

(2018年3月10日版)

2018年3月10日に「補遺」を追加しました。正誤表の最後にあります。

p.27, 3行目 (第3刷で修正)

誤: が成り立つことを証明せよ。

正: が成り立つことを証明せよ。

p.29, 9行目 (第3刷で修正)

誤: $\angle I_A AC$ は $\triangle ABC$ の頂角 A の内角の二等分線だから,

正: $\angle I_A AC$ は $\triangle ABC$ の頂角 A の内角の半分だから,

p.41, 演習問題4の問4の2行目 (第3刷で修正)

誤: ABC の周上を1周した。

正: 三角形 ABC の周上を1周した。

p.66, 下から10行目 (第3刷で修正)

誤: $B_I B \perp I_B I_A$,

正: $B_I B \perp I_C I_A$,

p.104, 参考の1行目 (第3刷で修正)

誤: $Y = AP \cap BC$ とする

正: $Y = AQ \cap BC$ とする

p.104, 下から1~2行目 (第2刷で修正)

誤: 三角形には, 5心以外に, 上に述べたルモアール点をはじめ100種類近い「中心」がある。

正: 三角形には, 5心以外に, 上に述べたルモアール点をはじめ5000種類以上の「中心」がある。

(解説) インターネットで「Encyclopedia of Triangle Centers」をキーワードにして Clark Kimberling 氏のホームページを検索して下さい。この中心のリストを眺めていて, 取り上げるべき中心がまだ沢山あったかな, と反省しています。彼の中心のリストを解説するには, 三角形座標, 重心座標の説明から書き起こして, かなりの量の本格的な追加説明が必要です。なお, p.104の参考に書いてあるのが, 三角形座標の簡単な説明です。

p.104, 下から 10 行目 (第 3 刷で修正)

誤: $ax\overrightarrow{AP} + by\overrightarrow{BP} + cz\overrightarrow{AP} = \mathbf{0}$

正: $ax\overrightarrow{AP} + by\overrightarrow{BP} + cz\overrightarrow{CP} = \mathbf{0}$

p.106, 図 5 の次の行 (第 3 刷で修正)

誤: $f(P) = |BP| + |AP| + |CP| = |BP| + |PQ| + |QB'| \geq |AB'|$

正: $f(P) = |BP| + |AP| + |CP| = |BP| + |PQ| + |QB'| \geq |BB'|$

p.109, 下から 4 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\frac{a+b+c}{3}$ で $\triangle ABC$ の座標と一致する。

正: $\frac{a+b+c}{3}$ で $\triangle ABC$ の重心の座標と一致する。

p.109, 最後の 2 行 (第 2 刷で修正)

誤: $\triangle N_1N_2N_3$ の重心が $\triangle ABC$ の座標と一致するすることも同様にしてわかる。

正: $\triangle N_1N_2N_3$ の重心の座標が $\triangle ABC$ の重心の座標と一致するすることも同様にしてわかる。

p.112, 図の下から数えて 10 行目 (第 3 刷で修正)

誤: $z = |A\Omega|$ とおくと,

正: $z = |C\Omega|$ とおくと,

p.113 の最後の図の上 5 行目 ~ p.114 の 1 行目

間違いとともに無駄 (不要) な議論がありました。

誤:

$\angle TSA = \angle CBA \leq 60^\circ$ であったから, 余弦定理により,

$$\begin{aligned} |DS|^2 &= |AS'|^2 = |AS|^2 + |SS'|^2 - 2|AS| \cdot |SS'| \cos \angle TSA \\ &\leq |AS|^2 + |SS'|^2 - |AS| \cdot |SS'| = x^2 + (2x)^2 - x \cdot (2x) = 3x^2 \end{aligned}$$

である。再び, 余弦定理より,

$$\cos \angle TSD = \frac{|DS|^2 + |SS'|^2 - |DS'|^2}{2|DS| \cdot |SS'|} \geq \frac{x^2 + (2x)^2 - 3x^2}{2x \cdot (2x)} = \frac{1}{2}$$

正:

余弦定理および相加平均と相乗平均の不等式より,

$$\cos \angle TSD = \frac{|DS|^2 + |SS'|^2 - |DS'|^2}{2|DS| \cdot |SS'|} = \frac{3x^2 + |DS|^2}{4x \cdot |DS|}$$

$$\geq \frac{2\sqrt{3x^2 \cdot |DS|^2}}{4x \cdot |DS|} = \frac{2\sqrt{3}x \cdot |DS|}{4x \cdot |DS|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

p.114, 下から 7 行目 (第 3 刷で修正)

誤: ルモワーヌ円

正: ルモアーヌ円

p.125, 図 2 の直前の行, 定理 11.4 の 2 行目 (第 3 刷で修正)

誤: 点 D から, 直線 AB, BC, CA に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F, G とおく.

正: 点 D から, 直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F, G とおく.

p.150, 下から 8 行目 (第 3 刷で修正)

誤: $\angle XYA = \angle XYB = \angle XYC$

正: $\angle XYA = \angle XYB = \angle XYC$

p.153, 下から 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 同様に, $\angle CAD = 180^\circ - B$ より,

正: 同様に, $\angle CAD = B$ より,

p.181, 演習問題 17 の問 3 . (第 2 刷で修正)

誤: 直線 AB に関して対称な 2 点 X, Y で,

正: この円周上であって, 直線 AB に関して対称な 2 点 X, Y で,

p.191, 演習問題 17 の問 1 の解答の 2 行目 (第 3 刷で修正)

誤: (図 1).

正: (図 3).

補遺

第 20 ~ 22 章を「補遺」として書いてみました。第 19 章までと異なり、大学初年級の知識が必要になります。証明を理解するために、数学科の 3 ~ 4 年程度の知識が必要な部分が一部あります。あまり、きちんと校正していないので、誤植等に注意してご利用下さい。この部分を将来「第 2 版」等として出版する計画はありません。

第 20 章

三線座標

20.1. 三線座標と重心座標

$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ であるような 3 つの実数の連比 $(x : y : z)$ を考える . 例えば , $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6) = (-3 : -6 : -9)$ というように , ある実数 λ が存在して , $x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z$ であるとき , $(x' : y' : z') = (x : y : z)$ と考える . このような連比 $(x : y : z)$ 全体の集合を実射影平面といい $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ で表すが , 以後 , 射影平面についての深い知識は必要としない .

以下 , 第 20 章以降 , 特に断らない限り , 平面上に三角形 ABC が与えられていて , $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$ とする . また , A, B, C は内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさ , $S = \text{Area}(ABC)$ とする . $R, r, r_a, A_m, A_i, A_e, A_h$ 等の記号も , 第 1 ~ 10 章に登場したものとするが , r は内接円の半径ではなく一般的な変数にも用いられる . 第 1 ~ 10 章の内容が理解できれいば , 混乱することはないであろう .

定義 20.1. 平面上に三角形 ABC が与えられているとする . 点 P から直線 BC, CA, AB までの符号付き距離を $H_a(P), H_b(P), H_c(P)$ とする . ここで , 例えば , 点 P から直線 BC までの符号付き距離とは , 点 P と A が BC に関して同じ側にあるとき + (正) , 反対側にあるとき - (負) として符号を付けた距離である . 実数 p, q, r が $(p : q : r) = (H_a(P) : H_b(P) : H_c(P))$ を満たすとき , 点 P の座標を $(p : q : r)_t$ で表わし , 点 P の三線座標 (trilinear coordinate) とか三角形座標という . また , $(H_a(P), H_b(P), H_c(P))_t$ を絶対三線座標という . ある関数 $f(s, t, u)$ によって点 P の三線座標が

$$(f(s, t, u) : f(t, u, s) : f(u, s, t))_t$$

と表わされるとき , 点 P は三角形中心関数 (triangle center function) $f(s, t, u)$ で定まる点であるという . 他方 ,

$$x\vec{PA} + y\vec{PB} + z\vec{PC} = \vec{0} \quad \text{①}$$

を満たす実数の組 $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ が存在するとき, これを $(x : y : z)_b$ で表わし, 点 P の重心座標 (barycentric coordinate) という. A, B, C, P の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}$ とするとき, $x + y + z \neq 0$ であれば, ①は

$$\mathbf{p} = \frac{x}{x+y+z}\mathbf{a} + \frac{y}{x+y+z}\mathbf{b} + \frac{z}{x+y+z}\mathbf{c} \quad \textcircled{2}$$

と同値である.

重心座標 $(x : y : z)_b$ が $x + y + z = S$ を満たすとき, これを $(x, y, z)_a$ と書き, 面積座標 (areal coordinate) という.

重心座標を用いても, 三線座標を用いても, 点 A, B, C の座標はそれぞれ $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ である.

また, 三角形 ABC と同一平面上にある 3 点 P, Q, R が $t\overrightarrow{PR} = s\overrightarrow{RQ}$ を満たすとき (例えば, R が線分 PQ を $s : t$ に内分する点であるとき),

$$H_a(R) = \frac{t}{s+t}H_a(P) + \frac{s}{s+t}H_a(Q)$$

が成り立つことに注意する.

定理 20.2. (1) 三角形 ABC の 3 辺の長さを $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$ とするとき, 点 P の三線座標が $(p : q : r)_t$ ならば P の重心座標は $(ap : bq : cr)_b$ である. つまり,

$$(p : q : r)_t = (ap : bq : cr)_b$$

逆に, 点 P の重心座標が $(x : y : z)_b$ ならば P の三線座標は $(x/a : y/b : z/c)_t$ である. また,

$$(x : y : z)_b = (\text{Area}(\triangle PBC), \text{Area}(\triangle PCA), \text{Area}(\triangle PAB))_a$$

である.

(2) 点 P の三線座標が $(p : q : r)_t$ ならば, $S = \text{Area}(\triangle ABC)$ として,

$$H_a(P) = \frac{2pS}{pa + qb + rc}$$

である.

(3) さらに, 3 頂点 A, B, C の直交座標が $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ であつて, 点 P の重心座標が $(x : y : z)_b$ であるとき, P の直交座標 (p_1, p_2) は

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{xa_1 + yb_1 + zc_1}{x + y + z}, \frac{xa_2 + yb_2 + zc_2}{x + y + z} \right)$$

である.

証明. (1) $Q = AP \cap BC$ とおき, 点 A, B, C, Q の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{q}$ とすると, $\mathbf{q} = t\mathbf{b} + (1-t)\mathbf{c}$ ($\exists t \in \mathbb{R}$) と書ける. また, P は直線 AQ 上の点だから, その位置ベクトルは

$$\mathbf{p} = x\mathbf{a} + (1-x)\mathbf{q} = x\mathbf{a} + t(1-x)\mathbf{b} + (1-t)(1-x)\mathbf{c} \quad (\exists x \in \mathbb{R})$$

と書ける. $y := t(1-x), z := (1-t)(1-x)$ とおくと, $x+y+z=1$ で, 点 P の重心座標は $(x:y:z)_b$ である. また, 辺 BC として三角形の面積を考えると, $Area(\triangle PBC) = xS$ である. これより,

$$(x:y:z)_b = (Area(\triangle PBC), Area(\triangle PCA), Area(\triangle PAB))_a$$

が得られる.

$p = H_a(P), q = H_b(P), r = H_c(P)$ とするとき, 点 P の三線座標は $(p:q:r)_t$ である. また $Area(\triangle PBC) = \frac{ap}{2}$ である. よって, $(x:y:z) = (ap: bq: cr)$ である.

(2) は面積を考えれば簡単.

(3) は (1) の証明からすぐわかる. □

命題 20.3. AP は BC と平行でないとする. P の三線座標を $(p:q:r)_t$, 重心座標を $(x:y:z)_b$ とする. $Q = AP \cap BC$ とするとき, Q の三線座標と重心座標は

$$Q = (0:q:r)_t = (0:y:z)_b$$

である.

証明. 前定理の証明より, 前定理の証明内の記号を用いて,

$$y:z = t(1-x):(1-t)(1-x) = t:(1-t) = QC:BQ$$

である. ここで, QC, BQ は符号付き距離である. □

20.2. 直線の方程式

定理 20.4. 三角形 ABC と同じ平面上に定点 $P \neq Q$ と動点 X がある.

(1) P, Q, X の三線座標を $(p_x:p_y:p_z)_t, (q_x:q_y:q_z)_t, (x:y:z)_t$ とする. このとき, 点 X が直線 PQ 上にあるための必要十分条件は,

$$\begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことである. 上の方程式を, 三線座標による直線 PQ の方程式という.

(2) P, Q, X の重心座標を $(a_1 : b_1 : c_1)_b, (a_2 : b_2 : c_2)_b, (x : y : z)_b$ とする .
 このとき , 点 X が直線 PQ 上にあるための必要十分条件は ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことである . 上の方程式を , 重心座標による直線 PQ の方程式という .

証明. (2) を示す . A, B, C, P, Q の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ とする .
 $a'_i = \frac{a_i}{a_i + b_i + c_i}$ 等とおけば ,

$$\mathbf{p} = a'_1 \mathbf{a} + b'_1 \mathbf{b} + c'_1 \mathbf{c}, \quad \mathbf{q} = a'_2 \mathbf{a} + b'_2 \mathbf{b} + c'_2 \mathbf{c}$$

である . 点 X の位置ベクトル \mathbf{x} は , ある $t \in \mathbb{R}$ により , $\mathbf{x} = (1-t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ と書ける . そこで ,

$$x = (1-t)a'_1 + ta'_2, \quad y = (1-t)b'_1 + tb'_2, \quad z = (1-t)c'_1 + tc'_2$$

から t を消去すると , 求める直線の方程式を得る .

(1) は (2) の結果と定理 20.2 より得られる . □

定理 20.5. 面積座標が $P = (x_1, y_1, z_1)_a, Q = (x_2, y_2, z_2)_a, R = (x_3, y_3, z_3)_a$ である 3 点を頂点とする三角形 PQR の符号付面積 S' は ,

$$S' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot S$$

である . ここで $S = \text{Area}(\triangle ABC)$ である .

証明. 元の三角形 ABC の 3 頂点の直交座標を $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ とし , 三角形 PQR の 3 頂点の直交座標を $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2)$ とする .
 すると ,

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ . 両辺の行列式をとり $1/2$ 倍すれば結論を得る . □

証明の自動化. 三角形 ABC を用いた三線座標 (あるいは重心座標) で表わされた n 個かの点 P_1, \dots, P_n が与えられたとする . 上で述べたことを応用すれば , 以下のことを数式処理ソフト上で動くプログラムによって自動的に判別することは容易である .

- (1) P_1, \dots, P_n の中に同一直線上にある相異なる 3 点は存在するかどうか .
- (2) P_1, \dots, P_n の中に同一円周上にある相異なる 4 点は存在するかどうか .
- (3) P_1, \dots, P_n のから相異なる 6 点 Q_1, \dots, Q_6 を選んだとき , 3 直線 Q_1Q_2, Q_3Q_4, Q_5Q_6 は同一の点で交わるかどうか .

もちろん , (3) をもっと一般化して , 円と直線の関係で考えることもできる . 上のアルゴリズムで検証された結果は , 数学の正しい証明として通用する . このことにより , 三角形に関する初等幾何の定理のほとんどの定理は , コンピュータにより自動証明することができる . また , 未知の定理が容易に発見できる . Kimberling の 1 万 5 千個 (2017 年 11 月時点) 以上の三角形の中心のリストには , 上の方法 (n を 1 万 5 千以上の数として実行している) で発見された膨大な数の定理が併記されている . ただ , 伝統的なユークリッド幾何の証明の醍醐味はなくなって , ある意味で , 無味乾燥なものになってしまっている .

20.3. 5 心の三線座標

定理 20.6. 三角形 ABC の内心 I , 傍心 I_A , 外心 O , 重心 G , 垂心 H の三線座標と重心座標は以下の通りである . ここで , $S = Area(\triangle ABC)$, R, r は外接円 , 内接円の半径で , r_a は辺 BC に接する傍接円の半径である .

$$G = \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right)_t = (1 : 1 : 1)_b, \quad H_a(G) = \frac{2S}{3a}$$

$$I = (1 : 1 : 1)_t = (a : b : c)_b, \quad H_a(I) = r$$

$$I_A = (-1 : 1 : 1)_t = (-a : b : c)_b$$

$$H_a(I_A) = -r_a, \quad H_b(I_A) = H_c(I_A) = r_a$$

$$O = (\cos A : \cos B : \cos C)_t = (\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C)_b$$

$$H_a(O) = R \cos A$$

$$H = (\sec A : \sec B : \sec C)_t = (\tan A : \tan B : \tan C)_b$$

$$H_a(H) = 2R \cos B \cos C$$

証明. まず , 一般に $H_a(P)$ 等を求めれば , P の三線座標は求まり , 定理 20.2 を利用して重心座標も得られることに注意しておく .

$|AG| : |GA_m| = 2 : 1$ なので , $H_a(G) = 2S/3a$ である . $H_a(I) = r$, $H_a(I_A) = -r_a$, $H_b(I_A) = H_c(I_A) = r_a$, $H_a(O) = R \cos A$ は自明 .

外心の重心座標については , 円周角と中心角の関係 $\angle COB = 2A$ より , $Area(\triangle OBC) = (1/2)R^2 \sin 2A$ であることからわかる .

垂心について . 例題 6.1 より $\triangle HBC$ の内接円の半径は R である . 定理 3.2

を用いると,

$$\begin{aligned} \text{Area}(\triangle HBC) &= 2R^2 \sin \angle CHB \sin \angle BCH \sin \angle HBC \\ &= 2R^2 \sin(180^\circ - A) \sin(90^\circ - B) \sin(90^\circ - C) \\ &= (2R^2 \cos A \cos B \cos C) \tan A \end{aligned}$$

である. これより, 重心座標が得られる. また, 符号付き長さ・面積の意味で, $a = 2R \sin A$ を用いて,

$$H_a(H) = \frac{2\text{Area}(\triangle HBC)}{a} = \frac{2R^2 \sin A \cos B \cos C}{2R \sin A} = 2R \cos B \cos C$$

である. 三線座標のほうは, $\frac{\tan A}{a} = \frac{\sin A}{a} \cdot \frac{1}{\cos A} = \frac{\sec A}{2R}$ よりわかる. \square

20.4. 等角共役点と等距離共役点の座標

定理 20.7. 三角形において, 以下が成り立つ.

(1) 点 P の三線座標が $(x : y : z)_t$ のとき, P の等角共役点 Q の三線座標は

$$(yz : zx : xy)_t = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right)_t$$

である.

(2) P の重心座標が $(x : y : z)_b$ のとき, P の等距離共役点 Q の重心座標は

$$(yz : zx : xy)_b = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \right)_b$$

である.

証明. (1) $X = AP \cap BC$, $Y = AQ \cap BC$ とする. また, Q の三線座標を $(x' : y' : z')_t$ とすると, 命題 20.3 より

$$y : z = \frac{XC}{b} : \frac{BX}{c}, \quad y' : z' = \frac{YC}{b} : \frac{BY}{c}$$

である. 正弦定理より,

$$\frac{BY}{AY} \sin B = \sin \angle BAY = \sin \angle XAC = \frac{XC}{AX} \sin C$$

であり, $\frac{AX}{AY} = \frac{XC}{BY} \cdot \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{XC}{BY} \cdot \frac{c}{b}$ が得られる. 同様に,

$$\frac{AX}{AY} = \frac{BX}{YC} \cdot \frac{b}{c}$$

が得られる．これらより，

$$z' : y' = \frac{BY}{c} : \frac{YC}{b} = \frac{XC}{b} : \frac{BX}{c} = y : z = \frac{1}{z} : \frac{1}{y}$$

が得られる．同様に $x' : y' = y : x = 1/x : 1/y$ なので結論を得る．

(2) 命題 20.3 よりすぐわかる．

□

上の定理より，ルモアーヌ点の三線座標は $(a : b : c)_t$ である．

20.5. 調和共役点の座標

定理 20.8. (Kimberling 1994) $p, q \in \mathbb{R}$ は定数とする．すると，三角形 ABC に関する三線座標が，

$$P = (s : t : u)_t$$

$$Q = (x : y : z)_t$$

$$R = ((ps + qx) : (pt + qy) : (pu + qz))_t$$

$$S = ((ps - qx) : (pt - qy) : (pu - qz))_t$$

である 4 点 (P, Q; R, S) は調和点列をなす．

証明. 定理 20.2 より，重心座標が $(as : bt : cu)_b$, $(ax : by : cz)_b$, $((aps + aqx) : (bpt + bqy) : (cpu + cqz))_b$, $((aps - aqx) : (bpt - bqy) : (cpu - cqz))_b$ である 4 点が調和共役点であることを示せばよい． $s' = as$, $x' = ax$, $p' = p/(p + s)$ 等を考えることにより，面積座標が $\mathbf{s} = (s, t, u)_a$, $\mathbf{x} = (x, y, z)_a$, $\frac{p}{p+q}\mathbf{s} + \frac{q}{p+q}\mathbf{x}$, $\frac{p}{p-q}\mathbf{s} - \frac{q}{p-q}\mathbf{x}$ である 4 点が調和共役点であることを示せばよい．三角形座標なので，R は PQ を $p : q$ に内分する点，S は PQ を $p : (-q)$ に内分する点 ($p : q$ に外分する点) である．有向線分の符号付き長さを PR 等で表わせば， $\frac{RP}{RQ} = -\frac{p}{q}$, $\frac{SP}{SQ} = \frac{p}{q}$ であり， $\frac{RP}{RQ} \cdot \frac{SQ}{SP} = -1$ が成り立つ．よって， $\frac{PR}{PS} \cdot \frac{QS}{QR} = -1$ であり，(P, Q; R, S) は調和列点である．

□

20.6. ジェルゴンヌ点とナーゲル点の座標

定理 20.9. ジェルゴンヌ点 G_e , ナーゲル点 N の三線座標と重心座標は以下の通りである．

$$G_e = \left(\frac{bc}{b+c-a} : \frac{ca}{c+a-b} : \frac{ab}{a+b-c} \right)_t$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c} \right)_b \\
N &= \left(\frac{b+c-a}{a} : \frac{c+a-b}{b} : \frac{a+b-c}{c} \right)_t \\
&= ((b+c-a) : (c+a-b) : (a+b-c))_b
\end{aligned}$$

証明. 三角形 ABC の内接円と BC, CA, AB との接点を, それぞれ A_i , B_i , C_i とする. 定理 3.4 の証明で述べたように $|AB_i| = |AC_i| = s - a$, $|BC_i| = |BA_i| = s - b$, $|CA_i| = |CB_i| = s - c$ である. 三角形 ABA_i と直線 CC_i にメネラウスの定理を適用すると,

$$1 = \frac{|A_i G_e|}{|G_e A|} \cdot \frac{|AC_i|}{|C_i B|} \cdot \frac{|BC|}{|CA_i|} = \frac{|A_i G_e|}{|G_e A|} \cdot \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{a}{s-c}$$

なので, $\frac{|A_i G_e|}{|G_e A|} = \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a)}$ である. よって,

$$\begin{aligned}
Area(\triangle G_e BC) &= \frac{|A_i G_e|}{|A_i G_e| + |G_e A|} S \\
&= \frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c) + a(s-a)} S \\
&= (s-b)(s-c) \cdot \frac{4S}{2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)}
\end{aligned}$$

である. $\triangle G_e CA$, $\triangle G_e AB$ に対しても a, b, c を巡回した等式が成り立つ. よって, G_e の三線座標は,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{Area(\triangle G_e BC)}{a} : \frac{Area(\triangle G_e CA)}{b} : \frac{Area(\triangle G_e AB)}{c} \right)_t \\
&= \left(\frac{(s-b)(s-c)}{a} : \frac{(s-c)(s-a)}{b} : \frac{(s-a)(s-b)}{c} \right)_t \\
&= \left(\frac{bc}{s-a} : \frac{ca}{s-b} : \frac{ab}{s-c} \right)_t \\
&= \left(\frac{bc}{b+c-a} : \frac{ca}{c+a-b} : \frac{ab}{a+b-c} \right)_t
\end{aligned}$$

である. ナーゲル点はジェルゴン 又点の等距離共役点なので, 定理 20.7 より ナーゲル点の重心座標が得られ, 定理 20.2 より三線座標が得られる. \square

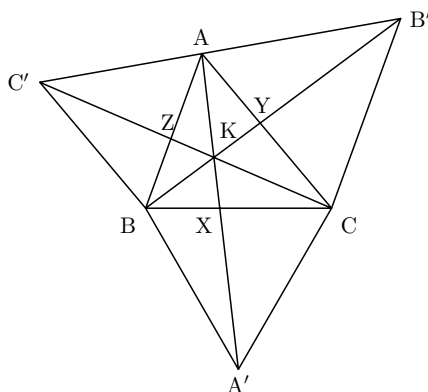
20.7. キーペルト点の座標

定理 20.10. 定理 10.5 で定義したキーペルト点 $K = P(\theta)$ の三線座標は,

$$P(\theta) = \left(\frac{1}{\sin(A + \theta)} : \frac{1}{\sin(B + \theta)} : \frac{1}{\sin(C + \theta)} \right)_t \quad ①$$

である.

証明. 定理 10.5 の証明と同じ記号を用いる (下図参照).



点 A' から直線 BC , CA , AB に下ろした垂線の長さをそれぞれ h_1, h_2, h_3 とすると, $2|A'C| \cos \theta = a$ 等に注意して,

$$h_1 = \frac{1}{2} a \tan \theta = \frac{a \sin \theta}{2 \cos \theta}$$

$$h_2 = \frac{2 \text{Area}(\triangle A'CA)}{|AC|} = \frac{|AC| \cdot |A'C| \sin \angle ACA'}{|AC|} = \frac{a \sin(C + \theta)}{2 \cos \theta}$$

$$h_3 = \frac{2 \text{Area}(\triangle A'AB)}{|AB|} = \frac{|AB| \cdot |A'B| \sin \angle A'BA}{|AB|} = \frac{a \sin(B + \theta)}{2 \cos \theta}$$

である. よって, A' の三線座標は

$$(-h_1 : h_2 : h_3)_t = (-\sin \theta : \sin(C + \theta) : \sin(B + \theta))_t$$

であることがわかる. A の三線座標は $(1 : 0 : 0)_t$ なので, 定理 20.4 より, 直線 AA' の三線座標 $(x : y : z)_t$ による方程式は,

$$y \sin(B + \theta) = z \sin(C + \theta) \quad ②$$

である. 同様に, 直線 BB' の方程式は

$$x \sin(Z + \theta) = z \sin(C + \theta) \quad ③$$

なので②③より, $K = AA' \cap BB'$ の三線座標は①のようになる. \square

定理 10.5 の直後 (定理 10.6 の直前) に, 証明なしで述べた以下の定理を証明する.

定理 20.11. 三角形 ABC のどの 2 辺の長さも等しくないと仮定する. θ が $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ 上を動くとき, キーペルト点 $P(\theta)$ の軌跡は (無限遠点は $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ 上で解釈して) 直角双曲線になる. この双曲線をキーペルト双曲線といった. キーペルト双曲線の三線座標 $(x : y : z)_t$ による方程式は

$$\frac{bc(b^2 - c^2)}{x} + \frac{ca(c^2 - a^2)}{y} + \frac{ab(a^2 - b^2)}{z} = 0$$

である.

証明. まず,

$$\begin{aligned} & \sum_{cyclic} \sin(B - C) \sin(A + \theta) \\ &= \cos \theta \sum_{cyclic} (\sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C) \\ & \quad + \sin \theta \sum_{cyclic} (\cos A \sin B \cos C - \cos A \cos B \sin C) \\ &= \cos \theta \times 0 + \sin \theta \times 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから, $P(\theta)$ の三線座標を

$$(s : t : u)_t = \left(\frac{1}{\sin(A + \theta)} : \frac{1}{\sin(B + \theta)} : \frac{1}{\sin(C + \theta)} \right)_t$$

とおくと, $(s : t : u)_t$ は

$$\frac{\sin(B - C)}{s} + \frac{\sin(C - A)}{t} + \frac{\sin(A - B)}{u} = 0$$

を満たす. ここで,

$$\begin{aligned} \sin(B - C) &= \sin B \cos C - \cos B \sin C \\ &= \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{c}{2R} \\ &= \frac{bc(b^2 - c^2)}{2Rabc} \end{aligned}$$

を用いると,

$$\frac{bc(b^2 - c^2)}{s} + \frac{ca(c^2 - a^2)}{t} + \frac{ab(a^2 - b^2)}{u} = 0 \quad \textcircled{1}$$

とも書き換えられる．

$A, B, C, P(\theta)$ の直交座標を $(a_x, a_y), (b_x, b_y), (c_x, c_y), (x, y)$ とおいて，上の方程式を直交座標で書き直す． $(s : t : u)_t$ は適当に定数倍して， s, t, u がそれぞれ，点 A から直線 BC までの距離，点 B から直線 CA までの距離，点 C から直線 AB までの距離であると仮定してよい．点と直線の距離の公式（符号付きで考える），あるいは三角形の面積の公式より，

$$s = \frac{(c_y - b_y)(x - b_x) - (c_x - b_x)(y - b_y)}{a}$$

等が成り立つ．これを ① に代入して両辺を abc で割ると，

$$\sum_{cyclic} \frac{b^2 - c^2}{(c_y - b_y)(x - b_x) - (c_x - b_x)(y - b_y)} = 0$$

が得られる．この分数式を通分して，分子を

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + G = 0$$

の形に表す．これが直交双曲線を表すための必要十分条件は $A + C = 0$ が成り立つことなので， A, C のみを計算する．Mathematica を使って計算すると，

$$A = \sum_{cyclic} a^2(b_y - c_y)(b_y + c_y - 2a_y)$$

$$C = \sum_{cyclic} a^2(b_x - c_x)(b_x + c_x - 2a_x)$$

となる．ここで， $a^2 = (b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2$ 等を用いると，

$$\begin{aligned} & A + C \\ &= \sum_{cyclic} a^2((b_x - c_x)(b_x + c_x - 2a_x) + (b_y - c_y)(b_y + c_y - 2a_y)) \\ &= \sum_{cyclic} ((b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2) \\ &\quad \times ((b_x - c_x)(b_x + c_x - 2a_x) + (b_y - c_y)(b_y + c_y - 2a_y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．この部分の計算は Mathematica を用いた． □

20.8. シュピーカー中心

定義 20.12. 三角形 ABC の中点三角形 $A_m B_m C_m$ の内接円をシュピーカー円といい，その中心をシュピーカー中心 (Spieker center) という．

定理 20.13. シュピーカー中心 S の三線座標と重心座標は以下の通りである .

$$\begin{aligned} S &= (bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b))_t \\ &= ((b+c) : (c+a) : (a+b))_b \end{aligned}$$

証明. シュピーカー中心 S から BC, CA, AB に下ろした垂線の足を D, E, F とし, S から $B_m C_m, C_m A_m, A_m B_m$ に下ろした垂線の足を D', E', F' とする . $BC \parallel B_m C_m, CA \parallel C_m A_m, AB \parallel A_m B_m$ であるから 3 点の組 $\{D, D', S\}, \{E, E', S\}, \{F, F', S\}$ はそれぞれ一直線上にある .

$\triangle ABC$ の面積を S , その内接円の半径を r とし, $\triangle A_m B_m C_m$ の内接円の半径を r' とする . $r' = \frac{r}{2} = \frac{S}{a+b+c}$ なので, S の三線座標は

$$\begin{aligned} & (|(DD'| - r') : (|EE'| - r') : (|FF'| - r'))_t \\ &= \left(\left(\frac{S}{a} - \frac{S}{a+b+c} \right) : \left(\frac{S}{b} - \frac{S}{a+b+c} \right) : \left(\frac{S}{c} - \frac{S}{a+b+c} \right) \right)_t \\ &= (bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b))_t \end{aligned}$$

となる . 重心座標は定理 20.2 から得られる . □

定理 20.14. シュピーカー中心はキーペルト双曲線上にある .

証明. 定理 20.11 より, 三線座標 $(s : t : u)_t$ の点がキーペルト双曲線上にあるための必要十分条件は,

$$\frac{bc(b^2 - c^2)}{s} + \frac{ca(c^2 - a^2)}{t} + \frac{ab(a^2 - b^2)}{u} = 0$$

が成り立つことである . シュピーカー中心 $(s : t : u)_t = (bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b))_t$ はこの関係式を満たすので, シュピーカー中心はキーペルト双曲線上にある . □

Kinbering 氏の記号 $X(n)$ を用いると, キーペルト双曲線上には以下の点ものっている .

- (1) $P(-60^\circ)$ は第 2 等角中心 $X(14)$ である .
- (2) $P(-30^\circ)$ は第 2 ナボレオン点 $X(18)$ である .
- (3) $P(45^\circ)$ は Vecten Point $X(485)$ である .
- (4) $P(-45^\circ)$ は Inner Vecten Point $X(486)$ である .
- (5) ω をプロカル角 (定理 10.8 参照) とするとき, $P(-\omega)$ は第 3 プロカル点 $X(76)$ である .
- (6) $P(\omega)$ はプロカル中点 $X(39)$ の等角共役点 $X(83)$ である .

- (7) $P(\omega + 90^\circ)$ は Tarry point $X(98)$ である .
 (8) $X(386)$ はキープルト双曲線上にある .

— 演習問題 20 —

1. 三角形 ABC の内心は中点三角形のナーゲル点と一致することを証明せよ .

証明. 三角形 ABC の重心を原点として座標系を設定したときの, 点 A, B, C の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とする . 位置ベクトルが $-2\mathbf{a}, -2\mathbf{b}, -2\mathbf{c}$ である点を A_0, B_0, C_0 とする . $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ なので, 三角形 ABC は三角形 $A_0B_0C_0$ の中点三角形である . 定理 20.8 より, 三角形 ABC のナーゲル点の位置ベクトル \mathbf{n} は,

$$\mathbf{n} = \frac{b+c-a}{a+b+c}\mathbf{a} + \frac{c+a-b}{a+b+c}\mathbf{b} + \frac{a+b-c}{a+b+c}\mathbf{c} = \frac{2(c-a)}{a+b+c}\mathbf{a} + \frac{2(c-b)}{a+b+c}\mathbf{b}$$

である . 他方, 定理 20.6 より, 三角形 $A_0B_0C_0$ の内心の位置ベクトルは,

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{2a+2b+2c}(-2\mathbf{a}) + \frac{2b}{2a+2b+2c}(-2\mathbf{b}) + \frac{2c}{2a+2b+2c}(-2\mathbf{c}) \\ &= \frac{2(c-a)}{a+b+c}\mathbf{a} + \frac{2(c-b)}{a+b+c}\mathbf{b} \end{aligned}$$

となり, これは \mathbf{n} と一致する . \square

2. 三角形 ABC の内心 I , 重心 G , ナーゲル点 N は同一直線上にあり, $|IG| : |GN| = 1 : 2$ であることを証明せよ .

証明. 前の問の解答の通りの設定で, $\mathbf{n} = \frac{2(c-a)}{a+b+c}\mathbf{a} + \frac{2(c-b)}{a+b+c}\mathbf{b}$ を利用する . 前の問と同様な計算で, 内心 I の位置座標 \mathbf{i} は, $\mathbf{i} = \frac{a-c}{a+b+c}\mathbf{a} + \frac{b-c}{a+b+c}\mathbf{b}$ であることがわかる . 重心 G の位置座標は $\mathbf{0}$ なので, $\mathbf{g} = -2\mathbf{i}$ は, $\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{IG}$ であることを意味する . \square

3. キープルト双曲線の 2 本の漸近線の交点 $X(115)$ の三線座標は,

$$\begin{aligned} & (a \sin^2(B-C) : b \sin^2(C-A) : c \sin^2(A-B))_t \\ &= \left(\frac{(b^2 - c^2)^2}{a} : \frac{(c^2 - a^2)^2}{b} : \frac{(a^2 - b^2)^2}{c} \right)_t \end{aligned}$$

であることを証明せよ .

第 2 1 章

ルモアー 又点再論

21.1. 逆平行と中線共役線

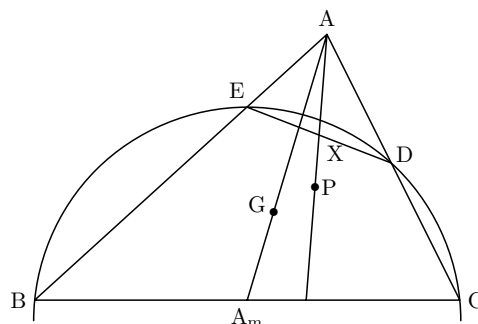
定義 21.1. 三角形 ABC の重心を G とし, P は A と異なる点で, $\angle PAC = \angle BAG$ を満たすとする. 直線 AP を $\angle A$ の類似中線とか中線共役線という.

また, D は直線 AC 上の点, E は直線 AB 上の点で, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ が成り立つとする. このとき, BC と DE は逆平行であるという. 逆平行という概念は, 三角形 ABC をひとつ固定したとき, ある直線が三角形 ABC のいずれかの辺と逆平行である, という場合のみに使われる概念で, 一般の 2 直線について定義できる概念ではない.

定理 21.2. 三角形 ABC において, 直線 AP は $\angle A$ の類似中線とする. また, D は直線 AC 上の点, E は直線 AB 上の点で, BC と DE は逆平行であるとする. このとき, 類似中線 AP は線分 DE を二等分する. つまり, $X = AP \cap DE$ とおくと, X は線分 DE の中点である.

逆に, 直線 AC, AB 上に点 D, E があって, 類似中線 AP が線分 DE を二等分すれば, BC と DE は逆平行である.

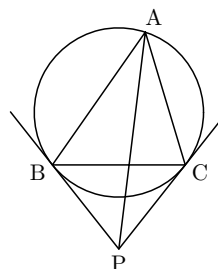
証明. 辺 BC の中点を A_m する. BC と DE が逆平行ならば, $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ であり, $\angle BAA_m = \angle XAD$ なので, $\triangle ABC$ を $\triangle ADE$ に移す相似



変換により辺 BC の中点が辺 DE 上の点 X に移る．よって，X は辺 DE の中点である．

逆は，三角形 ADE の中線 AP によって線分 D'E' (D', E' は直線 AD, AE 上の点) が二等分されるならば $D'E' \parallel DE$ である，という定理から得られる． \square

定理 21.3. 三角形 ABC の外接円の点 B, C における 2 接線の交点を P とすると，直線 AP は $\angle A$ の類似中線である．



証明. 点 P を通り BC に逆平行な直線と直線 AC, AB の交点を D, E とする． $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ なので，この相似により辺 BC の中点が辺 DE の中点 P に対応する． \square

定理 21.4. 三角形 ABC の頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ A_h, B_h, C_h とする．このとき， B_hC_h は BC と逆平行である．

証明. $\angle AB_hH = \angle HC_hA = 90^\circ$ より，4 点 A, C_h, H, B_h は同一円周上にある．よって，

$$\angle AB_hC_h = \angle AHC_h = 90^\circ - \angle C_hAH = 90^\circ - \angle BAA_h = B$$

である．よって， $\triangle AB_hC_h \sim \triangle ABC$ であり， B_hC_h は BC と逆平行である． \square

21.2. ルモアーヌ点

三角形 ABC の重心の等角共役点 K を $\triangle ABC$ のルモアーヌ点 (Lemoine) とか類似重心 (Symmedian) といった．ルモアーヌ点は 3 本の類似中線の交点である．

定理 21.5. 三角形 ABC の頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足を A_h, B_h, C_h とし，線分 B_hC_h, C_hA_h, A_hB_h の中点を P, Q, R とする．すると，3 直線 AP, BQ, CR はルモアーヌ点 K で交わる (図 1) ．

証明. B_hC_h は BC と逆平行で，P は B_hC_h の中点なので，AP は類似中線である． \square

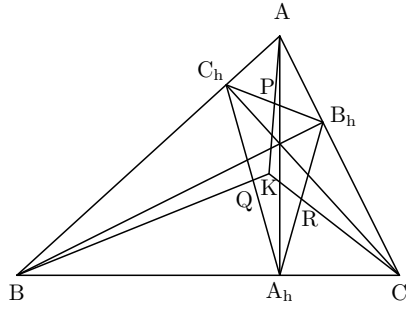


図 1

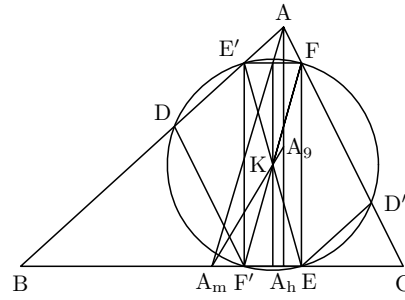


図 2

定理 21.6. (Schlömilch の定理) 線分 AA_h, BB_h, CC_h の中点をそれぞれ A_9, B_9, C_9 とする. また, 辺 BC, CA, AB の中点を A_m, B_m, C_m とする. すると, 3 直線 $A_m A_9, B_m B_9, C_m C_9$ はルモアーヌ点 K で交わる.

証明. K を通り AB に逆平行な直線と AC, BC の交点をそれぞれ F, F' とする. また, K を通り CA に逆平行な直線と BC, BA の交点をそれぞれ E, E' とする (図 2). K は線分 EE' の中点であり, 線分 FF' の中点である. 逆平行の定義より, $\angle KF'C = \angle A = \angle KEB$ であるので, $|KF'| = |KE|$ がわかる. よって, $|FF'| = |EE'|$ となり, 長さの等しい 2 本の対角線が互いに他を二等分するので, 四角形 $EFE'F'$ は長方形である.

線分 $EF', E'F$ の中点を X, Y とするとき, 三角形 MAA_h は三角形 $A_m YX$ を点 A_m を中心に相似拡大した図形であるので, 辺 YX の中点 K に対応する AA_h 上の点は AA_h の中点 A_9 である. よって, K は $A_m A_9$ 上にある.

同様に, K は $B_m B_9, C_m C_9$ 上にもあるので, 定理の結論を得る. \square

定理 21.7. 三角形 ABC において, ルモアーヌ点の三線座標は $(a : b : c)_t$ である.

証明. 定理 2.1.5 と定理 2.2.2 より, すぐわかる. \square

定理 21.8. 三角形 ABC の内部に動点 P があり, 点 P から直線 BC, CA, AB までの距離をそれぞれ x, y, z とし, $f(P) = x^2 + y^2 + z^2$ とおく. このとき, $f(P)$ の値が最小になるのは P がルモアーヌ点のときである.

証明. 三角形 ABC の面積を S とするとき, $ax + by + cz = 2S$ に注意する. コーシーの不等式より,

$$f(P) = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(ax + by + cz)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

であり, 等号が成立するのは $x : y : z = a : b : c$ のとき, つまり, P がルモアーヌ点のときである. \square

定理 21.9. 三角形 ABC の内接円と BC, CA, AB との接点を, それぞれ A_i, B_i, C_i とする. 三角形 ABC のジェルゴンヌ点は, 三角形 $A_i B_i C_i$ のルモアーヌ点と一致する.

証明. 三角形 $A_i B_i C_i$ に着目すると, $A_i A$ は $\angle A_i$ の共役中線である. このことから, 定理の結論が得られる. \square

21.3. ルモアーヌ円

定理 21.10. 三角形 ABC のルモアーヌ点 K を通り BC に平行な直線が AB, AC と交わる点をそれぞれ F', E とする. D', F, E', D も図 1 のように同様に定める. すると, 6 点 D, D', E, E', F, F' は同一円周上にある. この円を第 1 ルモアーヌ円という. また, 三角形 ABC の外心を O とするとき, 第 1 ルモアーヌ円の中心は線分 OK の中点である.

証明. 四角形 $AFKE'$ は平行四辺形なので, AK は線分 $E'F$ を二等分する. よって, BC と $E'F$ は逆平行である. したがって, $\triangle AE'F \sim \triangle ABC$ である. また, $F'E \parallel BC, E'D \parallel AB$ より, $\triangle E'KE \sim \triangle ABC \sim \triangle AE'F$ である. これらより, $\angle E'EF' = \angle E'FA$ がわかり, 内接四角形定理の逆より四角形 $EE'FF'$ はある円に内接する. 同様に, 四角形 $FF'DD'$ はある円に内接し, 四角形 $DD'EE'$ はある円に内接するので, Davis の定理より, 6 点 D, D', E, E', F, F' は同一円周上にある.

次に, 線分 OK の中点を L , 線分 AK の中点を P とする. $E'F$ は点 A における $\triangle ABC$ の外接円の接線と平行である. よって, $E'F \perp AO$ である. 中点連結定理より, $AO \parallel PL$ である. よって, PL は線分 $E'F$ の垂直二等分線である. 同様に, 線分 $F'D, D'E$ の垂直二等分線も点 L を通るので, L はルモアーヌ円の中心である. \square

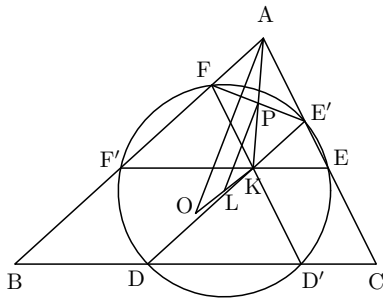


図 1

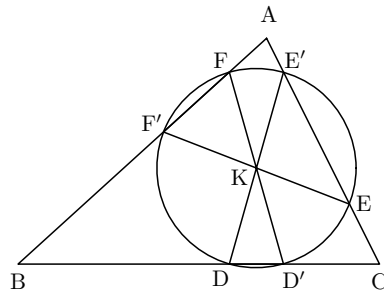


図 2

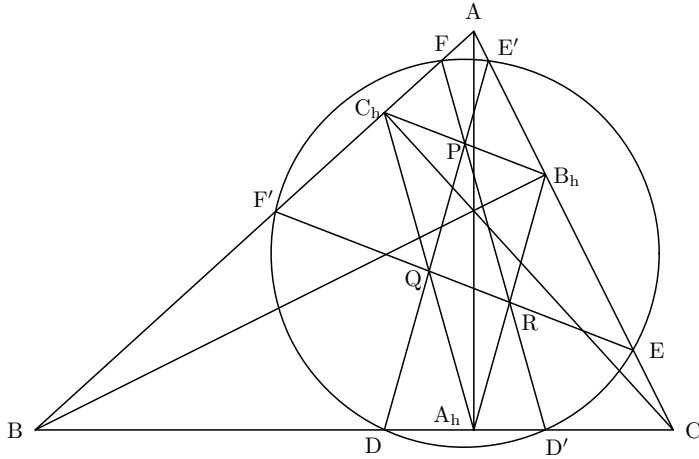
定理 21.11. 図 2 のように三角形 ABC のルモアーヌ点 K を通り, AB と逆平行な直線 $E'F$ を描く. $F'D, D'F$ も同様とする. すると, 6 点 D, D', E, E', F, F' は同一円周にある. この円を第 2 ルモアーヌ円という. 第 2 ルモアーヌ円の中心はルモアーヌ点 K である.

証明. 逆平行の定義から, $\angle KD'D = \angle A = \angle D'DK$ がわかり, $|KD| = |KD'|$ がわかる. 同様に, $|KE| = |KE'|, |KF| = |KF'|$ がわかる.

また, 類似中線 AK は逆平行線 EF' を二等分するので, $|KE| = |KF'|$ である. 同様に, $|KD| = |KE'|$ なので, $|KD| = |KD'| = |KE| = |KE'| = |KF| = |KF'|$ がわかる. よって, 6 点 D, D', E, E', F, F' は同一円周上にあり, K はその中心である. \square

21.4. テーラー円

定理 21.12. 三角形 ABC の頂点 A, B, C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ A_h, B_h, C_h とし, 線分 B_hC_h, C_hA_h, A_hB_h の中点をそれぞれ P, Q, R とする. また, 直線 QR と AC, AB の交点を E, F' とする. F, D', D, E' も図のように同様に定める. すると, 6 点 D, D', E, E', F, F' は同一円周にある. この円をテーラー円 (Taylor circle) とか 6 点円という. テーラー円の中心は垂足三角形 $A_hB_hC_h$ のシュピーカー中心 (中点三角形の内心) である. また, $FE' \parallel BC, DF' \parallel CA, ED' \parallel AB$ である.

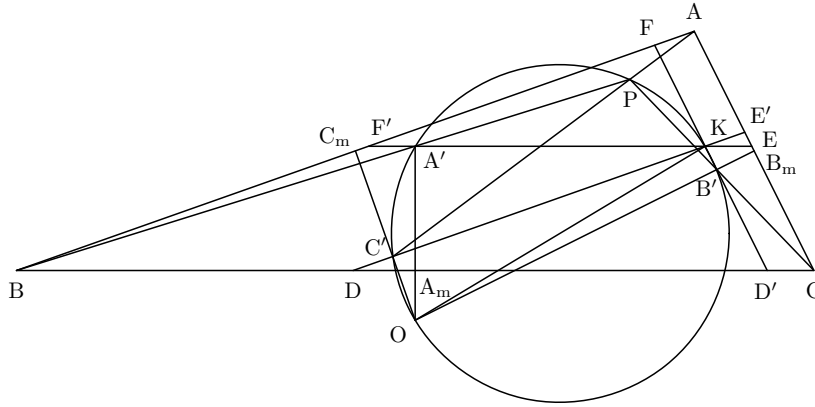


証明. $B_h C_h$ は BC と逆平行である．また，中点連結定理より $B_h C_h \parallel EF'$ なので， $\angle EF'A = \angle B_h C_h A = C$ である．同様に， $\angle BFD' = \angle B C_h A_h = C$ である．よって， $\triangle PFC_h$ は二等辺三角形で， $|PF| = |PC_h| = |PB_h|$ である．同様に， $\triangle PB_h E'$ は二等辺三角形で， $|PB_h| = |PE'|$ である．よって，4点 E', F, C_h, B_h は P を中心とする同一円周上にあり， $B_h C_h$ と FE' は逆平行である．よって， $FE' \parallel BC$ である． $B_h C_h \parallel EF'$ なので， EF' と FE' は逆平行であり，4点 E, E', F, F' は同一円周上にある．同様に，4点 F, F', D, D' は同一円周上にあり，4点 D, D', E, E' は同一円周上にある．Davis の定理により，6点 D, D', E, E', F, F' は同一円周上にある．

ところで，この円の中心を T とすると， T は線分 EE' の垂直二等分線上にあることがわかる．三角形 QEE' は $|QE| = |QE'|$ の二等辺三角形なので， EE' の垂直二等分線は $\angle RQP$ の二等分線である．同様に， T は $\angle QPR$ の二等分線もあるので， T は三角形 PQR の内心である． \square

21.5. ブロカール円

三角形 ABC の外心を O ，ルモアーヌ点を K とする．線分 OK を直径とする円を三角形 ABC のブロカール円 (Brocard circle) という．三角形 ABC の2つのブロカール点 Ω, Ω' とする．次の定理のように，ブロカール円はブロカール点 O, Ω, Ω' を通る．



定理 21.13. 三角形 ABC のルモアーヌ点 K を通り BC と平行な直線と、 AB, AC との交点を F', E とする．同様に、 K を通り CA, AB と平行な直線 D', F, E', D を描く．プロカール円 Γ と 3 直線 $F'E, D'F, E'D$ の K 以外の交点を A', B', C' とする．このとき、以下が成り立つ．

- (1) 3 直線 AC', BA', CB' は円周 Γ 上の 1 点で交わり、この点はプロカール点 Ω である．
- (2) 3 直線 AB', BC', CA' は円周 Γ 上の 1 点で交わり、この点はプロカール点 Ω' である．

三角形 $A'B'C'$ をプロカール三角形という．また、直線 OK をプロカール軸という．

証明. 辺 BC, CA, AB の中点を A_m, B_m, C_m とする． OK は Γ の直径なので、 $\angle OA'K = 90^\circ$ である． $BC \parallel A'K$ なので、 $A'O \perp BC$ で、 $A'O$ は BC の中点 A_m を通る．同様に、直線 OB' は点 B_m で CA に直交し、直線 OC' は点 C_m で AB に直交する． K から BC, CA, AB までの距離の比は $a : b : c$ であるので、

$$|A'A_m| : |B'B_m| : |C'C_m| = a : b : c = |BA_m| : |CB_m| : |AC_m|$$

である．直角三角形の相似条件より、

$$\triangle A'BA_m \sim \triangle B'CB_m \sim \triangle C'AC_m \quad \text{①}$$

となる．さて、 $P = BA' \cap CB'$ とする．①より、

$$\angle PB'O = \angle CB'B_m = \angle BA'A_m$$

であるので、内接四角形定理の逆により、四角形 $PA'OB'$ は 3 点 A', B', O を通るプロカール円 Γ に内接する．同様に、交点 $CB' \cap AC'$ も Γ 上にある

ことがわかるが、それは直線 CB' と Γ の交点であって B' 以外の点なので、点 P に一致する。よって、3 直線 AC' , BA' , CB' は円周 Γ 上の点 P で交わる。①より、

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$

であるので、 P はプロカル点 Ω である。(2) の証明も同様である。 \square

定理 21.14. 外接円の半径を R とするとプロカル円の半径は

$$R\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}$$

である。また、 $A\Omega$ とプロカル円の Ω 以外の交点を C_2 とすれば、 $KC_2 \parallel AB$ である。さらに、 A_2, B_2 を C_2 と同様に定めれば、3 直線 AA_2, BB_2, CC_2 は K の等距離共役点で交わる。

第 2 2 章

諸中心

22.1. ミッテンpunkt

三角形 ABC の傍心三角形 $I_A I_B I_C$ のルモアーヌ点をミッテンpunkt (Mittelpunkt) という。

定理 22.1. 三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の中点を A_m, B_m, C_m とする。すると、3 直線 $I_A A_m, I_B B_m, I_C C_m$ はミッテンpunkt で交わる。

証明. $\angle I_B I_A I_C = 90^\circ - \frac{A}{2} = \angle I_A A B$ 等は簡単な角度の計算でわかる。これらより、傍心三角形 $I_A I_B I_C$ に関して BC と $I_B I_C$ は逆平行である。線分 BC の中点が A_m なので、 $I_A A_m$ は三角形 $I_A I_B I_C$ の類似中線である。よって、 $I_A A_m$ は三角形 $I_A I_B I_C$ のルモアーヌ点を通る。□

定理 22.2. ミッテンpunkt の三線座標は

$$M = (b + c - a : c + a - b : a + b - c)_t$$

である。

証明. 三線座標が $(b + c - a : c + a - b : a + b - c)_t$ の点を M' とする。辺 BC の中点 A_m の重心座標と三線座標は、

$$A_m = (0 : 1 : 1)_b = (0 : 1/b : 1/c)_b = (0 : c : b)_t$$

である。また、 I_A の三線座標は $(-1 : 1 : 1)_t$ であった。

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & c & b \\ b + c - a & c + a - b & a + b - c \end{vmatrix} = 0$$

なので、 M' は直線 $I_A A_m$ 上にある。同様に、 M' は直線 $I_B B_m$ 上にありのて、前定理より $M' = M$ である。□

定理 22.3. 垂心, シュピーカー中心, ミッテンpunkt は同一直線上にある .

証明. 垂心 H, シュピーカー中心 S, ミッテンpunkt M の三線座標はそれぞれ

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C} \right)_t \\ S &= (bc(b+c) : ca(c+a) : ab(a+b))_t \\ M &= (b+c-a : c+a-b : a+b-c)_t \end{aligned}$$

である . ここで , $\frac{1}{\cos A} = \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}$ 等もちいて H, S, M の三線座標を並べてできる 3 次の行列式の値を (Mathematica を用いて) 計算すると , その値は 0 になることがわかる . よって , この 3 点は同一直線上にある . \square

定理 22.4. 内心, ルモアーヌ点, ミッテンpunkt は同一直線上にある .

証明. 内心, ルモアーヌ点, ミッテンpunkt の三線座標は , $I = (1:1:1)_t$, $K = (a:b:c)_t$, $M = (b+c-a : c+a-b : a+b-c)_t$ である . $M + 2K = (a+b+c)I$ なので , この 3 点は同一直線上にある . \square

定理 22.5. ジェルゴンヌ点 G_e , 重心 G, ミッテンpunkt M は同一直線上にあり , $|JG| : |GM| = 2 : 1$ である .

証明. ジェルゴンヌ点とミッテンpunkt の面積座標を $G_e = (g_x, g_y, g_z)_a$, $M = (m_x, m_y, m_z)_a$ とする . ジェルゴンヌ点の重心座標は

$$\left(\frac{1}{b+c-a} : \frac{1}{c+a-b} : \frac{1}{a+b-c} \right)_b$$

なので , 定理 20.2 より , その面積座標は

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\frac{1}{b+c-a}}{\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c}} \\ &= \frac{1}{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2} \end{aligned}$$

となる . ミッテンpunkt の重心座標は $(a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c))_b$ なので , 面積座標は

$$m_x = \frac{a(b+c-a)}{a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b-c)}$$

$$= \frac{ab + ca - a^2}{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2}$$

となる．ここで， $g_x + 2m_x = 1$ であるので，重心は線分 G_eM を 2:1 に内分する点である． \square

22.2. 9点円の中心

定理 22.6. 三角形 ABC の重心を G ，外心を O ，垂心を H ，9点円の中心を N とする．すると， $(G, H; O, N)$ は調和点列である．

証明. G は線分 OH を 4:2 に内分する点， N は線分 OH を 3:3 に内分する点なので，

$$|OG| : |GN| : |NH| : |OH| = 2 : 1 : 3 : 6$$

なので，

$$\frac{|GO|}{|GN|} \cdot \frac{|HN|}{|HO|} = -1$$

が成り立ち， $(G, H; O, N)$ は調和点列である． \square

定理 22.7. 三角形 ABC の9点円の中心 N の三線座標は，以下の通りである．

$$N = (\cos(B - C) : \cos(C - A) : \cos(A - B))_t$$

$$2H_a(N) = R(\sin B + \sin C + \cos B \cos C) = R \cos(B - C)$$

証明. N は線分 OH の中点なので，

$$2H_a(N) = H_a(O) + H_a(H) = R(\cos A + 2 \cos B \cos C)$$

である．ところで， $\cos A = \cos(180^\circ - B - C) = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$ なので，

$$2H_a(N) = R(\sin B + \sin C + \cos B \cos C) = R \cos(B - C)$$

である．これより結論を得る． \square

22.3. ド・ロンシャン点

外心 O に対する垂心 H の対称点をド・ロンシャン点 (de Longchamps point) という．つまり，垂心 H とド・ロンシャン点 L の中点が外心 O である．

この定義から，ド・ロンシャン点はオイラー線上にある．また， $|LO| = |OH|$ ， $|LH| = 2|OH|$ ， $3|LG| = 4|OH|$ である．

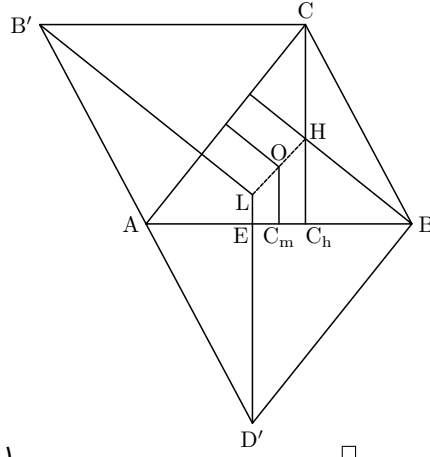
定理 22.8. (1) 空間内に三角形 ABC があり, 空間内に点 D を

$$|AD| = a, \quad |BD| = b, \quad |AC| = c$$

となるようにとる. 点 D をから ABC を含む平面に下ろした垂線の足を L とする. すると, L は三角形 ABC のド・ロンシャン点である.

(2) 三角形 $A_0B_0C_0$ の中点三角形が三角形 ABC であると仮定する (つまり, A は辺 B_0C_0 の中点等). このとき, 中点三角形 ABC のド・ロンシャン点 L は, 三角形 $A_0B_0C_0$ の垂心である.

証明. (1) D, C から辺 AB に下ろした垂線の足を E, C_h とする. また, AB の中点を C_m とする. AB を軸として $\triangle DAB$ を $\triangle ABC$ と同一平面上の $\triangle D'AB$ に回転移動すれば, $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ より, $ACBD'$ は平行四辺形である. よって, $|AE| = |C_hB|$, $|EC_m| = |C_mC_h|$ である. $\triangle ABC$ の外心を O, 垂心を H とすると, LE, OC_m , HC_h はいずれも AB に垂直だから平行である. 同様な関係が BC, AC についても成立するので, L はオイラー線 OH 上にあり, $|LO| = |OH|$ が成り立つ. よって, L は外心 O に関する垂心 H の対称点である.



(2) の証明も, (1) の証明と全く同じで, 上の図を $D' = A_0$, $B' = B_0$ として見ればよい. □

定理 22.9. 三角形 ABC の重心, 外心, 垂心, ド・ロンシャン点を G, O, H, L とするとき, 4 点 (O, H; G, L) は調和点列をなす.

証明. 符号付き長さで, $OL = -3OG$, $HL = -6OG$, $HG = -2OG$ なので.

$$\frac{OG}{OL} \cdot \frac{HL}{HG} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{-6}{-2} = -1$$

なので, (O, H; G, L) は調和点列である. □

定理 22.10. (1) ド・ロンシャン点 L の三線座標は以下の通り.

$$L = ((\cos A - \cos B \cos C) : (\cos B - \cos C \cos A) : (\cos C - \cos A \cos B))_t$$

$$H_a(L) = 2R(\cos A - \cos B \cos C)$$

(2) 内心 I, ジェルゴン 又点 G_e , ド・ロンシャン点 L は同一直線上にある.

証明. (1) O は LH の中点だから ,

$$H_a(L) = 2H_a(O) - H_a(H) = 2R(\cos A - \cos B \cos C)$$

である .

(2) 素朴な証明としては , 内心 , ジェルゴン 又点 , ド・ロンシャン 点の三線座標を並べて作った行列式の値が 0 であることを Mathematica で確認する . ただし , $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 等を用いて , 行列の成分は a, b, c の有理関数に直しておく . 初等幾何的な証明を発見された方は教えてほしい . \square

22.4. フォイエルバッハ点再論

Kimberling の 12 番目の中心 $X(12)$ には名前が付いていない . 三線座標が ,

$$((1 + \cos(B - C)) : (1 + \cos(C - A)) : (1 + \cos(A - B)))_t$$

である点を $X(12)$, あるいは X_{12} と書く .

定理 22.11. (1) フォイエルバッハ点 F の三線座標は , 以下の通りである .

$$F = ((1 - \cos(B - C)) : (1 - \cos(C - A)) : (1 - \cos(A - B)))_t$$

$$H_a(F) = \frac{Rr}{R - 2r}(1 - \cos(B - C))$$

(2) 辺 BC に接する傍接円と 9 点円の接点 F_a の三線座標は以下の通りである .

$$F_a = ((\cos(B - C) - 1) : (\cos(C - A) + 1) : (\cos(A - B) + 1))_t$$

$$H_b(F_a) = \frac{Rr_a}{R + 2r_a}(1 + \cos(C - A))$$

証明. (1) 定理 8.7 の証明のように , $R\vec{IF} = 2r\vec{NF}$ であるので ,

$$H_a(F) = \frac{RH_a(I) - 2rH_a(N)}{R - 2r} = \frac{Rr}{R - 2r}(1 - \cos(B - C))$$

である .

(2) フォイエルバッハの定理より , F_a は線分 NI_a を $(R/2) : r_a = R : 2r_1$ に内分する点である . よって ,

$$H_a(F_a) = \frac{-RH_a(I_a) + 2r_aH_a(N)}{R + 2r_a} = \frac{Rr_a}{R + 2r_a}(-1 + \cos(B - C))$$

$$H_b(F_a) = \frac{RH_b(I) + 2r_aH_b(N)}{R + 2r_a} = \frac{Rr_a}{R + 2r_a}(1 + \cos(C - A))$$

である . \square

定理 22.12. 三角形 ABC の 9 点円と傍接円の接点を F_a, F_b, F_c とするとき, 3 直線 AF_a, BF_b, CF_c は点 X_{12} で交わる

証明. 次の行列式の計算から, 3 点 A, F_a, X_{12} は同一直線上にある.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(B-C)-1 & \cos(C-A)+1 & \cos(A-B)+1 \\ 1+\cos(B-C) & 1+\cos(C-A) & 1+\cos(A-B) \end{vmatrix} = 0$$

同様に, 3 点 B, F_b, X_{12} は同一直線上にあり, 3 点 C, F_c, X_{12} は同一直線上にあるので, 結論を得る. \square

定理 22.13. $(I, N; F, X_{12})$ は調和点列をなす. ここで, N は 9 点円の中心, F はフォイエルバッハ点である.

証明. 定理 20.8 を利用すればすぐわかる. \square

定理 22.14. 三角形 ABC の内心, 外心, 重心, 垂心, フォイエルバッハ点を I, O, G, H, F とし, I から BC, CA, AB に下ろした垂線の足を A_i, B_i, C_i とする. 三角形 $A_iB_iC_i$ の垂心を H_i とする. H_i が 65 番目の中心 $X(65)$ である. このとき, 2 直線 GH_i と IF は点 $X(12)$ で交わる. ここで, H_i は 2 直線 IO と HF の交点でもある. 特に, IO は三角形 $A_iB_iC_i$ のオイラー線である. なお, 三角形 ABC の 9 点円の中心 N は線分 OH の中点であり, オイラー線 OH と IF の交点である.

証明. 初等幾何的な証明は見つけれなかった. コンピュータを用いて, 3 線座標の計算を行うようである.

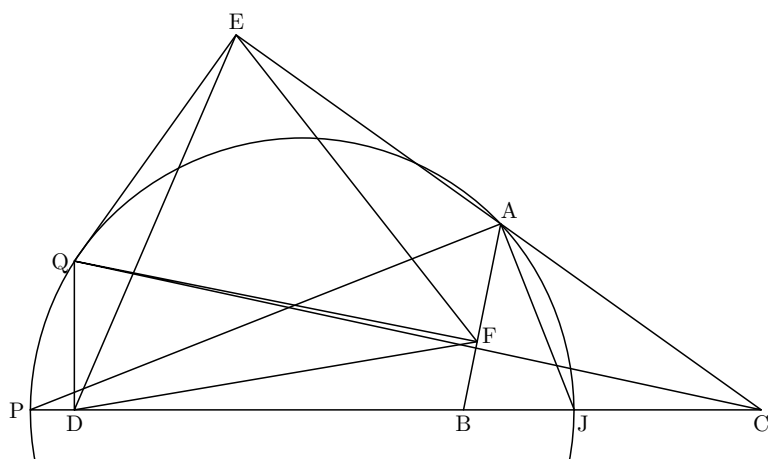
22.5. 等力点再論

演習 10 問 1 で述べた等力点について, もう少し詳しく述べる. 不等辺三角形 ABC において, $|BP| : |CP| = |BA| : |CA|$ を満たす点 P の軌跡を, 三角形 ABC の頂点 A に関するアポロニウスの円という.

定理 22.15. 円 Γ_1 は三角形 ABC の頂点 A に関するアポロニウスの円, 点 Q は円周 Γ_1 上の点とし, Q から直線 BC, CA, AC に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) $|QB| : |QC| = c : a$ が成り立つ. 逆にこの等式を満たす点 Q は Γ_1 上にある.
- (2) $|DE| = |DF|$ が成り立つ. 逆に, Q から直線 BC, CA, AC に下ろした垂線の足を D, E, F とするとき, $|DE| = |DF|$ が成り立てば, Q は Γ_1 上にある.

(3) Γ_1 は三角形 ABC の外接円に直交する .



証明. 三角形 ABC の内角 A の二等分線と BC の交点を J とし , 外角 A の二等分線と直線 BC の交点を P とする .

(1) 座標平面上に $B = (s, 0)$, $C = (t, 0)$ となるように三角形 ABC を配置するとき , $|QB|^2 : |QC|^2 = c^2 : b^2$ を満たす点 $Q = (x, y)$ の軌跡は ,

$$b^2((x-s)^2 + y^2) = c^2((x-t)^2 + y^2)$$

で定まる . これを展開して整理すると ,

$$(b^2 - c^2)(x^2 + y^2) + 2(c^2t - b^2s)x = c^2t^2 - b^2s^2$$

となり , これは円方程式であり , その中心は直線 BC 上にある . この円を Γ とする . 外角・内角の二等分線定理等より ,

$$|BP| : |CP| = |BJ| : |CJ| = c : b$$

である . よって , 2 点 J, P は円周 Γ 上にある . J, P 直線 BC 上の点なので , 線分 JP が円 Γ の直径であり , $\Gamma = \Gamma_1$ であることがわかる .

(2) $\angle CDQ = \angle QEC = 90^\circ$ だから , D, E は線分 CQ を直径とする円周 ω 上にある . ω は三角形 CED の外接円だから , 正弦定理により ,

$$|DE| = |CQ| \sin C$$

が成り立つ . 同様に , $|DF| = |BQ| \sin B$ が成り立つ . よって , 正弦定理より $\sin B : \sin C = b : c$ であり , $|CQ| : |BQ| = c : b$ なので , $|DE| = |DF|$ である .

逆に, $|DE| = |DF|$ ならば, $|CQ| : |BQ| = c : b$ となるので, Q は Γ_1 上にある.

(3) 点 J は線分 BC を $b : c$ に内分する点, 点 P は線分 BC を $b : c$ に外分する点なので,

$$|BJ| = \frac{ab}{b+c}, \quad |JC| = \frac{ac}{b+c}, \quad |BP| = \frac{ab}{b-c}$$

である. 円 Γ_1 の中心を O' とすると, O' は線分 JP の中点なので, Γ_1 の半径は, $|JO'| = \frac{|BP| - |BJ|}{2} = \frac{abc}{b^2 - c^2}$ である. また,

$$\begin{aligned} |BO'| \cdot |CO'| &= (|BJ| + |JO'|)(|JO'| - |JC|) = \frac{ab^2}{b^2 - c^2} \cdot \frac{ac^2}{b^2 - c^2} \quad ④ \\ &= \left(\frac{abc}{b^2 - c^2} \right)^2 = |JO'|^2 = |A'O|^2 \end{aligned}$$

となる. 方巾の定理の逆により, 直線 AO' は三角形 ABC の外接円に接する. よって, Γ_1 は三角形 ABC の外接円に直交する. \square

定理 22.16. 3 辺の長さが相異なる三角形 ABC の A, B, C に関するアポロニウスの円を $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

- (1) 円 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ は同じ 2 点で交わる.
- (2) 3 円の 2 交点を T, T' とするとき, 符号付角度で, 一方の点は

$$\angle BTC = A + 60^\circ, \quad \angle CTA = B + 60^\circ, \quad \angle ATB = C + 60^\circ \quad ①$$

を満たし, 他方の点は

$$\angle BT'C = A - 60^\circ, \quad \angle C'TA = B - 60^\circ, \quad \angle AT'B = C - 60^\circ \quad ②$$

を満たす. 点 T を第 1 等力点 (1st isodynamic point) といい, 点 T' を第 2 等力点 (2nd isodynamic point) という. ただし, A, B, C は反時計回りに並んでいるものとする.

証明. (1) 第 10 章演習 1 の通り.

(2) 点 T から直線 BC, CA, AC に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする. $\angle CDT = \angle TEC = 90^\circ$ だから, D, E は線分 CT を直径とする円周 ω 上にある. ω は三角形 CED の外接円だから, 正弦定理により $|DE| = |CT| \sin C$ が成り立つ. 同様に, $|DF| = |BT| \sin B$ が成り立つ. 正弦定理より $\sin B : \sin C = b : c$ であり, $|CT| : |BT| = c : b$ なので, $|DE| = |DF|$ である.

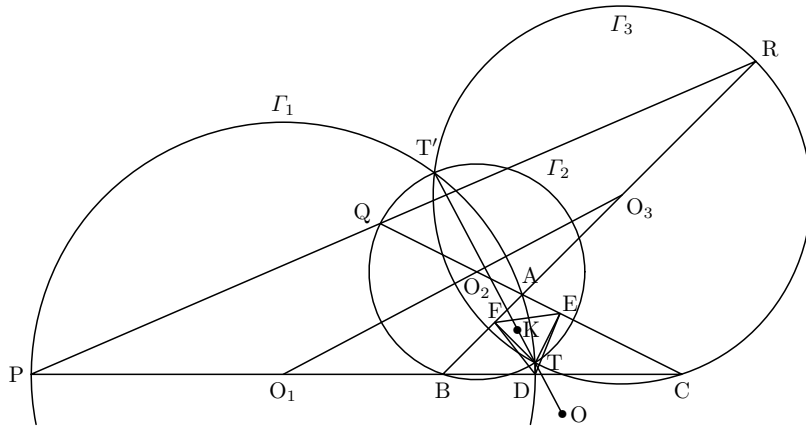
同様な議論で $|DE| = |EF|$ がわかるので、三角形 DEF は正三角形である。

$$\begin{aligned} \angle BTC &= 360^\circ - \angle ATB - \angle CTA \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle TBA - \angle BAT) - (180^\circ - \angle TAC - \angle ACT) \\ &= A + \angle TBA + \angle ACT \end{aligned}$$

である。 $\angle TDB = \angle BFT = 90^\circ$ なので、4点 D, B, F, T は同一円周上にあり、 $\angle TBA = \angle TBF = \angle TDF$ である。同様に、 $\angle ACT = \angle FDT$ である。よって、

$$\begin{aligned} \angle BTC &= A + \angle TBA + \angle ACT = A + \angle TDF + \angle EDT \\ &= A + \angle EDF = A + 60^\circ \end{aligned}$$

である。 $\angle AT'B$ のほうも同様である。 □



定理 22.17. 第1等力点 $T = X(15)$, 第2等力点 $T' = X(16)$ の三線座標は以下の通りである。

$$\begin{aligned} T &= (\sin(A + 60^\circ) : \sin(B + 60^\circ) : \sin(C + 60^\circ))_t \\ T' &= (\sin(A - 60^\circ) : \sin(B - 60^\circ) : \sin(C - 60^\circ))_t \end{aligned}$$

証明. 点 T から直線 BC, CA, AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D, E, F とする。

$$a \cdot |TD| = 2 \text{Area}(\triangle JBC) = |TB| \cdot |TC| \sin \angle BTC = |TB| \cdot |TC| \sin(A + 60^\circ)$$

である．同様に， $a \cdot |TE| = |TC| \cdot |TA| \sin(B + 60^\circ)$ なので，

$$\begin{aligned} |TD| : |TE| &= \frac{|TB| \cdot |TC| \sin(A + 60^\circ)}{a} : \frac{|TC| \cdot |TA| \sin(B + 60^\circ)}{b} \\ &= \frac{|TB| \sin(A + 60^\circ)}{a} : \frac{|TA| \sin(B + 60^\circ)}{b} \end{aligned}$$

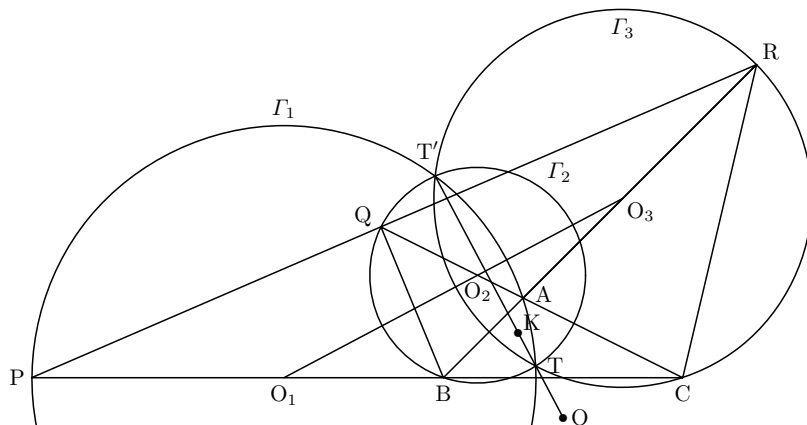
である．点 T はアポロニウスの円 Γ_1 上にあるので， $|TB| : |TA| = a : b$ である．よって，

$$|TD| : |TE| = \sin(A + 60^\circ) : \sin(B + 60^\circ)$$

となる．同様に $|TE| : |TF| = \sin(B + 60^\circ) : \sin(C + 60^\circ)$ である．T の三線座標は $(|TD| : |TE| : |TF|)_t$ なので，定理が得られる． \square

定理 22.18. 3 辺の長さが相異なる三角形 ABC の A, B, C の第 1 等力点を T, 第 2 等力点を T', 外心を O, ルモアーヌ点を K とする．このとき，以下が成り立つ．

- (1) 4 点 (T, T'; O, K) は調和点列をなす．この 4 点を通る直線をプロカル軸という．プロカル軸は 3 つのアポロニウスの円の中心を通る直線 (この直線をルモアーヌ軸という) と直交する．
- (2) 第 1 等力点 T はフェルマー点 $P(60^\circ)$ の等角共役点であり，第 2 等力点 T' はキーペルト点 $P(-60^\circ)$ (これを第 2 等角中心という) の等角共役点である．



証明. (1) 外心 O, ルモアーヌ点 K の三線座標は

$$O = (\cos A : \cos B : \cos C)_t, \quad K = (a : b : c)_t = (\sin A : \sin B : \sin C)_t$$

である．加法定理より， $\sin(A + 60^\circ) = \frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A$ なので，第 1 等力点 T の三線座標は，

$$T = \frac{1}{2}K + \frac{\sqrt{3}}{2}O$$

の形に表すことができる．同様に $T = \frac{1}{2}K - \frac{\sqrt{3}}{2}O$ である．よって，結論が得られる．

3つのアポロニウスの円の中心は，線分 TT' の垂直二等分線上にあるので，ブロカール軸とルモアーヌ軸は直交する．

(2) T と $P(60^\circ)$ の三線座標は，

$$T = (\sin(A + 60^\circ) : \sin(B + 60^\circ) : \sin(C + 60^\circ))_t$$

$$P(60^\circ) = \left(\frac{1}{\sin(A + 60^\circ)} : \frac{1}{\sin(B + 60^\circ)} : \frac{1}{\sin(C + 60^\circ)} \right)_t$$

なので，これらは等角共役点である． T' と $P(-60^\circ)$ についても同様である．

□