightarrow Y'$ を 2 点 y_2,y_3 でのブロー・アップとし，$E_2:=\rho_2^{-1}(y_2),\,E_3:=\rho_2^{-1}(y_3),\,E_1$ は E_1' の強変換，$\rho:=\rho_2\circ\rho_1$ とする．$s_i(1+t,\,1+ut+vt^2,\,1)$ の t^3 の係数は線形独立だから，すると，$\mathrm{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_3^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\phi$ である．$\widetilde{\Phi_3^{c0}}:\widetilde{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}\longrightarrow\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ は $\widetilde{\Phi_3^{c0}}=\Phi_3^{c0}\circ\rho$ を満たす正則写像とする．$\widetilde{\Phi_3^{c0}}(E_1)=(3:1:1)=:Q$ である．$u=\zeta_6,\,\zeta_6^5$ に対し，Q と $((u^3+1):u:u^2)$ を通る直線を L_2, L_3 とすると，$\widetilde{\Phi_3^{c0}}(E_2)=L_2$, $\widetilde{\Phi_3^{0}}(E_2)=L_3$ である．$L_2\cap\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2=\{Q\}$, $L_3\cap\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2=\{Q\}$ なので，$\mathbb{R}$-係数の範囲では $\Phi_3^{c0}(1:1:1)=Q$ と確定する．よって，$\Phi_3^0:\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2\longrightarrow\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ は $(1:1:1)$ まで連続写像として拡張できるが，そこで正則ではない．

$d\geqq 4$ とする．$\iota:\mathcal{H}_3^{c0}\longrightarrow\mathcal{H}_d^{c0}$ を $\iota_h(f)=S_1^{s-3}f$ で定義する．$\mathrm{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_d^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\subset\mathrm{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_3^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})\cup V(S_1)$ である．$\mathrm{Bs}(\mathcal{H}_d^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\{(1:1:1)\}$ なので，$\mathrm{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_d^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\phi$ がわかる．

$\rho^*\mathcal{H}_d^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ が定める正則写像を $\widetilde{\Phi_d^{c0}}:\widetilde{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}\longrightarrow\mathbb{P}((\mathcal{H}_d^{c0})^\vee\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$ とし，$(X_d^{c0})_{\mathbb{C}}:=\widetilde{\Phi_d^{c0}}(\widetilde{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2})$ とおく．

$e=4,5$ のとき，$s=S_4-US_1,\,S_{3,1}-US1,\,S_{2,2}-US_1,\,S_{1,3}-US_1\in\mathcal{H}_4^{c0}$ と $s=S_5-US_{1,1},\,S_{4,1}-US_{1,1},\,S_{3,2}-US_{1,1},\,S_{2,3}-US_{1,1},\,S_{1,4}-US_{1,1}$, $US_1-US_{1,1}\in\mathcal{H}_5^{c0}$ に対して，

$$s(1+t,1+ut,1)=c_0(u^2-u+1)t^2+\sum_{i\geqq 3}h_i(u)t^i \qquad ①$$

と書けることはすぐ確認できる．$d=3k+e$ $(e\in\{3,\,4,\,5\})$ のとき，$\mathcal{H}_d^{c0}=\mathcal{H}_{3k}^{c}\cdot\mathcal{H}_e^{c0}$ である．よって，任意の $s\in\mathcal{H}_d^{c0}$ について ① が成り立つ．したがって，$\widetilde{\Phi_d^{c0}}(E_1)$ は 1 点である．

$\mathrm{Bs}(\rho^*\mathcal{H}_3^{c0}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})=\phi$ だから，正則写像 $\psi:(X_d^{c0})_{\mathbb{C}}\longrightarrow(X_d^{c0})_{\mathbb{C}}$ が存在する．$Q':=\widetilde{\Phi_d^{c0}}(E_1)$, $L_i':=\widetilde{\Phi_d^{c0}}(E_i)$ $(i=2,3)$ とおくと，$\psi(L_i')=L_i$ である．

$L_i \cap X_3^{c0} = \{Q\}$ なので $L_i' \cap X_d^{c0} = \{Q'\}$ である．よって，$\Phi_d^{c0}(1:1:1) = Q$ である．

Q は $(X_3^{c0})_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ の非特異点だから，その原像である Q' も $(X_d^{c0})_{\mathbb{C}}$ の非特異点である．　□

定理 6.5.7.　$G := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とし，$\pi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G$ は自然な全射とする．Φ_d^c と Φ_d^{c0} を

$$\Phi_d^c : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G \xrightarrow{\Psi_d} X_d^c, \quad \Phi_d^{c0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G \xrightarrow{\Psi_d^{c0}} X_d^{c0}$$

と分解する．また，$\varphi_d : X_d^c \cdots \to X_d^{c0}$ は包含写像 $\mathcal{H}^{c0}_{3,d} \xrightarrow{\subset} \mathcal{H}^c_{3,d}$ から誘導される正射影とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $d = 3$ または $d \geqq 5$ ならば，$\Psi_d^{c0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G \longrightarrow X_d^{c0}$ と $\varphi_d : X_d^c \longrightarrow X_d^{c0}$ は双有理写像で，ユークリッド位相に関して連続写像で，全単射である．

(2) $d \geqq 3$ ならば，$\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内部の点である．

証明．$A = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} - \{(1:1:1)\}$, $W_d^c := \Phi_d^c(A)$, $W_d^{c0} := \Phi_d^{c0}(A)$ とおく．$d = 3$ のとき (1), (2) が成立することは，本節の前半で確認した．しかも，$\Psi_3^{c0} : A/G \longrightarrow W_3^{c0}$ と $\varphi_3 : W_3^c \longrightarrow W_3^{c0}$ は同型写像であった．

$d = 6$ の場合を考える．$\mathcal{H}_6^{c0} = \mathcal{H}_3^c \cdot \mathcal{H}_3^{c0}$ なので，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}_6^{c0} = \phi$ である．Ψ_3^{c0} は双有理な連続写像で全単射であり，$\Phi_3^{c0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G \xrightarrow{\Psi_6^{c0}} X_6^{c0} \longrightarrow X_3^{c0}$ と分解することができる．したがって $\varphi_6 : W_6^c \longrightarrow W_6^{c0}$ は同型写像であり，$\varphi_6 : X_6^c \cdots \to X_6^{c0}$ は連続写像で全単射である．

$d = 5$ または $d \geqq 7$ の場合を考える．S_2 倍写像 $\mathcal{H}^c_{d-2} \xrightarrow{\times S_2} \mathcal{H}^c_d$ を考えると，$\mathrm{Bs}\,\mathcal{H}_d^{c0} = \phi$ がわかる．$e = 3$ または $e = 6$ に対して，双有理連続全単射 $\Phi_e^{c0} : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}/G \xrightarrow{\Psi_d^{c0}} X_d^{c0} \longrightarrow X_e^{c0}$ が存在する．よって，$\varphi_d : W_d^c \longrightarrow W_d^{c0}$ は同型写像であり，$\varphi_d : X_d^c \cdots \to X_d^{c0}$ は双有理連続全単射である．

(2) $\Psi_3^{c0} : \mathbb{P}^2_+/G \longrightarrow X_3^{c0+}$ は $\Psi_d^{c0} : \mathbb{P}^2_+/G \longrightarrow X_d^{c0+}$ と $X_d^{c0+} \to X_3^{c0+}$ の合成写像であるから，$\Phi_d^{c0}(1:1:1)$ は X_d^{c0} の内点である．　□

系 6.5.8.　$O_d := \Phi_d^{c0}(0:0:1)$, $L := \{(0:s:1) \in \mathbb{P}^2_+ \mid s > 0\}$, $C_d := \Phi_d^{c0}(L)$ とおく．すると，以下が成り立つ．

(1) $d \geqq 3$ ならば，$X_d^{c0+} \cong X_3^{c0+}$ であり．$\Delta^0(X_d^{c0+}) = \{O_d\}$, $\Delta^1(X_d^{c0+}) = \{C_d\}$, $\Delta^2(X_d^{c0+}) = \{\mathrm{Reg}(X_d^{c0+})\}$ である．

(2) d が 3 以上の奇数ならば，$X_d^{c0} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ であり，$\Delta^0(X_d^{c0}) = \Delta^1(X_d^{c0}) = \phi$, $\Delta^2(X_d^{c0}) = \{X_d^{c0}\}$ である．

6.6.　3変数4次斉次巡回不等式

6.6.1.　$\mathcal{P}_4^{c0}$ の構造

今まで通り $\mathcal{H}_4^{c0} := \left\{f \in \mathcal{H}_4^c \;\middle|\; f(1,1,1) = 0\right\}$ とおく．$\mathcal{P}_4^{c0} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ の研究から始める．同時に $\mathcal{P}_4^{c0+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ についても，並行して部分的にしらべておく．

アルゴリズム 6.2.25 のステップ 1 〜 4 を実行してみよう．

ステップ 1. 特性多様体 $X_4^{c0} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{c0})$ と $\Delta(X_4^{c0})$ を求める．

$s_0 := S_4 - US_1$, $s_1 := S_{3,1} - US_1$, $s_2 := S_{1,3} - US_1$, $s_3 := S_{2,2} - US_1$ を $\mathcal{H}_4^{c0}$ の基底をして選び，$s_0, \ldots, s_3$ と $s_4 := US_1$ を $\mathcal{H}_4^c$ の基底として選ぶ．

定理 6.6.1.　上記の記号のもと，以下が成り立つ．

(1) X_4^{c0} は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ 内で次の多項式 F_4^{c0} の零点として定まる 2 次曲面である．

$$F_4^{c0} := (x_1 + x_2)^2 + 3(x_1 - x_2)^2 + (x_0 - 2x_3)^2 - x_0^2$$

また，$\Delta^0(X_4^{c0}) = \Delta^1(X_4^{c0}) = \phi$, $\Delta^2(X_4^{c0}) = \{X_4^{c0}\}$ であり，$\partial\mathcal{P}_4^{c0}$ は唯一の面成分 $\mathcal{F}(X_4^{c0})$ から成る．

(2) X_4^c は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ 内で，$F_4^{c0} = 0$ かつ $F_4^c = 0$ によって定まる曲面である．ここで，

$$F_4^c := (x_1 + x_2 + 3x_4)^2 - (x_0 + 2x_3 + 3x_4)(x_3 + 3x_4)$$

である．

(3) 包含写像 $\mathcal{H}_4^{c0} \xrightarrow{\subset} \mathcal{H}_4^c$ から誘導される有理写像 $\varphi_4^c : X_4^c \cdots\to X_4^{c0}$ は双有理連続写像であり全単射である．

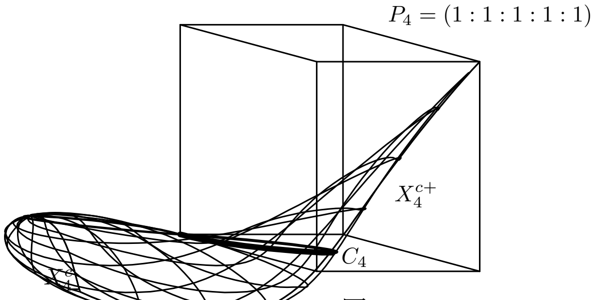


図 6.6.1

証明. (1), (2) は $x_i = s_i$ から a, b, c を計算機を使って消去すると得られる．

(3) φ_4^c は $\varphi(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ で定義されることに注意する．F_4^c を展開すると x_4 について 1 次式になるので，$\varphi_4^c : X_4^c \longrightarrow X_4^{c0}$ は連続な全単射であり，よって双有理写像である． □

ステップ 2. 双対多様体と局所錐を求める．

$\mathcal{P}_4^c$, $\mathcal{P}_4^{c0}$ の点 $(s:t:1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における局所錐をそれぞれ $\mathcal{L}_{s,t}^c$, $\mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ と書くことにする．定理 6.2.29(1) より，任意の点 $(s,\,t) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ に対し $\dim \mathcal{L}_{s,t}^c = 2$, $\dim \mathcal{L}_{s,t}^{c0} = 1$ である．$\mathcal{H}_4^{c0}$ の元を $p_0 s_0 + p_1 s_1 + p_2 s_2$ と表しておく．s_0, s_1, s_2, s_3 から a, b, c を計算機を使って消去すると，$\mathcal{P}_4^{c0}$ の主判別式

$$\mathrm{disc}_4^{c0} = 3(p_0 p_3 + p_0^2) - (p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2)$$

が得られる．$\Delta(X_4^{c0}) = \{X_4^{c0}\}$ だったので，$\partial\mathcal{P}_4^{c0}$ は $\mathrm{disc}_4^{c0} = 0$ で定まる 2 次曲面である．また，1 次元凸錐 (すなわち，半直線) $\mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ は，次の多項式 $\mathfrak{g}_{s,t}^A$ で生成される．ただし，$\mathfrak{g}_{s,t}^A$ は結構複雑な多項式である．

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{p,q}^X(a,b,c) &:= S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} \\
&\qquad + \left(\frac{p^2+pq+q^2}{3} - 1\right) S_{2,2} - \left(p + q + \frac{p^2+pq+q^2}{3}\right) US_1 \\
\mathfrak{g}_{\infty}^X(a,b,c) &:= S_{2,2} - US_1, \\
\mathfrak{p}(s,t) &:= -\frac{2S_{3,1}(s,t,1) - S_{1,3}(s,t,1) - S_{2,1,1}(s,t,1)}{S_{2,2}(s,t,1) - S_{2,1,1}(s,t,1)} \\
\mathfrak{g}_{s,t}^A(a,b,c) &:= \mathfrak{g}_{\mathfrak{p}(s,t),\mathfrak{p}(t,s)}^X(a,b,c)
\end{aligned}$$

ただし，$\mathfrak{p}(1,1) := -2$, $\mathfrak{p}(0,0) = \infty \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}^A_{0,0} := \mathfrak{g}^X_\infty$ とする．$\mathfrak{p}(s,t) = \mathfrak{p}(1/t, s/t) = \mathfrak{p}(t/s, 1/s)$ であることに注意しよう．$\mathcal{P}^{c0}_4$ が単純なのでステップ 3, 4 は必要でなく，以下の定理が得られた．

定理 6.6.2. 4 次元の PSD 錐 $\mathcal{P}^{c0}_4$ について以下が成り立つ．

(1) $f = p_0S_4 + p_1S_{3,1} + p_2S_{1,3} + p_3S_{2,2} - 3(p_0+p_1+p_2+P_3)US_1 \in \mathcal{H}^{c0}_4$ に対し，$f \in \mathcal{P}^{c0}_4$ となるための必要十分条件は $\mathrm{disc}^{c0}_4(p_0,p_1,p_2,p_3) \geqq 0$ である．

(2) $\mathcal{L}^{c0}_{s,t} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}^A_{s,t}$ である．

(3) $\mathcal{P}^{c0}_4$ の端元は，$\mathfrak{g}^X_{p,q}$ または $\mathfrak{g}^X_\infty$ の正の定数倍である．

6.6.2. $\mathcal{P}^{c0+}_4$ の構造

ステップ 1. $X^{c0+}_4 := X(\mathbb{P}^2_+, \mathcal{H}^{c0}_4) \subset X^{c0}_4$ の構造を調べる．

$O_4 := \Phi^{c0}_4(0:0:1) = (1:0:0:0)$, $C_4 := \{\Phi^{c0}_4(0:s:1) \mid s > 0\}$ とおく．系 6.5.8 より，$\Delta^0(X^{c0+}_4) = \{O_4\}$, $\Delta^1(X^{c0+}_4) = \{C_d\}$, $\Delta^2(X^{c0+}_4) = \{\mathrm{Reg}(X^{c0+}_4)\}$ である．

ステップ 2. 相対定理 A より，$\mathcal{P}^{c0+}_4$ と disc^{c0}_4 の主判別式は一致し，前項で述べた disc^{c0}_4 になる．公式 6.2.20(3) より $\mathrm{disc}(O_4) = p_0$ である．

定理 6.4.7 より，$\mathcal{P}^{c0+}_4$ と $\mathcal{P}^{c+}_4$ の端判別式は一致し，

$$\begin{aligned}\mathrm{disc}^{c+}_4 &= D_4(p_0,p_1,p_2,p_3,p_0)\\ &= 256p_0^6 - 27p_0^2p_1^4 - 192p_0^4p_1p_2 - 6p_0^2p_1^2p_2^2 - 4p_1^3p_2^3 - 27p_0^2p_2^4\\ &\quad + 144p_0^3p_1^2p_3 + 18p_0p_1^3p_2p_3 + 144p_0^3p_2^2p_3 + 18p_0p_1p_2^3p_3 - 128p_0^4p_3^2\\ &\quad - 80p_0^2p_1p_2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_3^2 - 4p_0p_1^2p_3^3 - 4p_0p_2^2p_3^3 + 16p_0^2p_3^4\end{aligned}$$

である．他方，①を p_i について解くと，以下の多項式 $\mathfrak{h}_s$ が $\mathrm{Zar}(\mathcal{L}^{c0+}_{0,s})$ の元として見つかる．

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_s &:= S_{3,1} + s^2S_{1,3} - 2sS_{2,2} - (s-1)^2US_1\\ \mathfrak{h}_\infty &:= S_{1,3} - US_1\end{aligned}$$

なお，$\mathfrak{h}_0 = S_{3,1} - US_1$, $\mathfrak{g}^A_{0,0} = \mathfrak{g}^X_\infty = S_{2,2} - US_1$ であることに注意する．形式的に $\mathfrak{g}^A_{0,+\infty} := \mathfrak{g}^X_\infty$ とおく．また，$\mathcal{P}^{c+}_4$, $\mathcal{P}^{c0+}_d$ の点 $(s:t:1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ における局所錐をそれぞれ $\mathcal{L}^{c+}_{s,t}$, $\mathcal{L}^{c0+}_{s,t}$ と書くことにする．

定理 6.6.3.　4 次元の PSD 錐 $\mathcal{P}_4^{c0+}$ について以下が成り立つ.

(1) $s>0,\, t>0$ のとき $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+}=\mathcal{L}_{s,t}^{c0}=\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{g}_{s,t}^{A}$ であり，以下が成り立つ.

$$\mathcal{F}_4^{c0+}=\mathbb{R}_+\cdot\left(\left\{\mathfrak{g}_{p,q}^{X}\;\middle|\;9(p+q)^2-(p-q)^2\geqq 6^2,\, p+q\leqq 0\right\}\cup\left\{\mathfrak{g}_{\infty}^{X}\right\}\right)$$

(2) $s>0$ のとき $\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}=\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{g}_{0,s}^{A}+\mathbb{R}\cdot\mathfrak{h}_s$ である.

(3) $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元は $\mathfrak{g}_{s,t}^{A}$ $(s,\, t\in\mathbb{R}_+)$ または $\mathfrak{h}_s$ $(s\in[0,\infty])$ の正の定数倍である.

証明. (1) $s>0,\, t>0$ のとき，$\dim\mathcal{L}_{s,t}^{c0+}=1$ で $\mathcal{L}_{s,t}^{c0+}\supset\mathcal{L}_{s,t}^{c0}\neq 0$ なので，$\mathcal{L}_{s,t}^{c0+}=\mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ となる．特に，$\mathfrak{g}_{s,t}^{A}$ は $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元である.

(2) $s>0$ のとき $\dim\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}\leqq 2$ であった．$a,\, b,\, c\in\mathbb{R}_+$，$s>0$ のとき，

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_s(a,b,c)=ab(a-sb-c+sc)^2+bc(b-sc-a+sa)^2\\+ca(c-sa-b+sb)^2\geqq 0\end{aligned}$$

である．また，$\mathfrak{h}_s(1,1,1)=\mathfrak{h}_s(0,s,1)=\mathfrak{h}_s(0,0,1)=0$ も容易に確かめられる．したがって，$\mathfrak{h}_s\in\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}\cap\mathcal{L}_{0,0}^{c0+}\subset\partial\mathcal{P}_4^{c0+}$ である．$\dim\left(\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}\cap\mathcal{L}_{0,0}^{c0+}\right)\leqq 1$ なので，$\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}\cap\mathcal{L}_{0,0}^{c0+}=\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{h}_s$ であることがわかる．したがって，$\mathfrak{h}_s$ は $\mathcal{P}_4^{c0+}$ の端元である．$\mathfrak{g}_{s,t}^{A}$ も端元なので，$\mathcal{L}_{0,s}^{c0+}=\mathbb{R}_+\cdot\mathfrak{g}_{0,s}^{A}+\mathbb{R}\cdot\mathfrak{h}_s$ である.

(3) は (1), (2) からすぐわかる.　□

ステップ 3 〜 4. これは，定理 2.3.6 を証明することである.

定理 2.3.6 の証明. 一般に，部分ベクトル空間 $V\subset\mathcal{H}_4^{c0}$ に対し，V 内のモニック多項式全体の集合を $\breve{V}$ と書くことにする.

$f(a,b,c)=S_4+xS_{3,1}+yS_{1,3}+zS_{2,2}-(1+x+y+z)US_1\in\breve{\mathcal{H}}_4^{c0}$ と $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ を同一視することにより，$\breve{\mathcal{H}}_4^{c0}=\mathbb{R}^3$ と考える．今までに述べたように，

$$\breve{\mathcal{F}}_4^{c0+}=\left\{(x,y,z)\in\breve{\mathcal{H}}_4^{c0}\;\middle|\;\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=3z+3,\\ 9(x+y)^2-(x-y)^2\geqq 6^2,\, x+y\leqq 0\end{array}\right\}.$$

である.

$$S:=\left\{(x,y,z)\in\breve{\mathcal{H}}_4^{c0}\;\middle|\;\mathrm{disc}_4^{c0+}(x,\, y,\, z)=0\right\}$$

とおくと，S は $\breve{\mathfrak{H}}_4^{c0}$ 内の 6 次代数曲面であり，$\breve{\mathfrak{E}}_4^{c0+}$ のザリスキー閉包である．

$\breve{\mathfrak{H}}_4^{c0}$ における曲面 $\partial\breve{\mathfrak{P}}_4^{c0+}$ を観察するために，$z=r$ で定まる $\breve{\mathfrak{H}}_4^{c0}$ 内の平面

$$V_r := \left\{(x,y,z)\in\breve{\mathfrak{H}}_4^{c0} \;\middle|\; z=r\right\}$$

を考え，$P_r := \mathfrak{P}_4^{c0+}\cap V_r$, $C_r := (\partial\mathfrak{P}_4^{c0+})\cap V_r$, $F_r := (\partial\mathfrak{P}_4^{c0})\cap V_r = \mathfrak{F}_4^{c0}\cap V_r$, $F_r^+ := \mathfrak{F}_4^{c0+}\cap V_r$, $E_r := S\cap V_r$ とおく．F_r は $3(x+y)^2+(x-y)^2=12(r+1)$ で定まる楕円で，

$$F_r^+ = \left\{(x,y)\in F \;\middle|\; 9(x+y)^2-(x-y)^2 \geqq 6^2,\ x+y\leqq 0\right\}$$

である．F_r は $r>0$ のとき楕円の弧であり，$r>0$ のときその 2 端点 P_1, P_2 は

$$(x,\,y) = \left(\frac{\pm3\sqrt{r}-\sqrt{r+4}}{2},\ \frac{\mp3\sqrt{r}-\sqrt{r+4}}{2}\right)$$

である．$\overline{E}$ は 6 次曲線で，パラメータ表示

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^3}-\frac{r}{s}-3s\right),\quad y=\frac{1}{2}\left(s^3-rs-\frac{3}{s}\right) \qquad ①$$

を持つ．E_r は r に依存しない既約 6 次有理曲線で，以下のようなパラメータ表示を持つ．

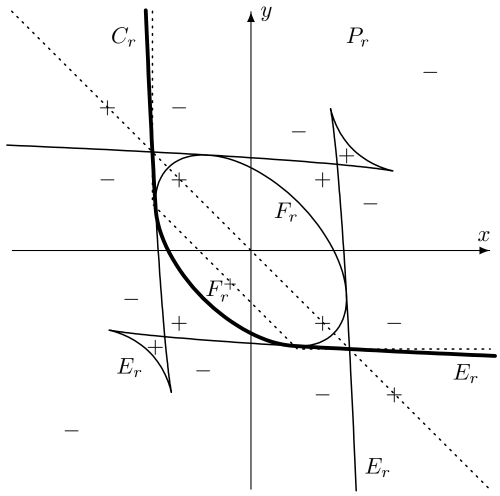


図 6.6.2. $r>6$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^3} - \frac{r}{s} - 3s\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(s^3 - rs - \frac{3}{s}\right) \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$r > 0$ のとき E_r と F_r は 2 点 P_1, P_2 で接し，この 2 点が F_r^+, E_r の共通端点になっている．さらに P_r は凸集合であることに注意して，$r > 6$ の場合に C_r を図示すると，図 6.6.2 のようなグラフになる．

既約 6 次曲線 E_r は原点と直線 $x + y = 0$ について対称な 2 本の分枝に分かれて見え，それぞれの分枝は $s = \pm\sqrt{\dfrac{r \pm \sqrt{r^2 - 36}}{6}}$ において 2 個の尖点を持ち，$x = y = \pm 2\sqrt{r-2}$ において 1 個の結節点を持ち．さらに 2 つの分枝の交点が E_r の別の結節点になっている．直線 $x + y = 0$ 上にある E_r の結節点の座標は $(x, y) = (\pm 2\sqrt{r+2}, \mp 2\sqrt{r+2})$ である．P_r の境界 C_r は太線で図示した曲線である．P_r は太線より右上の部分である．この P_r が (1), (2), (3), (4) または (5) を満たす領域として特徴づけられることは容易にわかる．

$0 \leqq r \leqq 6$ の場合，グラフは図 6.6.3 のようになる．$r > 6$ の場合にあった E_r の 4 個の尖点と 2 個の結節点は消滅する．しかし，P_r が (1), (2), (3), (4) または (5) を満たす領域として特徴づけられることは同じである．

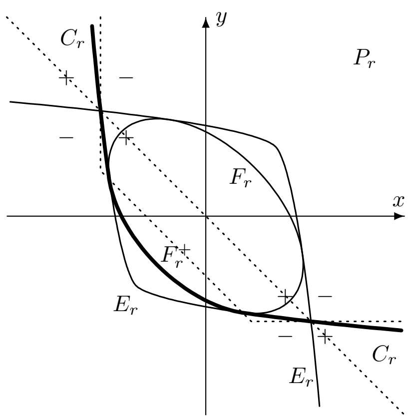


図 6.5.3. $0 \leq r \leq 6$

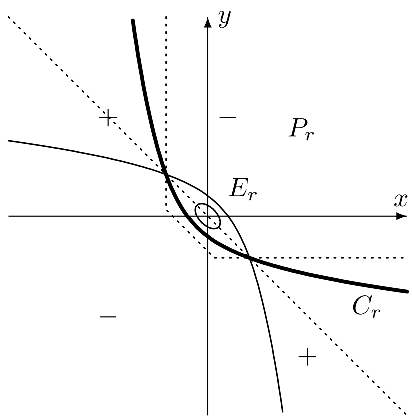


図 6.6.3. $-1 \leq r < 0$

$-1 \leqq r < 0$ の場合，グラフは右上の図 6.6.4 のようになり，6 次曲線 E_r と楕円 F_r が接しなくなる．よって，$C_r = E_r$ となる．この場合 P_r は (1), (2), (3) または (4) を満たす領域として特徴づけられる．

$-2 < r < -1$ の場合，グラフは図 6.6.4 のようになり，楕円 F_r は消滅する．この場合，P_r は (1), (2), (3) または (4) を満たす領域として特徴づけられる．

$r \leqq -2$ の場合，グラフは図 6.6.5 のようになり，P_r は (6) を満たす領域として特徴づけられる．　□

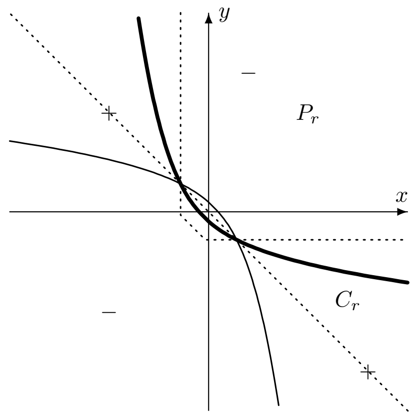


図 6.6.4. $-2 < r < -1$

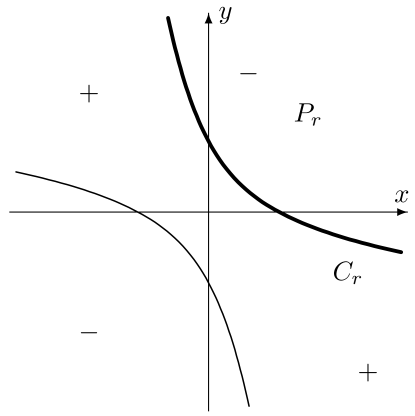


図 6.6.5. $r < -2$

注意 6.6.4.　$\mathrm{disc}_4^{c+}(1,p,p,q) = (4r-p^2-8)^2(r+2p+2)(r-2p+2)$ であるので，$p=q$, $4r = p^2+8$ で定まる曲線は $\mathcal{P}_4^{c0+}$ 内の disc_4^{c+} の零点集合上にある．この曲線上の点に対応する不等式は $(S_2 - tS_{1,1})^2 \geqq 0$ である．

6.6.3.　$\mathcal{P}_4^c$ の構造

ステップ 1 〜 2. 特性多様体 $X_4^c = X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^c)$ の構造は，定理 6.4.2(1) の通りであり，ステップ 1 は完了している．ステップ 2 に移る．定理 6.4.4 より，$\partial\mathcal{P}_4^c$ は丁度 2 の面成分より成り，1 つは主成分 $\mathcal{F}_4^c$ で，もう 1 つは $\mathcal{P}_4^{c0}$ である．$\mathcal{H}_4^c$ の基底として $s_0 = S_4 - US_1$, $s_1 := S_{3,1} - US_1$, $s_2 := S_{1,3} - US_1$, $s_3 := S_{2,2} - US_1$, $s_4 := US_1$ を選ぶ．主判別式は公式

6.2.20(1) を利用すれば計算できるが，結果は長い多項式になる．斉次座標で表現すると見難くなるので，$\mathcal{H}_4^c$ の中のモニック多項式

$$f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 + vs_4 \in \mathcal{H}_4^c$$

について，非斉次系で表す．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{disc}_4^c(1,p,q,r,v)\\
&= \big(3(r+1) - (p^2+pq+q^2)\big)(2p+2q+r+5)^3\\
&\quad - v\Big(p^4 + q^4 + 34p^3q + 34pq^3 + 39p^2q^2\\
&\quad + 2(p+q)(5p^2+7pq+5q^2)r - (2p^2+pq+2q^2)r^2\\
&\quad + 86p^3 + 86q^3 - 12(v-16)(p^2q+pq^2) - (v-84)(p^2+q^2)r\\
&\quad + (v+18)pqr - 22(p+q)r^2 + 8r^3 - 57(v-2)(p^2+q^2)\\
&\quad + (v^2-63v+51)pq - 2(13v+126)(p+q)r + 2(3v-106)r^2\\
&\quad + 2(7v^2+3v-139)(p+q) + 8(19v-70)r\\
&\quad - (v^3+20v^2-162v+388)\Big)
\end{aligned}$$

また，局所錐は以下のようになる．

定理 6.6.5. *For* $-1/2 \leqq k \leqq 1$, *let* $-1/2 \leqq k \leqq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_k^X(a,b,c) &:= \big(k(a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)\big)^2\\
&= k^2S_4 - 2kT_{3,1} + (2k^2+1)S_{2,2} - (2k-2)US_1,\\
k(s,t) &= \frac{S_{1,1}(s,t,1)}{S_2(s,t,1)} = \frac{st+s+t}{s^2+t^2+1} \in [-1/2,\ 1],\\
\mathfrak{e}_{s,t}^A(a,b,c) &:= \mathfrak{e}_{k(s,t,1)}^X(a,b,c)
\end{aligned}$$

とおく．$\mathcal{P}_4^c$ は 5 次元の PSD 錐であって，以下が成立する．

(1) $(s,t) \in \mathbb{R}^2 - \{(1,1)\}$ に対し，

$$\mathcal{L}_{s,t}^c = \left\{\alpha\mathfrak{g}_{s,t}^A + \beta\mathfrak{e}_{s,t}^A \;\middle|\; \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+\right\}$$

(2) $s > 0,\ t > 0$ かつ $(s,t) \neq (1,1)$ のとき，$\mathcal{L}_{s,t}^{c+} := \mathcal{L}_{s,t}^c$ である．

(3) $\mathcal{P}_4^c$ の端元は以下のいずれかの多項式の正の定数倍である．

$$\mathfrak{g}_{p,q}^X, \quad \mathfrak{g}_\infty^X, \quad \mathfrak{e}_k^X \quad (-1/2 \leqq k \leqq 1)$$

証明. (1), (2) 定理 6.2.29(1) より，$(s,\ t) \neq (1,\ 1)$ のとき $\dim \mathfrak{L}^{c}_{s,t} = N-2=2$ である．また，$s>0,\ t>0$ のとき $\dim \mathfrak{L}^{c+}_{s,t}=2$ であり，$\mathfrak{L}^{c}_{s,t} \subset \mathfrak{L}^{c+}_{s,t}$ である．

$$f_{s,t,\alpha,\beta} := \alpha \mathfrak{g}^{A}_{s,t} + \beta \mathfrak{e}^{A}_{s,t}$$

とおく．$\mathfrak{g}^{A}_{s,t} \in \mathfrak{L}^{c}_{s,t}$, $\mathfrak{e}^{A}_{s,t} \in \mathfrak{L}^{c}_{s,t}$ なので，$\alpha \geqq 0$ and $\beta \geqq 0$ ならば $f_{s,t,\alpha,\beta} \in \mathfrak{L}^{c}_{s,t}$ である．

$f_{s,t,\alpha,0} \in \partial \mathfrak{P}^{c}_{4}$ なので，定理 6.2.37(1) より $f_{s,t,\alpha,-\beta} \notin \mathfrak{P}^{c}_{4}$ である．また，$s>0,\ t>0$ の場合は $f_{s,t,\alpha,-\beta} \notin \mathfrak{P}^{c+}_{4}$ である．

$\alpha<0$ の場合を考える．$(s,\ t) \in \mathbb{R}^2$ のとき 関数 $k(s,t)$ の値域は，$-1/2 \leqq k \leqq 1$ であり，$(s,\ t) \in \mathbb{R}^2_{+}$ のとき $k(s,t)$ の値域は，$0 \leqq k \leqq 1$ である．この値域の内点に属する k_0 を 1 つ取るとき，$k(s,t)=k_0$ を満たす $(s,\ t)$ 全体の集合はある 2 次曲線の区間 $K(k_0)$ をなす．よって，$(s,\ t) \neq (s',\ t') \in K(k(s,t))$ を取れば，$\mathfrak{e}^{A}_{s,t}(s',t',1)=0$ なので，

$$f_{s,t,\alpha,1}(s',t',1) = \alpha \mathfrak{g}^{A}_{s,t}(s',t',1) < 0$$

となり， $f_{s,t,\alpha,1} \notin \mathfrak{P}^{c}_{4}$ ($s>0,\ t>0$ のときは $f_{s,t,\alpha,1} \notin \mathfrak{P}^{c+}_{4}$) がわかる．

したがって，$\mathfrak{L}^{c}_{s,t}$ と $\mathfrak{L}^{c+}_{s.t}$ は $\mathfrak{g}^{A}_{s,t}$, $\mathfrak{e}^{A}_{s,t}$ によって生成される凸錐である．

(3) は (1) からわかる．□

以上でステップ 1 〜 3 は終了したが，最後のステップ 4 が難しい．図形的解析から，以下が予想されるが，厳密な証明は得られていない．

予想 6.6.6. $f=S_4+pS_{3,1}+qS_{1,3}+rS_{2,2}+(v-1-2p-r)US_1 \in \mathfrak{H}^{c}_{4}$ が任意の $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ に対し $f(a,b,c) \geqq 0$ を満たすための必要十分条件は，以下の (1), (2), (3) のいずれか 1 つを満たすことである．

(1) $v=0$ かつ $\mathrm{disc}^{c0}_{4}(1,p,q,r) \geqq 0$.

(2) $0<v \leqq 27$ かつ $\mathrm{disc}^{c}_{4}(1,p,q,r,v) \geqq 0$ かつ $4r+4(u+2\sqrt{3u}+1) \geqq (p+q)^2$.

(3) $v>27$ かつ $\mathrm{disc}^{c}_{4}(1,p,p,r,v) \geqq 0$ かつ $r \geqq \dfrac{(p+q)^2}{16}+2$.

6.6.4. $\mathcal{P}_4^{c+}$ の構造

定理 6.4.4(2) で証明したように，$\mathcal{P}_4^{c+} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_4^c)$ は高々4 個の面成分 $\mathcal{F}_4^{c+}+$, $\mathcal{E}_4^{c+}$, $\mathcal{P}_4^{c0+}$, $\mathcal{F}(O_4)$ しか持たない．$\mathcal{P}_4^{c0+}$ は既に研究したように面成分である．次の定理のように，残りの 3 個の面成分である．

定理 6.6.7. 5 次元の PSD 錐 $\mathcal{P}_4^{c+}$ について以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{F}_4^{c+} = \mathrm{Cls}\left(\bigcup_{(s,t)\in\mathbb{R}_+^2-\{(1,1)\}} \mathcal{L}_{s,t}^c\right)$ は面成分である．

(2) $\mathcal{E}_4^{c+} = \left\{\alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2\mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_3\mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \;\middle|\; s \geqq 0,\, \alpha_i \geqq 0\right\}$ は面成分である．

(3) $\mathcal{P}_4^{c\infty+} = \mathcal{L}_{0,0}^{c+} = \mathbb{R}_+ \cdot US_1 + \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$ である．

(4) $\mathcal{F}_4^{c+}$ の主判別式は disc_4^c であり，$\mathcal{E}_4^{c+}$ の端判別式 は disc_4^{c0+} である．

証明. (1) 定理 6.6.5(2) より，$s>0,\, t>0$ のとき $\mathcal{L}_{s,t}^{c+} = \mathcal{L}_{s,t}^c$ なので，$\mathcal{F}_4^{c+}$ は $\bigcup_{s>0,t>0} \mathcal{L}_{s,t}^c$ の閉包である．

(2) $f = \alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2\mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_3\mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1$ は $f(0,s,1)=0$ を満たすので，$s \geqq 0,\, \alpha_i \geqq 0$ のとき $f \in \mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ である．

逆に，$s>0$ のとき $\dim \mathcal{L}_{0,s}^{c+} = 3$ なので，$\mathcal{L}_{0,s}^{c+}$ の任意の元 f は，ある $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ により，$f = \alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2\mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_3\mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1$ と表せる．この表し方は一意的ではないが，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}_+$ と選べることを示す．

$$(s^2+1)^2\mathfrak{e}_{0,s}^A + 3s\mathfrak{h}_s = s^2\mathfrak{g}_{0,s}^A + 3(s^2-s+1)^2 US_1$$

に注意する．よって，f において，(i)「$\alpha_2 \geqq 0$ かつ $\alpha_4 = 0$」または，(ii)「$\alpha_2 = 0$ かつ $\alpha_4 \geqq 0$」と仮定してもよい．

(i) の場合に，$f = \alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2\mathfrak{g}_{0,s} + \alpha_3\mathfrak{h}_s$ が $f \in \mathcal{P}_4^{c+}$ ならば，$\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_3 \geqq 0$ であることを示す．

$f(1,1,1) = \alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A(1,1,1)$ だから，$\alpha_1 \geqq 0$ でなければならない．

$\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0$ より $\alpha_1\mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2\mathfrak{g}_{0,s}^A \in \mathcal{F}_4^{c+}$ であるが，$\mathfrak{h}_s \notin \mathcal{F}_4^{c+}$ と定理 6.2.37(1) を用いると，$\alpha_3 \geqq 0$ がわかる．

(ii) の場合に，$f = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \in \mathcal{P}_4^{c+}$, $\alpha_4 \geqq 0$ ならば $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_3 \geqq 0$ であることを示す．

$f(0,0,1) = \alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A(0,0,1)$ だから，$\alpha_1 \geqq 0$ でなければならない．

$$\mathfrak{e}_{0,s}^A(0,1/s,1) = 0, \quad US_1(0,1/s,1) = 0$$

$$\mathfrak{h}_s(0,1/s,1) = \frac{(s-1)^2(s+1)^2}{s^3} \neq 0$$

に注意すると，$f(0,1/s,1) = \alpha_3 h_s(0,1/s,1)$ より，$\alpha_3 \geqq 0$ が得られる．

以上より，$s > 0$ のとき，

$$\mathcal{L}_{0,s}^{c+} = \left\{\alpha_1 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \;\middle|\; \alpha_i \geqq 0\right\}$$

が証明された．あとは簡単である．

(3) $\partial \mathcal{P}_4^{c\infty+} = (\mathcal{F}_4^{c+} \cup \mathcal{E}_4^{c+} \cup \mathcal{P}_4^{c0+}) \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ である．$\mathcal{F}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty} = \mathcal{L}_{0,0}^{c0} \subset \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} \subset \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$, $\mathcal{P}_4^{c0+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty} = \mathcal{L}_{0,0}^{c0+} = \mathcal{P}_4^{c0\infty+}$ である．

$\mathcal{E}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ を決定しよう．$f = \alpha_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{e}_{0,s} + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1 \in \mathcal{E}_4^{c+} \cap \mathcal{H}_4^{c\infty}$ をとる．$\mathfrak{g}_{0,s}^A, \mathfrak{e}_{0,s}^A, \mathfrak{h}_s, US_1$ の中で，S_4 の項を持つのは $\mathfrak{g}_{0,s}^A$ と $\mathfrak{e}_{0,s}$ だけなので，S_4 の係数を比較して，$\alpha_1(s^2+1)^2 + \alpha 2s^2 = 0$ でなければならない．

$$(s^2+1)^2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + 3s\mathfrak{h}_s = s^2 \mathfrak{g}_{0,s}^A + 3(s^2-s+1)^2 US_1$$

であったから，

$$f = \left(\alpha_3 + \frac{3\alpha_1}{s}\right)\mathfrak{h}_s + \left(\alpha_4 - \frac{3(s^2-s+1)^2}{s^2}\right) US_1$$

と書ける．そこで，最初から，$f \in \mathcal{E}_4^+ \cap \mathcal{H}_4^\infty$ を，$f = \alpha \mathfrak{h}_s + \beta US_1$ の形に書いておく．$f(0,1,1) = \alpha \mathfrak{h}_s(0,1,1)$ で $\mathfrak{h}_s(0,1,1) > 0$ だから，$\alpha \geqq 0$ である．$\mathfrak{h}_s(0,1,1) \in \mathcal{P}_4^{c0+}$, $\mathfrak{h}_s \notin \mathcal{P}_4^{c0+}$ だから，定理 6.2.37(1) より $\beta < 0$ ならば $f \notin \mathcal{P}_4^{c+}$ である．

以上より，(3) がわかる．

(4) は相対定理からわかる．　□

以上でステップ 1・2 は完了したが，ステップ 3 については幾何学的考察から予想はできるが，それを代数的に表現する方法がわからない．ステッ

プ 4 については，適当な基本半代数的集合への分割方法を式で表現できていない．

定理 6.6.8.　今までと同じ記号を用いる．

$$f(a,b,c) = S_4 + pS_{3,1} + qS_{1,3} + rS_{2,2} + vUS_1 \in \check{\mathcal{H}}_4^c$$

をとるとき，任意の $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a,\, b,\, c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (1) 〜 (4) のいずれかが成立することである．

(1) $\alpha_f \geqq 0$ かつ，ある $x \in (-\sqrt{3},\, \sqrt{3}\,)$ が存在して $\varphi_f(x) \geqq 0$ が成り立つ．

(2) $p = q$ かつ $p^2 - 4p = 4r$ かつ $p^2 + 2p = 2v$ が成り立つ．

(3) $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ の実数解 $s \geqq 0$ で，

$$\gamma_3 := r + 3s^2 + 2ps - \frac{1}{s^2}$$
$$\delta_3 := v + (2s+p)(s-1)(s^2+1) + \frac{p}{s}$$

とおくとき，$\gamma_3 \geqq 0,\, \gamma_3 + \delta_3 \geqq 0$ を満たす s が存在する．

(4) $2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ の実数解 $s \geqq 0$ で，

$$t := 2s^2 + ps$$
$$\gamma_4 := r + 3s^2 + 2ps - \frac{1}{s^2}$$
$$\delta_4 := v + (s-1)^2 p + \frac{2s^5 - 3s^4 + s^2 - 2s + 1}{s^2}$$

とおくとき，$t \geqq 1,\, \gamma_4 \geqq 0$ かつ $\gamma_4 \geqq \delta_4$ が成り立つようなものが存在する．この s は (自動的に) $\dfrac{\sqrt{p^2+8}-p}{4} \leqq s \leqq \dfrac{\sqrt{q^2+8}+q}{2}$ を満たす．

証明. 必要条件であることを示す．$f \in \check{\mathcal{P}}_4^{c+}$ であると仮定する．$\partial\mathcal{P}_4^{c+} = \mathcal{F}_4^{c+} \cup \mathcal{E}_4^{c+} \cup \mathcal{P}_4^{c0+} \cup \mathcal{P}_4^{c\infty+}$ であった．点 f と点 $\mathfrak{g}_\infty^X = S_{2,2} - US_1 \in \partial\mathcal{P}_4^{c+}$ を通る直線 ℓ をとり，$\ell \cap (\partial\mathcal{P}_4^{c+})$ に属する $\mathfrak{g}_\infty^X$ 以外の点 f_1 をとる．$f = uf_1 + (1-u)\mathfrak{g}_\infty^X$ $(0 < u \leqq 1)$ と書ける．$f_0 = uf_1$ とおくと f_0 はモニックである．$f_0 \in \mathcal{F}_4^{c+}$ または $f_0 \in \mathcal{E}_4^{c+}$ または $f_0 \in \mathcal{P}_4^{c0+}$ である．

(I) $f_0 \in \mathcal{F}_4^{c+}$ の場合を考える．すると，$f_0 \in \mathcal{F}_4^{c+} \subset \mathcal{F}_4^{c} \subset \mathcal{P}_4^{c}$, $\mathfrak{g}_\infty^X \in \mathcal{P}_4^c$ なので $f \in \mathcal{P}_4^c$ となる．よって，条件 (1) または (2) が成立する．

(II) $f_0 \in \boldsymbol{\mathcal{E}}_4^{c+}$ の場合を考える．$f_0 = \alpha_1 \mathfrak{g}_{0,s}^A + \alpha_2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + \alpha_3 \mathfrak{h}_s + \alpha_4 US_1$ $(\exists s,\, \alpha_i \in \mathbb{R}_+)$ と書ける．ところで，

$$(s^2+1)^2 \mathfrak{e}_{0,s}^A + 3s\mathfrak{h}_s = s^2 \mathfrak{g}_{0,s}^A + (s^2-s+1)^2 US_1$$

であった．この関係式を使うと f_0 は次の ①，② のいずれかの形に書ける．

$$f_0 = \alpha \mathfrak{g}_{0,s}^A + \beta \mathfrak{e}_{0,s}^A + \gamma US_1, \quad (\exists s,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}_+) \tag*{①}$$

$$f_0 = \alpha \mathfrak{g}_{0,s}^A + \beta \mathfrak{h}_s + \gamma US_1, \quad (\exists s,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}_+) \tag*{②}$$

(II-1) ① の場合を考える．① の両辺の S_4, $S_{3,1}$, $S_{1,3}$ の係数を比較すると，

$$\begin{aligned} &1 = \alpha + \beta \frac{s^2}{(s^2+1)^2}, \\ &p = \alpha \frac{1-2s^2}{s} - \frac{2\beta s}{(s^2+1)}, \quad q = \alpha \frac{s^2-2}{s} - \frac{2\beta s}{(s^2+1)} \end{aligned}$$

である．この3式から α, β を消去すると，$2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ が得られる．この4次方程式のある実数解 $s \geqq 0$ が ① を満たす s と一致するはずである．その s を固定して考える．このとき，

$$\alpha = \frac{2s^2+ps+2}{3}, \quad \beta = -\frac{(s^2+1)^2(2s^2+ps-1)}{3s^2}$$

が成り立つ．f に $q = 2s^3 + ps^2 - 2/s$ を代入して q を消去した後に数式処理ソフトで計算すると，

$$\begin{aligned} f = &\frac{2s^2+ps+2}{3} \mathfrak{g}_{0,s}^A - \frac{(s^2+1)^2(2s^2+ps-1)}{3s^2} \mathfrak{e}_{0,s}^A \\ &+ \gamma_3(S_{2,2} - US_1) + (\gamma_3 + \delta_3) US_1 \end{aligned} \tag*{③}$$

が成り立つことがわかる．ここで，

$$f_0 = \frac{2s^2+ps+2}{3} \mathfrak{g}_{0,s}^A - \frac{(s^2+1)^2(2s^2+ps-1)}{3s^2} \mathfrak{e}_{0,s}^A + (\gamma_3 + \delta_3) US_1$$

で，$\gamma_3(S_{2,2} - US_1) = \gamma \mathfrak{g}_\infty^X$ である．$f = f_0 + (1-u)\mathfrak{g}_\infty^X$ $(0 < u \leqq 1)$ であったから，① とあわせて，$\gamma_3 \geqq 0$, $\gamma_3 + \delta_3 \geqq 0$ がわかる．よって，(3) が成立する．

(II-2) ② の場合を考える．f_0 はモニックなので，$f_0 = \mathfrak{g}^A_{0,s} + \beta\mathfrak{h}_s + \gamma US_1$ と書ける．この両辺の $S_{3,1}$, $S_{1,3}$ の係数を比較すると，

$$p = \frac{1-2s^2}{s} + \beta, \quad q = \frac{s^2-1}{s} - \beta s^2$$

である．この 2 式から β を消去すると，$2s^4 + ps^3 - qs - 2 = 0$ が得られる．この 4 次方程式の解の中に適切な s が存在するはずである．以下，その適切な解 s について考える．

$\dfrac{1-2s^2}{s} - p = \beta \geqq 0$ であるから，$s \geqq 0$ に注意すると，$s \geqq \dfrac{\sqrt{p^2+8}-p}{4}$ でないといけない．また，

$$0 = 2s^4 + ps^3 - qs - 2 = (2s^2 + ps)s^2 - qs - 2 \geqq s^2 - qs - 2$$

であるから，$s \leqq \dfrac{\sqrt{q^2+8}+q}{2}$ である．ちょっと面倒な計算を頑張って行うと，

$$f - \mathfrak{g}^A_{0,s} - \beta\mathfrak{h}_s = \gamma_4 S_{2,2} + \delta_4 US_1$$

が得られる．他方

$$f = \mathfrak{g}^A_{0,s} + \beta\mathfrak{h}_s + \delta US_1 + (1-u)\mathfrak{g}^X_\infty$$

($\delta \geqq 0$, $0 < u \leqq 1$) であったので，$\gamma_4 = 1 - u \geqq 0$, $\delta_4 - \gamma_4 = \delta \geqq 0$ が成り立つ．よって，(4) が得られる．

(III) $f_0 \in \mathcal{P}^{c0+}_4$ の場合を考える．$\mathfrak{g}^X_\infty \in \mathcal{P}^{c0+}_4$ より，$\mathfrak{g}^X_\infty$ と $f_1 \in \mathcal{P}^{c0+}_4$ を通る直線 ℓ は $\partial\mathcal{P}^{c0+}_4$ と $\mathfrak{g}^X_\infty$ 以外の点で交わる．よって，$f_0 \in \partial\mathcal{P}^{c0+}_4$ である．$\partial\mathcal{P}^{c0+}_4 \subset \mathcal{F}^{c+}_4 \cup \mathcal{E}^{c+}_4 \cup \mathcal{P}^{c\infty+}_4$ なので，上で扱った場合に帰着される．

十分条件であることは，上の証明から容易にわかる．　□

6.6.5.　$\mathcal{P}^s_4$ の構造

本項の目的は以下の定理を証明することである．証明は本項の最後に完結する．

定理 6.6.9.　$f = S_4 + pT_{3,1} + rS_{2,2} + (v - 1 - 2p - r)US_1 \in \breve{\mathcal{H}}_4$ について，任意の $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十

分条件は，$v \geqq 0$ であって，次の条件 (1) または (2) または (3) が成り立つことである．

(1) $v = 0$ かつ $r \geqq p^2 - 1$.

(2) $0 < v \leqq 27$ かつ $\mathrm{disc}_4^c(1, p, p, r, v) \geqq 0$ かつ $r \geqq p^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$.

(3) $v > 27$ かつ $\mathrm{disc}_4^c(1, p, p, r, v) \geqq 0$ かつ $r \geqq \dfrac{p^2}{4} + 2$.

証明に先立って，記号の設定から始める．$G := \mathfrak{S}_3$, $\Phi_d^s = \Phi_{\mathcal{H}_d^s}$, $\Phi_d^{s0} = \Phi_{\mathcal{H}_d^{s0}}$, $\mathcal{P}_d^s = \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^s)$, $\mathcal{P}_d^{s0} = \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_d^{s0})$ とおく．$\mathcal{H}_4^{s0}$ の基底として $s_0 = S_4 - US_1$, $s_1 = T_{3,1} - 2US_1$, $s_2 = S_{2,2} - US_1$ を選ぶ．また，$\mathcal{H}_4^s$ の基底として s_0, s_1, s_2 and $s_3 = US_1$ を選ぶ．$\mathcal{P}_4^s$ と並行して $\mathcal{P}_4^{s0}$ を調べておく必要がある．

ステップ 1 〜 2. $X_4^s := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^s)$ と $X_4^{s0} := X(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathcal{H}_4^{s0})$，およびその判別式を求める．

s_i 達から a, b, c を消去すると以下が得られる．

$$F_4^{s0}(x_0, x_1, x_2) := x_1^2 + (x_0 - 2x_2)^2 - x_0^2$$
$$X_4^{s0} = \left\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; F_4^{s0}(x_0, x_1, x_2) \leqq 0\right\}$$
$$F_4^s(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 3x_3)^2 - (x_0 + 2x_2 + 3x_3)(x_2 + 3x_3) = 0$$
$$X_4^s = \left\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \;\middle|\; F_4^{s0}(x_0, x_1, x_2) \leqq 0 \text{ and } F_4^s(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\right\}$$

命題 6.4.9, 命題 6.4.10 と上の結果から，以下のことがわかる．$\Delta^0(X_4^{s0}) = \phi$, $\Delta^1(X_4^{s0}) = \{\Phi_4^{s0}(\overline{L_s^b})\}$, $\Delta^2(X_4^{s0}) = \{\Phi_4^{s0}(A_s^\circ)\}$ であり，また，$\Delta^0(X_4^s) = \{\Phi_4^{s0}(\mathbf{1})\}$, $\Delta^1(X_4^s) = \{\Phi_4^s(L_s^b)\}$, $\Delta^2(X_4^s) = \{\Phi_4^s(A_s^\circ)\}$ である．ここで，$\mathbf{1} = (1 : 1 : 1)$, $L_s^b := \left\{(s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; s \neq 1\right\}$, and $A_s^\circ := \left\{(s : t : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; s+t+1 > 0, s < t < 1\right\}$ である．X_4^{s0} は平面上の領域であり，$\mathrm{Zar}(X_4^s)$ は線織面 (2 次の錐) であるので，それらの双対多様体は退化して低い次元しか持たない．よって，$\mathcal{P}_4^{s0}$ と $\mathcal{P}_4^s$ は主成分を持たない．次に，$\mathcal{F}(\Phi_4^{s0}(\mathbf{1})) = \mathcal{P}_4^{s0}$ であることに注意する．ここで $\mathcal{P}_4^{s0}$ は唯一の面成分しか持たなかった．以上より以下が得られた．

命題 6.6.10. $\mathcal{P}_4^{s0}$ について以下が成り立つ．

(1) $f = pS_4 + qT_{3,1} + rS_{2,2} - (p+2q+r)US_1 \in \mathcal{H}_4^{s0}$ に対し $f \in \mathcal{P}_4^{s0}$ となるための必要十分条件は $p \geqq 0$ かつ $p(r+q) \geqq r^2$ が成り立つことである．

(2) $\mathcal{P}_4^{s0}$ に端元は $\mathfrak{g}_{p,p}^X$ $(p \in \mathbb{R})$ または $S_{2,2} - US_1$ の正の定数倍である．

次に，$\Phi_4^s(L_s^b)$ について考える．$\mathcal{F}_4^s := \mathcal{F}(\Phi_4^s(L_s^b))$ とおく．相対定理より，$\mathcal{F}_4^s$ の判別式は $\mathrm{disc}_4^c(p_0, p_1, p_1, p_2, p_3)$ である．

$\mathrm{Zar}(X_4^s)$ の双対多様体は，$8p_0^2+p_1^2-4p_1p_2 = 0$ かつ $3p_0-3p_1-3p_2+p_3 = 0$ で定義される．よって，点 $(s:t:1) \in A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における端元は $\mathfrak{e}_{s,t}^A$ である．以上より，$\mathcal{P}_4^s$ のすべての端元が以下のように決定され，ステップ 1 と 2 は完了する．

命題 6.6.11． $\mathcal{P}_4^s$ の点 $(s:t:1) \in A = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ における局所錐を $\mathcal{L}_{s,t}^s$ と書くことにする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $s \neq 1, t \neq 1, s \neq t$ かつ $s+t+1 \neq 0$ のとき，$\mathcal{L}_{s,t}^s = \mathbb{R} \cdot \mathfrak{e}_{s,t}^A$ である．

(2) $s = 1$ または $t = 1$ または $s = t$ または $s+t+1 = 0$ のとき．$\mathcal{L}_{s,t}^s = \mathbb{R} \cdot \mathfrak{g}_{s,t}^A + \mathbb{R} \cdot \mathfrak{e}_{s,t}^A$ である．

ステップ 3 〜 4. $\mathcal{P}_4^s$ の形状は，以上の議論でほぼ分かっているが，それを半代数的集合として不等式で記述するという課題が残っている．そのために，1 つ補題を用意しておく．

命題 6.6.12.

$g(x,t) := 108\sqrt{3}t^3 + 36(10-3x)t^2 - \sqrt{3}(x+2)^2(4x+47)t + 6(x+2)^4$

$h(x,v) = (4v + x^2 - 44x + 52)^2 + 128(x-4)^3$

とおく．

(1) $0 < t < 3\sqrt{3}$, $x < 12$ のとき $g(x,t) > 0$ である．

(2) $v > 27$ のとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $h(x,v) > 0$ である．

証明. (1) $g(x,t)$ を t についての 3 次関数と考える．

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = 324\sqrt{3}t^2 + 72(10-3x)t - \sqrt{3}(x+2)^2(4x+47)$$

なので，t についての 2 次方程式 $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t} = 0$ の小さくないほうの実数解は，$g_1(x) := 12x^3 + 225x^2 + 372x + 964$ として，

$$t_1(x) := \frac{\sqrt{g_1(x)} - 2(10-3x)}{18\sqrt{3}}$$

である．

Case 1: $g_1(x) < 0$ の場合．$g(x,t)$ の t^3 の係数は正なので，$t \geqq 0$ において $g(x,t) > g(x,0) = (x+2)^4 \geqq 0$ である．

Case 2: $g_1(x) \geqq 0, x < 12$ の場合．$g(x,t)$ の t^3 の係数は正なので，$t \geqq 0$ においては $g(x,t) \geqq \max\{g(x,t_1), g(x,0)\}$ である．$g(x,0) = (x+2)^4 \geqq 0$ なので，$g(x,t_1) \geqq 0$ を示せばよい．$g(x,y)$ を $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}$ で割った余りを利用して計算すると，

$$g(x,t_1) = \frac{1}{81}\left(g_2(x) - g_1(x)^{3/2}\right)$$
$$\text{ただし}\quad g_2(x) = 378x^4 + 2331x^3 + 13986x^2 + 21636x + 32696$$

が得られる．

$$g_2(x)^2 - g_1(x)^3 = 108(12-x)^3(x+2)^4(16x^2+25x+58)$$

なので，$x < 12$ のとき $g(x,t_1) > 0$ である．

Case 3: $0 < t < 3\sqrt{3}, x \geqq 12$ の場合．

$$t_1(x) := \frac{\sqrt{g_1(x)} - 2(10-3x)}{18\sqrt{3}}$$

とするとき，$x \geqq -2$ で $t_1(x)$ は単調増加なので，$x \geqq 12$ のとき $t_1(x) \geqq t_1(12) = \frac{49\sqrt{3}}{9} > 3\sqrt{3}$ である．

$$g(x,\sqrt{3}) = 3(2x^4 + 4x^3 - 141x^2 - 1520x11456) > 0$$

の確認は容易である．また，$g(x,0) > 0$ であった．$g(x,t)$ は t に関する 3 次関数で t^3 の係数は正で，極小値をとる点は $t = t_1(x) > 3\sqrt{3}$ であるので，$x > 12, 0 < t < 3\sqrt{3}$ において $g(x,t) > 0$ となる．

(2) $x > 4$ であれば $(x-4)^3 > 0$ なので，$h(x,v) > 0$ である．$x \leqq 4$ のときは，

$h(x,y)$

$$
\begin{aligned}
&= (x-4)^2\bigl((x+24)^2+512\bigr)+8(v-27)\bigl(2(v-27)+(x-4)(x-40)\bigr)\\
&\geqq 16(v-27)^2>0
\end{aligned}
$$

である．□

定理 6.6.9 の証明． 一般に，部分ベクトル空間 $V \subset \mathcal{H}_4^s$ に対し，V 内のモニック多項式全体の集合を $\check{V}$ と書く．

$f(1,1,1)=3v$ なので，$v \geqq 0$ は $f \in \mathcal{P}_4^s$ であるための必要条件である．$v=0$ のときは，(1) が必要十分条件であることは，定理 2.3.4 から従う．以下，$v>0$ の場合を考える．

変数と定数を区別するため，$\check{\mathcal{H}}_4^s$ の座標系を $(p,\,r,\,v)$ の代わりに $(x,\,y,\,z)$ を用いる．$v>0$ を定数とし，$\check{\mathcal{H}}_4^s$ 内で平面 $z=v$ 定まる平面を H_v とし，$T_v := \mathcal{P}_4^s \cap H_v$, $F_v := \mathcal{F}_4^s \cap H_v$ とおく．また，$\operatorname{disc}_4^c(1,x,x,y,v)=0$ で定まる H_v 上の曲線を C_v とおくと，$F_v \subset C_v$ であって，曲線 C_v は，パラメーラ表示

$$
x = t + \frac{v(2t+1)}{(t+2)^3}, \quad y = t^2 - 1 + \frac{v(-t^3+2t^2+3t+2)}{(t+2)^3}
$$

$(t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} - \{-2\})$ で定まる有理曲線である．このパラメータ表示を用いて C_v のグラフを描くと，下図のようになる．T_v の境界 F_v は，図の太線で示した曲線である．$v>27$ か $0<v \leqq 27$ によって，グラフの特徴が若干異なる．

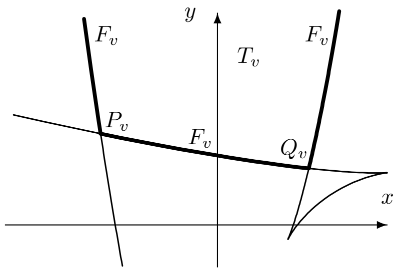


図 6.5.6. $v>27$

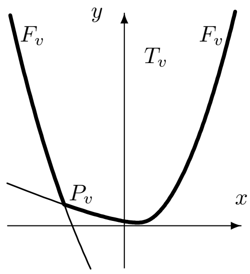


図 6.6.7. $0<v<27$

$v > 0$ のとき，曲線 C_v は点

$$P_v : (x, y) = \left(-2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2,\ \frac{v + 2\sqrt{3v} + 9}{3}\right)$$

に結節点を持つ．さらに，$v > 27$ のとき

$$Q_v : (x, y) = \left(2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2,\ \frac{v - 2\sqrt{3v} + 9}{3}\right)$$

も結節点である．Q_v は $0 < v < 27$ のとき T_v 内の孤立零点として現れる．P_v, Q_v はいずれも $\mathfrak{e}_k^X$ に対応する点である．

(2) $0 < v \leqq 27$ の場合を考える．曲線 $\mathrm{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ と放物線 $y = x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ の交点を求める．$t := \sqrt{v} > 0$ とおく．$y = -(t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)$ を $\mathrm{disc}_4^c(1, x, x, y, t^2)$ に代入すると，以下のようになる．

$$\mathrm{disc}_4^c\left(1, x, x, \left(x^2 - (t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)\right), t^2\right) = -\sqrt{3}t\left(x + \frac{2\sqrt{3}}{3}t + 2\right)^2 g(x, t)$$

ただし

$$g(x, t) := 108\sqrt{3}t^3 + 36(10 - 3x)t^2 - \sqrt{3}(x + 2)^2(4x + 47)t + 6(x + 2)^4$$

前補題より，$0 < t < 3\sqrt{3}$, $x < 12$ のとき $g(x, t) > 0$ であるので，$\mathrm{disc}_4^c\left(1, x, x, \left(x^2 - (t^2 + 2\sqrt{3}t + 1)\right), t^2\right) = 0$ ならば $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}t - 2$ である．よって，放物線 $y = x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ と曲線 $\mathrm{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ の交点は，点 P_v のみである．したがって，$y \geqq x^2 - (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ によって，$\mathrm{disc}_4^c(1, x, x, y, v) \geqq 0$ で定まる領域から，T_v に属さない部分だけが切り落とされていることがわかる．

(3) $v > 27$ の場合を考える．放物線 $y = x^2/4 + 1$ は 2 点 P_v, Q_v を通る．この放物線と $\mathrm{disc}_4^c(1, x, x, y, v) = 0$ の交点は P_v, Q_v の 2 点のみであることを証明する．交点の x 座標は，

$$\mathrm{disc}_4^c\left(1, x, x, \frac{x^2}{4} + 2, v\right) = -\frac{\left(3(x + 2)^2 - 4v\right)^2 h(x, v)}{256}$$

の根である．ここで，$h(x,v)$ は前補題に登場した多項式である．$h(x,v)>0$ であったから，$\mathrm{disc}_4^c(1,x,x,x^2/4+2,v)=0$ の実数解は，$3(x+2)^2-4v=0$ の解，すなわち，$x=\pm 2\sqrt{\dfrac{v}{3}}-2$ のみであり，これは曲線 $\mathrm{disc}_4^c(1,x,x,y,v)=0$ の特異点 P_v および Q_v であった．したがって，$y \geqq x^2/4+1$ によって，$\mathrm{disc}_4^c(1,x,x,y,v) \geqq 0$ で定まる領域から，T_v に属さない部分だけが切り落とされていることがわかる．□

6.6.6.　$\mathcal{P}_4^{s+}$ の構造

前項と同じように $s_0 := S_4 - US_1$, $s_1 := T_{3,1} - 2US_1$, $s_2 := S_{2,2} - US_1$, $s_3 := US_1$ を $\mathcal{H}_4^s$ の基底として選ぶ．

定理 6.6.13.　$f(a,b,c) := \displaystyle\sum_{i=0}^{3} p_i s_i \in \mathcal{H}_4^s$ を取る．ここで $p_0 := 1$ と仮定しておく．4 次方程式 $f(x,1,1)=0$ の判別式を

$$\begin{aligned} &d_4(p_1,p_2,p_3) \\ &:= D_4\bigl(1,\ 2p_1,\ -1-2p_1+p_2+p_3,\ -2(1+p_1+p_2-p_3),\ 2+2p_1+p_2\bigr) \end{aligned}$$

とおき，その最も次数の高い既約因子を

$$\mathrm{disc}_4^s(p_1,p_2,p_3) := d_4(p_1,p_2,p_3)/(16p_3)$$

とおく．このとき，任意の $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_+$ に対して $f(a,b,c) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の (1) ～ (6) のいずれかが成立することである．

(1) $p_3 = 0$, $p_1 \leqq -1$ かつ $p_2 \geqq p_1^2 - 1$.
(2) $0 \leqq p_3 \leqq 3$, $-1-p_3 \leqq p_1$ かつ $p_2 \geqq -2-2p_1$.
(3) $0 < p_3 \leqq 3$, $p_1 \leqq -1-p_3$, $\mathrm{disc}_4^s(p_1,p_2,p_3) \geqq 0$ かつ $p_2 \geqq p_1^2 - (p_3 + 2\sqrt{3p_3} + 1)$.
(4) $3 < p_3$, $-4 \leqq p_1$ かつ $p_2 \geqq -2-2p_1$.
(5) $3 < p_3$, $-2\sqrt{p_3/3} - 2 \leqq p_1 \leqq -4$ かつ $p_2 \geqq (8+p_1^2)/4$.
(6) $3 < p_3$, $p_1 \leqq -2\sqrt{p_3/3} - 2$, $\mathrm{disc}_4^s(p_1,p_2,p_3) \geqq 0$ かつ $p_2 \geqq (8+p_1^2)/4$.

この定理は本項の最後で完了する．以下，順を追って説明する．

$X := X^{s+}_{3,4}$, $\Phi := \Phi_{\mathfrak{H}^s_4} : \mathbb{P}^2_+ \to X$ とおく．命題 6.4.12 より $\Psi\colon \mathbb{P}^2_+/\mathfrak{S}_3 \longrightarrow X$ は同型写像である．

$$L^b_{F+} := \bigl\{(t\colon 1\colon 1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \bigm| 0 < t < 1 \text{ or } 1 < t < \infty\bigr\}$$
$$L^0_{F+} := \bigl\{(0\colon t\colon 1) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \bigm| 0 < t < 1\bigr\}$$
$$C^b := \Phi(L^b_{F+}), \quad C^0 := \Phi(L^0_{F+})$$
$$P_1 := \Phi(0\colon 0\colon 1) = (1\colon 0\colon 0\colon 0), \quad P_2 := \Phi(0\colon 1\colon 1) = (2\colon 2\colon 1\colon 0)$$
$$P_3 := \Phi(1\colon 1\colon 1) = (0\colon 0\colon 0\colon 1)$$

とおく．$\mathbb{P}^2_+/\mathfrak{S}_3$ の危点分解から次の命題がわかる．

命題 6.6.14.　$\Delta^2(X) = \bigl\{X^\circ\bigr\}$, $\Delta^1(X) = \bigl\{C^b, C^0\bigr\}$, $\Delta^0(X) = \bigl\{P_1, P_2, P_3\bigr\}$ である．

$\mathfrak{H}^s_{3,4} \cong \mathbb{R}^4$ の座標系を $(p_0, \cdots, p_3)$ とするとき，公式 6.2.20(3) より，$\mathrm{disc}(P_1) = p_0$, $\mathrm{disc}(P_2) = 2p_0 + 2p_1 + p_2$, $\mathrm{disc}(P_3) = p_3$ である．$\mathfrak{F}(P_1)$ は無限遠にあり，　また $\mathfrak{F}(P_3) = \mathfrak{P}^{s0+}_4$ であるから，これらはあまり気にする必要がない．また，定理 6.4.8 より $\mathfrak{F}(X^\circ)$ は面成分でない．以下 $\mathfrak{F}(C^b)$ と $\mathfrak{F}(C^0)$ を中心に考察しよう．$\mathfrak{H}^s_{3,4}$ 上では，

$$\mathfrak{g}_t(a,b,c) := \mathfrak{g}^A_{t,1}(a,b,c) = s_0 - (t+1)s_1 + (t^2+2t)s_2$$
$$\mathfrak{e}^X_k(a,b,c) := \left(S_2 - \frac{1}{k}S_{1,1}\right)^2$$
$$\mathfrak{e}^A_{s,t}(a,b,c) := \mathfrak{e}^X_{\mathfrak{k}(s,t)}(a,b,c) \quad ただし \quad \mathfrak{k}(s,t) := \frac{S_{1,1}(s,t,1)}{S_2(s,t,1)} \in [0,1]$$

$(s, t \in [0,\infty], k \in [0,1])$ が端元として現れる．$\mathfrak{g}_t(t,1,1) = 0$, $\mathfrak{e}^A_{t,1}(t,1,1) = 0$ より，$\mathfrak{g}_t$, $\mathfrak{e}^A_{t,1} \in \mathfrak{F}(C^b)$ である．$\mathfrak{e}^A_{0,t}(0,t,1) = 0$, $US_1(0,t,1) = 0$ より，$\mathfrak{e}^A_{0,t}$, $US_1 \in \mathfrak{F}(C^0)$ である．

命題 6.6.15.　$\mathfrak{P}^{s+}_4$ の点 $(s\colon t\colon 1) \in A = \mathbb{P}^2_+$ における局所錐を $\mathfrak{L}^{s+}_{s,t}$ と書くことにする．

(1)　もし $0 < s \neq 1, 0 < t \neq 1, s \neq t$ ならば，$\mathfrak{L}^{s+}_{s,t} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}^A_{s,t}$ である．

(2)　もし If $0 < t \neq 1$ ならば $\mathfrak{L}^{s+}_{t,1} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_t + \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}^A_{t,1}$ である．

(3) もし $0 < t \neq 1$ ならば $\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,t}^{s+} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}_{0,t}^A + \mathbb{R}_+ \cdot US_1$ である.

(4) $\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,1}^{s+} = \mathbb{R}_+ \cdot (S_4 + US_1 - 2S_{2,2}) + \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}_{0,1}^A + \mathbb{R}_+ \cdot (T_{3,1} - 2S_{2,2}) + \mathbb{R}_+ \cdot US_1$ である.

証明. (1) $0 < s \neq 1$, $t \neq 1$, $s \neq t$, と仮定する．定理 6.2.29 より，$\dim \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{s,t}^{s+} \leqq 3 - 2 = 1$ である．他方 $\mathfrak{e}_{s,t}^A \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{s,t}^{s+}$ なので，(1) が成立する．

(2) that $0 < t \neq 1$ と仮定する．定理 6.2.29 より，$\dim \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{t,1}^{s+} \leqq 3 - 1 = 2$ である．$\mathfrak{g}_t^A \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{t,1}^{s+} \cap \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{1,1}^{s+} \cong \mathbb{R}_+$ なので $\mathfrak{g}_t^A$ は端元である．他方，ある $a' = (s' : t' : 1) \in \mathbb{P}_+^2$ が存在して $\mathfrak{e}_{s',t'}^A = \mathfrak{e}_{s,1}^A$ かつ $\sigma(a') \in \mathrm{Int}(\mathbb{P}_+^2 / \mathfrak{S}_3)$. Thus $\mathfrak{e}_{s,t} \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{t,1}^{s+} \cap \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{s',t'}^{s+} \cong \mathbb{R}_+$ を満たす．よって $\mathfrak{e}_{s,t}^A$ も端元であり，(2) を得る．

(3) that $0 < t \neq 1$ と仮定する．定理 6.2.29 より，$\dim \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,t}^{s+} \leqq 3 - 1 = 2$ である．$US_1 \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,t}^{s+} \cap \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,0}^{s+} \cong \mathbb{R}_+$ であり，(2) と同様にして，ある $(s' : t' :, 1) \in \mathbb{P}_+^2$ を選べば $\mathfrak{e}_{0,t} \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,t}^{s+} \cap \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{s',t'}^{s+} \cong \mathbb{R}_+$ が存在することがわかる．よって，US_1 と $\mathfrak{e}_{0,t}^A$ は端元であり，(3) を得る．

(4) $\boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,1}^{s+} = \boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \subset V(2p_0 + 2p_1 + p_2)$ であることに注意する．

$$\partial \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,1}^{s+} \subset \boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \cap \big(V(p_0) \cup V(p_3) \cup \boldsymbol{\mathfrak{F}}(C^b) \cup \boldsymbol{\mathfrak{F}}(C^0)\big)$$

である．また，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \cap \boldsymbol{\mathfrak{F}}(C^b) &= \lim_{t \to 0} \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{t,1}^{s+} \\
&= \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}_{0,1}^A \\
&= \mathbb{R}_+ \cdot (S_4 + US_1 - 2S_{2,2}) + \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}_{0,1}^A \\
\boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \cap \boldsymbol{\mathfrak{F}}(C^0) &= \lim_{t \to 1} \boldsymbol{\mathfrak{L}}_{0,t}^{s+} \\
&= \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{e}_{0,1}^A + \mathbb{R}_+ \cdot US_1
\end{aligned}$$

である．よって，$\boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \cap V(p_3) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_0 + \mathbb{R}_+ \cdot (T_{3,1} - 2S_{2,2})$ を得る．また，$\boldsymbol{\mathfrak{F}}(P_2) \cap V(p_0) = \mathbb{R}_+ \cdot US_1 + \mathbb{R}_+ \cdot (T_{3,1} - 2S_{2,2})$ も容易に分かる．よって (4) を得る． □

系 6.6.16.　$\boldsymbol{\mathfrak{P}}_{3,4}^{s+}$ の端元は，以下のいずれかの多項式の正の定数倍である．$\mathfrak{e}_k^X$ $(0 < k \leqq 1)$, $\mathfrak{g}_t$ $(t \geqq 0)$, $s_0 - 2s_2 = S_4 + US_1 - 2S_{2,2}$, $s_1 - 2s_2 = T_{3,1} - 2S_{2,2}$, $s_3 = US_1$.

系 6.6.17. $f := s_0 + \sum_{i=1}^{3} p_i s_i \in \breve{\mathcal{H}}_4^s \cong \mathbb{R}^3 : (p_1, p_2, p_3)$ という非斉次座標系で表したとき,

$$\mathrm{disc}(C^b) = \mathrm{disc}_4^s(p_1, p_2, p_3), \quad \mathrm{disc}(C^0) = 4p_2 - 8 - p_1^2$$

である.

証明. disc_4^s は既約で, $\mathfrak{g}_t$, $\mathfrak{e}_{t,1}^A \in V(\mathrm{disc}_4^s)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ なので, $\mathrm{disc}(C^b) = \mathrm{disc}_4^s$ である. また, US_1, $\mathfrak{e}_{0,t}^A \in V(4p_2-8-p_1^2)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ なので, $\mathrm{disc}(C^0) = 4p_2 - 8 - p_1^2$ である. □

ここで, $0 \leqq k \leqq 1/2$ の場合に限って $\mathfrak{e}_k^X \in \mathcal{F}(C^0) \cap \mathcal{F}(C^b)$ となることに注意しておく。$1/2 < k \leqq 1$ の場合には, $\mathfrak{e}_k^X \in \mathcal{F}(C^b) - \mathcal{F}(C^0)$ となる。

定理 6.6.13 **の証明**. $x := p_1$, $y := p_2$, $z := p_3$ と書き換える. v を定数として固定して $(x,\ y,\ z)$-空間 $\breve{\mathcal{H}}_4^s$ 内で $z = v$ で定まる平面を H_v とおく. H_v 上の凸集合 $P_v := \mathcal{P}_4^s \cap H_v$ を考える. $(x,\ y)$-平面 H_v 上で $\mathrm{disc}_4^s(x, y, v) = 0$ で定まる曲線 C_v とし, $4y - 8 - x^2 = 0$ で定まる曲線を C とし, $2 + 2x + y = 0$ で定まる直線を L とする. C_v^b, C, L はそれぞれ $\mathrm{disc}(C^b)$, $\mathrm{disc}(C^0)$, $\mathrm{disc}(P_2)$ の H_v での零点集合である.

(I) $v = 0$ の場合は $\mathrm{disc}_4^s(x, y, 0) = 3(y - x^2 + 1)(4x + y + 5)^3$ となり, 定理 6.6.13 の (1) か (2) が起きる.

(II) $v > 0$ の場合を考える. $L(x \geqq c) := \left\{(x, y) \in L \;\middle|\; x \geqq c\right\}$ とおく. $x \geqq 0$ の時, 点 $(x, -2x-2) \in L$ は多項式 $(S_4 + US_1 - 2S_{2,2}) + x(T_{3,1} - 2S_{2,2}) + vUS_1 \in \partial\mathcal{P}$ に対応する. よって $L(x \geqq 0) \subset \partial\mathcal{P}$ である.

直線 L は曲線 C_v に点 $(x,\ y) = (-v-1,\ 2v)$ において重複度 2 で接し, また, L は C 点 $(-4,\ 6)$ で接する. $0 \leqq v \leqq 3$ の時, 点 $(-v-1,\ 2v)$ は多項式 $\dfrac{v+1}{4}\mathfrak{e}_{1/2}^X + \dfrac{3-v}{4}(S_4 + US_1 - 2S_{2,2}) + \dfrac{v+1}{4}US_1 \in \partial\mathcal{P}$ に対応する. よって $L(x \geqq -v-1) \subset \partial\mathcal{P}$ である. $v \geqq 3$ の時, 点 $(-4,\ 6)$ は $\mathfrak{e}_{1/2}^X + (v-3)US_1 \in \partial\mathcal{P}$ に対応するので, $L(x \geqq -4) \subset \partial\mathcal{P}$ である. これは, (2) または (4) の場合である.

曲線 C_v は次の点 P_v で結節点を持つ．

$$P_v : (x, y) = \left(-2\sqrt{\frac{v}{3}} - 2,\ \frac{v + 2\sqrt{3v} + 9}{3} \right)$$

$k = \dfrac{1}{\sqrt{v/3} + 1}$, $v = 3(k-1)^2/k^2$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ という対応の元で，この点 P_v は多項式 xtremal polynomials $\mathfrak{e}_k^X$ に対応する．さらに $P_v, Q_v \in C \cap C_v$ である．

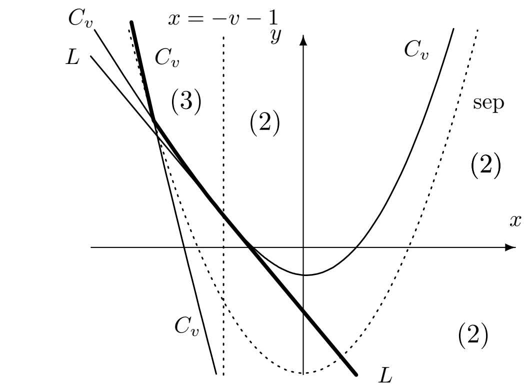


図 6.6.7. $0 < v \leqq 3$ の場合

(III) $0 < v \leqq 3$ の場合を考える．$\mathrm{sep}(x, y, v) := y - x^2 + (v + 2\sqrt{3v} + 1)$ を分割式として利用する．すると，図 6.6.7 のように，定理の (2) または (3) の場合となる．

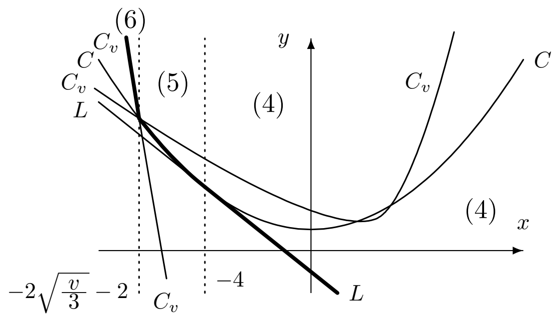


図 6.6.8. $3 < v \leqq 27$ の場合

(IV) $v > 3$ の場合を考える．

$$C[P_v, -4] := \left\{(x, y) \in C \;\middle|\; -2\sqrt{v/3} - 2 \leqq x \leqq -4\right\}$$

とおく．多項式 $f := \mathfrak{e}_k^X + \bigl(v - 3(1/k - 1)^2\bigr)US_1 \in C$ を考える．f は点 $(x, y) = (-2/k,\, 1/k^2 + 2) \in C$ に対応している．$0 \leqq k \leqq 1/2$ なので $x \leqq -4$ である．$v - 3(1/k - 1)^2 \geqq 0$ と $x = -2/k \geqq -2(\sqrt{v/3} + 1)$ は同値であることに注意すると，$C[P_v, -4] \subset \partial\mathcal{P}$ であることが分かる．図 6.6.8 および図 6.6.9 のように，定理の (4), (5), (6) の場合となる．　□

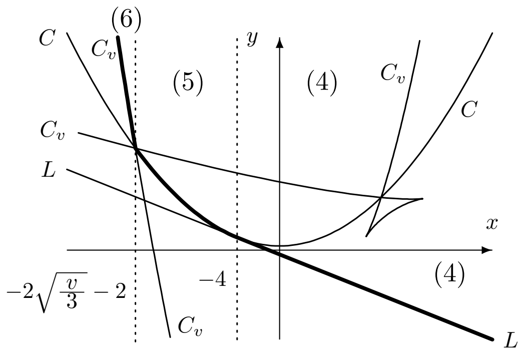


図 6.6.9. $v > 27$ の場合

参考 6.6.18.　多項式 $\mathrm{disc}_4^s(p_1, p_2, p_3)$ は 44 個の項から成り，書き下す気にならないが，$t_0 := S_1^4$, $t_1 := S_1^2 S_{1,1}$, $t_2 := S_{1,1}^2$, $t_3 := US_1$ を $\mathcal{H}_4^s$ の基底として選び，f を $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} q_i t_i$ と表現して $\mathrm{disc}(C^b)$ を表すと，以下のように 14 個の項からなる多項式になる．

$$\begin{aligned}
&d_4^s(q_0, q_1, q_2, q_3)\\
&= 27q_1^4 q_2 - 216q_0 q_1^2 q_2^2 + 432q_0^2 q_2^3 + 36q_1^3 q_2 q_3 - 144q_0 q_1 q_2^2 q_3 + 16q_1^2 q_2^2 q_3\\
&\quad - 64q_0 q_2^3 q_3 + q_1^3 q_3^2 - 36q_0 q_1 q_2 q_3^2 + 8q_1^2 q_2 q_3^2 - 48q_0 q_2^2 q_3^2 + q_1^2 q_3^3\\
&\quad - 12q_0 q_2 q_3^3 - q_0 q_3^4
\end{aligned}$$

なお，$\mathrm{disc}_4^s(p, q, v) = d_4^s(1,\, -4 + p,\, 2 - 2p + q,\, 3 - 3p - 3q + v)$ である．

6.7.　3 変数 5 次斉次巡回不等式

6.7.1.　$\mathcal{P}_5^{s0+}$ の構造

半代数的集号 $\mathcal{P}_5^{s0+}$ を不等式で表すことは第 2 章で完了しているが，その中のどれが判別式で，どういう性格の判別式であるか確認しておこう．また，端元も決定しておこう．定石通り，アルゴリズム 6.2.25 のステップ 1 から始める．

$\mathcal{H}_5^{s0}$ の基底として $s_0 = S_5 - US_{1,1}$, $s_1 = T_{4,1} - 2US_{1,1}$, $s_2 = T_{3,2} - US_{1,1}$, $s_3 = US_2 - US_{1,1}$ を選ぶ．これらから a, b, c を消去すると $X_5^{s0+} := X(\mathbb{P}_+^2, \mathcal{H}_5^{s0})$ のザリスキー閉包の定義多項式が以下の F_{50} であることわかり，$\mathbb{P}_+^2$ の境界の像を調べると，X_5^{s0+} の境界が以下の F_{51} で与えられることがわかる．

$$F_{50}(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_1^2 - x_0x_2 + x_1x_2 - x_2^2 - 2x_0x_3 - 5x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0,$$
$$F_{51}(x_0, x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 - 2x_1x_3 \leqq 0$$

$F_{51}(s_0, s_1, s_2, s_3) = -(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(a+b+c)^4 \leqq 0$ であることに注意する．$\Delta^2(X_5^{s0+}) = \{\operatorname{Reg}(X_5^{s0+})\}$, $\Delta^1(X_5^{s0+}) = \{\Phi_5^{s0}(L_{s+}^b), \Phi_5^{s0}(L_{s+}^0)\}$, $\Delta^0(X_5^{s0+}) = \{\Phi_5^{s0}(0:0:1), \Phi_5^{s0}(0:1:1)\}$ であることは既に証明されている．

次に，ステップ 2 を実行する．$\Phi_5^{s0}(0:0:1) = (1:0:0)$ なので $\mathcal{F}(\Phi_5^{s0}(0:0:1))$ は気にしなくてよい．定理 6.4.8 より $\mathcal{P}_5^{s+}$ は主成分を持たないが，以下も成り立つ．

命題 6.7.1.　$\mathcal{P}_5^{s0+}$ は主成分を持たない．

証明. 一般に，$g \in \mathcal{H}_5^s$ に対し

$$M(g) := \max\{g(a) \mid a \in \partial A_s\}, \quad m(g) := \min\{g(a) \mid a \in \partial A_s\}$$

とする．$\partial A_s = \{(u:1:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid 0 \leqq u \leqq 1\} \cup \{(1:1:u) \in \mathbb{P}_+^2 \mid u \geqq 1\} \cup \{(0:u:1) \in \mathbb{P}_+^2 \mid 0 \leqq u \leqq 1\}$ である．$f \notin \mathcal{L}_{0,u}^{s+}$, $f \notin \mathcal{L}_{u,1}^{s+}$ より，$m(g) > 0$ である．また，$M(S_5) < +\infty$ である．よって，十分小さい $0 < \varepsilon \ll 1$ に対し，$m(f - \varepsilon S_5) > 0$ である．よって ε が十

分小さければ $f - \varepsilon S_5 \in \mathcal{P}_5^{s0+}$ となるはずである．しかし，実際には $f(s,t,1) - \varepsilon S_5(s,t,1) < 0$ であり，矛盾する．

$\mathcal{E}(X_5^{s0+})$ が面成分であると仮定して矛盾を導く．

$0 \neq f,\, g \in \mathrm{Int}(\mathcal{E}(X_5^{s0+}))$ を，以下の条件を満たすようにとれる．

(a) ある $0 < s_1 < t_1 < 1,\, 0 < s_2 < t_2 < 1$ が存在して，$(s_1,\, t_1) \neq (s_2,\, t_2)$, $f \in \mathcal{L}_{s_1,t_1}^{s0+}$, $g \notin \mathcal{L}_{s_1,t_1}^{s0+}$, $f \notin \mathcal{L}_{s_2,t_2}^{s0+}$, $g \in \mathcal{L}_{s_2,t_2}^{s0+}$.

(b) どの $u \geqq 0$ に対しても $f,\, g \notin \mathcal{L}_{0,u}^{s0+}$.

(c) どの $u \geqq 0,\, u \neq 1$ に対しても $f,\, g \notin \mathcal{L}_{u,1}^{s0+}$.

このとき，$m(f/g) > 0$ または $m(g/f) > 0$ の少なくとも一方が成り立つ．$m(f/g) > 0$ と仮定してよい．$0 < \varepsilon < m(f/g)$ となる定数 ε を取れば，$f - mg \in\in \mathcal{P}_5^{s0+}$ である．しかし，$f(s_1, t_1, 1) - \varepsilon g(s_1, t_1, 1) < 0$ であり，矛盾する．　□

定理 6.7.2.　定理 2.4.3, 命題 6.4.10 の記号を用いる．また，$O := \Phi_5^{s0}(0:0:1) = (1:0:0:0)$ とおく．

(1) $P := \Phi_5^{s0}(0:1:1) = (1:1:1:0)$ とおくと，以下が成り立つ．

$$\breve{\mathcal{F}}(P) = \mathcal{A}_1' \cup \mathcal{A}_2'$$
$$\mathcal{A}_1' := \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ p+q+1=0,\ -3 \leqq p \leqq -1,\ r \geqq p^2 \right\}$$
$$\mathcal{A}_2' := \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ p+q+1=0,\ -1 \leqq p,\ 2p+r+1 \geqq 0 \right\}$$

(2) $C_1 := \Phi_5^{s0}(L_{s+}^b) = \left\{ \Phi_5^{s0}(s:1:1)\ \middle|\ s > 0 \right\}$ とおくと，以下が成り立つ．

$$\breve{\mathcal{F}}(C_1) = \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ 4q = (p+1)^2 + 4,\ p \leqq -3,\ d_5(p,q,r) \geqq 0 \right\}$$

(3) $C_2 := \Phi_5^{s0}(L_{s+}^0) = \left\{ \Phi_5^{s0}(0:s:1)\ \middle|\ s > 0 \right\}$ とおくと，以下が成り立つ．

$$\mathcal{F}(C_1) = \mathcal{B}_1' \cup \mathcal{B}_2' \cup \mathcal{B}_3'$$
$$\mathcal{B}_1' := \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ d_5(p,q,r) = 0,\ p < -3,\ 4q \geqq (p+1)^2 + 4 \right\}$$
$$\mathcal{B}_2' := \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ \begin{array}{l} d_5(p,q,r) = 0,\ -3 \leqq p \leqq -1, \\ p+q+1 \geqq 0,\ (q,r) \neq (-p-1,\ -2p-1) \end{array} \right\}$$
$$\mathcal{B}_3' := \left\{\ (p,q,r) \in \breve{\mathcal{H}}_5^{s0}\ \middle|\ \begin{array}{l} d_5(p,q,r) = 0,\ -1 \leqq p, \\ p+q+1 \geqq 0,\ 2p+r+1 \leqq 0 \end{array} \right\}$$

(4) $\mathcal{P}_5^{s0+}$ の面成分は，$\mathcal{E}(C_1)$, $\mathcal{E}(C_2)$, $\mathcal{E}(P)$, $\mathcal{E}(O)$ の 4 つである．

(5) $d_5(p,q,r) = \mathrm{disc}(C_2)$ であり，$4q-(p+1)^2-4 = \mathrm{disc}(C_1)$ である．また，$p+q+1 = \mathrm{disc}(P)$, $p_0 = \mathrm{disc}(O)$ である．

証明. 定理 2.4.3 の証明と対比して考えれば，すぐわかる．□

系 6.7.3. $\mathcal{P}_5^{s0+}$ の端元については，以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{F}(C_1)$ の端元は以下の f_s と g_s の正の定数倍である．

$$\begin{aligned} f_s(a,b,c) &:= S_5 + (s^3+s^2-1)T_{3,2} \\ &\qquad - (2s^3+5s^2+4s+1)US_2 + (3s^2+4s+2)US_{1,1} \\ g_s(a,b,c) &:= T_{4,1} + (s^2-1)T_{3,2} - 2(s+1)^2 US_2 + (4s+2)US_{1,1} \end{aligned}$$

ただし「$t < -3$ かつ $(t+3)^2 \leqq 4s^2(s+t+1)$」または「$-3 \leqq t \leqq -1$ かつ $s+t+1 \geqq 0$」または「$t \geqq -1$ かつ $s \geqq 0$」である．$s \geqq 0$ のとき $f_s(s,1,1) = 0$, $g_s(s,1,1) = 0$ であることに注意する．

(2) $\mathcal{F}(C_2)$ の端元でるようなモニック多項式は以下の $h_{p,v}$ である．

$$h_{p,v} = S_5 + pT_{4,1} + \frac{p^2+2p+5}{4}T_{3,2} - \frac{p^2+6p-2v+7}{2}US_2 - vUS_{1,1}$$

ここで，$(p,\, v)$ は以下の不等式を満たすものとする．

$$32p^3 + 51p^2 + 114p + 203 - 36pv - 36v \geqq 4(4p^2+2p-3v-2)^{3/2}$$

$s > 0$, $p = -(2s^2-s+2)/s$ のとき $h_{p,v}(0,s,1) = 0$ であることに注意する．

6.7.2. $\mathcal{P}_5^{c+}$ の構造

$s_0 := S_5 - US_2$, $s_1 := S_{4,1} - US_2$, $s_2 := S_{3,2} - US_2$, $s_3 := S_{2,3} - US_2$, $s_4 := S_{1,4} - US_2$, $s_5 := US_2 - US_{1,1}$ を $\mathcal{H}_5^{c0}$ の基底として選び，$\mathcal{H}_5^{c}$ の基底を上の $s_0, \ldots, s_5$ に加えて $s_6 := US_{1,1}$ と選ぶ．後で分かるが，$S_5 - US_{1,1}$ を s_0 として選ぶより，上の選び方のほうが優れているようである．$X_5^{c0+} := \Phi_5^{c0}(\mathbb{P}_+^2)$, $C = \partial(X_5^{c0+})$ とおく．$\Delta^2(X_5^{c0+}) = \{\mathrm{Reg}(X_5^{c0+})\}$, $\Delta^1(X_5^{c0+}) = \{\mathrm{Reg}(C)\}$, $\Delta^0(X_5^{c0+}) = \{\mathrm{Sing}(C)\}$ である．したがって $\partial\mathcal{P}_5^{c0+}$ の面成分は，主成分 $\mathcal{F}_5^{c0+}$, 端成分 $\mathcal{E}_5^{c0+}$, 無限遠成分 $\mathcal{L}_{0,0}^{c0+}$ の 3 つである．主成分 $\mathcal{F}_5^{c0+}$ については，またよくわかっていない．以下, 端成分

$\mathcal{E}_5^{c0+}$ について研究する．定理 6.7.6, 定理 6.7.5 等で述べた不等式に対応する以下の多項式を定義する．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{0,s}^{c0} := \left\{ f \in \mathcal{H}_5^{c0} \;\middle|\; f(0,s,1) = 0 \right\} \\
&F_{1,s}(a,b,c) := 3s^4 s_0 - (4s^5 - 1)s_1 + (s^8 - 4s^3)s_4 \\
&F_{2,s}(a,b,c) := 2s_1 - 3ss_2 + s^3 s_4 \\
&F_{3,s}(a,b,c) := s_1 - 3s^2 s_3 + 2s^3 s_4 \\
&F_{4,s}(a,b,c) := s_5
\end{aligned}$$

これらが，$F_{i,s}(0,\, s,\, 1) = 0$, $F_{i,s}(1,\, 1,\, 1) = 0$ という等号成立条件を満たすことは容易にわかる．$F_{i,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ であることは後で証明する．

命題 6.7.4.　$s > 0$ のとき，$F_{1,s}$, $F_{2,s}$, $F_{3,s}$, $F_{4,s}$ は $\mathcal{H}_{0,s}^{c0}$ の基底である．

証明．$F_{1,s}$, $F_{2,s}$, $F_{3,s}$, $F_{4,s}$ が線形独立であることはすぐわかる．また，$F_{i,s}(0,s,1) = 0$ も計算ですぐ確かめられる．$\dim \mathcal{H}_{0,s}^{c0} = \dim \mathcal{H}_5^{c0} - 2 = 4$ なので，$F_{1,s}$, $F_{2,s}$, $F_{3,s}$, $F_{4,s}$ は $\mathcal{H}_{0,s}^{c0}$ の基底である．　□

Mathematica 等を用いて，

$$\left\{ \left(\frac{F_{2.s}(x,y,1)}{F_{1,s}(x,y,1)}, \frac{F_{3,s}(x,y,1)}{F_{1,s}(x,y,1)}, \frac{F_{4,s}(x,y,1)}{F_{1,s}(x,y,1)} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{array} \right\}$$

で定まる代数的集合を描いてもらうと，それが $X_{s,t}^{c0} := X\left(\mathbb{P}_+^2,\, \mathcal{L}_{s,t}^{c0}\right)$ で，$\Delta^i(X_{s,t}^0)$ を求めて，各 $D \in \Delta^i(X_{s,t}^{c0})$ に対して $\mathcal{E}(D)$ を計算すれば，$\mathcal{L}_{s,t}^{c0}$ が決定できる．必死に頑張れば出来そうなレベルではあるが，まだ計算できていない．数学の専門雑誌に投稿できる程度の結果になるので，気力のある人はトライしてみてほしい．

$F_{4,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ であることは自明であるが，$F_{1,s}$, $F_{2,s}$, $F_{3,s} \in \mathcal{P}_5^{c0+}$ の証明は，かなり厄介である．$F_{2,s} \in\in \mathcal{P}_5^{c0+}$ の証明から始める．

定理 6.7.5.　$F_{2,s} \in \mathcal{L}_{0,s}^{c0+} \subset \mathcal{E}_5^{c0+} \subset \mathcal{P}_5^{c0+}$ である．つまり，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $s \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$2S_{4,1} + s^3 S_{1,4} - 3sS_{3,2} - (s^3 - 3s + 2)US_2 \geqq 0$$

なお，$a=b=c$ や, $(a:b:c)=(1:0:0)$, $(s:1:0)$ の巡回置換のとき等号が成立する．

証明．$F(a,\,b,\,c,\,s)=$ (与式の左辺) とするとき，$s^3F(a,\,b,\,c,\,1/s)=2s^3S_{4,1}+S_{1,4}-3s^2S_{3,2}-(1-3s^2+2s^3)US_2$ なので，この式の右辺が非負であることを証明する．

$p:=S_{4,1}-US_2$, $q:=S_{3,2}-US_2$, $r:=S_{1,4}-US_2$ とおく．$p\geqq 0$, $r\geqq 0$ である．しかし $q\geqq 0$ とは限らない．

$$\begin{aligned}f(s)&:=2s^3S_{4,1}+S_{1,4}-3s^2S_{3,2}-(1-3s^2+2s^3)US_2\\&=2ps^3-3qs^2+r\end{aligned}$$

とおく．$f(s)$ の $s\geqq 0$ における最小値を考える．$f'(s)=6s(ps-q)$ だから，初歩的な微分の考察からわかるように，$q\geqq 0$ の場合は $f(s)$ は $s=q/p$ で最小値 $f(q/p)=(p^2r-q^3)/p^2$ をとる．また，$q<0$ の場合は $s=0$ で最小値 $f(0)=r\geqq 0$ をとる．したがって，$q\geqq 0$ の場合に $p^2r-q^3\geqq 0$ であることを証明すれば，目的の不等式は証明される．

$$\begin{aligned}&p^2r-q^3=(S_{4,1}-US_2)^2(S_{1,4}-US_2)-(S_{3,2}-US_2)^3\\&=U(S_2-S_{1,1})\Big\{S_{9,1}-S_{7,3}+S_{6,4}+2S_{4,6}\\&\quad -US_7+2US_{6,1}-US_{1,6}-3US_{5,2}-2US_{2,5}+US_{4,3}-2US_{3,4}\\&\quad -U^2S_4-U^2S_{3,1}+5U^2S_{1,3}-2U^2S_{2,2}+2U^3S_1\Big\}\end{aligned}$$

なので，上式の｛　｝内を

$$g(a,b,c):=\frac{p^2r-q^3}{U(S_2-S_{1,1})}$$

とおく．$g(a,\,b,\,c)$ は $a,\,b,\,c$ の巡回多項式なので，$0\leqq a\leqq 1$, $0\leqq b\leqq 1$, $c=1$ と仮定してよい．

Case 1: $1-a\leqq 1-b$ の場合に，$g\geqq 0$ を証明する．$k=(1-a)/(1-b)$ とおく．$0\leqq k\leqq 1$ である．数式計算処理ソフトを使うと，次の等式は容易に確認できる．

$$g(a,1-k(1-a),1)=(1-a)^4\sum_{i=0}^{6}\varphi_i(k)a^i$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\varphi_0(k) &:= (1-k)^4(3-4k+8k^2-9k^3+5k^4-k^5)\\
\varphi_1(k) &:= 6-24k+44k^2-31k^3-42k^4+142k^5\\
&\qquad -173k^6+111k^7-37k^8+5k^9\\
\varphi_2(k) &:= 7-13k+2k^2+37k^3-57k^4-3k^5\\
&\qquad +104k^6-122k^7+58k^8-10k^9\\
\varphi_3(k) &:= 6-5k-3k^2+17k^3-3k^4-21k^5\\
&\qquad -3k^6+50k^7-42k^8+10k^9\\
\varphi_4(k) &:= 3+3k-6k^2+3k^3+18k^4-17k^5\\
&\qquad -2k^6-3k^7+13k^8-5k^9\\
\varphi_5(k) &:= 1+2k-k^2+k^4+10k^5-6k^6-k^7-k^8+k^9\\
\varphi_6(k) &:= k(1-k^2+k^3+2k^5)
\end{aligned}$$

手間はかかるが，初歩的な不等式や微分を使った計算で，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき $\varphi_i(k) \geqq 0$ $(i=0, 1,\ldots, 6)$ が成り立つことが確認できる．よって，$g \geqq 0$ である．

Case 2: $1-a > 1-b$ の場合に，$g \geqq 0$ を証明する．$k=(1-b)/(1-a)$ とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ である．

$$g(1-k(1-b), b, 1) = (1-b)^4\sum_{i=0}^{6}\psi_i(k)b^i$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\psi_0(k) &:= (1-k)(3-11k+22k^2-21k^3+10k^4-2k^5)\\
\psi_1(k) &:= 6-12k+2k^2+23k^3-18k^4-23k^5\\
&\qquad +43k^6-27k^7+8k^8-k^9\\
\psi_2(k) &:= 7-13k+32k^2-68k^3+78k^4-6k^5\\
&\qquad -79k^6+79k^7-32k^8+5k^9\\
\psi_3(k) &:= 6-9k+9k^2+27k^3-83k^4+81k^5\\
&\qquad +11k^6-74k^7+48k^8-10k^9\\
\psi_4(k) &:= 3-3k+3k^2+3k^3+18k^4-47k^5\\
&\qquad +34k^6+18k^7-32k^8+10k^9\\
\psi_5(k) &:= 1-k-k^2+6k^3-2k^4+7k^5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 12k^6 + 5k^7 + 8k^8 - 5k^9 \\
\psi_6(k) &:= k^4(2 + k^2 - k^3 + k^5)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき $\psi_i(k) \geqq 0$ $(i = 0, 1, \ldots, 6)$ が成り立つことが確認できる．したがって，$g \geqq 0$ である．　□

次は，定理 6.7.6 の不等式を証明する．この証明は，泥臭くてちょっと長い．

定理 6.7.7. $F_{1,s} \in \mathcal{L}^{c0+}_{0,s} \subset \mathcal{E}^{c0+}_5 \subset \mathcal{P}^{c0+}_5$ である．つまり，$a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $s \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つ．

$$3s^4 S_5 - (4s^5 - 1)S_{4,1} + (s^8 - 4s^3)S_{1,4} - (s^8 - 4s^5 + 3s^4 - 4s^3 + 1)US_2 \geqq 0$$

また，$a = b = c$ や, $(a : b : c) = (s : 1 : 0)$ とその巡回置換のとき，等号が成立する．

証明. 与式の左辺を $\tilde{f}(a, b, c, s)$ とし，

$$F(a, b, c, s) := (s^8 - 4s^3)(S_{4,1} - US_2) + (1 - 4s^5)(S_{1,4} - US_2) + 3s^4(S_5 - US_2)$$

とおく．$s^8 \tilde{f}(a, b, c, 1/s) = F(a, b, c, s)$ なので，$F \geqq 0$ を証明すればよい．$s^8 F(b, a, c, 1/s) = F(a, b, c, s)$ であるから，$0 \leqq s \leqq 1$ と仮定してもよい．また，F は a, b, c の斉次巡回多項式だから，$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$, $c = 1$ と仮定してよい．

Step 1. $1 - a \leqq 1 - b$ の場合に $F \geqq 0$ を証明する．$k = (1 - a)/(1 - b)$ とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ である．

$$F(a, 1 - k(1 - a), 1, s) = (1 - a)^2 \sum_{i=0}^{3} C_i(k, s) a^i$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
C_0(k, s) &:= (1 - s + ks)^2(1 - k + 2s - 4ks + 2k^2 s + 3s^2 - 9ks^2 \\
&\qquad + 9k^2 s^2 - 3k^3 s^2 + 3s^4 + 2s^5 - 2ks^5 + s^6 - 2ks^6 + k^2 s^6) \\
C_1(k, s) &:= 1 - k + 3k^2 - 3k^3 + k^4 - 4s^3 + 12k^2 s^3 - 20k^3 s^3 + 8k^4 s^3 \\
&\qquad + 6s^4 - 3ks^4 - 9k^2 s^4 + 33k^3 s^4 - 30k^4 s^4 + 9k^5 s^4 \\
&\qquad - 4s^5 + 4ks^5 - 12k^2 s^5 + 12k^3 s^5 - 4k^4 s^5
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\quad + s^8 - 3k^2s^8 + 5k^3s^8 - 2k^4s^8 \\
C_2(k,s) &:= 1 - k + 3k^3 - 2k^4 - 4s^3 + 4k^3s^3 - 4k^4s^3 \\
&\quad + 6s^4 - 3ks^4 - 3k^3s^4 + 15k^4s^4 - 9k^5s^4 \\
&\quad - 4s^5 + 4ks^5 - 12k^3s^5 + 8k^4s^5 + s^8 - k^3s^8 + k^4s^8 \\
C_3(k,s) &:= (k-s)^2(k^2 + 2ks + 3s^2 + 3k^3s^4 + 2k^2s^5 + ks^6)
\end{aligned}$$

である．以下，$0 \leqq k \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ を $C_i(k,\ s)$ の定義域として考える．まず，$C_3(k,\ s) \geqq 0$ はすぐわかる．また，

$$C_0(1-k,s) = (1-ks)^2(k + 2k^2s + 3k^3s^2 + 3s^4 + 2ks^5 + k^2s^6) \geqq 0$$

だから，$C_0(k,\ s) \geqq 0$ である．

$$A_i(k,s) := \sum_{j=0}^{i} C_j(k,s)$$

とおく．

$$\sum_{i=0}^{3} C_i(k,s)a^i = \sum_{i=0}^{2} A_i(k,s)a^i(1-a) + A_3(k,s)a^3$$

であり，$C_3(k,\ s) \geqq 0$ より $A_2(k,\ s) \leqq A_3(k,\ s)$ だから，$A_1(k,\ s) \geqq 0$, $A_2(k,s) \geqq 0$ を証明すれば，$F \geqq 0$ が証明される．

Step 1-1. $k + s \leqq 1$, $k \geqq 0$, $s \geqq 0$ の場合に $A_1(k,\ s) \geqq 0$ を証明する．

$x = k/(1-s)$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ である．

$$\frac{1}{(1-s)^2}A_1((1-s)x,s) = \sum_{i=0}^{4} a_i(s)(1-x)x^i + a_5(s)x^5$$

ただし，

$$\begin{aligned}
a_0(s) &:= 2 + 4s + 6s^2 + 6s^4 + 4s^5 + 2s^6 \\
a_1(s) &:= 2s(1 + 2s + 7s^2 + s^3 + 4s^4 + 3s^5 + 2s^6) \\
a_2(s) &:= 3 + 2s + 4s^2 + 2s^3 + 23s^4 - 4s^5 + 6s^6 + 4s^7 + 3s^8 \\
a_3(s) &:= s(5 + 4s - 2s^2 + 30s^3 + 5s^4 - 6s^5 + 4s^6 + 4s^7 - s^8) \\
a_4(s) &:= 1 + 3s + 5s^2 + 2s^3 + 7s^4 + 35s^5 - 13s^6 + 3s^8 + s^9 - s^{10} \\
a_5(s) &:= 1 + 3s + 5s^2 + 2s^3 + 13s^4 + 17s^5 + 5s^6 - 6s^7 + 3s^8 + s^9 - s^{10}
\end{aligned}$$

である．一般に，多項式 $h(s) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i s^i$ において，$\beta_i := \sum_{j=0}^{i} \alpha_i$ とおくとき $\beta_0 \geqq 0, \ldots, \beta_n \geqq 0$ が成り立つならば，$0 \leqq s \leqq 1$ において $h(s) \geqq 0$ が成り立つ．したがって，$0 \leqq s \leqq 1$ において $a_i(s) \geqq 0$ $(i = 0, \ldots, 5)$ である．したがって, $k + s \leqq 1$ のとき $A_1(k, s) \geqq 0$ である．

Step 1-2. $k + s > 1$, $k \leqq 1$, $s \leqq 1$ の場合に $A_1(k, s) \geqq 0$ を証明する．

$x = (1 - s)/k$ とおくと $0 \leqq x \leqq 1$ である．さらに，$m = 1 - k$ とおく．

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} A_1(k, 1 - kx) &= \frac{1}{(1-m)^2} A_1((1-m), 1 - (1-m)x) \\ &= \sum_{i=0}^{9} b_i(x)(1-m)m^i + b_{10}(x)m^{10}\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
b_0(x) &:= 3 - 12x + 30x^2 - 48x^3 + 59x^4 - 52x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8 \\
b_1(x) &:= 6 + 4x - 44x^2 + 104x^3 - 152x^4 + 164x^5 - 112x^6 + 40x^7 - 6x^8 \\
b_2(x) &:= 9 + 20x - 44x^2 + 93x^4 - 172x^5 + 168x^6 - 80x^7 + 15x^8 \\
b_3(x) &:= 3 + 40x + 26x^2 - 184x^3 + 227x^4 - 112x^5 - 28x^6 + 56x^7 - 17x^8 \\
b_4(x) &:= 3 + 16x + 60x^2 + 32x^3 - 302x^4 + 404x^5 - 252x^6 + 64x^7 - x^8 \\
b_5(x) &:= 3 + 16x + 24x^2 + 24x^3 + 69x^4 - 292x^5 + 336x^6 - 168x^7 + 29x^8 \\
b_6(x) &:= 3 + 16x + 24x^2 + 6x^4 + 60x^5 - 168x^6 + 144x^7 - 39x^8 \\
b_7(x) &:= 3 + 16x + 24x^2 + 28x^6 - 56x^7 + 25x^8 \\
b_8(x) &:= 3 + 16x + 24x^2 + 8x^7 - 8x^8 \\
b_9(x) &:= 3 + 16x + 24x^2 + x^8 \\
b_{10}(x) &:= 3 + 16x + 24x^2
\end{aligned}$$

となる．解析的な丁寧な考察をすれば，$0 \leqq x \leqq 1$ で $b_i(x) \geqq 0$ $(i = 0, \ldots, 10)$ であることが証明できる．以上で $A_1(k, s) \geqq 0$ が証明された．

Step 1-3. $k + s \leqq 1$, $k \geqq 0$, $s \geqq 0$ の場合に $A_2(k, s) \geqq 0$ を証明する．$x = k/(1 - s)$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ である．

$$\frac{1}{(1-s)^2} A_2((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{4} c_i(s)(1-x)x^i + c_5(s)x^i$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
c_0(s) &:= 3(1+2s+3s^2+3s^4+2s^5+s^6)\\
c_1(s) &:= s(3+6s+13s^2+s^3+10s^4+7s^5+4s^6)\\
c_2(s) &:= 3+3s+6s^2+s^3+22s^4-2s^5+7s^6+4s^7+3s^8\\
c_3(s) &:= c_2(s)\\
c_4(s) &:= 2+5s+5s^2+s^3+22s^4+2s^5-s^6+8s^7+3s^8\\
c_5(s) &:= 2+5s+5s^2+s^3+19s^4+11s^5-10s^6+11s^7+3s^8
\end{aligned}
$$

である．Step 1-1 と同じ論法で，$0 \leqq s \leqq 1$ のとき $c_i(s) \geqq 0$ $(i = 0,\ldots, 5)$ であることが結論される．したがって，$k + s \leqq 1$ のとき $A_2(k, s) \geqq 0$ である．

Step 1-4. $k + s > 1$, $k \leqq 1$, $s \leqq 1$ の場合に $A_2(k, s) \geqq 0$ を証明する．$x = (1-s)/k$, $m = 1-k$ とおく．

$$
\frac{1}{(1-m)^2}A_2((1-m), 1-(1-m)x) = \sum_{i=0}^{7} d_i(x)(1-m)m^i + d_8(x)m^8
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
d_0(x) &:= 3-12x+42x^2-84x^3+115x^4-104x^5+56x^6-16x^7+2x^8\\
d_1(x) &:= 6+12x-66x^2+168x^3-281x^4+324x^5-224x^6+80x^7-12x^8\\
d_2(x) &:= 24x+48x^2-240x^3+427x^4-516x^5+420x^6-184x^7+33x^8\\
d_3(x) &:= 3-4x+68x^2+40x^3-311x^4+492x^5-476x^6+256x^7-55x^8\\
d_4(x) &:= 3+8x+18x^2+20x^3+55x^4-216x^5+308x^6-224x^7+60x^8\\
d_5(x) &:= 3+8x+36x^2-12x^3-2x^4+24x^5-84x^6+112x^7-42x^8\\
d_6(x) &:= 3+8x+36x^2-3x^4-4x^5-24x^7+17x^8\\
d_7(x) &:= 3+8x+36x^2-3x^8\\
d_8(x) &:= 3+8x+36x^2
\end{aligned}
$$

である．解析的に慎重に考察すれば，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $d_i(x) \geqq 0$ $(i = 0,\ldots, 8)$ であることが証明できる．したがって，$A_2(k, s) \geqq 0$ であり，$1-a \leqq 1-b$ のとき $F \geqq 0$ であることが証明された．

Step 2. $1-a > 1-b$ の場合に $F \geqq 0$ を証明する．$k = (1-b)/(1-a)$

とおく．$0 \leqq k < 1,\ 0 \leqq s \leqq 1$ である．Step 1 の場合と同様に，

$$F(1-k(1-b), b, 1, s) = (1-b)^2 \left(\sum_{i=0}^{2} B_i(k, s) b^i (1-b) + B_3(k, s) b^3 \right)$$

と表示しよう．まず，

$$B_0(1-k, s) = (k-s)^2 (k^2 + 2ks + 3s^2 + 3k^3 s^4 + 2k^2 s^5 + ks^6) \geqq 0$$

である．また，

$$B_3(k, s) - B_2(k, s) = (1-ks)^2 (k + 2k^2 s + 3k^3 s^2 + 3s^4 + 2ks^5 + k^2 s^6) \geqq 0$$

なので，$B_1(k,\ s) \geqq 0$ と $B_2(k,\ s) \geqq 0$ を示せば，証明が完結する．ここで，

$$\begin{aligned}
B_1(k, s) = {} & 2 - 4k + 3k^2 + k^3 - k^4 \\
& - 8s^3 + 8ks^3 - 12k^2 s^3 + 12k^3 s^3 - 4k^4 s^3 \\
& + 12s^4 - 18ks^4 + 21k^2 s^4 + 3k^3 s^4 - 15k^4 s^4 \\
& + 6k^5 s^4 - 8s^5 + 16ks^5 - 12k^2 s^5 - 4k^3 s^5 + 4k^4 s^5 \\
& + 2s^8 - 2ks^8 + 3k^2 s^8 - 3k^3 s^8 + k^4 s^8 \\
B_2(k, s) = {} & 3 - 4k + 3k^2 - 12s^3 + 12ks^3 - 12k^2 s^3 + 4k^4 s^3 \\
& + 18s^4 - 21ks^4 + 21k^2 s^4 - 3k^5 s^4 - 12s^5 + 16ks^5 - 12k^2 s^5 \\
& + 3s^8 - 3ks^8 + 3k^2 s^8 - k^4 s^8
\end{aligned}$$

である．

Step 2-1. $k + s \leqq 1,\ k \geqq 0,\ s \geqq 0$ の場合に $B_1(k,\ s) \geqq 0$ を証明する．$x = k/(1-s)$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ である．

$$\frac{1}{(1-s)^2} B_1((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} e_i(x) s^i$$

ただし，

$$\begin{aligned}
e_0(x) &:= 2 - 4x + 3x^2 + x^3 - x^4 \\
e_1(x) &:= 4 - 4x - x^3 + 2x^4 \\
e_2(x) &:= 6 - 4x - x^4 \\
e_3(x) &:= 4x - 12x^2 + 12x^3 - 4x^4 \\
e_4(x) &:= 6 - 14x + 21x^2 - 9x^3 - 7x^4 + 6x^5 \\
e_5(x) &:= 4 + 2x - 12x^2 - 7x^3 + 30x^4 - 18x^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_6(x) &:= 2 + 2x + 4x^3 - 23x^4 + 18x^5 \\
e_7(x) &:= 2x + 4x^4 - 6x^5 \\
e_8(x) &:= 3x^2 - 3x^3 + x^4 \\
e_9(x) &:= 3x^3 - 2x^4 \\
e_{10}(x) &:= x^4
\end{aligned}$$

と書ける．$i \neq 5$ に対しては $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $e_i(x) \geqq 0$ である．また，$e_0(x) + e_5(x) \geqq 0$ なので，$k + s \leqq 1$ のとき $B_1(k,\, s) \geqq 0$ である．

Step 2-2. $k + s > 1,\ k \leqq 1,\ s \leqq 1$ の場合に $B_1(k,\, s) \geqq 0$ を証明する．Step 1-2 と同様に，$x = (1-s)/k,\ m = 1 - k$ とおく．

$$\frac{1}{(1-m)^2} B_1((1-m), 1-(1-m)x) = \sum_{i=0}^{9} f_i(x)(1-m)m^i + f_{10}(x)m^{10}$$

と変形する．ここで，

$$\begin{aligned}
f_0(x) &:= 3 - 12x + 30x^2 - 48x^3 + 59x^4 - 52x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8 \\
f_1(x) &:= 6 - 28x + 68x^2 - 80x^3 + 28x^4 + 44x^5 - 56x^6 + 24x^7 - 4x^8 \\
f_2(x) &:= 9 - 44x + 68x^2 - 87x^4 + 68x^5 - 16x^7 + 5x^8 \\
f_3(x) &:= 3 + 8x - 86x^2 + 184x^3 - 133x^4 + 8x^5 + 28x^6 - 8x^7 - x^8 \\
f_4(x) &:= 3 - 16x + 60x^2 - 152x^3 + 238x^4 - 196x^5 + 84x^6 - 16x^7 + x^8 \\
f_5(x) &:= 3 - 16x + 24x^2 + 24x^3 - 111x^4 + 188x^5 - 168x^6 + 72x^7 - 11x^8 \\
f_6(x) &:= 3 - 16x + 24x^2 + 6x^4 - 60x^5 + 112x^6 - 80x^7 + 19x^8 \\
f_7(x) &:= 3 - 16x + 24x^2 - 28x^6 + 40x^7 - 15x^8 \\
f_8(x) &:= 3 - 16x + 24x^2 - 8x^7 + 6x^8 \\
f_9(x) &:= 3 - 16x + 24x^2 - x^8 \\
f_{10}(x) &:= 3 - 16x + 24x^2
\end{aligned}$$

である．解析的な考察から，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f_i(x) \geqq 0$ であることが証明でき，$B_1(k,\, s) \geqq 0$ であることが証明される．

Step 2-3. $k + s \leqq 1,\ k \geqq 0,\ s \geqq 0$ の場合に $B_2(k,\, s) \geqq 0$ を証明する．$x = k/(1-s)$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$ である．

$$\frac{1}{(1-s)^2} B_2((1-s)x, s) = \sum_{i=0}^{10} g_i(x)s^i$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &:= 3 - 4x + 3x^2\\
g_1(x) &:= 6 - 4x\\
g_2(x) &:= 9 - 4x\\
g_3(x) &:= 8x - 12x^2 + 4x^4\\
g_4(x) &:= 9 - 13x + 21x^2 - 8x^4 - 3x^5\\
g_5(x) &:= 6 + 3x - 12x^2 + 4x^4 + 9x^5\\
g_6(x) &:= 3 + 3x - 9x^5\\
g_7(x) &:= 3x + 3x^5\\
g_8(x) &:= 3x^2 - x^4\\
g_9(x) &:= 2x^4\\
g_{10}(x) &:= -x^4
\end{aligned}
$$

である．$i \neq 6, 10$ に対し $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $g_i(x) \geqq 0$ であり，$g_5(x)+g_6(x) \geqq 0$, $g_9(x) + g_{10}(x) \geqq 0$ なので，$k + s \leqq 1$ のとき $B_2(k, s) \geqq 0$ である．

Step 2-4. $k + s > 1$, $k \leqq 1$, $s \leqq 1$ の場合に $B_2(k, s) \geqq 0$ を証明する．$x = (1 - s)/k$, $m = 1 - k$ とおく．

$$
\frac{1}{(1-m)^2} B_2((1-m), 1-(1-m)x) = \sum_{i=0}^{9} h_i(x)(1-m)m^i + h_{10}(x)m^{10}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
h_0(x) &:= 3 - 12x + 42x^2 - 84x^3 + 115x^4 - 104x^5 + 56x^6 - 16x^7 + 2x^8\\
h_1(x) &:= 6 - 36x + 102x^2 - 108x^3 - 11x^4 + 144x^5 - 140x^6 + 56x^7 - 9x^8\\
h_2(x) &:= 24x - 120x^2 + 312x^3 - 383x^4 + 204x^5 - 40x^7 + 12x^8\\
h_3(x) &:= 3 - 20x + 124x^2 - 328x^3 + 589x^4\\
&\qquad - 648x^5 + 392x^6 - 112x^7 + 9x^8\\
h_4(x) &:= 3 - 8x + 18x^2 + 112x^3 - 395x^4\\
&\qquad + 684x^5 - 644x^6 + 296x^7 - 51x^8\\
h_5(x) &:= 3 - 8x + 36x^2 - 12x^3 + 88x^4 - 336x^5 + 504x^6 - 328x^7 + 78x^8\\
h_6(x) &:= 3 - 8x + 36x^2 - 3x^4 + 56x^5 - 196x^6 + 200x^7 - 66x^8\\
h_7(x) &:= 3 - 8x + 36x^2 + 28x^6 - 64x^7 + 33x^8\\
h_8(x) &:= 3 - 8x + 36x^2 + 8x^7 - 9x^8
\end{aligned}
$$

$h_9(x) := 3 - 8x + 36x^2 + x^8$
$h_{10}(x) := 3 - 8x + 36x^2$

である．$0 \leqq x \leqq 1$ において $h_i(x) \geqq 0$ であるので，$B_2(k,s) \geqq 0$ である． □

6.8.　3 変数 6 次斉次巡回不等式

6.8.1.　端判別式

$\mathfrak{H}_6^{c0}$ の基底として，$s_0 := S_6 - 3U^2$, $s_1 := S_{5,1} - 3U^2$, $s_2 := S_{1,5} - 3U^2$, $s_3 := S_{4,2} - 3U^2$, $s_4 := S_{2,4} - 3U^2$, $s_5 := S_{3,3} - 3U^2$, $s_6 := US_3 - 3U^2$, $s_7 := US_{2,1} - 3U^2$, $s_8 := US_{1,2} - 3U^2$ を選ぶ．

$$\mathfrak{H}_{0,s}^{c0} = \left\{ f \in \mathfrak{H}_6^{c0} \;\middle|\; f(0,\, s,\, 1) = 0 \right\}$$
$$G_{1,s}(a,b,c) := s^4 s_0 - (2s^6 - 1)s_3 + (s^8 - 2s^2)s_4$$
$$G_{2,s}(a,b,c) := 2s_1 - 3ss_3 + s^3 s_4$$
$$G_{3,s}(a,b,c) := 2s^3 s_2 + s_3 - 3ss_4$$
$$G_{4,s}(a,b,c) := s_3 + s^2 s_4 - 2ss_5$$
$$G_5(a,b,c) := s_6 - s_7$$
$$G_6(a,b,c) := s_6 - s_8$$
$$G_7(a,b,c) := s_6$$

とおく．$G_{1,s}, \ldots, G_7$ は $\mathfrak{H}_{0,s}^{c0}$ の基底である．

補題 6.8.1.　$G_{2,s} \in \mathfrak{P}_6^{c0+}$ である．つまり，任意の $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$ に対して，

$$2S_{5,1} - 3sS_{4,2} + s^3 S_{2,4} - 3(s-1)^2(s+2)U^2 \geqq 0$$

が成り立つ．

証明. 与式の左辺を $\tilde{f}(a,\, b,\, c,\, s)$ とするとき，

$$s^3 \tilde{f}(a,b,c,1/s) = 2s^3 S_{5,1} - 3s^2 S_{4,2} + S_{2,4} - 3(1-s)^2(1+2s)U^2$$

なので，この右辺が非負であることを証明すればよい．

$P := S_{5,1} - 3U^2$, $Q := S_{4,2} - 3U^2$, $R := S_{2,4} - 3U^2$ とおく．$P \geqq 0$, $Q \geqq 0$, $R \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned} F_3(s) &:= 2s^3 S_{5,1} - 3s^2 S_{4,2} + S_{2,4} - (1 - 3s^2 + 2s^3)3U^2 \\ &= 2s^3 P - 3s^2 Q + R \end{aligned}$$

と変形できる．$\dfrac{d}{ds}F_3(s) = 6s(sP - Q)$ なので，$s \geqq 0$ において，

$$F_3(s) \geqq F_3(Q/P) = \frac{P^2R - Q^3}{P^2}$$

である．したがって，$P^2R - Q^3 \geqq 0$ を示せば，(3) が証明される．

$$\begin{aligned} G(a,b,c) &:= (P^2R - Q^3)/U \\ &= 2S_{6,9} + US_{12} + 9US_{8,4} + 2U^2S_{6,3} + 18U^3S_{5,1} + 27U^3S_{2,4} \\ &\quad - 27U^3S_{4,2} + 2U^4S_3 - 3US_{10,2} - 6US_{7,5} - 3US_{6,6} \\ &\quad - 6U^2S_{4,5} - 6U^2S_{1,8} - 2U^3S_6 - 6U^4S_{1,2} - 6U^5 \end{aligned}$$

とおく．G は巡回多項式だから，$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$, $c = 1$ と仮定して，$G \geqq 0$ を証明すればよい．

まず，$1 - b \leqq 1 - a$ の場合に $G(a,\,b,\,c) \geqq 0$ を証明する．$k = \dfrac{1-b}{1-a}$ とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ である．

$$\begin{aligned} \varphi_1(k) &:= 11 - 42k + 84k^2 - 142k^3 + 252k^4 - 396k^5 + 501k^6 - 498k^7 \\ &\quad + 369k^8 - 190k^9 + 63k^{10} - 12k^{11} + k^{12} \\ \varphi_2(k) &:= 26 - 107k + 272k^2 - 544k^3 + 808k^4 - 724k^5 + 50k^6 + 983k^7 \\ &\quad - 1732k^8 + 1677k^9 - 1012k^{10} + 375k^{11} - 78k^{12} + 7k^{13} \\ \varphi_3(k) &:= 36 - 128k + 311k^2 - 437k^3 + 160k^4 + 572k^5 - 1113k^6 + 691k^7 \\ &\quad + 593k^8 - 1615k^9 + 1512k^{10} - 750k^{11} + 195k^{12} - 21k^{13} \\ \varphi_4(k) &:= 32 - 86k + 134k^2 + 59k^3 - 446k^4 + 536k^5 + 14k^6 - 677k^7 \\ &\quad + 542k^8 + 373k^9 - 988k^{10} + 750k^{11} - 260k^{12} + 35k^{13} \\ \varphi_5(k) &:= 18 - 22k - 30k^2 + 206k^3 - 227k^4 + 11k^5 + 183k^6 - 25k^7 \\ &\quad - 270k^8 + 186k^9 + 217k^{10} - 375k^{11} + 195k^{12} - 35k^{13} \\ \varphi_6(k) &:= 6 + 6k - 42k^2 + 70k^3 + 28k^4 - 115k^5 + 126k^6 - 39k^7 \\ &\quad + 18k^8 - 64k^9 + 24k^{10} + 75k^{11} - 78k^{12} + 21k^{13} \\ \varphi_7(k) &:= 1 + 5k - 9k^2 - 9k^3 + 45k^4 - 25k^5 - 21k^6 + 69k^7 \end{aligned}$$

$$- 36k^8 + 6k^9 - 6k^{10} + 13k^{12} - 7k^{13}$$

$$\varphi_8(k) := 1 - 3k^2 + 9k^4 - 6k^5 - 3k^6 + 18k^7 - 6k^8 + k^{12}$$

とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ のとき $\varphi_i(k) > 0$ $(i = 1,\ldots, 7)$ であることの確認は，ちょっと面倒ではあるが，初歩的な解析学で簡単にできる．また，数式処理ソフトを使って頑張って計算すれば，

$$\begin{aligned} &G(a, 1 - k(1 - a), 1) \\ &= (1 - a)^6 \\ &\quad \times \left(2(1 - k)^6 + (1 - k)\varphi_1(k)a + \sum_{i=2}^{7} \varphi_i(k)a^i + k\varphi_8(k)a^8 + 2k^9a^9\right) \end{aligned}$$

であることが確認できる．したがって，$0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq b \leqq 1$, $c = 1$, $1 - a \leqq 1 - b$ のとき $G(a, b, c) \geqq 0$ である．

最後に，$1 - b \geqq 1 - a$ の場合に $G(a,\, b,\, c) \geqq 0$ を証明する．$k = \dfrac{1 - a}{1 - b}$ とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ である．

$$\begin{aligned}
\psi_1(k) &:= 11 - 72k + 222k^2 - 430k^3 + 639k^4 - 810k^5 + 879k^6 - 762k^7 \\
&\quad + 489k^8 - 220k^9 + 66k^{10} - 12k^{11} + k^{12} \\
\psi_2(k) &:= 26 - 143k + 368k^2 - 542k^3 + 426k^4 + 187k^5 - 1302k^6 + 2439k^7 \\
&\quad - 2826k^8 + 2199k^9 - 1150k^{10} + 390k^{11} - 78k^{12} + 7k^{13} \\
\psi_3(k) &:= 36 - 122k + 152k^2 + 80k^3 - 631k^4 + 1285k^5 - 1365k^6 + 309k^7 \\
&\quad + 1314k^8 - 2156k^9 + 1707k^{10} - 777k^{11} + 195k^{12} - 21k^{13} \\
\psi_4(k) &:= 32 - 50k - 28k^2 + 248k^3 - 446k^4 + 271k^5 + 512k^6 - 1181k^7 \\
&\quad + 774k^8 + 394k^9 - 1048k^{10} + 765k^{11} - 260k^{12} + 35k^{13} \\
\psi_5(k) &:= 18 + 2k - 48k^2 + 96k^3 + 32k^4 - 402k^5 + 623k^6 - 167k^7 \\
&\quad - 466k^8 + 432k^9 + 112k^{10} - 360k^{11} + 195k^{12} - 35k^{13} \\
\psi_6(k) &:= 6 + 12k - 18k^2 + 20k^3 + 60k^4 - 60k^5 - 168k^6 + 361k^7 \\
&\quad - 54k^8 - 140k^9 + 126k^{10} + 48k^{11} - 78k^{12} + 21k^{13}, \\
\psi_7(k) &:= 1 + 5k - 6k^3 + 30k^4 + 12k^5 - 27k^6 - 45k^7 \\
&\quad + 95k^8 - 27k^9 - 33k^{10} + 15k^{11} + 13k^{12} - 7k^{13} \\
\psi_8(k) &:= 1 + 12k^4 - 3k^6 - 6k^7 + 9k^8 - 3k^{10} + k^{12}
\end{aligned}$$

とおく．$0 \leqq k \leqq 1$ のとき $\psi_i(k) > 0$ $(i = 1,\ldots, 7)$ であることは，長い初

等的計算によって確認できる．

$$\begin{aligned}&G(1-k(1-b),b,1)\\&=(-1+b)^6\\&\qquad\times\left(2(1-k)^9+(1-k)\psi_1(k)b+\sum_{i=2}^{7}\psi_i(k)b^i+k\psi_8(k)b^8+2k^6b^9\right)\end{aligned}$$

である．したがって，$0\leqq a\leqq 1$, $0\leqq b\leqq 1$, $c=1$, $1-a\geqq 1-b$ のときも $G(a,b,c)\geqq 0$ である． □

6.9.　4 変数 4 次斉次対称不等式

4 変数 3 次巡回不等式についても PSD 錐 $\mathcal{P}^{c0+}_{4,3}$ の構造は決定できているが，最終的な定理の記述する時に登場する不等式や定数が繁雑で，実用上使いにくく定理である．本書では，その解説は割愛して，4 変数 4 次対称不等式について，最終的な結果が簡明な $\mathcal{P}^{s0}_{4,4}$ と $\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}$ に関する定理だけを照会する．

6.9.1.　$\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_3$ の構造

$\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ 上の d 次斉次式全体 (0 を含む) のなすベクトル空間を $\mathcal{H}_{n,d}$ とし，その中の巡回多項式，対称多項式全体のなす部分ベクトル空間をそれぞれ $\mathcal{H}^c_{n,d}$, $\mathcal{H}^s_{n,d}$ と書く．$\mathcal{H}^c_{n,d}$, $\mathcal{H}^s_{n,d}$ の中で $f(1,\ldots,1)=0$ を満たすもの全体のなす部分ベクトル空間を $\mathcal{H}^{c0}_{n,d}$, $\mathcal{H}^{s0}_{n,d}$ と書く．これらをまとめて $\mathcal{H}^b_a$ と表すとき，$\mathcal{H}^b_a$ 内の $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{P}^{n-1}_{+}$ 上の PSD 錐をそれぞれ $\mathcal{P}^b_a$, $\mathcal{P}^{b+}_a$ と書く．例えば，$\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}=\mathcal{P}(\mathbb{P}^3_+,\mathcal{H}^{s0}_{4,4})$ である．

4 変数対称不等式を扱う場合 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4$ の構造が重要になる．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群である．まず，複素代数幾何の復習から始める．

$X_0,\ldots,X_{n-1}$ の k 次基本対称式を σ_k とするとき，$\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_{n-1}]$ 内の対称多項式は σ_k $(k\in\mathbb{N})$ の複素数係数多項式で表せるので，

$$\mathbb{C}[X_0,X_1,\ldots,X_{n-1}]^{\mathfrak{S}_n}\cong\mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n]$$

である．$\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n])=\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,\cdots,n)$ であり，右辺は重み付き

射影空間である．したがって，

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,\ldots,n)$$

である．$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,\ldots,n)$ 内の $\mathbb{R}$-値点全体の集合は実代数多様体の構造を持ち，それを $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,\ldots,n)$ と書く．$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,\ldots,n)$ であるが，$=$ ではない．

命題 6.9.1.　$n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{0} := (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ とし，

$$A := \left\{ (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n = 0 \\ \text{の解はすべて実数である} \end{array} \right\}$$

とおき，$A_0 := A - \{\mathbf{0}\}$ とおく．このとき，$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,\cdots,n)$ 内で半代数的部分集合 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$ を定義する不等式系は，$\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ 内の半代数的部分集合 A_0 を定める．特に，n 次方程式の判別式は $\mathrm{Zar}(\partial(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n))$ の定義方程式である．

証明. $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,\cdots,n)$, $X := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$, $R_0 := \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ と略記する．

$\mathbf{a} = (a_1,\ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，$f_{\mathbf{a}}(x) := x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n = 0$ と書くことにする．$\lambda := (\lambda_1,\ldots, \lambda_n) \in R_0$ に対し，$a_k = \sigma_k(\lambda)$ $(1 \leqq k \leqq n)$ で $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ を定めると，$f_{\mathbf{a}}(x) = 0$ の解が λ なので $\mathbf{a} \in A_0$ である．$\rho\colon R_0 \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ を自然な全射とする．$\sigma_k(c\lambda) = c^k\sigma_k(\lambda) = c^k a_k$ なので，$\lambda \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbf{a} \in A$ を対応させる写像から，$\varphi\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}$ が誘導され，$\varphi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}/\mathfrak{S}_n$ である．また，φ は自然な全射 $\pi\colon \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}$ と一致する．

X は P 内の基本的半代数的集合とは限らないので，$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ と基本的半代数的閉部分集合 X_i 達の和集合に分解する．$A_i := (\rho\circ\varphi)^{-1}(X_i) \cap R_0 \subset R_0$ とおけば，$\mathbb{P}$ 内で X_i を定義する不等式系は R_0 内で A_i を定義する．$A_0 = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ であるので，定理が得られた．　□

命題 6.9.2.　半代数多様体 A に有限群 G が作用しているとし，$\pi\colon A \to A/G$ を自然な全射とする．$A_0 \subset A$ が半代数的閉集合で $\pi(A_0) = A/G$ かつ $\pi : \mathrm{Int}(A_0) \longrightarrow \pi(\mathrm{Int}(A_O))$ が同型写像であるとき，A_0 は A/G の**基本領域**であるという．

例 6.9.3. (1) $A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ とするとき，以下の A_c は A/G の基本領域である．

$$A_c := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 \geqq 0 \\ s_0 \leqq 1,\ s_1 \leqq 1, \ldots,\ s_{n-1} \leqq 1 \end{array} \right\}$$

(2) $A = \mathbb{P}^n_{+}$, $G = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ とするとき，以下の A_c^+ は A/G の基本領域である．

$$A_c^+ := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; 0 \leqq s_0 \leqq 1, \ldots, 0 \leqq s_{n-1} \leqq 1 \right\}$$

(3) $A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, $G = \mathfrak{S}_{n+1}$ とするとき，以下の A_s は A/G の基本領域である．

$$A_s := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} + 1 \geqq 0 \\ s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_{n-1} \leqq 1 \end{array} \right\}$$

(4) $A = \mathbb{P}^n_{+}$, $G = \mathfrak{S}_{n+1}$ とするとき，以下の A_s^+ は A/G の基本領域である．

$$A_s^+ := \left\{ (s_0 : \cdots : s_{n-1} : 1) \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \;\middle|\; 0 \leqq s_0 \leqq s_1 \leqq \cdots \leqq s_{n-1} \leqq 1 \right\}$$

命題 6.9.4. $\pi\colon \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\subset} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$ を $\pi(a) = \big(S_1(a) : S_{1,1}(a) : S_{1,1,1}(a) : U(a)\big)$ で定めるとき．以下が成り立つ．

(1) $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}/\mathfrak{S}_4 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(1,2,3,4)$ の特異点は 3 点 $Q_0 := (0,1,0,0)$, $Q_0' := (0,0,1,0)$, $Q_0'' := (0,0,0,1)$ であり，この 3 点は巡回型商特異点である．$\pi^{-1}(Q_0') \cap \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \phi$, $\pi^{-1}(Q_0'') \cap \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \phi$ であり．

$$\pi^{-1}(Q_0) \cap \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \left\{ \sigma(-1 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \sigma \in \mathfrak{S}_4 \right\}$$

である．

(2) $\Delta^2(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4) = \{D_1\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4) = \{C_1,\ C_2\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4) = \{Q_0,\ Q_1,\ Q_6\}$ である．ここで，D_1, C_i, Q_i は以下の通りである．

$$D_1 := \left\{ \pi(s : t : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4) \;\middle|\; s + t + 2 > 0,\ s < t \right\}$$
$$C_1 := \left\{ \pi(s : 1 : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4) \;\middle|\; s \neq -3,\ 1 \right\}$$
$$C_2 := \left\{ \pi(s : s : 1 : 1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4) \;\middle|\; -1 < s < 1 \right\}$$
$$Q_1 := \pi(1 : 1 : 1 : 1) = (4,6,4,1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$$
$$Q_2 := \pi(-1 : -1 : 1 : 1) = (0,-2,0,1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1,2,3,4)$$

(3) $\Delta^2(\mathbb{P}^3_+/\mathfrak{S}_4) = \{D_1^+,\, D_0\}$, $\Delta^1(\mathbb{P}^3_+/\mathfrak{S}_4) = \{C_1^+,\, C_3,\, C_4\}$, $\Delta^0(\mathbb{P}^3_+/\mathfrak{S}_4) = \{Q_1,\, Q_3,\, Q_4,\, Q_5\}$ である．ここで，D_1^+, D_0, C_1', C_i and Q_i は以下の通りである．

$$
\begin{aligned}
&D_1^+ := \{\pi(s:t:1:1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4) \mid 0 < s < t,\ s \neq 1,\ t \neq 1\}\\
&D_0 := \{\pi(0:s:t:1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4) \mid 0 < s < t < 1\}\\
&C_1^+ := \{\pi(s:1:1:1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4) \mid 0 < s < 1 \text{ or } s > 1\}\\
&C_3 := \{\pi(0:s:1:1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4) \mid 0 < s < 1 \text{ or } 1 < s\},\\
&C_4 := \{\pi(0:0:s:1) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4) \mid 0 < s < 1\}\\
&Q_3 := \pi(0:1:1:1) = (3,3,1,0) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4)\\
&Q_4 := \pi(0:0:1:1) = (2,1,0,0) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4)\\
&Q_5 := \pi(0:0:0:1) = (1,0,0,0) \in \mathbb{P}_\mathbb{R}(1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

(4) $\mathrm{Zar}(D_1)$ の定義方程式は以下の判別式 F である．また，$C_1 \cup C_2 \subset \mathrm{Sing}(V(F))$ である．

$$
\begin{aligned}
F(s_1,s_2,s_3,s_4) &:= \sum_{0 \leqq i < j \leqq 3} (a_i - a_j)^2\\
&= 256s_4^3 - 192s_1s_3s_4^2 - 128s_2^2s_4^2 + 144s_2s_3^2s_4 - 27s_3^4\\
&\quad + 144s_1^2s_2s_4^2 - 6s_1^2s_3^2s_4 - 80s_1s_2^2s_3s_4 + 18s_1s_2s_3^3 + 16s_2^4s_4\\
&\quad - 4s_2^3s_3^2 - 27s_1^4s_4^2 + 18s_1^3s_2s_3s_4 - 4s_1^3s_3^3 - 4s_1^2s_2^3s_4 + s_1^2s_2^2s_3^2
\end{aligned}
$$

ここで $s_i = \sigma_i$ である．

(5) $\overline{C_1}$ は点 Q_1 で尖点を持ち，$\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ 上のある 3 次曲線と同型である．

(6) C_2 は開線分 (Q_1Q_2) と同型である．

(7) $\mathbb{P}^3_\mathbb{R}/\mathfrak{S}_4$ は $\mathbb{P}_\mathbb{R}(1:2:3:4)$ 内で，以下の不等式で定まる基本的半代数的閉集合である．$F(s_1,s_2,s_3,s_4) \geqq 0$, $8s_2 \leqq 3s_1^2$, $64s_4 - 16s_2^2 + 16s_1^2s_2 - 16s_1s_3 - 3s_1^4 \leqq 0$.

証明. (1) ～ (6) は基本領域を危点集合に分解して，各成分の像を考察すればすぐわかる．(7) は 4 次方程式がのすべての解が実数である条件からわかる． □

6.9.2. $\mathcal{P}^{s0}_{4,4}$ の構造

$\mathcal{P}^{s0}_{4,4} := \mathcal{P}(\mathbb{P}^3_\mathbb{R},\, \mathcal{H}^{s0}_{4,4})$ の構造を考察する．$A = \mathbb{P}^3_\mathbb{R}$ または $A = \mathbb{P}^3_+$ の斉次

座標系を $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ で表す．形式的に $a_{4n+i} = a_i$ $(n \in \mathbb{Z})$ とおき，

$$S_4 := \sum_{i=0}^{3} a_i^4, \quad T_{3,1} := \sum_{i=0}^{3} a_i^3(a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}), \quad S_{2,2} := \sum_{0 \leqq i < j \leqq 3} a_i^2 a_j^2$$

$$T_{2,1,1} := \sum_{i=0}^{3} a_i^2(a_{i+1}a_{i+2} + a_{i+1}a_{i+3} + a_{i+2}a_{i+3}), \quad U := a_0a_1a_2a_3$$

とおく．本項の主定理は次の定値である．

定理 6.9.5.

$$f = S_4 + pT_{3,1} + qS_{2,2} + rT_{2,1,1} - (4 + 12p + 6q + 12r)U \in \breve{\mathfrak{H}}^{s0}_{4,4}$$

が任意の実数 a_0, a_1, a_2, a_3 に対して $f(a_0, a_1, a_2, a_3) \geqq 0$ を満たすための必要十分条件は，

$$p + r \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8 \geqq 0$$

である．また，$\mathfrak{P}^{s0}_{4,4}$ の端元は，$\mathfrak{g}_t$ $(t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ または $S_{2,2} + 6U - T_{2,1,1}$ の正の定数倍である．ここで，

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_t(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 3(S_4 - 4U) \\ &\quad - 2(t+1)(T_{3,1} - T_{2,1,1}) + (t^2 + 2t - 1)(S_{2,2} - 6U), \\ \mathfrak{g}_\infty(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= S_{2,2} - 6U \end{aligned}$$

である．

上の定理の証明は本項の最後で完結する．まず，$s_0 := S_4 - 4U$, $s_1 := T_{3,1} - 12U$, $s_2 := S_{2,2} - 6U$, $s_3 := T_{2,1,1} - 12U$ を $\mathfrak{H}^{s0}_{4,4}$ の基底として選び，$\Phi^{s0}_4(a) = \big(s_0(a) : s_1(a) : s_2(s) : s_3(a)\big)$ により $\Phi^{s0}_4 : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \cdots \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ を定める．$\mathrm{Bs}\,\mathfrak{H}^{s0}_{4,4} = \{(1:1:1:1)\}$ なので $\Phi^{s0}_4 : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \cdots \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ は $\mathbf{1} := (1:1:1:1)$ で正則でないが，$bvf1$ で連続写像であり，$\Phi^{s0}_4(1:1:1:1) = (2:3:1:1) =: P_1$ である．$X^{s0}_4 := \Phi^{s0}_4(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})$ の構造を調べる．点 $Q \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ における $\mathfrak{P}^{s0}_{4,4}$ の局所錐を $\mathfrak{L}^{s0}_Q$ と書く事にする．

補題 6.9.6.　$\mathrm{Zar}(\partial X^{s0}_4) = V(G_5)$ である．ここで，G_5 は以下の多項式である．

$$G_5(x_0, x_1, x_2, x_3) := -3x_0x_1^4 + 4x_1^5 + 6x_0^2x_1^2x_2 - 24x_0x_1^3x_2 + 14x_1^4x_2$$

$$
\begin{aligned}
&- 3x_0^3x_2^2 + 20x_0^2x_1x_2^2 - 48x_0x_1^2x_2^2 + 16x_1^3x_2^2 + 34x_0^2x_2^3 + 16x_0x_1x_2^3 \\
&+ 8x_1^2x_2^3 + 44x_0x_2^4 - 48x_1x_2^4 - 72x_2^5 + 12x_0^2x_1^2x_3 + 12x_0x_1^3x_3 \\
&- 36x_1^4x_3 - 12x_0^3x_2x_3 + 20x_0^2x_1x_2x_3 + 120x_0x_1^2x_2x_3 - 56x_1^3x_2x_3 \\
&- 76x_0^2x_2^2x_3 - 32x_0x_1x_2^2x_3 - 64x_1^2x_2^2x_3 - 32x_0x_2^3x_3 + 112x_1x_2^3x_3 \\
&+ 144x_2^4x_3 - 12x_0^3x_3^2 - 40x_0^2x_1x_3^2 - 112x_1x_2^3x_3 + 144x_2^4x_3 - 12x_0^3x_3^2 \\
&- 40x_0^2x_1x_3^2 - 18x_0x_1^2x_3^2 + 104x_1^3x_3^2 + 14x_0^2x_2x_3^2 - 104x_0x_1x_2x_3^2 \\
&+ 84x_1^2x_2x_3^2 + 64x_0x_2^2x_3^2 + 16x_1x_2^2x_3^2 - 152x_2^3x_3^2 + 28x_0^2x_3^3 \\
&+ 12x_0x_1x_3^3 - 136x_1^2x_3^3 + 8x_0x_2x_3^3 - 56x_1x_2x_3^3 + 32x_2^2x_3^3 \\
&- 3x_0x_3^4 + 84x_1x_3^4 + 14x_2x_3^4 - 20x_3^5
\end{aligned}
$$

証明. G_5 は既約多項式で，

$$
G_5(s_0, s_1, s_2, s_3) = 16(a_0 + a_1 + a_2 + a_3)^4 \prod_{i<j}(a_i - a_j)^2 \sum_{i<j}(a_i - a_j)^2
$$

を満たす．よって，$\partial_a X_4^{s0} = V(G_5) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ である．　□

双有理連続写像 $P_{\mathbb{R}}^3/\Omega_4 \longrightarrow X_4^{s0}$ が存在するので，C_1, L_1, $L_2 \subset X_4^{s0}$ を以下のように定める．まず，

$$
\begin{aligned}
&G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_3)^2 + 2x_2^2 - 3x_2x_0 \\
&C_1 := \left\{ \Phi_4^{s0}(t : 1 : 1 : 1) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\
&\quad = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid x_2 = x_3,\ G_2(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0 \right\} \\
&L_1 := \left\{ \Phi_4^{s0}(t : t : 1 : 1) \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\
&\quad = \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0 = 2x_2,\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ (x_2/x_0) \geqq 1/3 \end{array} \right\} \\
&P_2 := (0 : 1 : 0 : 1) = (0 : -1 : 0 : -1) \\
&\quad = \lim_{u \to -\infty} (2 : u : 1 : u) = \Phi_4^{s0}(-1 : -1 : 1 : 1)
\end{aligned}
$$

とおく．L_1 は 2 点 P_1, P_2 を端点とする線分である．最後に，

$$
L_2 := \left\{ (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0 = 2x_2,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ (x_2/x_0) \geqq 1/2 \end{array} \right\}
$$

とおく．L_2 は P_2 と $(2 : -1 : 1 : 1)$ を端点とする線分であり，$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 : (a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ 内で $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$ で定義される平面の像になっている．

補題 6.9.7.　$s_2 - s_3 \in \mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)} \subset \mathcal{E}(C_1) \subset \partial\mathcal{P}^{s0}_{4,4}$ である．

証明. $b_2 := \dfrac{1}{2}\bigl((a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+(a_3-a_1)^2\bigr)$, $b_3 := a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^2a_1+a_3a_1^2-6a_1a_2a_3$ とおく．すると，

$$s_2 - s_3 = b_2\left(a_0 - \frac{b_3}{2b_2}\right)^2 + \frac{3(a_1-a_2)^2(a_2-a_3)^2(a_3-a_1)^2}{4b_2} \geqq 0$$

である．したがって，$s_2 - s_3 \in \mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)}$ である．　□

上の補題は X_4^{s0} は $(x_2-x_3)/x_0 \geqq 0$ で定まる半空間の部分集合であることを意味する．ここで，$C_1 \subset X_4^{s0}$ は平面 $x_2 - x_3 = 0$ 上の曲線であることに注意する．

補題 6.9.8.　X_4^{s0} の凸包は以下の Y である．

$$Y := \bigl\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \bigm| G_2(x_0,x_1,x_2,x_3) \leqq 0,\ (x_2-x_3)/x_0 \geqq 0\bigr\}$$

証明.　$E := V(G_2)$ とおく．$G_2(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ のとき $x_0 = \dfrac{x_1^2+2x_2^2-2x_1x_3+x_3^2}{3x_2}$ である．この x_0 を $G_5(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ に代入すると次を得る．

$$\begin{aligned} &G_5\left(\frac{x_1^2+2x_2^2-2x_1x_3+x_3^2}{3x_2}, x_1, x_2, x_3\right) \\ &= -\frac{4(x_2-x_3)^2(x_1-2x_2-x_3)^2(x_1+2x_2-x_3)^4}{9x_2^3} \end{aligned}$$

このことは $E \cap \partial X_4^{s0} \subset C_1 \cup L_1 \cup L_2$ であることを意味する．前項のような $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}/\mathfrak{S}_4$ の基本領域 $A_s \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ を取り，Φ_4^{s0} の定義域を制限して $\varphi := \Phi_4^{s0}|_{A_s} : A_s \longrightarrow X_4^{s0}$ とする．すると，$\varphi^{-1}(C_1) \subset \partial A_s$, $\varphi^{-1}(L_1) \subset \partial A_s$, $\varphi^{-1}(L_2) \subset \partial A_s$ である．このときは，∂X_4^{s0} と E は C_1, L_1 あるいは L_2 において交わらないことを意味する．$X_4^{s0} \cap \mathrm{Int}(Y) \neq \phi$ なので，$X_4^{s0} \subset Y$ であることがわかる．$C_1 \cup \{P_2\} \subset X_4^{s0}$ であることに注意する．$C_1 \cup \{P_2\}$ の凸包は Y であるので，Y は X_4^{s0} の凸包である．　□

$\Delta^i(X_4^{s0})$ を求めるのは易しくないが，$\Delta^i(Y)$ を求めるのは簡単であり，この問題では $\Delta^i(Y)$ のほうを利用して $\mathcal{P}_{4,4}^{s0}$ を決定すればよい．つまり，

$$\partial\mathcal{P}_{4,4}^{s0} = \cup\bigl\{\mathcal{E}(D) \bigm| D \in \Delta^i(Y)\ (0 \leqq i \leqq 3)\bigr\}$$

である．

補題 6.9.9.　$\Delta^2(Y) = \{E_0,\, E_1\}$, $\Delta^1(Y) = \{C_1\}$, $\Delta^0(Y) = \{P_2\}$ である．ここで，E_1, E_2 は以下の半代数曲面である．

$$E_0 := \bigl\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \bigm| G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,\, (x_2 - x_3)/x_0 > 0\bigr\}$$
$$E_1 := \bigl\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \bigm| G_2(x_0, x_1, x_2, x_3) < 0,\, x_2 = x_3\bigr\}$$

証明. Y は C_1 を底とし P_2 を頂点とする錐体の表面であった．　□

E_1 は平面上の領域であるので $\mathcal{E}(E_1)$ は $\mathcal{P}_{4,4}^{s0}$ の面成分ではない．$E = \mathrm{Zar}(E_0)$ は線織面であるので，$\mathcal{E}(E_2)$ も面成分ではない．したがって，次が得られた．

補題 6.9.10.　$\partial\mathcal{P}_{4,4}^{s0} = \mathcal{E}(C_1) \cup \mathcal{E}(P_2)$.

$\mathcal{E}(C_1)$ を求めよう．点 $P_t := \Phi_4^{s0}(t : 1 : 1 : 1) \in C_1$ における E の接平面は

$$T_{E,P_t} := \bigl\{(x_0 : \cdots : x_3) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \bigm| 3x_0 - 2(t+1)(x_1 - x_3) + (t^2 + 2t - 1)x_2 = 0\bigr\}$$

である．次に，点 P_t における端元を求める．

$$\mathfrak{g}_t(a_0, a_1, a_2, a_3) := 3s_0 - 2(t+1)(s_1 - s_3) + (t^2 + 2t - 1)s_2,$$
$$\mathfrak{g}_\infty(a_0, a_1, a_2, a_3) := s_2$$

とおく．$\mathfrak{g}_t \in \mathrm{Zar}(\mathcal{L}_{(t:1:1:1)}^{s0})$ である．$\Phi_4^{s0}(-1 : -1 : 1 : 1) = P_2$ なので $\mathfrak{g}_t(-1, -1, 1, 1) = 0$ である．$\mathfrak{g}_1$ に対応する平面 $3x_0 - 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ は，L_1 において ∂X_4^{s0} に接する．よって，任意の $t \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ に対して $\mathfrak{g}_1(t : t : 1 : 1) = 0$ である．$\mathfrak{g}_{-3}$ に対応する平面 $3x_0 + 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$ は，L_2 において X_4^{s0} に接する．よって，$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$ のとき $\mathfrak{g}_{-3}(a_0 : a_1 : a_2 : a_3) = 0$ である．任意の $P \in C_1$ に対して $\dim \mathcal{L}_P^{s0} \leqq 2$ であるので，次の補題が得られる．

補題 6.9.11. $\mathcal{P}^{s0}_{4,4}$ 対して以下が成り立つ.

$$\mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_t + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

$$\mathcal{E}(C_1) = \bigcup_{t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}} \mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)}$$

また，$f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 \in \breve{\mathcal{H}}^{s0}_{4,4}$ と表示するとき $\mathcal{E}(C_1)$ is の判別式は

$$\mathrm{disc}_1(p, q, r) := -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8$$

である．よって，$\mathcal{E}(C_1)$ は以下のように表せる.

$$\mathcal{E}(C_1) = \left\{ \sum_{i=0}^{3} p_i s_i \in \mathcal{H}^{s0}_{4,4} \;\middle|\; p_0^2 \,\mathrm{disc}_1\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \frac{p_3}{p_0}\right) \geqq 0 \right\}$$

証明. モニックな $f \in \mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)}$ は以下の形に書ける.

$$f = s_0 - \frac{2(t+1)}{3}(s_1 - s_3) + \frac{t^2 + 2t - 1}{3} s_2 + \alpha(s_2 - s_3)$$

$p = -2(t+1)/3$, $q = \alpha + (t^2 + 2t - 1)/3$, $r = -\alpha + 2(t+1)/3$ から t と α を消去すると $\mathrm{disc}_1(p, q, r) = 0$ が得られる. □

定理 6.9.5 の証明. $\mathcal{E}(0 : -1 : 0 : -1)$ は $\left\{\mathfrak{g}_t \;\middle|\; t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}\right\}$ で生成される閉凸錐である．$f = p_0 s_0 + p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 \in \mathcal{E}(P_2)$ を取る．$\mathrm{Zar}(\mathcal{E}(0 : -1 : 0 : -1))$ は $p_1 + p_3 = 0$ で定まる平面である．よって，

$$\mathcal{E}(P_2) = \left\{ \sum_{i=0}^{3} p_i s_i \in \mathcal{H}^{s0}_{4,4} \;\middle|\; p_1 + p_3 = 0,\ -9p_1^2 + 12p_0 p_2 + 8p_0^2 \geqq 0 \right\}$$

である．したがって，$\mathcal{P}^{s0}_{4,4}$ の端元は，$\mathfrak{g}_t$ $(t \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ または $s_2 - s_3$ の正の定数倍である.

$f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_3 \in \mathcal{H}^{s0}_{4,4}$ とモニックな非斉次形に表すとき，任意の $a \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ に対し $f(a) \geqq 0$ となるための必要十分条件は，$p + r \geqq 0$ かつ $-9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8 \geqq 0$ である. □

6.9.3. $\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}$ の構造

$\mathcal{P}^{s0+}_{4,4} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_+, \mathcal{H}^{s0}_{4,4})$ の構造を考察する．前項と同じ記号を用いる．本項の主定理は次の定理である.

定理 6.9.12. $\mathcal{H}_{4,4}^{s0}$ 内のモニック多項式

$$f = S_4 + pT_{3,1} + qS_{2,2} + rT_{2,1,1} - (4+12p+6q+12r)U \in \mathcal{H}_{4,4}^{s0}$$

について，任意の $a_0 \geqq 0, a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, a_3 \geqq 0$ に対して $f(a_0, a_1, a_2, a_3) \geqq 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下の「(1) または (2)」かつ「(3) または (4)」が成り立つことである．

(1) $p \leqq -4$ かつ $p^2 \leqq 4q - 8$.

(2) $p \geqq -4$ かつ $2p + q + 2 \geqq 0$.

(3) $p \leqq -2/3$ かつ $9p^2 \leqq 12p + 12q + 12r + 8$.

(4) $p \geqq -2/3$ かつ $3q + 3r \geqq 1$.

また，$\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の端元は，$\mathfrak{f}_t^{ab}$ $(0 \leqq t \leqq 5)$, $\mathfrak{f}_t^{c}$ $(t \geqq 5)$, $S_{2,2} + 6U - T_{2,1,1}$, $T_{3,1} - 2S_{2,2}$, または $T_{2,1,1} - 12U$ の正の定数倍である．ここで，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_t^{ab}(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 3S_4 - 2(t+1)T_{3,1} + 2(2t-1)S_{2,2} \\
&\quad + (t^2+3)T_{2,1,1} - 12(t^2+1)U \\
\mathfrak{f}_t^{c}(a_0, a_1, a_2, a_3) &:= 9S_4 - 6(t+1)T_{3,1} + (t^2+2t+19)S_{2,2} \\
&\quad + 2(t^2+5t-8)T_{2,1,1} - 6(5t^2+10t-19)U
\end{aligned}$$

である．

この定理の証明は本項の最後で完結する．$A := \mathbb{P}_+^3$ の座標系を $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ とし，$X_4^{s0+} := \Phi_4^{s0}(\mathbb{P}_+^3)$ とおく．実は，X_4^{s0+} の構造は結構複雑で記述も繁雑になる．ただ，幸いにも最終的な結果は上の定理のように簡明になる．$\mathcal{H}_{4,4}^{s0}$ の基底 s_0, s_1, s_2, s_3 は前項と同じとする．$\Delta(X_4^{s0+})$ を記述するために，

$$\begin{aligned}
P_3 &:= (1:2:1:1) = \Phi_4^{s0}(0:1:1:1) \\
P_4 &:= (2:2:1:0) = \Phi_4^{s0}(0:0:1:1) \\
P_5 &:= (1:0:0:0) = \Phi_4^{s0}(0:0:0:1) \\
C_1 &:= \left\{\Phi_4^{s0}(t,1,1,1) \;\middle|\; t > 0\right\} \\
C_3 &:= \left\{\Phi_4^{s0}(0,t,1,1) \;\middle|\; 0 < t < 1 \text{ or } t > 1\right\} \\
C_4 &:= \left\{\Phi_4^{s0}(0,0,t,1) \;\middle|\; 0 < t < 1\right\} \\
(P_iP_j) &:= \left\{tP_i + (1-t)P_j \;\middle|\; 0 < t < 1\right\}
\end{aligned}$$

とおく．添え字は 6.9.1 項の記号に対応している．さらに，C_1 を $0 < t < 1$, $1 < t < 5$, $5 < t$ の 3 つの開区間に分割して順に C_1^a, C_1^b, C_1^c と書く．また，$C_1^{ab} = C_1^a \cup \{\Phi_4^{s0}(1:1:1:1)\} \cup C_1^b$ とおく．一般に (PQ) は開線分 PQ を表し，閉線分は $[PQ] = (PQ) \cup \{P, Q\}$ で表す．単に PQ と書いたら直線 PQ を表すものとする．

補題 6.9.13. 上で定義した C_1, C_3, C_4 に対して以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Zar}(C_1)$ は平面 $V(x_2 - x_3)$ 上で以下の方程式で定まる 2 次曲線である．

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_0x_2 + 3x_2^2 = 0$$

特に，$\mathrm{Zar}(C_1)$ は非特異である．また，C_1 の端点は $\Phi_4^{s0}(0:1:1:1) = P_3$ と $\Phi_4^{s0}(\infty:1:1:1) = P_5$ である．

(2) $\mathrm{Zar}(C_3)$ の特異点は $\Phi_4^{s0}(0,1,1,1) = P_3$ のみである．また，C_3 の端点は $\Phi_4^{s0}(0:0:1:1) = P_4$ と $\Phi_4^{s0}(0:\infty:1:1) = P_5$ である．

(3) $\mathrm{Zar}(C_4)$ は平面 $V(x_3)$ 上で以下の方程式で定まる 2 次曲線である．

$$x_1^2 - 2x_2^2 - x_0x_2 = 0$$

また，C_4 の端点は $\Phi_4^{s0}(0:0:1:1) = P_4$ と $\Phi_4^{s0}(0:0:1:0) = P_5$ である．

証明. C_i の定義から消去法を実行すればすぐわかる．□

補題 6.9.14. 今までの記号に加えて，

$$\begin{aligned}
&G_3(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_3)^2 - (x_2 + 2x_3)(x_0 + 2x_2)\\
&G_4(x_0, x_1, x_2, x_3) := (x_1 - 2x_3)^2 - (x_0 - x_3)^2 + (x_0 - 2x_2 + x_3)^2\\
&D := \left\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \;\middle|\; G_3(x) = 0 \text{ and } G_4(x) \leqq 0\right\}
\end{aligned}$$

とおく．すると $\partial X_4^{s0+} \subset D \cup V(G_5)$ である．

証明. 以下の半代数曲面を考える．

$$\begin{aligned}
\overline{D_1} &:= \left\{\Phi_4^{s0}(a:b:1:1) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\right\}\\
D_\infty &:= \left\{\Phi_4^{s0}(0:a:b:1) \;\middle|\; 0 \leqq a \leqq b \leqq 1\right\}
\end{aligned}$$

とおく．$\overline{D_1} \subset V(G_5)$ である．$G_3(\Phi(0:a:b:1)) = 0$ なので，$D_\infty \subset V(G_3)$ である．

$$G_4(\Phi(0,a,b,c)) = -3(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(a+b+c)^2 \leqq 0$$

であるので，$\overline{D_1} \subset D$ である．第1項のような基本領域 A_s^+ を取る．$\Phi_4^{s0} : \mathrm{Int}(A_s^+) \longrightarrow \mathrm{Int}(X_4^{s0+})$ は同型写像であるので，

$$\partial X_4^{s0+} = \Phi_4^{s0}(\partial A_s^+) = \overline{D_1} \cup D_\infty \subset D \cup V(G_5)$$

であることがわかる．□

補題 6.9.15. 実数 $0 \leqq u \leqq 1$ に対して $R_u := \Phi_4^{s0}(0:0:u:1) \in \overline{C_4}$ とおく．さらに，

$P_6 := \Phi_4^{s0}(5:1:1:1) = (38:21:3:3)$

$t_1(u) := (3u^2 - u + 3)/u$

$F_4 := \bigcup_{0<u<1} (Q(t_1(u))R_u)$

$f_4(x_0,x_1,x_2,x_3) := 3x_0x_2 - 3x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_0x_3 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - 19x_3^2$

とおく．このとき以下が成り立つ．

(1) $F_4 \subset V(f_4)$.

(2) $V(f_4)$ は点 $P_7 := (20:3:-6:3)$ を頂点とする2次曲線の上の錐である．

(3) $x \in X_4^{s0+}$ ならば $f_4(x) \geqq 0$ である．

(4) F_4 は2次曲面 $V(f_4)$ 上の半代数的集合で，$\partial F_4 = \overline{C_4} \cup \overline{C_1^c} \cup [P_4P_6]$ である．

(5) $V(f_4) \cap X_4^{s0+} = C_1 \cup C_4 \cup \{P_3,\, P_4,\, P_5\}$.

証明. (1) と (2) は次の関係式と，3点 $Q(t_1(u))$, R_u, P_7 が同一直線上にあることからわかる．

$$f_4\big(\Phi_4^{s0}(t,1,1,1) + vP_7\big) = 0, \quad f_4\big(\Phi_4^{s0}(0,0,u,1) + vP_7\big) = 0$$

(3) 今，

$$g(a_0,a_1,a_2,a_3) := 2a_2(3a_0+a_3)(a_0-a_1)^2(a_0-a_2)^2(a_1-a_3)^2 + \frac{20}{3}a_3^2(a_0-a_1)^2(a_0-a_2)^2(a_1-a_2)^2.$$

とおくと，$f_4(s_0, s_1, s_2, s_3) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} g(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}) \geqq 0$ である．

(4) と (5) は上の事実から導かれる．　□

補題 6.9.16.　$t \geqq 0$ に対して $Q(t) := \Phi_4^{s0}(t:1:1:1) \in \overline{C_1}$ とおく．さらに，

$$(Q(t)P_4) := \{uQ(t) + (1-u)P_4 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \mid 0 < u < 1\}$$

$$F_5^a := \bigcup_{0<t<1} (Q(t)P_4) \quad F_5^b := \bigcup_{1<t<5} (Q(t)P_4) \quad F_5 := F_5^a \cup (P_1P_4) \cup F_5^b$$

$$f_5(x_0, x_1, x_2, x_3) := 3x_0x_3 - x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

とおく．このとき以下が成り立つ．

(1) $F_5 \subset V(f_5)$.

(2) $(P_1P_4) \subset \partial X_4^{s0+}$.

(3) 任意の $t \in [0,1) \cup (1,5]$ に対して $Q(t)P_4 \cap \partial X_4^{s0+} = \phi$.

(4) $F_5^a \cap X_4^{s0+} = \phi$.

(5) $F_5^b \cap X_4^{s0+} = \phi$.

(6) $\partial F_5 = C_1^{ab} \cup [Q(0)P_4] \cup [Q(5)P_4]$.

証明. (1) は $f_5\bigl(vQ(t) + (1-v)P_4\bigr) = 0$ からわかる．

(2) $(P_1P_4) = \{\Phi_4^{s0}(v:v:1:1) \mid 0 < v < 1\}$ なので，$(P_1P_2) \subset \partial X_4^{s0+}$ である．

(3) $V(f_2)$ は P_4 を頂点とし 2 次曲線を底とする錐である．また，開線分 $(Q(t)P_4)$ は 2 次曲面 $V(f_2)$ 上にある．数式処理ソフトで計算すると

$$G_5\bigl(vQ(t) + (1-v)P_4\bigr) = -(t-1)^6(1-v)^2v^2\bigl(v\alpha(t) + 16(9-t)(3+5t)\bigr)$$

が得られる．ここで $\alpha(t) := 243 - 402t - 1603t^2 - 252t^3 + 1101t^4 - 114t^5 + 3t^6$ である．$\beta(t) := -16(9-t)(3+5t)/\alpha(t)$ とおく．$1 - \beta(t) = \dfrac{3(t-1)^2(t^2-18t-15)^2}{\alpha(t)}$ なので，$\alpha(t) > 0$ かつ $0 \leqq t \leqq 5$ ならば $\beta(t) \geqq 1$ であり，$\alpha(t) < 0$ かつ $0 \leqq t \leqq 5$ ならば $\beta(t) \leqq 0$ である．これより，$t \in [0, 1) \cup (1, 5]$ ならば $(Q(t)P_4) \cap V(G_5) = \phi$ である．

$$G_3\bigl(vQ(t) + (1-v)P_4\bigr) = -(1-t)^3v((9-t) + v(-9 - 35t + 36t^2))$$

なので，開線分 $(Q(t)P_4)$ と $V(G_4)$ は $v=(t-9)/(36t^2-35t-9)$ のとき交わる．この交点を Q'_t とおく．また，$v_0(t):=(t-9)/(36t^2-35t-9)$,

$$f(v,t):=G_4\bigl(vQ(t)+(1-v)P_4\bigr)=t(1-t)^3v(4(1-v)+9tv(1-t))$$

とおく．すると，

$$f\bigl(t,\,v_0(t)\bigr)=\frac{9(25-t)(9-t)(1-t)^4t^2}{(36t^2-35t-9)^2}>0$$

であるので，$t\in[0,1)\cup(1,5]$ のとき $Q'_t\notin D$ であることがわかる．したがって，$Q(t)P_4\cap\partial X_4^{s0+}=\phi$ である．

(4) (2) より $F_5^a\cap X_4^{s0+}=\phi$ または $F_5^a\subset X_4^{s0+}$ である．$0<t<1$ のとき $0<v_0(t)<1, Q'_t\in(Q(t)P_4)$ である．$Q'_t\notin X_4^{s0+}$ なので $F_5^a\cap X_4^{s0+}=\phi$ である．

(5) 前補題より $(Q(5)P_4)\cap X_4^{s0+}=\phi$ であるので．$F_5^b\cap X_4^{s0+}=\phi$ である．

(6) は自明．　□

補題 6.9.17. Y^+ は $X_4^{s0+}\subset\mathbb{P}^3_+$ の凸包とする．このとき，$\Delta^0(Y^+)=\bigl\{P_3,\,P_4,\,P_5\bigr\}$, $\Delta^1(Y^+)=\bigl\{C_1,\,C_4,\,(P_3P_4),\,(P_4P_5),\,(P_5P_3)\bigr\}$, $\Delta^2(Y^+)=\bigl\{F_1,\ldots,F_5\bigr\}$ である．ここで，F_1, F_2, F_3 は以下のように定義される．

(1) F_1 は平面 $V(x_3)$ 上で線分 $[P_4P_5]$ と弧 $\overline{C_4}$ で囲まれる半代数的開集合である．また，Y^+ は $x_3\geqq 0$ で定まる半空間に含まれる．
(2) F_2 は平面 $V(x_2-x_3)$ 上で線分 $[P_3P_5]$ と弧 $\overline{C_1}$ で囲まれる半代数的開集合である．また，Y^+ は $x_2\geqq x_3$ で定まる半空間に含まれる．
(3) F_3 は平面 $V(x_1-2x_2)$ 上で 3 本の線分 $[P_3P_4]$, $[P_4P_5]$, $[P_5P_3]$ で囲まれる三角形の内部である．また，Y^+ は $x_1\geqq 2x_2$ で定まる半空間に含まれる．

証明. 任意の $a\in\mathbb{P}^3_+$ に対し $s_3(a)\geqq 0$ であり，P_4, $P_5\in Y^+\cap V(x_3)$ なので，Y^+ のいずれかの面成分 (それを F'_1 とおく) は $\mathrm{Zar}(F'_1)=V(x_3)$ を満たす．任意の $a\in\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ に対して $s_2(a)\geqq s_3(a)$ であり，P_3, $P_5\in Y^+\cap V(x_2-x_3)$ であるのｔ Y^+ のいずれかの面成分 (それを F'_2 とおく)

は $\mathrm{Zar}(F_2') = V(x_2 - x_3)$ を満たす．$a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{P}^3_+$ に対し，

$$s_1(a) - 2s_2(a) = \sum_{i<j} a_i a_j (a_i - a_j)^2 \geqq 0$$

である．また，P_3, P_4, $P_5 \in Y^+ \cap V(x_1 - 2x_2)$ である．したがって，Y^+ のいずれかの面成分 (それを F_3' とおく) は $\mathrm{Zar}(F_3') = V(x_1 - 2x_2)$ を満たす．$V(x_1 - 2x_2) \cap V(x_3) = P_4P_5$, $V(x_1 - 2x_2) \cap V(x_2 - x_3) = P_3P_5$ であることに注意しよう．前補題より，$F_3' = F_3$ でなければばならない．すると，$F_2' = F_2$, $F_1' = F_1$ もわかる．□

$\Delta(Y^+)$ は 13 個の元から成るが，その 13 個の $D \in \Delta(Y^+)$ に対して $\mathcal{E}(D)$ を求める必要がある．以下，その作業が延々と続く．まず，F_4 と F_5 の端元を調べる．

補題 6.9.18.　$a = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3) \in \mathbb{P}^3_+$ に対して

$$\mathfrak{f}^{ab}_t(a) := 3s_0(a) - 2(t+1)s_1(a) + 2(2t-1)s_2(a) + (t^2+3)s_3(a)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}^{c}_t(a) := {} & 9s_0(a) - 6(t+1)s_1(a) \\ & + (t^2+2t+19)s_2(a) + 2(t^2+5t-8)s_3(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{c}_u(a) := {} & 3u^2 s_0(a) - 6u(u^2+1)s_1(a) \\ & + 3(u^4+4u^2+1)s_2(a) + 2(3u^4+3u^3+2u^2+3u+3)s_3(a)\end{aligned}$$

とおく．このとき，以下が成り立つ．

(1) $0 \leqq t \leqq 5$, $a \in \mathbb{P}^3_+$ に対し $\mathfrak{f}^{ab}_t(a) \geqq 0$ である．

(2) $t \geqq 5$, $a \in \mathbb{P}^3_+$ に対し $\mathfrak{f}^{c}_t(a) \geqq 0$ である．

(3) $0 \leqq u \leqq 1$, $a \in \mathbb{P}^3_+$ に対し $\mathfrak{g}^{c}_u(a) \geqq 0$ である．

(4) $t_1(u) := (3u^2 - u + 3)/u$ とおく．すると $3\mathfrak{g}^c_u(a) = u^2 \mathfrak{f}^c_{t_1(u)}(a)$ である．

(5) $\mathfrak{f}^{ab}_t(t,1,1,1) = 0$, $\mathfrak{f}^{ab}_t(0,0,1,1) = 0$, $\mathfrak{f}^{c}_t(t,1,1,1) = 0$, $\mathfrak{g}^{c}_u(0,0,u,1) = 0$ が成り立つ．

証明. (1), (2), (3) 公式 6.2.20 のアルゴリズムで計算すると，

$$T_{\mathrm{Zar}(F_5),Q(t)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}^{ab}_t \quad (0 \leqq t \leqq 5 \text{ のとき})$$
$$T_{\mathrm{Zar}(F_4),Q(t)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}^{c}_t \quad (t \geqq 5 \text{ のとき})$$
$$T_{\mathrm{Zar}(F_4),R_u} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}^{c}_u \quad (0 \leqq u \leqq 1 \text{ のとき})$$

が得られる．

(4), (5) は直接計算するだけ． □

$\mathfrak{f}_t^c = 3\mathfrak{f}_t^{ab} + (t-5)^2(s_2 - s_3)$, $\mathfrak{f}_5^c = 3\mathfrak{f}_5^{ab} = 3(3s_0 - 12s_1 + 18s_2 + 28s_3)$ という関係式があることに注意する．上の議論から，

$$\mathcal{E}(F_1) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3, \quad \mathcal{E}(F_2) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3), \quad \mathcal{E}(F_3) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$$

であることがわかる．$\mathcal{E}(F_4) = \overline{\bigcup_{0<t<5} \mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)}}$, $\mathcal{E}(F_5) = \overline{\bigcup_{t>5} \mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)}}$ であるので，次の補題が得られる．

補題 6.9.19. $0 < t \leqq 5$ のとき，$P = \Phi_4^{s0}(t:1:1:1) \in \mathbb{C}_1$ とおけば，

$$\mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

である．また，$t \geqq 5$ のときは，

$$\mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^{c} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$$

である．

証明. $t > 0$ に対して $P = \Phi_4^{s0}(t:1:1:1) \in C_1$ とおく．$t \geqq 5$ のときは $\overline{F_2}$ と $\overline{F_4}$ は点 P で接する．よって，$\mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^c + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$ である．$0 < t \leqq 5$ のときは，$\overline{F_2}$ と $\overline{F_5}$ が点 P で接する．よって，$\mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)} = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3)$ である． □

注意 6.9.20. (1) $0 < t < 1$ または $1 < t$ のとき，$\mathcal{L}^{s0}_{(t:1:1:1)} \subsetneqq \mathcal{L}^{s0+}_{(t:1:1:1)}$ である．

(2) $\Delta^2(Y^+)$ の 5 個の元 F_i $(i = 1, \ldots, 5)$ に対しては，どの $\mathcal{E}(F_i)$ も $\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}$ の面成分ではないことがわかった．

補題 6.9.21. $\Delta^1(Y^+)$ の 5 個の元については以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{E}\big((P_4P_5)\big) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり，これは $\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}$ の面成分ではない．

(2) $\mathcal{E}\big((P_3P_5)\big) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり，これは $\mathcal{P}^{s0+}_{4,4}$ の面成分ではない．

(3) $\mathcal{E}\big((P_3P_4)\big) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_0^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$ であり，これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分ではない．

(4) $\mathcal{E}(C_4) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leqq u \leqq 1} \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_u^c$ であり．これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分である．$f = s_0 + ps_1 + qs_2 + rs_2 \in \breve{\mathcal{H}}_{4,4}^{s0}$ と表示するとき $\mathcal{E}(C_4)$ の判別式は以下の通りである．

$$\mathrm{disc}_{C_4}(p,q,r) := -p^2 + 4q - 8, \quad (p \leqq -4)$$

(5) $\mathcal{E}(C_1) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \left(\bigcup_{0 \leqq t \leqq 5} \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^{ab} \cup \bigcup_{5 \leqq t \leqq \infty} \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^c \right)$ であり，これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分である．$\mathcal{E}(C_1)$ の判別式は以下の通りである．

$$\mathrm{disc}_{C_1}(p,q,r) := -9p^2 + 12p + 12q + 12r + 8, \quad (p \leqq -2/3)$$

証明.　(1) $\overline{F_1}$ と $\overline{F_3}$ は開線分 (P_4P_5) で接するので，$\mathcal{E}\big((P_4P_5)\big) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ である．

(2), (3) も (1) と同様にしてわかる．

(4) 前補題より，$\mathcal{E}(C_4) = \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leqq u \leqq 1} \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{g}_u^c$ がわかる．

$$\begin{aligned} &p = -6u(u^2+1)/(3u^2), \quad q = (u^4 + 4u^2 + 1)/u^2, \\ &r = 2(3u^4 + 3u^3 + 2u^2 + 3u + 3)/(3u^2) + v \end{aligned}$$

から u, v を消去すると $\mathrm{disc}_{C_4}(p,q,r) = 0$ が得られる．ここで，$0 < u \leqq 1$ のとき $p = -6u(u^2+1)/(3u^2) \leqq -4$ である．

(5) も (4) と同様にして証明できる．　□

補題 6.9.22.　$\Delta^0(Y^+)$ の 3 個の元については以下が成り立つ．

(1) $\mathcal{E}(P_5) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3$ であり，これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分であり，無限遠平面上にある．

(2) $\mathcal{E}(P_3) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_0^{ab} + \mathbb{R}_+ \cdot (s_2 - s_3) + \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2)$ であり，これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分で，平面 $V(2p+q+r+1)$ 上の領域である．

(3) $\mathcal{E}(P_4) = \mathbb{R}_+ \cdot (s_1 - 2s_2) + \mathbb{R}_+ \cdot s_3 + \bigcup_{0 \leqq t \leqq 5} \mathbb{R}_+ \cdot \mathfrak{f}_t^{ab}$ であり．これは $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分で，平面 $V(2p+q+2)$ 上の領域である．

証明. 簡単に証明できる． □

結局 $\Delta(Y^+)$ の元 D の中で $\mathcal{E}(D)$ が $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の面成分になるものは，$D = C_1, C_4, P_3, P_4, P_5$ の 5 個であり，

$$\partial \mathcal{P}_{4,4}^{s0+} = \mathcal{E}(C_1) \cup \mathcal{E}(C_4) \cup \mathcal{E}(P_3) \cup \mathcal{E}(P_4) \cup \mathcal{E}(P_5)$$

であることがわかった．

補題 6.9.23. $t \geqq 5$, $0 \leqq u \leqq 1$ のとき，$\mathfrak{f}_t^c$ と $\mathfrak{g}_u^c$ は $\mathcal{E}(F_4)$ に属する $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の単元である．$0 \leqq t \leqq 5$ のとき $\mathfrak{f}_t^{ab}$ は $\mathcal{E}(F_5)$ に属する $\mathcal{S}_{4,4}^{s0+}$ の単元である．また，$s_2 - s_3$, $s_1 - 2s_2$, s_3 も $\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の単元である．$\mathcal{P}_{4,4}^{s0+}$ の単元は，以上に述べた 5 種類の正の定数倍以外には存在しない．

証明. ここまでに述べた通りである． □

定理 6.9.12 の証明は，ちょっと議論の流れが分かりにくかったかもしれないが，以上で完了している． □

6.10. SOS 問題

6.10.1. 定理 1.3.10 の証明

n, $d \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\mathcal{P}_{n,2d} := \mathcal{P}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{n-1}, \mathcal{H}_{n,2d})$$
$$\Sigma_{n,2d} := \left\{ \sum_{i=1}^{r} g_i^2 \,\middle|\, r \in \mathbb{N}.\ g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{H}_{n,d} \right\}$$

とおく．$\Sigma_{n,2d}$ も閉凸錐であって，$\Sigma_{n,2d} \subset \mathcal{P}_{n,2d}$ である．定理 1.3.10 は以下のように言い替えられる．

定理 6.10.1. $\Sigma_{n,2d} = \mathcal{P}_{n,2d}$ が成り立つための必要十分条件は，$n \leqq 2$ または $d = 1$ または $(n, d) = (3, 2)$ である．

証明は長いので，段階を分けて行う．以下，$f(x_1,\ldots,x_n), g(x_1,\ldots,x_n)$ について，任意の $a_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して $f(a_1,\ldots,a_n) \geqq g(a_1,\ldots,a_n)$ が成り立つとき，単に $f \geqq g$ と書く．$f > g$ も同様．また，

命題 6.10.2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\Sigma_{n,2} = \mathcal{P}_{n,2}$ である．

証明. 初歩的な 2 次形式の定理であるが，一応証明を書いておく．

勝手な $f \in \mathcal{P}_{n,2}$ を取る．$f \in \Sigma_{n,2}$ を示せばよい．

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$(a_{ij} \in \mathbb{R})$ とおく．必要なら $(a_{ij}+a_{ji})/2$ を新たな a_{ij} とおくことにより，$a_{ji} = a_{ij}$ が成り立つと仮定してよい．a_{ij} を $(i,\,j)$-成分とする n 次正方行列を A とする．A は対称行列なので，ある実直行行列 P により対角化できる．$x_1,\ldots, x_n$ を縦に並べた列ベクトルに左から P^{-1} を掛けてできる $x_1,\ldots, x_n$ の 1 次式を上から順に $y_1,\ldots, y_n$ とする．$P^{-1}AP$ の対角成分を左上から順に $b_1,\ldots, b_n$ とすると，$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_iy_i^2$ である．$f \in \mathcal{P}_{n,2}$ だから $b_i \geqq 0$ $(i = 1,\ldots, n)$ である．そこで，$g_i = \sqrt{b_i}\,y_i$ とおけば，$f = g_1^2 + \cdots + g_n^2$ である． □

命題 6.10.3. $n \leqq 2$ ならば，任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $\Sigma_{n,2d} = \mathcal{P}_{n,2d}$ である．

証明. $\Sigma_{1,2d} = \mathcal{P}_{1,2d} = \left\{ax_1^{2d} \;\middle|\; a \geqq 0\right\}$ は自明なので，$n \geqq 2$ 場合を考える．

勝手な $f \in \mathcal{P}_{2,2d}$ を取る．$f \in \Sigma_{2,2d}$ を示せばよい．d に関する帰納法で証明する．$d = 1$ の場合は前命題．$d \geqq 2$ とする．

(1) $f(a,1) = 0$ を満たす $a \in \mathbb{R}$ が存在する場合．

$f(x,1) = (x-a)^r g_1(x)$ $(g_1(a) \neq 0)$ と書ける．もし r が奇数だと $x = a$ の前後で $f(x,1)$ の符号が変わるから r は偶数で $r = 2m$ と書ける．$g(x,y) = y^{2d-2m}g_1(x/y)$ とおくと $g(x,y) \in \mathcal{P}_{2,2d-2m}$ である．帰納法の仮

定から，$g(x,y) \in \Sigma_{2,d-m}$ で $g = h_1^2 + \cdots + h_r^2$ と書ける．よって，

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{r} \big((x-ay)^m h_i(x,y)\big)^2 \in \Sigma_{2,2d}$$

である．

(2) $f(a,1)=0$ を満たす $a \in \mathbb{R}$ が存在しない場合．

すると，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x,1) > 0$ である．$f(x,1)$ は多項式だから $\varepsilon := \min_{x\in\mathbb{R}} f(x,1)$ が存在し，$\varepsilon > 0$ である．$f_1(x,y) = f(x,y) - \varepsilon y^{2d}$ とおくと，$f_1(x,y) \in \mathcal{P}_{2,2d}$ である．$\min_{x\in\mathbb{R}} f_1(x,1) = 0$ だから，$f_1(a,1)=0$ を満たす $a \in \mathbb{R}$ が存在する．(1) の結果から $f_1 = h_1^2 + \cdots + h_r^2$ と書ける．$f = \left(\sqrt{\varepsilon}\, y^d\right)^2 + h_1^2 + \cdots + h_r^2$ である． □

補題 6.10.4. (Choi-Lam) $f(x,y,z) \in \mathcal{P}_{3,4}$ とする．すると，ある $0 \neq g(x,y,z) \in \mathcal{H}_{3,2}$ で，$f(x,y,z) - g(x,y,z)^2 \in \mathcal{P}_{3,4}$ を満たすものが存在する．

証明. もし，$f(x,y,z)$ が 2 変数以下の関数ならば前命題の場合だから，$f(x,y,z)$ には x, y, z がすべて現れると仮定する．

$V(f) := \left\{(a:b:c) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \;\middle|\; f(a,b,c)=0\right\}$ とおく．

(1) $V(f) = \phi$ の場合．

$h(x,y,z) := \dfrac{f(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ はコンパクト集合 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathbb{R}$-値連続関数なので，$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上で最小値 ε を取る．$h(x,y,z)$ は $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上で零点を持たないので，$\varepsilon > 0$ である．そこで，$g(x,y,z) = \sqrt{\varepsilon}(x^2+y^2+z^2)$ とおけばよい．

(2) $V(f) = \{P\}$ (1 点) の場合．

適当に $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ の射影変換 (座標変換) を行うことにより $P = (1:0:0)$ であると仮定してよい．もし f が x^4 の項 ax^4 $(a \neq 0)$ を持つと，$0 = f(1,0,0) = a$ となって矛盾するから，$\deg_x f(x,y,z) \leqq 3$ である．もし，f が $(ay+bz)x^3$ という項を持つと，適当に y, z を固定して $x \to \pm\infty$ とすると，f は正にも負にもなり得る．$\deg_x f = 1$ の場合も同様に排除できる．よって

$\deg_x f(x,y,z) = 2$ である．そこで，

$$f(x,y,z) = x^2 h_1(y,z) + 2xh_2(y,z) + h_3(y,z) \qquad ①$$

とおく．変形すると

$$fh_1 = (xh_1 + h_2)^2 + (h_1h_3 - h_2^2) \qquad ②$$

である．①の判別式を $D(y,z) := h_2(y,z)^2 - h_1(y,z)h_3(y,z)$ とおく．(y, z) を固定して fh_1 を x の 2 次関数と考えたとき，$f \geqq 0$ なので，①，②より，$h_1 \geqq 0,\ h_3 \geqq 0,\ D \leqq 0$ でなければならない．

(2-1) $(y,\ z) \neq (0,\ 0) \Longrightarrow h_1(y,z) \neq 0$ の場合．

$(y,\ z) \neq (0,\ 0)$ を固定したとき，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x,y,z) > 0$ なので，$D < 0$ である．$h(y,z) := -D(y,z)/h_1(y,z)^3$ はコンパクト集合 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ の実数値連続関数だから，その最小値を ε とおくと，

$\varepsilon > 0$ で，$h_1h_3 - h_2^2 \geqq \varepsilon h_1^3$ が成り立つ．すると，$fh_1 \geqq (xh_1)^2 + (h_1h_3 - h_2^2) \geqq \varepsilon h_1^3$ であるので，$f \geqq \varepsilon h_1^2$ となる．そこで，$g(x,y,z) = \sqrt{\varepsilon} h_1(y,z)$ とおけばよい．

り，結論を得る．

(2-2) ある $(y,\ z) \neq (0,\ 0)$ に対し $h_1(y,z) = 0$ となる場合．

h_1 は 2 次式だから，$h_1(y,z) = (c_1y + c_2z)^2\ (\exists c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$ と書ける．$(c_1y + c_2z)^2 h_3(y,z) - h_2(y,z)^2 = -D \geqq 0$ より，$(y,\ z)$ に $(c_2, -c_1)$ を代入すると，$-h_2(c_2, -c_1)^2 \geqq 0$ となり，$h_2(c_2, -c_1) = 0$ が得られ，$h_2(y,z) = (c_1y + c_2z)h_4(y,z)$ ($h_4(y,z)$ はある 2 次斉次多項式) と書ける．すると，②と $D \leqq 0$ より，

$$(c_1y + c_2z)^2 f = fh_1 \geqq (xh_1 + h_2)^2 = (c_1y + c_2z)^2 (x(c_1y + c_2z) + h_4)^2$$

となる．そこで，$g(x,y,z) = x(c_1y + c_2z) + h_4$ とおけばよい．

(3) $V(f)$ が 2 点以上を含むの場合．

適当に $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ の射影変換 (座標変換) を行うことにより $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0) \in V(f)$ であると仮定してよい．すると，(2) と同様な議論で $\deg_x f(x,y,z) = 0,\ \deg_y f(x,y,z) = 0$ となる．①のように表すとき，$\deg_y h_2(y,z) \geqq 2,\ \deg h_2(y,z) = 3$ だから $h_2(y,z)$ は z で割り切れ，

$\deg_y h_3(y,z) \geqq 2$, $\deg h_3(y,z) = 4$ だから $h_3(y,z)$ は z^2 で割り切れる．そこで，

$$f(x,y,z) = x^2 h_1(y,z) + 2xzh_5(y,z) + z^2 h_6(y,z) \qquad ③$$

と表す．これを変形すると，

$$f(x,y,z)h_1(y,z) = (xh_1 + zh_5)^2 + z^2(h_1h_6 - h_5^2) \qquad ④$$

となる．ここで，h_1, h_5, h_6 は 2 次斉次多項式で，$h_1h_6 - h_5 \geqq 0$ である．

もし，ある $(y,\, z) \neq (0,\, 0)$ に対し $h_1(y,z) = 0$ となる場合は，(2-2) と同様にして証明できる．もし，ある $(y,\, z) \neq (0,\, 0)$ に対し $h_6(y,z) = 0$ となる場合は，$fh_5 = (zh_5 + zh_4)^2 + x^2(h_1h_6 - h_5^2)$ と変形して考えれば，やはり (2-2) と同様にして証明できる．

残ったのは，任意の $(y,z) \neq (0,0)$ に対し $h_1(y,z) > 0$ かつ $h_6(y,z) > 0$ が成り立つ場合である．$D_2(y,z) := h_1(y,z)h_6(y,z) - h_5(y,z)^2$ とおく．

(3-1) $D_2(b,c) = 0$, $(b,\, c) \neq (0,\, 0)$ を満たす $b,\, c \in \mathbb{R}$ が存在する場合．

$a := -h_5(b,c)/h_6(b,c)$, $h_7(y,z) := h_1(y,z) + 2ah_5(y,z) + a^2h_6(y,z)$ とおき，

$$\begin{aligned} f_2(x,y,z) &:= f_2(x+az,y,z) \\ &= x^2h_1(y,z) + 2xz\big(h_5(y,z) + ah_1(y,z)\big) + z^2h_7(y,z) \end{aligned}$$

とおく．$h_7(b,c) = 0$ だから，上に述べた場合に帰着される．

(3-2) 任意の $(y,\, z) \neq (0,\, 0)$ に対して $D_2(y,z) \neq 0$ の場合．

任意の $(y,\, z) \neq (0,\, 0)$ に対して $D_2(y,z) > 0$ で，$D_2(y,z)$ は 4 次斉次多項式である．$\dfrac{D_2(y,z)}{(y^2+z^2)h_1(y,z)}$ の $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ における最小値を $\varepsilon > 0$ とおけば，

$$fh_1 \geqq z^2 D_2 \geqq \varepsilon z^2(y^2+z^2)h_1$$

だから，$f \geqq \varepsilon z^2(y^2+z^2) \geqq \varepsilon z^4$ が得られる．そこで，$g(x,y,z) = \sqrt{\varepsilon} z^2$ とおけばよい． □

定理 6.10.5. $\mathcal{P}_{3,4} = \Sigma_{3,4}$ である．

証明. 勝手な $0 \neq f \in \mathcal{P}_{3,4}$ を取る．$f \in \Sigma_{3,4}$ を示せばよい．$\mathcal{H}_{3,4}$ は有限次元ベクトル空間なので，有限個の $\mathcal{P}_{3,4}$ の端元 $f_1, \ldots, f_r$ をうまく選んで

$f = f_1 + \cdots + f_r$ と書ける．$f_i \in \Sigma_{3,4}$ $(\forall i = 1,\ldots, n)$ を示せば，$f \in \Sigma_{3,4}$ も示される．そこで，f は最初から $\mathcal{P}_{3,4}$ の端元であると仮定してよい．

前補題より，ある $0 \neq g \in \mathcal{H}_{3,2}$ で，$f - g^2 \in \mathcal{P}_{3,4}$ を満たすものが存在する．$h = f - g^2$ とおく．$f = g^2 + h$, $g^2, h \in \mathcal{P}_{3,4}$ で，f は $\mathcal{P}_{3,4}$ の端元なので，ある $0 \leqq a \leqq 1$ が存在して，$g^2 = af$, $h = (1-a)f$ と書ける．$g \neq 0$ だから $a \neq 0$ で，$a > 0$ である．すると $f = \left(g/\sqrt{a}\right)^2 \in \Sigma_{3,4}$ となる．$\square$

上の証明からわかるように，$\Sigma_{n,2d}$ の単元 f は，ある $g \in \mathcal{H}_{n,d}$ により $f = g^2$ と書ける．しかし，g^2 という形の元が $\Sigma_{n,2d}$ の端元になるとは限らない．例えは，$(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ は $\Sigma_{2,4}$ の端元ではない．

命題 6.10.6. (Choi-Lam)　「$n \geqq 4$ かつ $d \geqq 2$」または「$n \geqq 3$ かつ $d \geqq 6$」ならば $\mathcal{P}_{n,2d} \neq \Sigma_{n,2}$ である．

証明. (1) $\mathcal{P}_{4,4} \neq \Sigma_{4,4}$ を示す．$x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $w = x_4$ とし，

$$f(x,y,z,w) := w^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 4xwz$$

を考える．$n \geqq 4$ とする．AM-GM 不等式より $f \in \mathcal{P}_{n,4}$ である．$f \notin \Sigma_{n,4}$ を示そう．$f = f_1^2 + \cdots + f_r^2$ と書けたと仮定する．f は x^4, y^4, z^4 の項を含まないから，$f_1,\ldots, f_r$ は x^2, y^2, z^2 の項を含まない．f は x^2w^2, y^2w^2, z^2w^2 の項を含まないから，$f_1,\ldots, f_r$ は xw, yw, zw の項を含まない．よって，

$$f_i = c_{i1}xy + c_{i2}yz + c_{i3}xz + c_{i4}w^2 \quad (\exists c_{ij} \in \mathbb{R})$$

と書ける．よって，f_i^2 は $xyzw$ の項を持たない．これは矛盾である．

(2) $n \geqq 4$, $d \geqq 2$ のときは，上の f を用いると，$x^{2d-4}f \in \mathcal{P}_{n,d}$, $x^{2d-4}f \notin \Sigma_{n,d}$ となる．

(3) $\mathcal{P}_{3,6} \neq \Sigma_{3,6}$ を示す．

$$g(x,y,z) := z^6 + x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2$$

を考える．AM-GM 不等式より $g \in \mathcal{P}_{3,6}$ である．$g \notin \Sigma_{3,6}$ を示そう．$g = g_1^2 + \cdots + g_r^2$ と書けたと仮定する．g は x^6, y^6 の項を含まないから，

$g_1, \ldots, g_r$ は x^3, y^3 の項を含まない．g は x^4z^2, y^4z^2 の項を含まないから，$g_1, \ldots, g_r$ は x^2z, y^2z の項を含まない．さらに，g は x^2z^4, y^2z^4 の項を含まないから，$g_1, \ldots, g_r$ は xz^2, yz^2 の項を含まない．よって，

$$g_i = c_{i,1}xy^2 + c_{i,2}x^2y + c_{i,3}z^2 + c_{i,4}xyz \quad (\exists c_{i,j} \in \mathbb{R})$$

と書ける．$g = g_1^2 + \cdots + g_r^2$ の両辺の $x^2y^2z^2$ の係数を比較すると，$-3 = c_{1,4}^2 + c_{2,4}^2 + \cdots + c_{r,4} \geqq 4$ となり矛盾する．

(4) $n \geqq 3$, $d \geqq 3$ のときは，上の g を用いると，$x^{2d-6}g \in \mathcal{P}_{n,d}$, $x^{2d-6}g \notin \Sigma_{n,d}$ となる．　□

以上で，定理 6.10.1, すなわち定理 1.3.10 の証明が完了した．なお，上の命題の f は $\mathcal{P}_{4,4}$ の端元であり，g は $\mathcal{P}_{3,5}$ の端元であることが知られている．$V(f) = \{(1:0:0:0), (0:1:0:0), (0:0:1:0), (1:-1:-1:1), (-1:1:-1:1), (-1:-1:1:1), (1:1:1:1)\}$ であり，$V(g) = \{(1:0:0), (0:1:0), (1:1:1), (-1:1:1), (1:-1:1), (1:1:-1)\}$ である．