ジュニア数学オリンピックへの挑戦正誤表

(2016 年 11 月 9 日版)

● p.11 問 49 および p.62 問 49 解答
南半球数学オリンピック 2001 年問 2 は，ある意味で出題ミスであり，**「題意を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在しない」**という欠陥がありました．もともとの問題にあった仮定「(1) どの正の整数も，1 回以上この数列の中に現れる.」という条件を削除すると，適切な問題になるようです．現実には，(1) があってもなくても a_{1000} として可能な値は同じであり，その求め方も変わりません．そこで，問題と解答を以下の修正版に差し替えたいと思います．海外の数学オリンピック関係者の方々から，この修正案についてご教示頂きました．

問 49*. 以下の条件を満たす無限自然数列 $\{a_n\}$ がある．
(1) $a_1 = 1$
(2) $a_{3n+1} = 2a_n + 1$ (n は任意の自然数)
(3) $a_{n+1} \geqq a_n$ (n は任意の自然数)
(4) $a_{2001} = 200$
このとき，a_{1000} の値を求めよ．　　(南半球 2001 年問 2 修正版)

解答. (2), (3) より，$a_4 = 2a_1 + 1 = 3$, $a_{13} = 7$, $a_{40} = 15$, $a_{121} = 31$, $a_{364} = 63$, $a_{1093} = 127$ である．
$a_3 \leqq 2$ と仮定すると，(3) より，$a_{10} \leqq 5$, $a_{31} \leqq 11$, $a_{94} \leqq 23$, $a_{283} \leqq 47$, $a_{850} \leqq 95$, $a_{2551} \leqq 191 < 200 = a_{2001}$ となり，(4) を満たさない．$a_3 \leqq a_4 = 3$ とあわせて，$a_3 = 3$ である．すると，$a_{10} = 7$, $a_{31} = 15$, $a_{94} = 31$, $a_{283} = 63$, $a_{850} = 127$ となる．
以上より，$127 = a_{850} \leqq a_{1000} \leqq a_{1093} = 127$ で，$a_{1000} = 127$ が得られる．
ここから先は解答に書かなくてもよいが，$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対し，$\dfrac{3^{k-1}-1}{2} < n \leqq \dfrac{3^k-1}{2}$ のとき $a_n = 2^n - 1$ として数列 $\{a_n\}$ を定めると，この $\{a_n\}$ は

問題の題意を満たす. $\square$

● p.15 下から 8 行目　　(半時計回り → 反時計回り)
誤: この 2 つの角度は, 点 A から円周 C_1, C_2 を半時計回りに回る向
正: この 2 つの角度は, 点 A から円周 C_1, C_2 を反時計回りに回る向

● p.19 問 75 の下から 3 行目
誤: $\overset{\frown}{\mathrm{AM}_2}$ の内部に点 B_2 が含まれるものとする。
正: $\overset{\frown}{\mathrm{AM}_2}$ の内部に点 B が含まれるものとする。

● p.43 4 行目　　(99 → 80)
誤: $19 + 20 + 21 + \cdots + 99 = 99 \times 31$
正: $19 + 20 + 21 + \cdots + 80 = 99 \times 31$

● p.46 下から 6 行目 〜 p.47 7 行目までの問 17 の解答を以下の解答に差し替える.

問 17. m を自然数, k は整数で $0 \leqq k \leqq 9m$ を満たすとする. このとき, 集合 $A(m, k)$ を

$$A(m,k) = \left\{ (a_1, \ldots, a_m) \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1,\ldots, a_m \text{ は 0 以上 9 以下の整数で} \\ a_1 + \cdots + a_m = k \end{array} \right\}$$

で定義し, $A(m, k)$ の要素の個数を $f(m, k) = \#A(m, k)$ とする. 後の都合上, $k < 0$ または $k > 9m$ の場合は $f(m, k) = 0$ と約束しておく.

$(a_1,\ldots, a_n)$ に整数 $a_1 + 10a_2 + \cdots + 10^{n-1}a_n$ を対応させて考えれば, 10^n 未満の 9 の (正の) 倍数のうち, 各桁の数字の和が $9(n-2)$ に等しい数の個数は $f(n, 9(n-2))$ であり, 各桁の数字の和が $9(n-1)$ に等しい数の個数は

$f(n,\, 9(n-1))$ である．問題を一般化して，次のことを証明すれば，

$$f(n, 9(n-2)) > f(n, 9(n-1))$$

が証明される．

(0) $0 \leqq k \leqq 9$ に対し，$f(1,\, k) = 1$.
(1) $m \geqq 2,\, k < (9m+1)/2$ ならば $f(m,\, k-1) < f(m,\, k)$.
(2) $k = (9m+1)/2$ ならば $f(m,\, k-1) = f(m,\, k)$.
(3) $m \geqq 2,\, k > (9m+1)/2$ ならば $f(m,\, k-1) > f(m,\, k)$.

まず，$A(1, k) = \{(k)\}$ だから，(0) が成り立つ．以下 $m \geqq 2$ とする．

$(9-a_1, \ldots, 9-a_m) \in A(m,\, 9m-k)$ を対応させる写像は全単射であるので，

$$f(m,\, k) = f(m,\, 9m-k)$$

である．これより，(2) が得られ，また，(1) と (3) が同値であることがわかる．そこで，m に関する帰納法で (1) を証明する．

$$\begin{aligned} B(m,k) &= \left\{(a_1, \ldots, a_m) \in A(m,k) \,\middle|\, a_1 = 0\right\} \\ C(m,k) &= \left\{(a_1, \ldots, a_m) \in A(m,k) \,\middle|\, a_1 = 9\right\} \end{aligned}$$

とし，$A(m,\, k)$ における $B(m,\, k)$, $C(m,\, k)$ の補集合をそれぞれ $\overline{B(m,\, k)}$, $\overline{C(m,\, k)}$ とする．

$(a_1, \ldots, a_m) \in \overline{C(m,\, k-1)}$ に対して $(1+a_1,\, a_2, \ldots, a_m) \in \overline{B(m,\, k)}$ を対応させる対応は 1 対 1 なので，$\#\overline{C(m,\, k-1)} = \#\overline{B(m,\, k)}$ である．従って，

$$\begin{aligned} f(m,\, k) - f(m,\, k-1) &= \#B(m,k) - \#C(m,k) \\ &= f(m-1,\, k) - f(m-1,\, k-10) \end{aligned}$$

が成り立つ．$0 \leqq k < (9m+1)/2$ とする．

$m = 2$ ならば $f(m-1, k) = 1$, $f(m-1, k-10) = 0$ なので $f(m, k) > f(m,\, k-1)$ が成り立つ．

$m \geqq 3$ とする．もし $0 \leqq k < (9m-8)/2$ ならば，帰納法の仮定から $f(m-1,\, k) > f(m-1,\, k-10)$ なので，$f(m,\, k) > f(m,\, k-1)$ が成り立つ．

$(9m-8)/2 \leqq k < (9m+1)/2$ ならば, $k-10 < 9m-k-9 < (9m-8)/2$ なので,

$f(m-1,\, k) = f(m-1,\, 9(m-1)-k) = f(m-1,\, 9m-k-9) > f(m-1, k-1)$

が成り立ち, $f(m,\, k) > f(m,\, k-1)$ が成り立つ. □

● p.136 下から 9 行目
誤: 限りなくどこまでの
正: 限りなくどこまでも

● p.137 下から 5 行目　　$((-1)^n \to (-1)^k)$

誤: (II) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \{1+(-1)^n\} a_k = 2\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$ というような変形を行うには,

正: (II) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \{1+(-1)^k\} a_k = 2\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$ というような変形を行うには,

● p.137 下から 3 行目　　$((-1)^n \to (-1)^k)$

誤: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \{1+(-1)^n\} a_k = 2a_2 + 2a_4 + 2a_6 + \cdots + 2a_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

正: $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \{1+(-1)^k\} a_k = 2a_2 + 2a_4 + 2a_6 + \cdots + 2a_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

● p.138 下から 7 行目　　(2 つ目の $\sum$ の下の $i=1 \to i=j$)

誤: n を動く. 従って, 総和の値は $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ に等しい.

正: n を動く．従って, 総和の値は $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$ に等しい.

● p.139 下から 9 行目　　(左辺の分母 2 → n)

誤: $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{2} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$　　①

正: $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$　　①

● p.148 下から 9 行目
誤: また，整数数全体の集まりを
正: また，整数全体の集まりを

● p.148 下から 5 行目
誤: 数学的思考対称
正: 数学的思考対象

● p.151 11 行目
誤: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_i = \phi$
正: 任意の $i \neq j$ に対し $A_i \cap A_j = \phi$

● p.156 下から 9 行目　　($\equiv \to \backsim$)
誤: $\triangle \mathrm{PQ_1Q_2} \equiv \triangle \mathrm{PR_2R_1}$ となる。
正: $\triangle \mathrm{PQ_1Q_2} \backsim \triangle \mathrm{PR_2R_1}$ となる。

● p.162 11 行目　　($\mathrm{A_I} \to \mathrm{I_A}$)

誤: よって, $\mathrm{A_I A} \perp \mathrm{I_B I_C}$ である。
正: よって, $\mathrm{I_A A} \perp \mathrm{I_B I_C}$ である。

● p.162 13 行目　　$(\mathrm{A_I}, \mathrm{B_I}, \mathrm{C_I} \to \mathrm{I_A}, \mathrm{I_B}, \mathrm{I_C})$
誤: $\mathrm{A_I A} \perp \mathrm{I_B I_C}, \quad \mathrm{B_I B} \perp \mathrm{I_C I_A}, \quad \mathrm{C_I C} \perp \mathrm{I_A I_B}$
正: $\mathrm{I_A A} \perp \mathrm{I_B I_C}, \quad \mathrm{I_B B} \perp \mathrm{I_C I_A}, \quad \mathrm{I_C C} \perp \mathrm{I_A I_B}$

● p.169 図を飛ばして 9 行目
誤: $C_7 : \mathrm{P_1 P_2 P_5 P_6 P_3 P_7 P_1}$
正: $C_6 : \mathrm{P_1 P_2 P_5 P_6 P_3 P_7 P_1}$