中学生からの数学オリンピック正誤表

(2017 年 12 月 4 日版)

● p.iv, 15 行目

誤: Baklan

正: Balkan

● p.vii, 14 行目

誤: A 代数・数論・組合せ数学 ⋯ 387

正: A 代数・数論・組合せ数学 ⋯ 388

● p.viii, 12 行目

誤: 3.4.4 ユークリドの互除法

正: 3.4.4 ユークリッドの互除法

● p.ix, 4 行目

誤: 3.5.11 ラクランジュの補間法

正: 3.5.11 ラグランジュの補間法

● p.ix, 下から 5 行目

誤: 3.8.9 二等分線理

正: 3.8.9 二等分線定理

● p.x, 11 行目

誤: 3.11.3 ジェルコンヌ点とナーゲル点

正: 3.11.3 ジェルゴンヌ点とナーゲル点

● p.x, 下から 10 行目

誤: 3.12.6 ブローカール点

正: 3.12.6 ブロカール点

● p.x, 下から 4 行目

誤: 3.12.12 ブローカール円

正: 3.12.12 ブロカール円

● p.7, 下から 2 行目. 問題 1.15(4)

誤: 進行方向を変更てれはならない

正: 進行方向を変更してはならない

● p.8, 下から 3 行目.

誤: 余裕があれは,

正: 余裕があれば,

● p.9, 下から 4 行目. 問題 1.20 の 4 行目

誤: 点 P に到達した.

正: 点 A に到達した.

● p.14 **問 1.42.** および p.135 **1.42 の解答**

南半球数学オリンピック 2001 年問 2 は，ある意味で出題ミスであり，**「題意を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在しない」**という欠陥がありました．もともとの問題にあった仮定「(1) どの正の整数も，1 回以上この数列の中に現れる.」という条件を削除すると，適切な問題になるようです．現実には，(1) があってもなくても a_{1000} として可能な値は同じであり，その求め方も変わりません．そこで，問題と解答を以下の修正版に差し替えたいと思います．海外の数学オリンピック関係者の方々から，この修正案についてご教示頂きました.

1.42^C　以下の条件を満たす無限自然数列 $\{a_n\}$ がある.

(1) $a_1 = 1$

(2) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$ (n は任意の自然数)

(3) $a_{n+1} \geqq a_n$ (n は任意の自然数)

(4) $a_{2001} = 200$

このとき，a_{1000} の値を求めよ.　　(南半球 2001 年問 2 修正版)

1.42. (2), (3) より，$a_4 = 2a_1 + 1 = 3$, $a_{13} = 7$, $a_{40} = 15$, $a_{121} = 31$, $a_{364} = 63$, $a_{1093} = 127$ である．

$a_3 \leqq 2$ と仮定すると，(3) より，$a_{10} \leqq 5$, $a_{31} \leqq 11$, $a_{94} \leqq 23$, $a_{283} \leqq 47$, $a_{850} \leqq 95$, $a_{2551} \leqq 191 < 200 = a_{2001}$ となり，(4) を満たさない．$a_3 \leqq a_4 = 3$ とあわせて，$a_3 = 3$ である．すると，$a_{10} = 7$, $a_{31} = 15$, $a_{94} = 31$, $a_{283} = 63$, $a_{850} = 127$ となる．

以上より，$127 = a_{850} \leqq a_{1000} \leqq a_{1093} = 127$ で，$a_{1000} = 127$ が得られる．

ここから先は解答に書かなくてもよいが，$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\dfrac{3^{k-1}-1}{2} < n \leqq \dfrac{3^k-1}{2}$ のとき $a_n = 2^n - 1$ として数列 $\{a_n\}$ を定めると，この $\{a_n\}$ は問題の題意を満たす. □

● p.26, 下から 4 行目. 問題 2.45 の 3 行目

誤: コイン動いた跡の

正: コインが動いた跡の

● p.35, 問題 3.27 の 2 行目

誤: (出典:ジュニアバルカン 1998 年問 3)

正: (ジュニアバルカン 1998 年問 3)

● p.58, 問題 4.65 の 1 行目.

誤: ベッティー

正: ベティー

● p.80, 4 行目.

誤: であることを証明せよ

正: であることを証明せよ.

● p.88, 問題 5.94 の 7 行目.

誤: 以下何回がこれを繰り返す.

正: 以下何回かこれを繰り返す.

● p.92, 問題 6.13 の 1 行目.

誤: 正の整数が直線に上に並んでいて,

正: 正の整数が直線上に並んでいて,

● p.94, 問題 6.24 の 4 行目の右辺

誤: $\geqq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{1-b}{c}}+\sqrt{\dfrac{1-b}{c}}\right)$

正: $\geqq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}+\sqrt{\dfrac{1-b}{b}}+\sqrt{\dfrac{1-c}{c}}\right)$

● p.111, 問題 6.97 の 3 〜 5 行目

問題の (操作 1) に間違いがありました．下記のように訂正して下さい．

誤:

(操作 1) G の白の頂点 P を 1 つ選び，G に新しい 1 個の頂点 Q と，新しい 1 本の辺 PQ を付け加えて，グラフ G' を作る．グラフ G' において，P は黒に塗り替え，Q は白に塗る．この 2 点以外の G' の頂点は G と同じ色とする．

正:

(操作 1) G の頂点 P を 1 つ選び，G に新しい 1 個の白の頂点 Q と，新しい 1 本の辺 PQ を付け加えて，グラフ G' を作る．このとき，グラフ G' において，P が白 (または黒) だったら P は黒 (または白) に塗り替える．この 2 点以外の G' の頂点は G と同じ色とする．

● p.117, 問題 1.9 の解答中の表 6

表 6 の (4, 2) 成分は 6 ではなく 2 です.

誤

2	6	3	1	4	5
5	1	6	3	2	4
1	2	4	6	5	3
4	3	1	5	6	2
6	4	5	6	3	1
3	5	2	4	1	6

表 6

正

2	6	3	1	4	5
5	1	6	3	2	4
1	2	4	6	5	3
4	3	1	5	6	2
6	4	5	2	3	1
3	5	2	4	1	6

表 6

● p.139, 問題 1.51 解答の 6 行目

誤: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leqq 3c^7$

正: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leqq 3c^3$

● p.139, 問題 1.51 解答の 8 行目

誤: $1001 = a^3 + b^3 \leqq 2b^7$

正: $1001 = a^3 + b^3 \leqq 2b^3$

● p.141, 問題 1.57

解答が間違っていました．お詫びいたします．以下の解答と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

1.57. n の 1 の位から十万の位の数を順に $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_5$ とおく．$A := a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ とし，$n+1$ の各桁の数の和を S とおく．問題の仮定から次が成り立つ．

$$A \equiv S \equiv 0 \pmod{26} \qquad ①$$

もし $a_0 \leqq 8$ だと $S = A + 1$ で ① は成立しないので，$a_0 = 9$ である．もし，$a_1 \leqq 8$ だと $S = A - 9 + 1 = A - 8$ で ① は成立しないので，$a_1 = 9$ である．もし，$a_2 \leqq 8$ だと $S = A - 9 - 9 + 1 = A - 17$ で ① は成立しないので，$a_2 = 9$ である．

(1) $a_0 = a_1 = a_2 = 9,\ a_3 \leqq 8$ の場合を考える．すると，$S = A - 9 - 9 - 9 + 1 = A - 26$ である．$A = a_5 + a_4 + a_3 + 27 \equiv a_5 + a_4 + a_3 + 1 \equiv 0$

(mod 26) となるためには，(1-1)「a_5, a_4, a_3 のうち 2 つが 8 で 1 つが 9」であるか，または，(1-2)「a_5, a_4, a_3 のうち 1 つが 7 で 2 つが 9」であるか，でないといけない．

(1-1) の場合．$a_3 \leqq 8$ であったから，$a_3 = 8$ で，$\{a_5, a_4\} = \{9, 8\}$ である．よって，$n = 898999, 988999$ である．それぞれの場合 $n+1 = 899000$, 989000 で，いずれの場合も $A = 52$, $S = 26$ でこれらは題意を満たす．

(1-2) の場合は，$a_3 \leqq 8$ より $a_3 = 7$, $a_4 = a_5 = 9$ で，よって，$n = 997999$ である．これは題意を満たす．

(2) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 9$ の場合を考える．もし $a_4 \leqq 8$ だと $S = A-9-9-9-9+1 = A-35$ で ① は成立しない．$a_4 = 9$, $a_5 \leqq 8$ だと $S = A-9-9-9-9-9+1 = A-44$ で ① は成立しない．$n = 999999$ は明らかに条件を満たさない．

よって，題意を満たす解は $n = 898999, 988999, 997999$ である．　□

● p.147, 問題 2.15 解答

解答が完全に間違っていました．お詫びいたします．以下の解答と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

2.15.　関数 $f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ を以下のように帰納的に定義する．まず，$f(1) = 1$, $f(2) = 2$ とし，$n \geqq 3$ に対しては，$n = 3k$ のとき $f(3k) = f(k)$, $n = 3k+1$ のとき $f(3k+1) = f(k)+1$ とする．また，$n = 3k+2$ のときは $f(k+1) = f(k) \pm 1$ であるが，$f(k+1) = f(k)+1$ ならば $f(3k+2) = f(k)+2 = f(k+1)+1$ と定め, $f(k+1) = f(k)-1$ ならば $f(3k+2) = f(k)$ と定める．

このように定義した $f(n)$ が，$3^m \leqq n < 3^{m+1}$ を満たすすべての n について以下を満たすことを，m に関する帰納法で証明する．

(a) $f(n)$ は問題の条件 (2), (3) を満たす．

(b) (1), (2), (3) を満たす任意の g について $g(n) \leqq f(n)$ が成り立つ．

(c) $f(n) \leqq m+2$ である．

(d) $f(n) = m+2$ を満たす最小の n は $n = (3^{m+1}+1)/2$ である．

まず，$m=0$ のとき，(a), (b), (c), (d) を確認するのは容易である．

$m \geqq 1$ とし，$k < 3^m$ に対して (a), (b), (c), (d) が成り立つと仮定する．$3^m \leqq n < 3^{m+1}$ に対して $f(n)$ が (2), (3), (c) を満たすことは f の構成法から明らかである．

$$\begin{aligned}
&g(3k) = g(k) \leqq f(k) = f(3k),\\
&g(3k+1) \leqq g(3k)+1 \leqq f(k)+1 = f(3k+1),\\
&g(3k+2) \leqq \min\{g(3k)+2,\, g(3k+3)+1\} = \min\{g(k)+2,\, g(k+1)+1\}\\
&\qquad\qquad \leqq \min\{f(k)+2,\, f(k+1)+1\} = f(3k+2)
\end{aligned}$$

であるので，(b) が成り立つ．

(d) を示す．$N(i) = (3^{i+1}+1)/2$ とおく．$\mathbb{F}_3$ において $1/2 = -1$ なので，任意の $i \geqq 1$ に対し，$N(i) \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$ である．帰納法の仮定から $f(N(m-1)) = m+1$ である．$k = N(m-1)-1$ とおくとき，$f(k) < f(k+1)$, $\bigl|f(k+1)-f(k)\bigr| \leqq 1$ なので，$f(k) = m$ である．$N(m) = 3N(m-1)-1 = 3k+2$ なので，

$$f(N(m)) = f(3k+2) = f(k)+2 = m+2$$

である．また，$j < N(m-1)$ のとき $f(j) \leqq m$ なので，$n < N(m)$ のとき $f(n) \leqq m+1$ であることが f の定義からわかる．

以上で，(a), (b), (c), (d) が示された．(d) より，$f(n) = 2001$ を満たす最小の n は $N(2000) = (3^{2000}+1)/2$ である． □

● p.188, 問題 3.37 解答

最後から 3 行目

誤: $|\mathrm{AH}| = 1+2y = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ である．

正: $|\mathrm{AH}| = 1+2y = \sqrt{2+2\sqrt{2}}$ である．

最後から 2 行目

誤: $2x+2y+1 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2}}$

正: $2x+2y+1 = 2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}$

● p.334, **注意**の 2 行目

誤: $|\mathrm{A_1B}| = |\mathrm{A_1C}|$ の場合がキーペルトの定理で，

正: (この 1 文を削除して下さい)

● p.378, 問題 6.79 の解答の図を飛ばして 6 行目

誤: よって A_{n+3} の可能グラフである.

正: よって A_{n+3} は可能グラフである.

● p.393 下から 10 行目,「3.2.5. 集合」の 3 行目

誤: また，整数数全体の集まりを

正: また，整数全体の集まりを

● p.393 下から 6 行目,「3.2.5. 集合」の 7 行目

誤: 数学的思考対称

正: 数学的思考対象

● p.396 2 行目

誤: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_i = \phi$

正: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$

● p.399 11 行目

誤: 限りなくどこまでの

正: 限りなくどこまでも

● p.407 1 行目

誤: 3.4.4 ユークリド の互除法

正: 3.4.4 ユークリッド の互除法

● p.411, 5 行目

誤: $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{e_i})$ $(0 \leqq f_i \leqq e_i)$ を展開したとき，$p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_r^{f_r}$ という形の項がすべて 1 回ずつ現れるから.

正: $\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{e_i})$ を展開したとき，$p_1^{f_1}p_2^{f_2}\cdots p_r^{f_r}$ $(0 \leqq f_i \leqq e_i)$ という形の項がすべて 1 回ずつ現れるから.

● p.419, 12 行目

誤: $g(x,y,z) = z^3 f(x/z, y/z) = x^3 + x^2y + x^2z + y^2z + z^3$

正: $g(x,y,z) = z^3 f(x/z, y/z) = x^3 + x^2y + x^2z + xz^2 + yz^2 + z^3$

● p.424 1 〜 6 行目

1 行目を以下のように修正し，2 行目, 5 行目, 6 行目を削除して下さい (直前の不等式に含まれているので不要です).

誤: $3S_4 \geqq T_{3,1} \geqq 2S_{2,2} \geqq 2xyz(x+y+z)$

正: $2S_4 \geqq T_{3,1} \geqq T_{2,2} \geqq 2xyz(x+y+z)$

● p.424 12 行目 (3.5.11 の直前の行)

誤: $x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-z) + z^t(z-x)(z-y) \geqq 0$

正: $x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geqq 0$

● p.424 13 行目

誤: 3.5.11 ラクランンジュの補間法

正: 3.5.11 ラグランンジュの補間法

● p.425 3 行目

誤: $\dfrac{n!}{r!(n-1)!}$

正: $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

● p.425 13 行目

誤: n を m_r 枚選ぶとする.

正: n を m_n 枚選ぶとする.

● p.425 17 行目

誤: 石の個数を m_i $(2 \leqq i \leqq n)$

正: 石の個数を m_i $(2 \leqq i < n)$

● p.428 図を飛ばして 10 行目

誤: $C_7 : \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6\mathrm{P}_3\mathrm{P}_7\mathrm{P}_1$

正: $C_6 : \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6\mathrm{P}_3\mathrm{P}_7\mathrm{P}_1$

● p.434 5 行目と 7 行目 (定理の (3), (5))

もとのままでも間違いではありませんが，体裁が悪いので.

誤: $|\mathrm{BC}| = r\,|\mathrm{FE}|$

正: $|\mathrm{BC}| = r\,|\mathrm{EF}|$

● p.438 下から 12 行目

誤: シムソン定理

正: シムソンの定理

● p.439, 4 行目

誤: 3.8.9 二等分線理

正: 3.8.9 二等分線定理

● p.450, 下から 7 行目

誤: 3.11.3 ジェルコンヌ点とナーゲル点

正: 3.11.3 ジェルゴンヌ点とナーゲル点

● p.451, 10 行目, 13 行目, 下から 2 行目, 最下行, p.452, 6 行目, 9 行目

用語としては,「調和列点」,「調和点列」ともに正しい用語で，どちらを使ってもよいのですが，統一しておきます.

誤: 調和列点

正: 調和点列

● p.456, 3.12.3 の 10 行目

誤: ピボット定理 (問 6.45) より,

正: 右図のように $\mathrm{X} = \mathrm{AA'} \cap \mathrm{BC}$, $\mathrm{Y} = \mathrm{BB'} \cap \mathrm{CA}$, $\mathrm{Z} = \mathrm{CC'} \cap \mathrm{AB}$ とおくと

$$\frac{|\mathrm{AY}|}{|\mathrm{YC}|} = \frac{c\sin(A+\theta)}{a\sin(C+\theta)}$$

等が容易にわかり,

$$\frac{|\mathrm{AY}|}{|\mathrm{YC}|} \cdot \frac{|\mathrm{CX}|}{|\mathrm{XB}|} \cdot \frac{|\mathrm{BZ}|}{|\mathrm{ZA}|} = 1$$

となる．よって, チェバの定理に逆により,

● p.458, 1 行目

誤: 3.12.6 ブローカール点

正: 3.12.6 ブロカール点

● p.464, 3 行目

誤: 3.12.12 ブローカール円

正: 3.12.12 ブロカール円

● p.467, 左列 21 行目

誤: $\mathbb{Z}$ (整数数全体の集合)

正: $\mathbb{Z}$ (整数全体の集合)

● p.467, 右列 1 行目

誤: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ (相乗)

正: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$ (総乗)

● p.468, 左列 【ア行】の 3 行目

誤: AM-GM ふとうしき

正: AM-GM 不等式

● p.469, 右列 6 行目

誤: フェルアーの小定理

正: フェルマーの小定理