

中学生からの数学オリンピック正誤表

(2024年4月22日版)

p.iv, 15行目 (第3刷で修正)

誤: Baklan

正: Balkan

p.vii, 14行目 (第2刷で修正)

誤: A 代数・数論・組合せ数学 … 387

正: A 代数・数論・組合せ数学 … 388

p.viii, 12行目 (第2刷で修正)

誤: 3.4.4 ユークリッドの互除法

正: 3.4.4 ユークリッドの互除法

p.ix, 4行目 (第2刷で修正)

誤: 3.5.11 ラグランジュの補間法

正: 3.5.11 ラグランジュの補間法

p.ix, 下から5行目 (第2刷で修正)

誤: 3.8.9 二等分線理

正: 3.8.9 二等分線定理

p.x, 11行目 (第2刷で修正)

誤: 3.11.3 ジェルコンヌ点とナーゲル点

正: 3.11.3 ジェルゴンヌ点とナーゲル点

p.x, 下から10行目 (第2刷で修正)

誤: 3.12.6 ブロカール点

正: 3.12.6 ブロカール点

p.x, 下から4行目 (第2刷で修正)

誤: 3.12.12 ブローカール円

正: 3.12.12 ブロカール円

p.7, 下から 2 行目. 問題 1.15(4) (第 2 刷で修正)

誤: 進行方向を変更てれはならない

正: 進行方向を変更してはならない

p.8, 下から 3 行目. (第 2 刷で修正)

誤: 余裕があれば,

正: 余裕があれば,

p.9, 下から 4 行目. 問題 1.20 の 4 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 点 P に到達した .

正: 点 A に到達した .

p.14 問 1.42. および p.135 1.42 の解答 (第 2 刷で修正)

南半球数学オリンピック 2001 年問 2 は, ある意味で出題ミスであり, 「題意を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在しない」という欠陥がありました. もととの問題にあった仮定「(1) どの正の整数も, 1 回以上この数列の中に現れる .」という条件を削除すると, 適切な問題になるようです. 現実には, (1) があってもなくても a_{1000} として可能な値は同じであり, その求め方も変わりません. そこで, 問題と解答を以下の修正版に差し替えたいと思います. 海外の数学オリンピック関係者の方々から, この修正案についてご教示頂きました.

1.42^C 以下の条件を満たす無限自然数列 $\{a_n\}$ がある .

(1) $a_1 = 1$

(2) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$ (n は任意の自然数)

(3) $a_{n+1} \geq a_n$ (n は任意の自然数)

(4) $a_{2001} = 200$

このとき, a_{1000} の値を求めよ .

(南半球 2001 年問 2 修正版)

1.42. (2), (3) より, $a_4 = 2a_1 + 1 = 3$, $a_{13} = 7$, $a_{40} = 15$, $a_{121} = 31$, $a_{364} = 63$, $a_{1093} = 127$ である.

$a_3 \leq 2$ と仮定すると, (3) より, $a_{10} \leq 5$, $a_{31} \leq 11$, $a_{94} \leq 23$, $a_{283} \leq 47$, $a_{850} \leq 95$, $a_{2551} \leq 191 < 200 = a_{2001}$ となり, (4) を満たさない. $a_3 \leq a_4 = 3$ とあわせて, $a_3 = 3$ である. すると, $a_{10} = 7$, $a_{31} = 15$, $a_{94} = 31$, $a_{283} = 63$, $a_{850} = 127$ となる.

以上より, $127 = a_{850} \leq a_{1000} \leq a_{1093} = 127$ で, $a_{1000} = 127$ が得られる.

ここから先は解答に書かなくてもよいが, $k = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $\frac{3^{k-1} - 1}{2} < n \leq \frac{3^k - 1}{2}$ のとき $a_n = 2^n - 1$ として数列 $\{a_n\}$ を定めると, この $\{a_n\}$ は問題の題意を満たす. \square

p.26, 下から 4 行目. 問題 2.45 の 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: コイン動いた跡の

正: コインが動いた跡の

p.35, 問題 3.27 の 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: (出典:ジュニアバルカン 1998 年問 3)

正: (ジュニアバルカン 1998 年問 3)

p.41, 問題 3.54 の 2 行目 (未修正)

誤: 大袋にはキャンディーが 10 個入っている.

正: 大袋にはキャンディーが 20 個入っている.

また, 同問題の p.196 の解答の最終段落を下記のように訂正して下さい.

誤: よって, $a \geq 38 + 644$ ならば $a \in A$ である. $37 + 4 = 43 \notin A$ である.

正: よって, $a \geq 38 + 6 = 44$ ならば $a \in A$ である. $37 + 6 = 43 \notin A$ である.

補足説明. IMC の原問題は「キャンディーが 20 個入っている」でしたが、「大袋にはキャンディーが 10 個入っている」という問題設定で解いた場合, 解答のほうを下記のように修正して下さい.

3.54. 非負整数全体の集合を $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし ,

$$A = \{6x + 9y + 10z \mid x, y, z \in \mathbb{N}_0\}$$

とする . 補集合 $\mathbb{N}_0 - A$ の最大値を求めればよい .

まず , 2 以上のすべての整数は $2x + 3y$ ($x \geq 0, y \geq 0$) という形に表せるので , 3 以外のすべての正の 3 の倍数は $6x + 9y$ という形に表せる . よって ,

$$A = \{3x + 10z \mid x, z \in \mathbb{N}_0, x \geq 2\}$$

である . A の元から 6 を引いた数 $3x + 10z - 6$ を考えて ,

$$B = \{3a + 10b \mid a, b \in \mathbb{N}_0\}$$

を決定する . $c \geq (3 - 1) \times (10 - 1) = 18$ ならば $c \in B$ であることを証明する . $c = 3k$ ($k \geq 6$) のとき $c \in B$ は自明 . $c = 3k + 1$ ($k \geq 6$) のとき $c = 3(k-3) + 10 \times 1 \in B$. $c = 3k + 2$ ($k \geq 6$) のとき $c = 3(k-6) + 10 \times 2 \in B$. よって , $c \geq 18$ ならば $c \in B$ である . 他方 , $17 \notin B$ である .

よって , $a \geq 18 + 6 = 24$ ならば $a \in A$ である . また $17 + 6 = 23 \notin A$ である . よって , 求める答は 23 である . \square

p.58, 問題 4.65 の 1 行目. (第 2 刷で修正)

誤: ベッティ

正: ベティー

p.80, 4 行目. 問題 5.58 の最後. (第 2 刷で修正)

誤: であることを証明せよ

正: であることを証明せよ .

p.88, 問題 5.94 の 7 行目. (第 2 刷で修正)

誤: 以下何回がこれを繰り返す .

正: 以下何回かこれを繰り返す .

p.92, 問題 6.13 の 1 行目. (第 2 刷で修正)

誤: 正の整数が直線の上に並んでいて ,

正: 正の整数が直線上に並んでいて ,

p.92, 最終行. 問題 6.14 の出典. (未修正)

誤: (ジュニアバルカン 2002 年問 3)

正: (ジュニアバルカン 2007 年問 4)

p.93, 問題 6.19 の出典. (未修正)

誤: (ジュニアバルカン 2012 年問 3)

正: (南半球 2012 年問 3)

p.94, 問題 6.24 の 4 行目の右辺 (第 2 刷で修正)

$$\text{誤: } \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{c}} + \sqrt{\frac{1-b}{c}} \right)$$

$$\text{正: } \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} \right)$$

p.111, 問題 6.97 の 3 ~ 5 行目 (第 2 刷で修正)

問題の (操作 1) に間違いがありました. 下記のように訂正して下さい.

誤:

(操作 1) G の白の頂点 P を 1 つ選び, G に新しい 1 個の頂点 Q と, 新しい 1 本の辺 PQ を付け加えて, グラフ G' を作る. グラフ G' において, P は黒に塗り替え, Q は白に塗る. この 2 点以外の G' の頂点は G と同じ色とする.

正:

(操作 1) G の頂点 P を 1 つ選び, G に新しい 1 個の白の頂点 Q と, 新しい 1 本の辺 PQ を付け加えて, グラフ G' を作る. このとき, グラフ G' において, P が白 (または黒) だったら P は黒 (または白) に塗り替える. この 2 点以外の G' の頂点は G と同じ色とする.

p.115, 問題 1.5 の解答の (2) の 2 行目 (2023.3.27 追加)

誤: d の選び方が 9 通り, e の選び方が 9 通り,

正: d の選び方が 9 通り, e の選び方が 8 通り,

p.117, 問題 1.9 の解答中の表 6 (第 2 刷で修正)

表 6 の (4, 2) 成分は 6 ではなく 2 です .

誤

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 6 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 5 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 5 | 6 | 2 |
| 6 | 4 | 5 | 6 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 6 |

表 6

正

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 3 | 1 | 4 | 5 |
| 5 | 1 | 6 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 2 | 4 | 6 | 5 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 5 | 6 | 2 |
| 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 6 |

表 6

p.127, 問題 1.22 解答の 5 行目 (2022.12.19 追加)

誤: $\angle CGB = \angle GCG = \angle DCA = y,$

正: $\angle CGB = \angle GCB = \angle DCA = y,$

p.139, 問題 1.51 解答の 6 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3c^7$

正: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3c^3$

p.139, 問題 1.51 解答の 8 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $1001 = a^3 + b^3 \leq 2b^7$

正: $1001 = a^3 + b^3 \leq 2b^3$

p.139, 問題 1.52 解答の 8 行目 (2024.4.22 追加)

誤: $n = 5(693m + 247),$

正: $n = 5(693m + 347),$

p.141, 問題 1.57 (第 2 刷で修正)

解答が間違っていました . お詫びいたします . 以下の解答と差し替えて下さい .

[差し替え原稿]

1.57. n の 1 の位から十万の位の数を順に a_0, a_1, \dots, a_5 とおく .
 $A := a_0 + a_1 + \dots + a_5$ とし , $n + 1$ の各桁の数の和を S とおく . 問題の

仮定から次が成り立つ .

$$A \equiv S \equiv 0 \pmod{26} \quad \textcircled{1}$$

もし $a_0 \leq 8$ だと $S = A + 1$ で $\textcircled{1}$ は成立しないので , $a_0 = 9$ である . もし , $a_1 \leq 8$ だと $S = A - 9 + 1 = A - 8$ で $\textcircled{1}$ は成立しないので , $a_1 = 9$ である . もし , $a_2 \leq 8$ だと $S = A - 9 - 9 + 1 = A - 17$ で $\textcircled{1}$ は成立しないので , $a_2 = 9$ である .

(1) $a_0 = a_1 = a_2 = 9, a_3 \leq 8$ の場合を考える . すると , $S = A - 9 - 9 - 9 + 1 = A - 26$ である . $A = a_5 + a_4 + a_3 + 27 \equiv a_5 + a_4 + a_3 + 1 \equiv 0 \pmod{26}$ となるためには , (1-1) 「 a_5, a_4, a_3 のうち 2 つが 8 で 1 つが 9 」 であるか , または , (1-2) 「 a_5, a_4, a_3 のうち 1 つが 7 で 2 つが 9 」 であるか , でないといけない .

(1-1) の場合 . $a_3 \leq 8$ であったから , $a_3 = 8$ で , $\{a_5, a_4\} = \{9, 8\}$ である . よって , $n = 898999, 988999$ である . それぞれの場合 $n + 1 = 899000, 989000$ で , いずれの場合も $A = 52, S = 26$ でこれらは題意を満たす .

(1-2) の場合は , $a_3 \leq 8$ より $a_3 = 7, a_4 = a_5 = 9$ で , よって , $n = 997999$ である . これは題意を満たす .

(2) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 9$ の場合を考える . もし $a_4 \leq 8$ だと $S = A - 9 - 9 - 9 - 9 + 1 = A - 35$ で $\textcircled{1}$ は成立しない . $a_4 = 9, a_5 \leq 8$ だと $S = A - 9 - 9 - 9 - 9 - 9 + 1 = A - 44$ で $\textcircled{1}$ は成立しない . $n = 999999$ は明らかに条件を満たさない .

よって , 題意を満たす解は $n = 898999, 988999, 997999$ である . \square

p.147, 問題 2.15 解答 (第 2 刷で修正)

解答が完全に間違っていました . お詫びいたします . 以下の解答と差し替えて下さい .

[差し替え原稿]

2.15. 関数 $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}$) を以下のように帰納的に定義する . まず , $f(1) = 1, f(2) = 2$ とし , $n \geq 3$ に対しては , $n = 3k$ のとき $f(3k) = f(k)$, $n = 3k + 1$ のとき $f(3k + 1) = f(k) + 1$ とする . また , $n = 3k + 2$ のときは $f(k + 1) = f(k) \pm 1$ であるが , $f(k + 1) = f(k) + 1$ ならば

$f(3k+2) = f(k) + 2 = f(k+1) + 1$ と定め, $f(k+1) = f(k) - 1$ ならば $f(3k+2) = f(k)$ と定める.

このように定義した $f(n)$ が, $3^m \leq n < 3^{m+1}$ を満たすすべての n について以下を満たすことを, m に関する帰納法で証明する.

- (a) $f(n)$ は問題の条件 (2), (3) を満たす.
- (b) (1), (2), (3) を満たす任意の g について $g(n) \leq f(n)$ が成り立つ.
- (c) $f(n) \leq m+2$ である.
- (d) $f(n) = m+2$ を満たす最小の n は $n = (3^{m+1} + 1)/2$ である.

まず, $m=0$ のとき, (a), (b), (c), (d) を確認するのは容易である.

$m \geq 1$ とし, $k < 3^m$ に対して (a), (b), (c), (d) が成り立つと仮定する. $3^m \leq n < 3^{m+1}$ に対して $f(n)$ が (2), (3), (c) を満たすことは f の構成法から明らかである.

$$\begin{aligned} g(3k) &= g(k) \leq f(k) = f(3k), \\ g(3k+1) &\leq g(3k) + 1 \leq f(k) + 1 = f(3k+1), \\ g(3k+2) &\leq \min\{g(3k) + 2, g(3k+3) + 1\} = \min\{g(k) + 2, g(k+1) + 1\} \\ &\leq \min\{f(k) + 2, f(k+1) + 1\} = f(3k+2) \end{aligned}$$

であるので, (b) が成り立つ.

(d) を示す. $N(i) = (3^{i+1} + 1)/2$ とおく. \mathbb{F}_3 において $1/2 = -1$ なので, 任意の $i \geq 1$ に対し, $N(i) \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$ である. 帰納法の仮定から $f(N(m-1)) = m+1$ である. $k = N(m-1) - 1$ とおくと, $f(k) < f(k+1)$, $|f(k+1) - f(k)| \leq 1$ なので, $f(k) = m$ である. $N(m) = 3N(m-1) - 1 = 3k+2$ なので,

$$f(N(m)) = f(3k+2) = f(k) + 2 = m+2$$

である. また, $j < N(m-1)$ のとき $f(j) \leq m$ なので, $n < N(m)$ のとき $f(n) \leq m+1$ であることが f の定義からわかる.

以上で, (a), (b), (c), (d) が示された. (d) より, $f(n) = 2001$ を満たす最小の n は $N(2000) = (3^{2000} + 1)/2$ である. □

誤: よって, $a = 8, b = \frac{1}{4}$ である. □

正: よって, $a = 8, b = \frac{1}{4}$ であるが, 仮定 $ab \neq 2$ より, 解なしである. □

p.182, 問題 3.27 解答の最後の行 (第 3 刷で修正)

誤: 以上より, $(x, y) = (1, 1), (8, 4), (9, 3)$

正: 以上より, $(x, y) = (1, 1), (8, 2), (9, 3)$

p.188, 問題 3.37 解答 (第 2 刷で修正)

最後から 3 行目

誤: $|AH| = 1 + 2y = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ である.

正: $|AH| = 1 + 2y = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$ である.

最後から 2 行目

誤: $2x + 2y + 1 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

正: $2x + 2y + 1 = 2 + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$

p.193, 問題 3.49(3) 解答 (第 3 刷で修正)

3.49 の解答の最後の行

誤: $\dots + 16 + 9 + 4 + 1 = 212$ 個である. □

正: $\dots + 16 + 9 + 4 + 1 = 228$ 個である. □

p.228, 問題 4.60 の解答の最後から 2 行目 (未修正)

誤: (5) $n; 1, 2, \dots, n-1, n; 1, 2, \dots, n-2, n, n-1; \dots; 1, 2, n, 3, \dots, n-1; 1, n, 1$ という数列は,

正: (5) $n; 1, 2, \dots, n-1, n; 1, 2, \dots, n-2, n, n-1; \dots; 1, 2, n, 3, \dots, n-1; 1, n, 2$ という数列は,

p.290, 問題 5.64 の解答の最後から 8 行目 (未修正)

誤: $m \geq 2$ だから, $n+1$ は l の倍数でなく, $n+2 \in A$ である.

正: $m \geq 2$ だから, $n+2$ は l の倍数でなく, $n+2 \in A$ である.

p.334, 問題 6.45 の解答の後の注意の 2 行目 (第 3 刷で修正)

誤: $|A_1B| = |A_1C|$ の場合がキーベルトの定理で,

正: (この 1 文を削除して下さい)

p.378, 問題 6.97 の解答の図を飛ばして 6 行目 (第 2 刷で修正)

誤: よって A_{n+3} の可能グラフである .

正: よって A_{n+3} は可能グラフである .

p.393 下から 10 行目, 「3.2.5. 集合」の 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: また, 整数数全体の集まりを

正: また, 整数全体の集まりを

p.393 下から 6 行目, 「3.2.5. 集合」の 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 数学的思考対称

正: 数学的思考対象

p.396 2 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_i = \phi$

正: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$

p.399 11 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 限りなくどこまでの

正: 限りなくどこまでも

p.407 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.4.4 ユークリッドの互除法

正: 3.4.4 ユークリッドの互除法

p.411, 5 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\prod_{i=1}^r (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i})$ ($0 \leq f_i \leq e_i$) を展開したとき, $p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$

という形の項がすべて 1 回ずつ現れるから .

正: $\prod_{i=1}^r (1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{e_i})$ を展開したとき, $p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_r^{f_r}$ ($0 \leq f_i \leq e_i$)

という形の項がすべて 1 回ずつ現れるから .

p.419, 12 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $g(x, y, z) = z^3 f(x/z, y/z) = x^3 + x^2 y + x^2 z + y^2 z + z^3$

正: $g(x, y, z) = z^3 f(x/z, y/z) = x^3 + x^2 y + x^2 z + xz^2 + yz^2 + z^3$

p.424 1 ~ 6 行目 (第 2 刷で修正)

1 行目を以下のように修正し, 2 行目, 5 行目, 6 行目を削除して下さい (直前の不等式に含まれているので不要です) .

誤: $3S_4 \geq T_{3,1} \geq 2S_{2,2} \geq 2xyz(x + y + z)$

正: $2S_4 \geq T_{3,1} \geq T_{2,2} \geq 2xyz(x + y + z)$

p.424 12 行目 (3.5.11 の直前の行) (第 2 刷で修正)

誤: $x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - z)(y - z) + z^t(z - x)(z - y) \geq 0$

正: $x^t(x - y)(x - z) + y^t(y - z)(y - x) + z^t(z - x)(z - y) \geq 0$

p.424 13 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.5.11 ラグランジュの補間法

正: 3.5.11 ラグランジュの補間法

p.425 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\frac{n!}{r!(n-1)!}$

正: $\frac{n!}{r!(n-r)!}$

p.425 13 行目 (第 2 刷で修正)

誤: n を m_r 枚選ぶとする .

正: n を m_n 枚選ぶとする .

p.425 17 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 石の個数を m_i ($2 \leq i \leq n$)

正: 石の個数を m_i ($2 \leq i < n$)

p.428 図を飛ばして 10 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $C_7 : P_1P_2P_5P_6P_3P_7P_1$

正: $C_6 : P_1P_2P_5P_6P_3P_7P_1$

p.434 5 行目と 7 行目 (定理の (3), (5)) (第 2 刷で修正)

もとのままで間違いいではありませんが, 体裁が悪いので.

誤: $|BC| = r |FE|$

正: $|BC| = r |EF|$

p.438 下から 12 行目 (第 2 刷で修正)

誤: シムソン定理

正: シムソンの定理

p.439, 4 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.8.9 二等分線理

正: 3.8.9 二等分線定理

p.450, 下から 7 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.11.3 ジェルコン又点とナーゲル点

正: 3.11.3 ジェルゴン又点とナーゲル点

p.451, 10 行目, 13 行目, 下から 2 行目, 最下行, p.452, 6 行目, 9 行目 (第 2 刷で修正)

用語としては「調和列点」「調和点列」ともに正しい用語で, どちらを使ってもよいのですが, 統一しておきます.

誤: 調和列点

正: 調和点列

p.456, 3.12.3 の 10 行目 (第 3 刷で修正)

誤: ピボット定理 (問 6.45) より,

正: 右図のように $X = AA' \cap BC$, $Y = BB' \cap CA$, $Z = CC' \cap AB$ とおくと

$$\frac{|AY|}{|YC|} = \frac{c \sin(A + \theta)}{a \sin(C + \theta)}$$

等が容易にわかり,

$$\frac{|AY|}{|YC|} \cdot \frac{|CX|}{|XB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZA|} = 1$$

となる. よって, チェバの定理に逆により,

p.458, 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.12.6 ブローカール点

正: 3.12.6 ブロカール点

p.464, 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: 3.12.12 ブローカール円

正: 3.12.12 ブロカール円

p.467, 左列 21 行目 (第 2 刷で修正)

誤: \mathbb{Z} (整数数全体の集合)

正: \mathbb{Z} (整数全体の集合)

p.467, 右列 1 行目 (第 2 刷で修正)

誤: $\prod_{i=1}^n a_i$ (相乗)

正: $\prod_{i=1}^n a_i$ (総乗)

p.468, 左列 【ア行】の 3 行目 (第 2 刷で修正)

誤: AM-GM ふとうしき

正: AM-GM 不等式

p.469, 右列 6 行目 (第 2 刷で修正)

誤: フェルアーの小定理

正: フェルマーの小定理