微積分学Ｂ２講義ノート

安藤哲哉

注意: (1) 校正をあまりきちんとしていないので，誤植等に注意して利用して下さい．
(2) 講義中に配布した演習問題と解答は含まれていません．
(3) 1 章 1 回分ですが，13 章は 2 回かかります．それから全部証明を説明すると時間が足りなくなるので，抽象度の高い証明は「証明はプリントを読んで下さい」といって講義では説明してない部分が多いです．数学・情報数理学科等の学生以外は必ずしもそういう証明まで読む必要はありません．

1．多変数関数と位相の初歩

定義 1.1. $\mathbb{R}^n$ の元 (要素) を**点**ともいい，点 P とか，その座標で $P = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ と表す．行ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ を位置ベクトルと考え，これを点 P と同一視する．

さらに，点 $Q = \mathbf{y} = (y_1, y_2,\ldots, y_n)$ があるとき，2 点 P, Q 間の距離を，

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

で定義する．ベクトルの長さを用いて表わせば，

$$d(P,Q) = \left|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|$$

である．距離 d を定めた集合 $\mathbb{R}^n$ を n **次元ユークッド 空間**という．1 次元ユークリッド空間は直線 (数直線)，2 次元ユークリッド空間は (普通の意味での) 平面，3 次元ユークリッド空間は (普通の意味での) 空間である．

ε を正の実数とする．点 P を中心とする半径 ε の球体からその表面を除いた集合を

$$U_\varepsilon(P) = \left\{X \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; d(X,\,P) < \varepsilon\right\}$$

と書くことにし，点 P の **ε-近傍**と呼ぶ．

A は $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．ここでは，$\mathbb{R}^n$ における A の補集合を A^c と書くことにする．点 $P \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 ε に対し，次の (1), (2), (3) のいずれか 1 つだけが起きることに注意する．

(1) $U_\varepsilon(P) \subset A$. (2) $U_\varepsilon(P) \subset A^c$. (3) $U_\varepsilon(P) \cap A \neq \phi$ かつ $U_\varepsilon(P) \cap A^c \neq \phi$.

点 $P \in \mathbb{R}^n$ を固定する．正の実数 ε を十分 0 に近く選んだとき (1) が成り立つならば，点 P は A の**内部**の点であるという．正の実数 ε を十分 0 に近く選んだとき (2) が成り立つならば，点 P は A の**外部**の点であるという．それ以外の場合は，任意の正の実数 ε に対して (3) が成り立つが，このとき点 P は点 P は A の**境界**の点であるという．

A の内部の点全体の集合を A° と書くことにし，A° を A の**開核**とか A の**内部**という．また，A の境界の点全体の集合を ∂A と書くことにし，A の**境界**という．

一般には $A^\circ \subset A$ で両者が一致するとは限らないが，$A^\circ = A$ が成り立つとき，A は ($\mathbb{R}^n$ の) **開集合**であるという．A が開集合であることと，$A \cap (\partial A) = \phi$ は同値である．つまり，境界の点をまったく含まない集合が開集合である．

$\partial A \subset A$ が成り立つとき，A は ($\mathbb{R}^n$ の) **閉集合**であるという．つまり，境界の点をすべて含む集合が閉集合である．

$A \cup \partial A$ を A の**閉包**といい，$\overline{A}$ などの記号で表す．$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である．

点 $P \in \mathbb{R}^n$ に対して $P \in U$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の開集合 U を，点 P の**近傍** (きんぼう) という．ε-近傍は近傍の特別なものである．

集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対し，$P \in A$ を適当に選び ε を十分大きい実数に選べば $A \subset U_\varepsilon(P)$ となるとき，A は**有界**であるという．直感的に言えば，無限に遠いところまで A は伸びていなくて，有限の範囲のところに納まっている，ということである．

上記の，内部，外部，境界，開集合，閉集合などの定義がきちんと理解できなくても，この講義の概要を理解するのに影響はないが，定理を記述するときこれらの用語が頻繁に登場するので，拒絶反応を示さないようにしてほしい．いろいろな公式は，本来，その前提条件 (仮定) を正しく理解した上で用いるべきであるが，前提を無視して公式を使うのは，皆さんの中の多くが高校時代からしてきていることであり，そういう範囲での微積分の理解には，上記の定義が理解できなくても影響はない．

定義 1.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ は空でない部分集合とする．A を定義域とし実数値をとる関数 f を A 上の**関数**という．点 $P = \mathbf{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ における関数 f の値を，$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $f(\mathbf{x})$, $f(P)$ などと書く．慣習的に「$f(x_1,\ldots, x_n)$ は A 上の関数とする」などの言い方をする．

$n = 2, 3$ の場合には $f(x, y)$, $f(x, y, z)$ のように表す場合が多い．

定義 1.3. $A \subset \mathbb{R}^n$ は空でない部分集合，f は A 上の関数，$P \in A \cup (\partial A)$ とする．$\displaystyle\lim_{Q\to P} f(Q) = y_0$ であるとは，任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，正の実数 δ を (ε に応じて) 十分 0 に近い値に選べば，任意の点 $Q \in A \cap U_\delta(P)$ に対して $\left|f(Q) - y_0\right| < \varepsilon$ が成り立つことを言う．

また，この条件を満たす実数 y_0 が存在するとき，極限 $\displaystyle\lim_{Q\to P} f(Q)$ が存在するといい，y_0 をその**極限値**という．

上の極限の定義が理解できなくても，今後の講義の理解に影響はないので,「点 Q を (あらゆる方向から) 点 P に近づけたとき $f(Q)$ がある一定の値 y_0 に近づくとき，その値が極限 $\displaystyle\lim_{Q\to P} f(Q)$ である」と直感的に理解してもらえばよい．ただ,「近づく」という感覚的な単語を数学的に厳密に記述すると，定義 1.3 のような表現になるのである．

定義 1.4. $A \subset \mathbb{R}^n$ は空でない部分集合，f は A 上の関数，$P \in A$ とする．$\displaystyle\lim_{Q\to P} f(Q) = f(P)$ が成り立つとき，関数 f は点 P で**連続**であるという．

f が A のすべての点で連続であるとき，f は A 上で**連続**であるとか，A 上の連続関数であるという．

他方，例えば $n = 2$ で $(x_0, y_0) \in A$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ が成り立つとき，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で x **に関して連続**であるという．これは (x, y) を x 軸に平行な方向のみから (x_0, y_0) に近づけた極限しか考えていないので，上の定義内の極限よりずっと弱い条件である．同様に，$\displaystyle\lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ が成り立つとき，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で y **に関して連続**であるという．

$f(x, y)$ が (x_0, y_0) で連続ならば，$f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で x に関して連続であり，かつ，y に関して連続である．しかし，逆は正しくなく，点 (x_0, y_0) で x に関して連続であり，y に関して連続であっても，(x_0, y_0) で連続でないような関数も存在する．

これから，偏微分関係の定義をするが，n 変数で書くと添え字の関係で理解しにくくなるので，2 変数の場合に限って説明する．

定義 1.5. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，$P = (x_0, y_0) \in A$ とする．f は A 上の連続関数とする．極限

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

を考える．もし上のようにして極限値 $f_x(x_0, y_0)$ が定まれば，$f(x, y)$ は点 $P = (x_0, y_0)$ において x で**偏微分可能**であるといい，$f_x(x_0, y_0)$ を点 P における f の x による**偏微分係数**という．

同様に，$f_y(x_0, y_0)$ を点 P における y による偏微分係数という．

このように，偏微分係数 f_x, f_y を A 上の関数と考えたとき，f_x, f_y をそれぞれ x, y による f の**偏導関数**という．偏導関数 f_x は $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x} f$, $D_x f$ などとも書かれる．また，偏微分係数 $f_x(a, b)$ は $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$ などとも書かれる．f_y のほうも同様である．

A が開集合でない時は，上の定義は破綻する場合があるが，その説明は専門的なので割愛する．一応「f の定義域の境界上で偏微分を考えるとまずいことが起きる可能性がある」ということだけ覚えておこう．また，f_x や f_y が存在しても A 上で連続でない場合には，いろいろ病的な事象が生じる場合があるが，深入りしないことにする．

★ 偏導関数の求め方.

偏導関数の定義からわかるように，$f(x, y)$ の x による偏導関数 $f_x(x, y)$ を計算するには，y を定数

と考えて，$f(x, y)$ を x について 1 変数関数と同じの計算方法で微分すればよい．$f_y(x, y)$ は x を定数と考えて y で微分すればよい．

例 1.6.
(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^k y^l) = kx^{k-1}y^l.$
(2) $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^k y^l) = lx^k y^{l-1}.$
(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin xy = y\cos xy.$
(4) $\dfrac{\partial}{\partial y}e^{xy} = ye^{xy}.$
(5) $\dfrac{\partial}{\partial z}(x^k y^l z^m) = mx^k y^l z^{m-1}.$

なお，以上の話は 3 変数以上の関数でも同様である．

★ 付録 — コンパクト性と一様連続性
以下の話は純粋数学的すぎて理解するのは難しいかもしれない．証明は読まなくてもよいし，定義が理解できなくても仕方がないが，定義の用語と定理の結果は後でしばしば利用する．

定義 1.7.(コンパクト) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする．
M は集合とし，各 $m \in M$ に対して開集合 U_m が与えられているとする．任意の $x \in A$ に対して，ある $m \in M$ を選ぶと $x \in U_m$ となるとき，つまり $\displaystyle\bigcup_{m\in M} U_m \supset A$ であるとき，開集合の集合 $\mathfrak{U} := \{U_m \mid m \in M\}$ は A の**開被覆**であるという．
A の任意の開被覆 $\mathfrak{U} := \{U_m \mid m \in M\}$ に対し，有限個の元 $m_1,\ldots, m_r \in M$ をうまく選んで，$A \subset U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup \cdots \cup U_{m_r}$ が成り立つようにできるとき，A は**コンパクト**であるという．

定理 1.8.(ハイネ・ボレルの定理) A が有界な閉集合ならば A はコンパクトである．逆に，A がコンパクトならば，A は有界閉集合である．

証明. (1) A がコンパクトでないと仮定する．A は有界だから，$A \subset I_1$ となる超直方体 I_1 が存在する．今，I_1 を各辺の中央で 2 等分して，2^n 個の超直方体に分かるする．その中の少なくとも 1 つの超直方体 (それを I_2 とする) は，有限個の元 $m_1,\ldots, m_r \in M$ をうまく選んで，$A \cap I_2 \subset U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup \cdots \cup U_{m_r}$ とすることはできない．
再び，I_2 を 2^n 等分すると，その中の少なくとも 1 つの超直方体 (それを I_3 とする) を選ぶと，有限個の元 $m_1,\ldots, m_r \in M$ をうまく選んで，$A \cap I_3 \subset U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup \cdots \cup U_{m_r}$ とすることはできない．
以下，同様にして，超直方体の列 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ を構成する．I_{k+1} の辺の長さは，I_k の対応する辺の長さの半分だから，$I_\infty := \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty}(I_k \cap A)$ は 1 点からなる集合で，$I_\infty \subset A$ となる．すると，$I_\infty \subset U_m$ となるような $m \in M$ が存在する．このとき，k を十分大きく選べば $I_k \subset U_m$ となり，$I_k \cap A$ が有限個の $U_1, U_2,\ldots$ の合併集合に含まれないことに矛盾する．よって，A はコンパクトである．
(2) A が有界でも閉集合でないならば，A の境界上に A に属さない点 $\mathbf{b} = (b_1,\ldots, b_n)$ が存在する．$M = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ とし，$r \in M$ に対し，
$$U_r := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - b_1)^2 + \cdots + (x_n - b_n)^2 > r^2\}$$
とおく．$A \subset \displaystyle\bigcup_{r\in M} U_r$ であるが，いくら r を 0 に近く選んでも，$\mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \notin U_r$ となる点 $\mathbf{x}$ があるので，有限個の U_r の合併集合に A は含まれない．
(3) A が有界でない集合の場合を考える．M は (2) と同じとし，$r \in M$ に対し，
$$W_r := \{(x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < r^2\}$$
とおく．$A \subset \mathbb{R}^n = \displaystyle\bigcup_{r\in M} W_r$ であるが，いくら r を大きく近く選んでも，$\mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \notin U_r$ となる点 $\mathbf{x}$ があるので，有限個の W_r の合併集合に A は含まれない． □

定義 1.9.(一様連続) $A \subset \mathbb{R}^n$ で，$f(\mathbf{x})$ は任意の $\mathbf{x} \in A$ に対して定義された関数とする．任意の (いくらでも 0 に近い) 正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ をうまく (十分 0 に近く) 選べば，$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$ を満たす任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ に対して $\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| < \varepsilon$ が成り立つとき，$f(\mathbf{x})$ は A 上で**一様連続**であるという．

容易にわかるように，f が A 上で一様連続ならば，A 上で連続である．

定理 1.10. $A \subset \mathbb{R}^n$ は有界閉集合とし，$f(\mathbf{x})$ は A 上の連続関数とする．すると，f は A 上で一様連続であり，$f(x)$ は A 上で最大値と最小値を持つ．

証明. (1) f は一様連続であることを証明する．

正の実数 ε を任意に取り，固定する．$M = A$ とする．$\mathbf{a} \in A$ と正の実数 r に対し，$\mathbf{a}$ を中心とする半径 r の開超球を

$$U_r(\mathbf{a}) := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\right\}$$

とおく．$U_r(\mathbf{a})$ は開集合である．

f は A 上で連続だから，各 $\mathbf{a} \in M$ に対し，正の実数 $r(\mathbf{a})$ を十分小さく選べば，任意の $\mathbf{x} \in A \cap U_{r(\mathbf{a})}(\mathbf{a})$ に対して $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon/3$ となるようにできる．$W_{\mathbf{a}} := U_{r(\mathbf{a})/3}(\mathbf{a})$ とおく．$\displaystyle\bigcup_{\mathbf{a} \in M} W_{\mathbf{a}} \supset A$ である．A はコンパクトだから，有限個の $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in M$ を選んで，$W_{\mathbf{a}_1} \cup \cdots \cup W_{\mathbf{a}_m} \supset A$ となるようにできる．$\delta := \min\left\{r(\mathbf{a}_1)/3, \ldots, r(\mathbf{a}_m)/3\right\}$ とおく．

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$ であるような任意の 2 点 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ を取る．$\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}, \mathbf{y} \in U_{\mathbf{b}}$ を満たす $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \left\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\right\}$ がある．

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqq d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{b}) < \delta + \delta + \delta = 3\delta \leqq r(\mathbf{a})$$

であるので，$\left|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\right| < \varepsilon/3$ である．$d(\mathbf{x}, U_{\mathbf{a}}) < \delta < r(\mathbf{a})/3$ なので，$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\right| < \varepsilon/3$ である．同様に，$\left|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{b})\right| < \varepsilon/3$ なので，

$$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| \leqq \left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\right| + \left|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\right| + \left|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{y})\right| < \varepsilon$$

となる．よって，f は A 上で一様連続である．

(2) $I = f(A) \subset \mathbb{R}$ とおく．$\left\{W_m \;\middle|\; m \in M\right\}$ を I の任意の開被覆とする．f は連続なので，$\mathbb{R}^n$ のある開集合 U_m で，$f^{-1}(W_m) = U_m \cap A$ となるものが存在する．すると，$\left\{U_m \;\middle|\; m \in M\right\}$ は A の開被覆になる．A はコンパクトだから，有限個の元 $m_1, \ldots, m_r \in M$ をうまく選んで，$A \subset U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup \cdots \cup U_{m_r}$ となるようにできる．すると，$I \subset W_{m_1} \cup W_{m_2} \cup \cdots \cup W_{m_r}$ であるから I もコンパクトである．特に，I は $\mathbb{R}$ の有界な閉集合である．それは，有限個の閉区間の合併集合である．したがって，$\max I, \min I$ が存在する．つまり，f は A 上で最大値，最小値を取る．$\square$

2. 偏導関数

以下，2 変数関数の場合に説明するが．本節の話は 3 変数以上の関数でも同様である．

定義 2.1. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上の連続関数とする．また $(a, b) \in A$ とする．もし，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,\, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

が成り立つならば，f は $(a,\, b)$ で**全微分可能**であるという．f が A のすべての点で全微分可能ならば，f は A で**全微分可能**であるという．

定理 2.2. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で連続な関数とする．A 上で偏導関数 $f_x(x, y)$ と $f_y(x, y)$ が存在し，いずれか一方が A 上で連続ならば，f は A 上で全微分可能ある．

証明. $f_x(x, y)$ が点 $(a,\, b) \in A$ で連続な場合を考える．x に関する平均値の定理より，

$$f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b+k) = f_x(a+\theta h,\, b+k)h$$

を満たす $0 < \theta < 1$ が存在する．また，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_x(a+\theta h,\, b+k) = f_x(a,\, b)$ である．

$$\psi(k) := \begin{cases} \dfrac{f(a,\, b+k) - f(a,b)}{k} & (k \neq 0 \text{ のとき}) \\ f_y(a,b) & (k = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく．$k = 0$ でも $f(a,\, b+k) - f(a,b) = \psi(k)k$ が成立する．また，$\displaystyle\lim_{k\to 0} \psi(k) = f_y(a,b)$ である．

$$g(h,k) := \frac{f(a+h,\, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおく．

$$\begin{aligned} & f(a+h,\, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k \\ & \leqq \bigl(f(a+h,\, b+k) - f(a,\, b+k)\bigr) - f_x(a,b)h + \bigl(f(a,\, b+k) - f(a,b)\bigr) - f_y(a,b)k \\ & = \bigl(f_x(a+\theta h,\, b+k) - f_x(a,b)\bigr)h + \bigl(\psi(k) - f_y(a,b)\bigr)k \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned} \bigl|g(h,k)\bigr| & \leqq \bigl|f_x(a+\theta h,\, b+k) - f_x(a,b)\bigr| \cdot \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + \bigl|\psi(k) - f_y(a,b)\bigr| \cdot \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ & \leqq \bigl|f_x(a+\theta h,\, b+k) - f_x(a,b)\bigr| + \bigl|\psi(k) - f_y(a,b)\bigr| \end{aligned}$$

となる．ここで，$(h,\, k) \to (0,\, 0)$ とすると，上式の最後の辺は 0 に収束する．よって，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,\, k) = 0$ である．したがって，$f(x,\, y)$ は $(a,\, b)$ で全微分可能である． □

定義 2.3. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上の連続関数とする．A のすべての点で偏微分係数 $f_x(x,\, y)$ と $f_y(x,\, y)$ が存在して，A 上で偏導関数 $f_x(x,\, y)$ と $f_y(x,\, y)$ がいずれも連続であるとき，f は A 上で C^1 **級**であるという．前定理より，f が A 上で C^1 級ならば，f は A の任意の点で全微分可能である．

記号 2.4. x を変数とするとき，$o(x)$ という関数の記号は，一般に $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ を満たすようなある連続関数を表すのに用いられる．例えば，$f(x)$ が開区間 I 上で微分可能で $a \in I$ のとき，$f'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ であるので，$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h)$ と表すことができる．1 つの式の中に複数個の $o(x)$ が登場しても，それらが同じ関数であるとは限らない．$o(x)$ を x に関する**無限小**という．なお，自然数 n に対し，$o(x^n)$ を x に関する n 次の無限小という．

定理 2.5.(合成関数の微分法の公式) $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で全微分可能とする．また，$x = \varphi(t)$ と $y = \psi(t)$ は開区間 I 上で微分可能で，$t \in I$ のとき $\bigl(\varphi(t),\, \psi(t)\bigr) \in A$ であると仮定す

る．すると $f(\varphi(t),\, \psi(t))$ は I 上で微分可能で，

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = g'(t)f_x(\varphi(t),\psi(t)) + h'(t)f_y(\varphi(t),\psi(t))$$

が成り立つ．$z = f(x,\, y)$ として書き換えると

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

証明. $t \in I$, $F(t) := f(\varphi(t),\, \psi(t))$ とおく．以下，$t+h \in I$ となるような十分 0 に近い h のみを考える．しばらく，t を固定して，$\delta_1(h) := \varphi(t+h) - \varphi(t)$, $\delta_2(h) := \psi(t+h) - \psi(t)$ とおく．f は全微分可能だから，

$$\begin{aligned}
F(t+h) - F(t) &= f(\varphi(t+h),\, \psi(t+h)) - f(\varphi(t),\, \psi(t)) \\
&= f(\varphi(t) + \delta_1(h),\, \psi(t) + \delta_2(h)) - f(\varphi(t),\, \psi(t)) \\
&= f_x(\varphi(t),\, \psi(t))\delta_1(h) + f_y(\varphi(t),\, \psi(t))\delta_2(h) + o(\sqrt{\delta_1(h)^2 + \delta_2(h)^2})
\end{aligned}$$

が成り立つ．他方，$\delta_1(h) = \varphi(t+h) - \varphi(t) = \varphi'(t)h + o(h)$, $\delta_2(h) = \psi(t+h) - \psi(t) = \psi'(t)h + o(h)$ なので，

$$\begin{aligned}
&\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \\
&= f_x(\varphi(t),\, \psi(t))\left(\varphi'(t) + \frac{o(h)}{h}\right) + f_y(\varphi(t),\, \psi(t))\left(\psi'(t) + \frac{o(h)}{h}\right) + \frac{o(\sqrt{\delta_1(h)^2 + \delta_2(h)^2})}{h}
\end{aligned}$$

ここで，$\delta_0(h) := \sqrt{\delta_1(h)^2 + \delta_2(h)^2}$ とおくとき，$h \to 0$ のとき $\delta_0(h) \to 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{o(\sqrt{\delta_1(h)^2 + \delta_2(h)^2})}{h} &= \left(\lim_{h\to 0}\sqrt{\left(\frac{\delta_1(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{\delta_2(h)}{h}\right)^2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{o(\delta_0(h))}{\delta_0(h)} \\
&= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\lim_{\delta_0(h)\to 0}\frac{o(\delta_0(h))}{\delta_0(h)} \\
&= \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

となる． □

系 2.6. $A,\, B \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で全微分可能とする．また，$x = g(s,t)$ と $y = h(s,t)$ は開区間 I 上で微分可能で，$(s,t) \in I$ のとき $\big(g(s,t),\, h(s,t)\big) \in A$ であると仮定する．すると $z = f(g(s,t),\, h(s,t))$ は B 上で微分可能で，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

定義 2.7. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で C^1 級の関数とする．偏導関数 $f_x(x,y)$ がさらに x で偏微分可能なときその偏導関数を $f_{xx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}f$, $D_x^2 f$ などと書く．

$f_x(x,y)$ が y で偏微分可能なときその偏導関数を $f_{xy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,\, y)$, D_yD_xf などと書く．

$f_y(x,y)$ が x で偏微分可能なときその偏導関数を $f_{yx}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}f$, D_xD_yf などと書く．

$f_y(x,y)$ が y で偏微分可能なときその偏導関数を $f_{yy}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $D_y^2 f$ などと書く．

例えば $f(x,\, y) = x^k y^l$ のとき，$f_{xy}(x,\, y) = klx^{k-1}y^{l-1} = f_{yx}(x,\, y)$ が成り立つ．$f_{xy} = f_{yx}$ は無条件で成り立つわけではないが，以下が成立する．

定理 2.8. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で C^1 級の関数とする．偏導関数 $f_x(x,y)$ が A 上で y で偏微分可能，偏導関数 $f_y(x,y)$ が A 上で x で偏微分可能あり，さらに，偏導関数 f_{xy} と f_{yx} がいずれも A 上で連続であると仮定する．すると，A 上で $f_{xy} = f_{yx}$ が成立する．

証明. 1 点 $(a,\, b) \in A$ をしばらく固定して考える．十分 0 に近い実数 $h,\, k$ に対して

$$D(h,k) := f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b), \quad \varphi(x) := f(x,b+k) - f(x,b)$$

とおく．$\varphi'(x) = f_x(x,\, b+k) - f_x(x,\, b)$ である．平均値の定理より $0 < s < 1$ を満たすある実数 s が存在して，$\varphi'(a+sh) = \dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$ が成り立つ．書き換えると，

$$D(h,k) = h\big(f_x(a+sh,b+k) - f_x(a+sh,b)\big)$$

である．f_x は y で微分可能だから，y に関する平均値の定理から，$0 < t < 1$ を満たすある実数 t が存在して，

$$f_{xy}(a+sh,b+tk) = \frac{f_x(a+sh,b+k) - f_x(a+sh,b)}{k}$$

が成り立つ．書き換えると，

$$D(h,k) = hkf_{xy}(a+sh,b+tk)$$

となる．f_{xy} は連続だから，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{D(h,k)}{hk} = f_{xy}(a,b)$$

となる．同様にして，$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{D(h,k)}{hk} = f_{yx}(a,b)$ も証明できるので，$f_{xy}(a,\, b) = f_{yx}(a,\, b)$ が得られる． □

定義 2.9. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で C^1 級の関数とする．偏導関数 f_x と f_y も A 上で C^1 級であるとき，f は A 上で C^2 級であるという．

帰納的に，自然数 r に対し，f が A 上で C^r 級であることが定義されれたとする．f が A 上で C^1 級の関数で，偏導関数 f_x と f_y が A 上で C^r 級であるとき，f は A 上で C^{r+1} 級であるという．

任意の自然数 r に対して f が A 上で C^r 級であるとき，f は A 上で **C^∞ 級**であるとか，**無限回 (無限階) 微分可能**であるという．また，f が連続関数であることを **C^0 級**ともいう．

記号 2.10. $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない開集合で，f は A 上で C^3 級の関数とする．定理 2.8 より，

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial y} f(x,y)$$

等が成り立つ．ここで，$\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial y} f(x,y)$ は $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x,y)$ と書かれる．その他の場合も同様である．

2 階以上の偏導関数に関する合成関数の微分法の公式は定理 2.5 を利用すれが計算できるが，計算は結構面倒である．

例 2.11. $z = f(x,y)$ は C^2 級であると仮定する．また，$x = \varphi(t)$ と $y = \psi(t)$ は定理 2.5 と同じ仮定

を満たすとする．すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{d}{dt}\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}
\end{aligned}
$$

★コラム (雑談)—微分形式

高校のとき「$\dfrac{df}{dx} = f'(x)$ の分母を払って $dy = f'(x)\,dx$」などと答案に書くと先生に怒られたかもしれない．しかし，微積分学の創設者ニュートンとライプニッツのうち，ライプニッツの微積分学は $d(fg) = f\,dg + g\,df$ といった調子のものであった．現代数学では，dx, dy などが存在できる場所が集合論を基礎にした現代代数学である種の加群 (層) として構成されていて，$df = f'(x)\,dx$ は**微分形式**と呼ばれる正当な意味を持つ等式となっている．そこでは，$d(f+g) = df + dg$, $d(fg) = f\,dg + g\,df$ などの等式も成り立つ．

2 変数関数 $f(x, y)$ の場合には，

$$df(x,y) = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

という等式が成り立つ．高木貞治「解析概論」ではこの等式を**全微分**として説明しているが，現在では微分形式と考えたほうが厳密である．

dx, dy 等の 1 次式までしか登場しないものは 1 **次微分形式**と呼ばれ，計算上注意することはあまりないが，$dx\,dy$, $(dx)^2$, d^2f など 2 次の項を持つ 2 次微分形式を扱う場合は，かなり注意を要する．

$df = f'(x)\,dx$ の両辺に左から d を作用させると，形式的に

$$d(df) = d(f'\,dx) = (df')\,dx + f'\,d(dx) = f''\,dx\,dx + f'\,d(dx)$$

となる．$d(df) = d^2f$ と書くことにしよう．$f''\,dx\,dx = f''\,(dx)^2$ である．$(dx)^2$ は dx^2 とも書かれる．$d(dx) = d^2x$ の解釈は少し慎重さが必要である．最終的には $\dfrac{d^2f}{dx^2} = f''(x)$ だから $d^2f = f''(x)\,dx^2$ が成り立ってほしい．$g(x) = x$ の場合 $g''(x) = 0$ だから $d^2g = 0$, つまり $d^2x = 0$ となるべきである．すると，

$$d^2f = d(df) = f''\,dx^2 + f'\,d^2x = f''(x)\,dx^2$$

が成り立つ．$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を何故 $\dfrac{dy^2}{dx^2}$ と書いてはいけないのか疑問に感じた人もいるかもしれないが，実は上記のように $d^2f = f''\,dx^2$ が 2 次微分形式の正しい等式で，$dy^2 = (dy)^2 = (f'\,dx)^2 = (f'(x))^2\,dx^2$ は d^2y とは一般には一致しないのである．

微分形式は極限を使わないで構成できる微積分学であるが，かわりにテンソル積，交代積などの抽象代数を用い，多様体の考え方も必要になり．厳密な数学的定義を理解するのはそれほど容易ではない．

3. 接平面と極値

位相に関する必要な用語を少し追加しておく．

定義 3.1. A は $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合とする．$\mathbb{R}^n$ の 2 つの開集合 U_1, U_2 で $U_1 \cap U_2 = \phi$, $A \subset U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \neq \phi$, $A \cap U_2 \neq \phi$ を満たすものが存在するとき，A は**不連結**であるという．実際，このとき $A \cap U_1$ と $A \cap U_2$ は離れていて，その合併集合が A である．
A が不連結でないとき，A は**連結**であるという．
A が $\mathbb{R}^n$ の開集合で連結であるとき，A は $\mathbb{R}^n$ の**領域**であるという．
$\mathbb{R}^n$ の閉集合 B について，その開核 (内部) B° が空でない領域であるとき B は**閉領域**であるという．

$z = f(x, y)$ のグラフが曲面 S になると仮定して，S 上のなめらかな点 (a, b, c) $(f = f(a, b))$ における S の接平面の方程式を考えたい．ところで，平面上の曲線の接線も，厳密に定義しようとすると難しいものがあって，同値でない複数の定義が存在する．そもそも，本当は「曲線」の定義自体が難しい．同様に,「曲面」の定義はもっと難しいのであるが，ここでは触れないで，以下の定理 3.2 が成り立つことを受入れて，先の議論をする．

定理 3.2. A は $\mathbb{R}^2$ 内の領域または閉領域で，$z = f(x, y)$ は A 上の連続関数とする．すると，$z = f(x, y)$ の (A 上の) **グラフ**

$$S := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,\, y) \in A,\, z = f(x, y)\big\}$$

は曲面になる．

上の定理において，A が $\mathbb{R}^2$ 内の領域で，$z = f(x,\, y)$ が A 上の C^r 級関数の場合，S は C^r **級曲面**であるという $(r = 0, 1, \ldots, \infty)$．$C^\infty$ 級曲面を**なめらかな曲面**という．C^1 級でない曲面には角があったりして接平面を考えるのに不適切な点がある可能性がある．

定理 3.3. A は $\mathbb{R}^2$ 内の領域で，$f(x,\, y)$ は A 上の C^1 級関数で，S は $z = f(x,\, y)$ のグラフとする．$(a,\, b) \in A$ とし，$c = f(a,\, b)$, $P = (a,\, b,\, c) \in S$ とする (つまり，$c = f(a,\, b)$)．$x,\, y,\, z$ の 1 次方程式

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \qquad ①$$

で定まる $\mathbb{R}^3$ 内の平面を T とする．$x = a$, $y = b$ で定まる z-軸に平行な直線 ℓ を含む任意の平面 H を取る．このとき，直線 $T \cap H$ と曲線 $S \cap H$ は点 P で接する．そこで，この平面 T を点 P における曲面 S の**接平面**という．また，①を点 P における $z = f(x,\, y)$ の (グラフの) 接平面の方程式という．

証明. 図形全体を $(-a,\, -b,\, -c)$ だけ平行移動して考えれば，$a = b = c = 0$ であると仮定してよい．つまり，①が $z = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$ である場合を考える．H が $y = tx$ (t は定数) で定まる平面の場合に証明すれば十分である．H 上の直交座標系は，本来なら $(\sqrt{1 + t^2}x,\, z)$ を用いるべきであるが，$T \cap H$ と $S \cap H$ が原点で接することを確認するだけなら，縦横比は影響しないので，$(x,\, z)$ を H の座標系として採用してよい．曲線 $S \cap H$ の方程式は $z = f(x,\, tx)$ である．$f(0,\, 0) = 0$ なので，$(x,\, z) = (0,\, 0)$ における $z = f(x,\, tx)$ の接線の方程式は，

$$z = \big(f_x(0, 0) + tf_y(0, 0)\big)x \qquad ②$$

である．他方，$\mathbb{R}^3$ 内の平面 $z = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$ を $H : y = tx$ で切断すると，直線 $T \cap H$ の定義方程式 $z = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)tx$ が得られて，これは②と一致する．よって，$T \cap H$ と $S \cap H$ は点 $P = (0,\, 0,\, 0)$ で接する． $\square$

3 変数以上の関数 $y = f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ の場合には，2 次元の「曲面」とか「接平面」の概念を n 次元に拡張した図形の概念 (多様体とか超曲面とか超平面など) が必要になるが，本質的には $z = f(x,\, y)$ の場合と同様である．
極大・極小に関しても，用語の定義を正確にしておく必要がある．

定義 3.4. A は $\mathbb{R}^n$ 内の領域で，$y = f(x_1, \ldots,\, x_n)$ は A 上の関数とする．簡単のため $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ とおいて，$f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) = f(\mathbf{x})$ と書く．$\mathbf{a} = (a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n) \in A$ として，$\mathbf{a}$ で f が極値を取るということを，以下のように定義する．

(1) $\mathbf{a} \in U \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で，任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して $f(\mathbf{x}) \leqq f(\mathbf{a})$ を満たすものが存在するとき，f は $\mathbf{a}$ で**広義極大**であるという．
(2) $\mathbf{a} \in U \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で，任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して $f(\mathbf{x}) \geqq f(\mathbf{a})$ を満たすものが存在するとき，f は $\mathbf{a}$ で**広義極小**であるという．
(3) $\mathbf{a} \in U \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で，$\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ を満たす任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ を満たすものが存在するとき，f は $\mathbf{a}$ で**狭義極大**であるという．
(4) $\mathbf{a} \in U \subset A$ を満たすような $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で，$\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ を満たす任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$ を満たすものが存在するとき，f は $\mathbf{a}$ で**狭義極小**であるという．

f が $\mathbf{a}$ で狭義極大であれば，f は $\mathbf{a}$ で広義極大でああるが，逆は真でない．極小についても同様である．多くの教科書では，狭義極大のことを単に**極大**といい，狭義極小のことを単に**極小**といっている．しかし，本来はきちんと区別して用いたようがよい．

例 3.5. $f(x, y) = (x-y)^2$ で定まる関数 $z = f(x, y)$ を $A = \mathbb{R}^2$ 上で考える．原点 $(0, 0)$ で f が極値を取るかど うか考える．任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対し $f(x, y) = (x-y)^2 \geqq 0$ である．他方，$f(0, 0) = 0$ であるので，原点 $(0, 0)$ で f は広義極小である．他方，任意の実数 t に対して $f(t, t) = (t-t)^2 = 0$ であるので，原点 $(0, 0)$ で f は狭義極小ではない．

定理 3.6. A は $\mathbb{R}^n$ 内の領域で，$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ は A 上の連続関数で，すべての $i = 1, \ldots, n$ について，偏導関数 f_{x_i} が存在すると仮定する．もし A 内の点 $\mathbf{a}$ で f が広義極大または広義極小であれば，

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(\mathbf{a}) = \cdots = \frac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{a}) = 0$$

が成り立つ．

証明. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ とする．$\mathbf{a}$ で f が広義極大であれば，x_i のみの 1 変数関数と考えたとき $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ は $x = a_i$ で広義極大となる．よって，$\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{a}) = 0$ である． □

$\dfrac{\partial}{\partial x_1} f(\mathbf{a}) = \cdots = \dfrac{\partial}{\partial x_n} f(\mathbf{a}) = 0$ を満たす点 $\mathbf{a}$ を f の**臨界点**とか**停留点**という．もちろん，臨界点で f が極値を取るとは限らない．

1 変数関数の場合，$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば $x = a$ で $y = f(x)$ は狭義極小であった．この定理を 2 変数関数の場合に述べると次のようになる,．

定理 3.7. $z = f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数であるとする．$(x, y) \in U$ に対して，

$$H(x,y) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

とおく．これを f の**ヘス行列**という．その行列式

$$D(x,y) := \det H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

を f の**ヘッシアン**とか**ヘス行列式**という．

いま，$(a,b) \in U$ で，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つとする．このとき，以下が成り立つ．
(1) $D(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば，$z = f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で狭義極小である．
(2) $D(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば，$z = f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で狭義極大である．
(3) $D(a, b) < 0$ ならば，$z = f(x, y)$ は $(x, y) = (a, b)$ で広義極大でも広義極小でもない．

この定理の証明は，本質的には行列の固有値を使うものなので，以下のように n 変数の場合に拡張したうえで，証明の概略だけ説明する．

定理 3.8. f は $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上の C^2 級関数で $\mathbf{x} \in U$ とする．$k = 1, 2, \ldots, n$ に対し, 2 回偏導関

数 $f_{x_ix_j}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ を $(i,\, j)$-成分とする k 次正方行列の行列を

$$H_k(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_1x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_kx_1}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_kx_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

とし，その行列式を $D_k(\mathbf{x}) = \det H_k(\mathbf{x})$ とおく．$H(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x})$ を f の**ヘス行列**，$D(\mathbf{x}) = D_n(\mathbf{x})$ を f の**ヘッシアン**という．

いま，$\mathbf{a} = (a_1,\ldots, a_n) \in U$ とし，

$$f_{x_1}(\mathbf{a}) = f_{x_2}(\mathbf{a}) = \cdots = f_{x_n}(\mathbf{a}) = 0$$

を満たすとする．

(1) $H(\mathbf{a})$ のすべての固有値が正であれば，$y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極小である．同様に，$H(\mathbf{a})$ のすべての固有値が負であれば，$y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極大である．また，$H(\mathbf{a})$ の固有値の中に正のものと負のものが両方ある場合は，$y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で広義極大にも広義極小にもならない．

(2) すべての $k = 1,\, 2,\ldots,\, n$ に対して $D_k(\mathbf{a}) > 0$ が成り立つならば, $y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極小である．

(3) すべての $k = 1,\, 2,\ldots,\, n$ に対して $(-1)^k D_k(\mathbf{a}) > 0$ が成り立つならば, $y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極大である．

証明. (1) $H = H(\mathbf{a})$ は実対称行列なので，ある実直行行列 P により対角化可能で，H の固有値はすべて実数である．$P^{-1}HP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ とし，$(t_1,\ldots,\, t_n) = (x_1 - a_1,\ldots,\, x_n - a_n)P$ と座標変換して考えると，$(t_1,\ldots,\, t_n) = (0,\ldots,\, 0)$ の近傍で，

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i^2 + o(|\mathbf{t}|^2), \quad \lim_{|\mathbf{t}|\to 0} \frac{o(|\mathbf{t}|^2)}{|\mathbf{t}|^2} = 0$$

と書ける．よって，$\lambda_1 > 0,\ldots,\, \lambda_n > 0$ であれば，f は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極小になる．また，$\lambda_1 < 0,\ldots,\, \lambda_n < 0$ であれば，f は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で狭義極大になる．$\lambda_i > 0,\, \lambda_j < 0$ となる $i,\, j$ があるときは，t_i 方向に移動すると増加，t_j 方向に移動すると減少するので，広義極大にも広義極小にもならない．

(2) すべての $k = 1,\, 2,\ldots,\, n$ に対して $D_k(\mathbf{a}) > 0$ が成り立つならば, $H = H(\mathbf{a})$ のすべての固有値が正であることを示せばよい．H が 0 以下の固有値を持つと仮定する．もし H が 0 を固有値に持てば $D_n(\mathbf{a}) = 0$ であるから，仮定 $D_n(\mathbf{a}) > 0$ より H は 0 を固有値に持たない．$\lambda_1 \cdots \lambda_n = D_n(\mathbf{a}) > 0$ だから，H は 2 個以上偶数個の負の固有値を持つ．すべての負の固有値に対応する固有空間の直和を W_- とする．$\dim W_- \geqq 2$ だから，W_- の中には n 番目の成分 x_n が 0 であるようなベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in W_-$ が存在する．$\mathbf{x}$ の n 番目の成分 0 を取り去った $n-1$ 次のベクトルを $\mathbf{x}'$ とすると．${}^t\mathbf{x}' H_{n-1}(\mathbf{a})\mathbf{x}' = {}^t\mathbf{x}H\mathbf{x} < 0$ が成り立つので，$H_{n-1}(\mathbf{a})$ は正定値でなく，$D_{n-1}(\mathbf{a}) \leqq 0$ となる．

(3) $-H(\mathbf{a})$ を考えればよい． □

参考. もし, $D_k(\mathbf{a}) = 0$ となる k が存在すれば, $y = f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で極値をとる可能性もあり, 極値を取らない可能性もある．

★コラム—弧状連結と連結

定義 3.1 の「連結」という概念とよく似た「弧状連結」という概念があって，一部の微積分の教科書では，弧状連結のほうを連結の定義として採用している．そこで，両者の関係について簡単に説明しておく．

定義 3.9. $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ とし，$I = [0,\, 1]$ (閉区間) とする．この定義の中では，ある連続写像 $f\colon I \to A$ による像 $C = f(I)$ を A 内の**曲線**とよび，2 点 $f(0)$ と $f(1)$ を曲線 C の**両端**という．集合 A 内の任意の 2 点 $P,\, Q$ に対し，$P,\, Q$ を両端とするような A 内の曲線 C が存在するとき，集合 A は**弧状連結**であるという．

「連結」と「弧状連結」の関係は，以下の 2 つの定理の通りである．定理の証明は，例えば，松坂和夫「集合・位相入門」p.195 〜 206 を見よ．いろいろ準備が必要で長い証明であるが，ここでは証明の雰囲気だけ書いておく．

定理 3.10. $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ とする．もし，A が弧状連結ならば A は連結である．

略証. A は弧状連結であるが連結でないと仮定して矛盾を導く．A は連結でないから，$A \subset U_1 \cup U_2 = A$, $U_1 \cap U_2 = \phi$ を満たす空でない開集合 U_1, U_2 が存在する．$P \in U_1 \cap A$, $Q \in U_2 \cap A$ とする．A は弧状連結なので，連続写像 $f\colon I \longrightarrow A$ $(I = [0, 1])$ で，$f(0) = P$, $f(1) = Q$ を満たすものが存在する．$\mathbb{R}$ のある開集合 I_1, I_2 により $f^{-1}(U_1) = I_1 \cap I$, $f^{-1}(U_2) = I_2 \cap I$ と書けるが，$I_1 \cap I_2 = \phi$ なので，閉区間 $I = [0, 1]$ は連結でないことになって矛盾する．(本来は，$[0, 1]$ が連結であることの証明が必要であるが，それには $\mathbb{R}$ の定義に遡る必要があって簡単ではない.) $\square$

定理 3.11. $\phi \neq A \subset \mathbb{R}^n$ で，A は開集合であるとする．A が連結ならば A は弧状連結である．

略証. A は連結であるが弧状連結でないと仮定して矛盾を導く．$P \in A$ に対し，

$$U := \left\{ Q \in A \;\middle|\; P, Q \text{ に対し，} P, Q \text{ を両端とするような } A \text{ 内の曲線 } C \text{ が存在する} \right\}$$

$$V := \left\{ Q \in A \;\middle|\; P, Q \text{ に対し，} P, Q \text{ を両端とするような } A \text{ 内の曲線 } C \text{ は存在しない} \right\}$$

とおく．$P \in U$ なので $U \neq \phi$ である．A は弧状連結でないので，点 P をうまく選んでおけば $V \neq \phi$ となる．また $U \cap V = \phi, U \cup V = A$ である．$U_1 \cap U_2 = \phi, U_1 \cap A = U, U_2 \cap A = V$ を満たす開集合 U_1, U_2 が存在することを示せば，A は連結でないことになり矛盾する．この部分の証明は少し面倒なので省略する． $\square$

4. 陰関数定理とヤコビアン

定理 4.1.(陰関数定理) A は $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の領域 (連結な開集合) で，$f(x_1,\dots, x_n, y)$ は A 上の C^1 級関数とする．ある点 $(a_1,\dots, a_n, b) \in A$ において，

$$f(a_1, \dots, a_n, b) = 0, \quad f_y(a_1, \dots, a_n, b) \neq 0$$

が成り立つと仮定する．すると，$\mathbf{a} = (a_1,\dots, a_n)$ を含む $\mathbb{R}^n$ のある領域 U を選べば，U 上で C^1 級なある関数 $g(x_1,\dots, x_n)$ が一意的に存在して，$b = g(a_1,\dots, a_n)$，かつ，任意の $(x_1,\dots, x_n) \in U$ に対して

$$f(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

が成り立つ．また，U 上で

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{f_{x_i}(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))}{f_y(x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n))} \qquad ①$$

が成り立つ．

証明. 簡単のため $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)$ とおいて，$(x_1,\dots, x_n, y) = (\mathbf{x}, y)$ 等と表す．仮定から $f_y(\mathbf{a}, b) > 0$ または $f_y(\mathbf{a}, b) < 0$ であるが，後者の場合は f の代わりに $-f$ を考えることにすれば，$f_y(\mathbf{a}, b) > 0$ と仮定してよい．

$f(\mathbf{a}, b) = 0$, $f_y(\mathbf{a}, b) > 0$ だから，正の実数 p と $\mathbf{a}$ を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ を十分小さく選べば，任意の $\mathbf{x} \in U$ と任意の $y \in I := [b-p, b+p]$ に対して，$f_y(\mathbf{x}, y) > 0$ となる．特に，$f(\mathbf{a}, b+p) > 0$, $f(\mathbf{a}, b-p) < 0$ である．f は連続だから，$\mathbf{a}$ を含む $\mathbb{R}^n$ の領域 U を十分小さく選び直せば，任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して，$f(\mathbf{x}, b+p) > 0$, $f(\mathbf{x}, b-p) < 0$ である．すると，中間値の定理より，$\mathbf{x} \in U$ を固定したとき $f(\mathbf{x}, y) = 0$ となる $y \in I$ が存在する．$\mathbf{x}$ を固定したとき $f(\mathbf{x}, y)$ は y の 1 変数関数として狭義単調増加なので，$b-p < y < b+p$ の範囲で，$f(\mathbf{x}, y) = 0$ を満たす y は一意的である．この y を $y = g(\mathbf{x})$ と表すことにする．すると，$b = g(\mathbf{a})$，かつ，任意の $\mathbf{x} \in U$ に対して $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ が成り立つ．

g が微分可能であることの厳密な証明は純粋数学的な細かい議論になるので，雰囲気だけ説明しておく．点 $(\mathbf{a}, b)$ の近くでは，$f(\mathbf{x}, y)$ は 1 次関数

$$\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{a}, b)(x_i - a_i) + f_y(\mathbf{a}, b)(y - b)$$

で近似できる．近似のずれを不等式で細かく評価すると，g は連続で微分可能であることがわかる．すると，$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ の両辺を x_i で微分して

$$\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + g_{x_i}(\mathbf{x}) f_y(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$$

が得られる．これより，①が得られる．① より g は C^1 級である． □

定義 4.2.(ヤコビアン) 一般に，A, B は集合で，A の元 x に対し B の元 (それを $F(x)$ としよう) を対応させる規則を $F\colon A \to B$ と書き，A から B への**写像**というのであった．特に，$A \subset \mathbb{R}^n$, $B = \mathbb{R}^m$ の場合を考える．$\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n) \in A$ に対し，$\mathbf{y} = (y_1,\dots, y_m) = F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ を対応させる写像 $F\colon A \to \mathbb{R}^m$ を考える．このとき，$\mathbf{y}$ の i 番目の成分 y_i は，$y_i = f_i(x_1,\dots, x_n)$ $(i = 1,\dots, m)$ と適当な関数 f_i を用いて表すことができる．今，A が $\mathbb{R}^n$ 内の開集合で，$f_1,\dots, f_m$ がすべて C^r 級であるとき，$F\colon A \to \mathbb{R}^m$ は C^r **級写像**であるという $(r = 0, 1,\dots, \infty)$．C^0 級写像は**連続写像**ともいう．また，$F\colon A \to \mathbb{R}^m$ が C^r 級写像で単射であり，逆写像 $F^{-1}\colon F(A) \to A$ も C^r 級写像であるとき，$F\colon A \to \mathbb{R}^m$ は中への C^r 級**同相写像**であるあるという．

今，$F\colon A \to \mathbb{R}^m$ は C^1 級写像であると仮定する．$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ を (i, j)-成分とする m 行 n 列の行列を

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

と書き，F の**ヤコビ行列** (Jacobian matrix) という．特に $m = n$ のとき，ヤコビ行列は正方行列になるが，その行列式を

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

と書き，F の**ヤコビアン** (Jacobian) という．ヤコビアンを $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ と書いている教科書も多いが，この講義ノートでは，上記のように，$\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ はヤコビ行列とし，ヤコビアンは $\dfrac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ のほうで表わして区別することにする．また，この講義ノートでは，F のヤコビ行列を J_F, F のヤコビアンを D_F と書くこともある．

定理 4.3.(多変数の陰関数定理) A は $\mathbb{R}^n$ 内の領域，B は $\mathbb{R}^m$ 内の領域とし，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ 内の点を $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ とおいて，$(x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_m) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ で表す．また $\varphi\colon A \times B \to \mathbb{R}^m$ は C^1 級写像とし，その i 番目の成分が $z_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $(i = 1,\ldots, m)$ で与えられるとする．今，1 点 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A \times B$ において，$\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (0,\ldots, 0)$ であって，任意の $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A \times B$ において

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0$$

が成り立つと仮定する．すると，$\mathbf{a}$ を含む $\mathbb{R}^n$ のある領域 $U \subset A$ と $\mathbf{b}$ を含む $\mathbb{R}^m$ のある領域 $W \subset B$ を選べば，C^1 級写像 $\psi\colon U \to W$ で，2 条件

(1) $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$

(2) 任意の $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in W$ に対し，$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (0,\ldots, 0)$ であることと $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ であることは同値である．

を満たすものが一意的に存在する．ここで，φ が C^r 級ならば ψ も C^r 級である $(r = 1, 2,\ldots, \infty)$．また，$\psi$ の i 番目の成分を $z_i = g_i(\mathbf{x})$ $(i = 1,\ldots, m)$ とするとき，任意の $\mathbf{u} \in U$ に対して

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{u}, \psi(\mathbf{u})) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．上式を短く書き換えると，

$$\left.\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} = \left.\left(\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right)\right|_{(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{u},\psi(\mathbf{u}))}$$

証明は，$m = 1$ の場合は定理 4.1 で，あとは m に関する帰納法で証明すればよいが，これも純粋数学的な議論が長くて，直感的には明らかな部分を細かく議論するタイプの証明なので割愛する．例えば，下記を参照せよ．

杉浦光夫「解析入門 II」 東大出版会 p.11 定理 1.2

証明のアイデアだけ書いておく．$\mathbf{y}$ の 1 つの変数を $y_m = b_m$ と固定して考えると，$m - 1$ 変数の場合に帰着されて，$(m - 1)$ 変数の ψ が得られる．その後で，固定した y_m を動かすことを考え，$(m - 1)$ 変数の変化の様子を観察する． $\square$

定理 4.4.(逆写像定理) r は自然数か ∞ とする．U は $\mathbb{R}^n$ 内の領域で，$F\colon U \to \mathbb{R}^n$ は C^r 級写像であるとする．F の i 番目の成分を $y_i = f_i(x_1,\ldots, x_n)$ $(i = 1,\ldots, n)$ とおく．

$$W = \varphi(U) := \left\{\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{x} \in U\right\}$$

(これを φ による U の**像**とか**値域**という) とおく．もし，任意の $\mathbf{u} \in U$ に対して $\left.\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{u}} \neq 0$ であれば，$F\colon U \to W$ は全単射で，逆写像 $F^{-1}\colon W \to U$ も C^r 級である．つまり，$F\colon U \to W$ は C^r 級同相写像である．

証明. $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in W$ に対し，$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ として $\varphi\colon U \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を定め，前定理を適用すると，C^r 級写像 $\psi\colon W \to U$ で，任意の $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in W$ に対し，$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (0,\ldots, 0)$ であることと $\mathbf{y} = \psi(\mathbf{x})$ であることが同値であるようなものが存在する．この ψ が F^{-1} を与える． □

★ $\mathbb{R}^n$ 内の中の多様体

「曲線」とか「曲面」という用語は，あまり厳密な定義をしないで用いているが，多変数関数を扱うときは，曲線や曲面を高次元に一般化した「多様体」というものを考え，「曲線は 1 次元多様体」,「曲面は 2 次元多様体」と考えるのがよい．いずれにせよ，4 次元以上の空間内の図形には日常生活的な用語がないし，曲線・曲面のように直感的・感覚的に理解することもできないから，集合・写像などの数学概念を用いて，きちんと定義するしかない．ただ，一般の多様体は抽象的なので，ここでは $\mathbb{R}^n$ 内の「なめらかさのある」多様体だけを考える．

例えば「多角形の周」は連続曲線であるが，微分を考えるときは頂点で角があるような曲線は扱いずらい．微分で「曲線」を考えるときは C^1 級曲線程度のなめらかさが要求される．以下の多様体の定義も，そういう一定のなめらかさを持ったものだけを考える．

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 C を考える主な方法として，(1)「ある関数 $f(x, y)$ により $f(x, y) = 0$ で定まる集合を C とする」方法と，(2)「2 つの関数 $x = f(t)$, $y = g(t)$ によって，$C = \{(f(t), g(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$」と定義する方法があった．(1) を**陰関数** $f(x, y) = 0$ **による定義**, (2) を**媒介変数** (**パラメータ**) **表示** $x = f(t)$, $y = g(t)$ **による定義**という．以下では (2) の考え方で多様体を定義し，後で (1) との関係を考察する．

定義 4.5. m, n は自然数で $m \leqq n$ とする．r は自然数または ∞ とする．集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ に対し，ある集合 K と，各 $k \in K$ に対して M の部分集合 $U_k \subset M$ が存在して，以下の (1), (2) が成り立つとする．

(1) W はすべての U_k $(k \in K)$ の合併集合である．

(2) 各 $k \in K$ に対し，$\mathbb{R}^m$ のある領域 (連結な開集合) W_k と，全単射 $\varphi_k\colon W_k \to U_k$ が存在し，φ_k の j 番目の成分を $g_{k,j}(t_1,\ldots, t_m)$ $(i = 1,\ldots, n)$ とするとき，各 $g_{k,i}$ は W_k 上で C^r 級である．さらに，すべての点 $\mathbf{t} = (t_1,\ldots, t_m) \in W_k$ において，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_{k,1}}{\partial t_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial g_{k,1}}{\partial t_m}(\mathbf{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_{k,n}}{\partial t_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial g_{k,n}}{\partial t_m}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = m$$

が成り立つ．

このとき，M は $\mathbb{R}^n$ 内の m **次元** C^r **級多様体**であるという．1 次元 C^r 級多様体を $\mathbb{R}^n$ 内の C^r **級曲線**といい，2 次元 C^r 級多様体を $\mathbb{R}^n$ 内の C^r **級曲面**という．また，$\mathbb{R}^n$ 内の $(n-1)$ 次元多様体を**超曲面**という．

定理 4.6. r は自然数または ∞ とする．U は $\mathbb{R}^{m+n}$ 内の開集合で，$i = 1,\ldots, n$ に対し $f_i(x_1,\ldots, x_{m+n})$ は U 上の C^r 級関数とする．

$$M = \{\mathbf{x} \in U \mid \text{すべての } i = 1,\ldots, n \text{ に対して } f_i(\mathbf{x}) = 0\}$$

とおく．もし，任意の $\mathbf{u} \in U$ に対して，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}}(\mathbf{u}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{u}) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} = n \qquad ①$$

が成り立てば，M は $\mathbb{R}^{m+n}$ 内の m 次元 C^r 級多様体である．

この M を $f_1 = \cdots = f_n = 0$ **で定まる多様体**という．

証明. 点 $(v_1,\ldots, v_{m+n}) \in M$ を取る．$\{1,\ldots, m+n\}$ 内の n 個の元から成るある部分集合 $\{i_1,\ldots, i_n\}$ を取ると，$\dfrac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})} \neq 0$ である．以下，添え字を簡単にするため $i_1 = m+1,\ldots, i_n = m+n$ の場合を考え，$y_1 = x_{i_1} = x_{m+1},\ldots, y_n = x_{i_n} = x_{m+n}$ と書く．定理 4.3 を $\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ として適用する．すると，$\mathbf{v} := (v_1,\ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ を含む $\mathbb{R}^m$ のある開集合 $W_{\mathbf{v}} \subset \mathbb{R}^m$ と $W_{\mathbf{v}}$ 上の C^r 級関数 $y_k = g_k(\mathbf{x})$ が存在して，任意の $\mathbf{x} \in W_{\mathbf{v}}$ に対して

$$f_i\bigl(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}),\ldots, g_n(\mathbf{x})\bigr) = 0$$

$(i = 1,\ldots, n)$ を満たす．今，$\mathbf{t} = (t_1,\ldots, t_m) \in W_{\mathbf{v}}$ に対し，$x_j = t_j$ $(j = 1,\ldots, m)$, $x_{m+k} = g_k(t_1,\ldots, t_m)$ $(k = 1,\ldots, k)$ によって写像 $G_{\mathbf{v}}\colon W_{\mathbf{v}} \to \mathbb{R}^{m+n}$ を定義する．$G_{\mathbf{v}}(W_{\mathbf{v}}) \subset M$ である．さらに，$U_{\mathbf{v}} := G_{\mathbf{v}}(W_{\mathbf{v}}) \subset M$ とおき，$G_{\mathbf{v}}$ の値域を $W_{\mathbf{v}}$ に制限した写像を $\varphi_{\mathbf{v}}\colon W_{\mathbf{v}} \to U_{\mathbf{v}}$ とおくと，これは定義 4.5(2) の条件を満たす.

$\mathbf{v}$ を M 内の点を動かせば (1) も成り立つ．よって，M は C^r 級多様体である． □

5. ラグランジュの未定係数法とテーラー展開

★ ラグランジュの未定係数法

多変数の場合は定理の形が繁雑になるので，最初に 2 変数の場合のラクランジュの未定係数法定理を紹介し，その後で，多変数の場合のラクランジュの未定係数法定理を紹介する．

定理 5.1. $g(x,\, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，$g(x,\, y) = 0$ で定まる集合 C は C^1 級曲線になると仮定する．U は C を含む $\mathbb{R}^2$ の開集合で，$f(x,\, y)$ は U 上の C^1 級関数とする．今，f の定義域を C に制限して考え，C 上の点 $P = (a,\, b)$ で f は極値 (極大値や極小値) を取ると仮定する．さらに，$g_x(a,\, b) = g_y(a,\, b) = 0$ ではないと仮定する．今，λ を実数の変数として，3 変数関数

$$F(x,\, y,\, \lambda) := f(x,\, y) - \lambda g(x,\, y)$$

を考える．このとき，ある実数 μ を取ると，

$$F_x(a,\, b,\, \mu) = 0, \quad F_y(a,\, b,\, \mu) = 0, \quad F_\lambda(a,\, b,\, \mu) = 0 \qquad ①$$

が成り立つ．

逆に言うと，$f(x,\, y)$ が C 上で極値を取るような点を求めるには，連立方程式 ① を解けばよい，ということである．それから， ① の最後の方程式は $g(a,\, b) = 0$ と同値である．

証明は，次の多変数版とまとめて行う．

定理 5.2. $g_1,\ldots,\, g_m$ は $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とし，$g_1 = \cdots = g_m = 0$ で定まる集合 M は $(n-m)$ 次元 C^1 級多様体になると仮定する．U は M を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合で，f は U 上の C^1 級関数とする．今，f の定義域を M に制限して考え，M 上の点 $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,\, p_n)$ で f は極値を取ると仮定する．さらに，

$$\operatorname{rank} \left.\frac{\partial(g_1,\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|_{\mathbf{p}} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(p_1,\ldots,p_n) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(p_1,\ldots,p_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(p_1,\ldots,p_n) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(p_1,\ldots,p_n) \end{pmatrix} = m \qquad ①$$

が成り立つと仮定する．今，$\lambda_1,\ldots,\, \lambda_m$ を実数の変数として，$(n+m)$ 変数関数

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m) := f(x_1,\ldots,x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_m g_k(x_1,\ldots,x_n)$$

を考える．このとき，ある実数 $\mu_1,\ldots,\, \mu_m$ を取ると，

$$F_{x_i}(p_1,\ldots,0_n,\mu_1,\ldots,\mu_m) = 0 \quad (i = 1,\ldots,\, n) \qquad ②$$
$$F_{\lambda_j}(p_1,\ldots,p_n,\mu_1,\ldots,\mu_m) = 0 \quad (j = 1,\ldots,\, m) \qquad ③$$

が成り立つ．

証明. $r := n - m$ とおく． ① 式において，必要なら $x_1,\ldots,\, x_n$ の添え字を取り替えて，

$$\frac{D(g_1,\ldots,g_m)}{D(x_{r+1},\ldots,x_n)} \neq 0$$

であると仮定してよい．記号を見易くするため，$y_1 = x_{r+1},\, y_2 = x_{r+2},\ldots,\, y_m = x_n$ とおき，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,\, x_r) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,\, y_m) \in \mathbb{R}^m$ として，$\mathbb{R}^n$ の座標系を $(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ と書く．また，$\mathbf{a} := (p_1,\ldots,\, p_r) \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{b} := (p_{r+1},\ldots,\, p_n) \in \mathbb{R}^m$ とおく．定理 4.6 の証明で述べたように，$\mathbf{a}$ のある開近傍 $W \subset \mathbb{R}^r$ と，C^1 級写像 $\psi\colon W \to \mathbb{R}^r$ で，任意の $\mathbf{x} \in W$ に対して，$\mathbf{b} = \psi(\mathbf{a})$, $g_i(\mathbf{x},\, \psi(\mathbf{x})) = 0$ $(i = 1,\ldots,\, m)$ を満たすものが存在する．そこで，$\mathbf{x} \in W$ に対し W 上の C^1 級関数

$$\varphi(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x},\, \psi(\mathbf{x}))$$

を考える．$f(\mathbf{x},\, \mathbf{y})$ は $(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = (\mathbf{a},\, \psi(\mathbf{a}))$ で極値を取るから，$\varphi(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で極値を取る．よって，$\varphi_{x_1}(\mathbf{a}) = \cdots = \varphi_{x_r}(\mathbf{a}) = 0$ である．記号の簡略化のため，$\mathbf{0} = (0,\ldots,\, 0)$,

$$\varphi'(\mathbf{x}) := \big(\varphi_{x_1}(\mathbf{x}),\ldots,\, \varphi_{x_r}(\mathbf{x})\big) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}$$

と書くことにすれば，$\varphi'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ である．合成関数の微分法の公式より，

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} \qquad ④$$

である．行列の形で書いているので，掛け算の順序に気をつけよう．

ψ の j 番目の成分を $y_j = h_j(x_1,\ldots, x_r)$ $(j = 1,\ldots, m)$ とおく．陰関数定理より，

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{\partial(h_1, \ldots, h_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} = -\left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}$$

である．これを ④ に代入すると，

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} - \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} \qquad ⑤$$

となる．今，定数行ベクトル $\mu = (\mu_1,\ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ を

$$\mu := -\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \cdot \left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right)^{-1}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

で定める．これを，⑤ で $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ とした式に代入すると，

$$\mathbf{0} = \varphi'(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial(x_1, \ldots, x_r)} - \mu \left.\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$$

となる．両辺の各成分を見ると，これは ② 式である．

③ 式は，$g_i(a_1,\ldots, a_n) = 0$ と同値なので，成立する． □

ラクランジュの未定係数法 (上の定理) を利用して，極値の候補となる点を求めても，その点で本当に極大または極小になるかどうかを判定するには，その点の近くでの関数の増減を考察する以外に，あまり簡便な方法はない．ただ，M が曲線 C の場合に限っては，1 変数の極値問題と同じなので，以下のテクニックを利用することができる．

命題 5.3. $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であるとする．$a < x < b$ における $f'(x) = 0$ のすべての解は有限個であると仮定し，それらを小さいほうから順に，$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ とする．また，$a_0 := a$, $a_{n+1} := b$ とする．$1 \leqq i \leqq n$ とする．

(1) もし，$f(a_i) > f(a_{i-1})$ かつ $f(a_i) > f(a_{i+1})$ ならば，$x = a_i$ で $f(x)$ は極大になる．

(2) もし，$f(a_i) < f(a_{i-1})$ かつ $f(a_i) < f(a_{i+1})$ ならば，$x = a_i$ で $f(x)$ は極小になる．

(3) 上の (1), (2) 以外の場合，$x = a_i$ で $f(x)$ は極値を取らない．

何故，高校の教科書に書いてないのか不思議である．曲線 C の場合も連立方程式 $f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ を満たすすべての点をもとめ，そこでの $f(x, y)$ の値を計算して，上の原理を適用すれば，極大か極小かいずれでもないかが判定できる．また，最大値・最小値をとる点も決定できる．

★ 多変数関数のテーラー展開

定理 5.4. $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ で，U は (a, b) を中心とする $\mathbb{R}^2$ の半径 R の円 (内部を含む) で，$f(x, y)$ は U 上の C^n 級関数とする．今，U の内部の点 (x_1, y_1) を固定し，定点と考える．すると，$0 < \theta < 1$ を満たすある実数 θ をうまく選び，$x_2 := \theta a + (1 - \theta)x_1$, $y_2 := \theta b + (1 - \theta)y_1$ とおくと，以下の等式が成立する．

$$f(x_1, y_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!(k-r)!} \frac{\partial^k f(a, b)}{\partial x^r\, \partial y^{k-r}} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k-r} + \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial^n f(x_2, y_2)}{\partial x^r\, \partial y^{n-r}} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{n-r}$$

証明. $I := (-R,\ R)$ (開区間) とし，$t \in I$ に対し，$h_1(t) := a + (x_1 - a)t = (1 - t)a + tx_1$, $h_2(t) := b + (y_1 - b)t = (1 - t)b + ty_1$ とおく．また，

$$g(t) := f(h_1(t),\ h_2(t)) = f(a + (x_1 - a)t,\ b + (y_1 - b)t)$$

とおく．$g(t)$ は開区間 I 上で C^n 級である．

(1) $s \in I, 0 \leqq k \leqq n$ のとき，

$$g^{(k)}(s) = \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{\partial^k f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r \partial y^{k-r}} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k-r} \qquad ①$$

が成り立つことを k に関する帰納法で証明する．$k = 0$ のときは自明である．$0 \leqq k < m$ とし，①が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}
g^{(k+1)}(s) = \frac{d}{ds} g^{(k)}(s) &= \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{d}{ds} \frac{\partial^k f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r \partial y^{k-r} y} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k-r} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \Bigg(h_1'(s) \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^{r+1} \partial y^{k-r}} \\
&\qquad + h_2'(s) \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r x \partial y^{k+1-r}} \Bigg) (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k-r} \\
&= \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \Bigg((x_1 - a) \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^{r+1} \partial y^{k-r}} \\
&\qquad + (y_1 - b) \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r \partial y^{k+1-r}} \Bigg) (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k-r} \\
&= \sum_{q=1}^{k+1} \frac{k!}{(q-1)!(k+1-q)!} \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^q \partial y^{k+1-q}} (x_1 - a)^q (y_1 - b)^{k+1-q} \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r \partial y^{k+1-r}} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k+1-r} \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!} \frac{\partial^{k+1} f(h_1(s), h_2(s))}{\partial x^r \partial y^{k+1-r}} (x_1 - a)^r (y_1 - b)^{k+1-r}
\end{aligned}$$

が成り立つ．式変形の途中で $q := r + 1$ とおき，

$$\frac{k!}{(r-1)!(k+1-r)!} + \frac{k!}{r!(k-r)!} = \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!}$$

を用いた．

(2) $t \in I$ を固定する．1 変数のマクローリン・テーラーの定理より，$0 < \theta < 1$ を満たすある実数 θ をうまく選ぶと，

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!} t^n$$

が成り立つ．ここで，$t = 1$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) = g(1) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!(k-r)!} \frac{\partial^k f(a, b)}{\partial x^r \partial y^{k-r}} (x_1 - a)^k (y_1 - b)^{k-r} \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{n} \frac{\partial^n f(x_2, x_2)}{\partial x^r \partial y^{n-r}} (x_1 - a)^k (y_1 - b)^{n-r}
\end{aligned}$$

が得られる． □

同様に n 変数関数では以下が成り立つ．

定理 5.5. $\mathbf{a} = (a_1,\ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ で,
$$U := \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < R^2\right\}$$
とおく．$f(x_1,\ldots, x_n)$ は U 上の C^r 級関数とする．$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし，$m \in \mathbb{N}_0$ に対して
$$K_m := \left\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \;\middle|\; k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m\right\}$$
とおく．今，$(x_1,\ldots, x_n) \in U$ を固定して考える．すると，$0 < \theta < 1$ を満たすある実数 θ をうまく選び，$y_i := \theta a_1 + (1-\theta)x_i$ $(i = 1,\ldots, n)$ とおくと，以下の等式が成立する．
$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &\\ = \sum_{m=0}^{r-1} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in K_m} & \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \frac{\partial^m f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (x_1 - a_1)^{k_1}(x_2 - a_2)^{k_2} \cdots (x_n - a_n)^{k_n} \\ &+ \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in K_r} \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \frac{\partial^r f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (y_1 - a_1)^{k_1}(y_2 - a_2)^{k_2} \cdots (y_n - a_n)^{k_n} \end{aligned}$$

上の定理で，最後の**剰余項**が 0 に収束してくれれば，以下のような簡明な公式になる．

定理 5.6. $\mathbf{a}, U$ は前定理と同様とし，$f(x_1,\ldots, x_n)$ は U 上で C^∞ 級 (無限回微分可能) な関数とする．さらに，任意の $(x_1,\ldots, x_n) \in U$ に対して，
$$\lim_{r\to\infty} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in K_r} \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \frac{\partial^r f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (x_1 - a_1)^{k_1}(x_2 - a_2)^{k_2} \cdots (x_n - b_n)^{k_n} = 0$$
が成り立つと仮定する．すると，任意の $(x_1,\ldots, x_n) \in U$ に対して，以下の等式が成立する．
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f(\mathbf{a})}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} (x_1 - a_1)^{k_1} \cdots (x_n - a_n)^{k_n}$$

6. 極座標とヤコビアン・ラプラシアン

定義 6.1.(平面極座標) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) に対し，$r := \sqrt{x^2+y^2}$ とおき，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を満たす角度 θ を取る．この θ は一意的に定まるわけではないが，$(x, y) \neq (0, 0)$ のとき，他に $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ を満たす角度 φ があれば，ある整数 n により $\theta - \varphi = 2n\pi$ と表せる．このことを，θ **は** 2π **の整数倍を除いて一意的に定まる**と表現する．また，この θ を点 (x, y) の**偏角**という．平面上の点 (x, y) を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と (r, θ) によって表すことを，**(平面) 極座標表示**という．この場合，$0 \leqq \theta < 2\pi$ などの条件を課すことも多いが，そうしないこともある．

$$D := \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta < 2\pi\right\}$$

とし，極座標表示を $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ で定まる写像 $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^2$ と考える．

$$N := \left\{(0, \theta) \in D \,\middle|\, 0 \leqq \theta < 2\pi\right\}$$

とおく．$\varphi\colon A \to \mathbb{R}^2$ は全射であって，定義域を差集合 $(D - N)$ に制限し，終域を $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ に制限すれば，$\varphi : (D - N) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ は全単射で C^∞ 級の写像になる，そのヤコビ行列は

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

である．ヤコビアンは，その行列式を計算すればよいから，

$$D_\varphi = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta = r$$

となる．

定義 6.2.(空間極座標) 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の点 $P = (x, y, z)$ に対し，$r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく．原点を O とし，半直線 OP と z 軸の正の方向とのなす角度を θ (ただし $0 \leqq \theta \leqq \pi$) とする．P が z 軸上の点でないときは，P から (x, y)-平面に正射影した点の (x, y)-平面上での偏角を φ とする．通常は，$0 \leqq \varphi < 2\pi$ の範囲で選んでおく．P が z-軸上にあるときは φ は随意に選び，P が原点のときは θ も随意に選ぶ．すると，

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta \qquad ①$$

が成り立つ．空間内の点 P を (r, θ, φ) を用いて表すとき，それを**空間極座標**表示という．

$$D := \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, r \geqq 0,\, 0 \leqq \theta \leqq \pi,\, 0 \leqq \varphi < 2\pi\right\}$$

として，① 式で写像 $\varphi\colon D \to \mathbb{R}^3$ を定める．φ は全射である．また，

$$N := \left\{(r, \theta, \varphi) \in D \,\middle|\, r = 0 \text{ または } \theta = 0 \text{ または } \theta = \pi\right\}$$

とおき，L を $\mathbb{R}^3$ 内の z-軸とすると，$\varphi : (D - N) \longrightarrow (\mathbb{R}^3 - L)$ は全単射で C^∞ 級の写像になる，そのヤコビ行列は

$$J_\varphi = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

である．ヤコビアンは，その行列式を計算して (途中の計算略)，

$$D_\varphi = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

となる．

定義 6.3.(ラプラシアン) $f(x_1,\ldots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ 内のある領域で C^2 級であるとする．

$$\Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}\right) f(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$$

と書き，微分演算子 Δ を**ラプラシアン** (Laplacian) という．また，$\Delta f = 0$ を満たす関数 f を**調和関数**という．

上のラプラシアンは，電磁気学でよく登場し，距離に反比例する物理的な量を扱うとき重要になる．それを極座標で表すと有効な場合が多く，次のやや覚えにくい公式を頻繁に用いる．証明の中の途中の計算は面倒なので飛ばして読んでかまわない．

公式 6.4. $z=f(x,\,y)$ は $\mathbb{R}^2$ のある領域上で C^2 級であるとする．$z=f(r\cos\theta,\,r\sin\theta)$ とし，z を $(r,\,\theta)$ の関数と考え，平面極座標でラプラシアンを表示すると以下のようになる．

$$\Delta f=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}$$

証明. とし, 合成関数の偏微分の公式を用いると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y},\\ \frac{\partial z}{\partial \theta}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

である. さらに, $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ に対して合成関数の微分の公式を用いれば,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=\cos\theta\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right\}+\sin\theta\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r}\right\}\\ &=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &=\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

となる. 同様に,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}&=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=-r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}\right)+r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &=-r\left\{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}+r\left\{-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\}\\ &=-r\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)-r\sin\theta\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right\}\\ &\qquad\qquad+r\cos\theta\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right\}\\ &=-r\frac{\partial z}{\partial r}-r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &=-r\frac{\partial z}{\partial r}+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

である. ゆえに,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\\ &=\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &\qquad\qquad+\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\\ &=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

である． □

公式 6.5. $u = f(x,\, y,\, z)$ は $\mathbb{R}^3$ のある領域内で C^2 級であるとする．

$$u = f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)$$

を $(r,\, \theta,\, \varphi)$ の関数と考え，空間極座標でラプラシアンを表示すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

証明. $R = r\sin\theta$ とおくと，$x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi$ である．$(x,\, y)$ を平面極座標 $(R,\, \varphi)$ で表すと，前公式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

である．$z = r\cos\theta,\ R = r\sin\theta$ だから，平面極座標の場合の前公式が使えて，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

となる．ゆえに，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \qquad ①$$

となる．他方，$z = r\cos\theta,\ R = r\sin\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta \\ \frac{\partial u}{\partial\theta} &= \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial\theta} = r\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial R}\cos\theta\right)\end{aligned}$$

となる．この 2 つの式から，

$$\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial R}$$

である．これを ① の $\dfrac{\partial u}{\partial R}$ のところへ代入して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\end{aligned}$$

を得る． □

$f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{1}{r}$ に対し，上の公式を利用して計算すると，

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{1}{r} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \frac{2}{r^4} - \frac{2}{r^4} = 0$$

となり，$f(x,\, y,\, z)$ は調和関数であることが分かる．電磁気学でよく使う記号との関係を書いておく．

定義 6.6. $f(x,\, y,\, z)$ は $\mathbb{R}^3$ 内のある領域 U で C^1 級であるとする．空間ベクトル $\mathbb{R}^3$ を値域とする U 上の写像

$$\operatorname{grad} f = \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \frac{\partial f}{\partial y},\, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

を f の**勾配**とか**グラジエント**という．∇ は**ナブラ**と読む．

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

と形式的にベクトルの形で表すことが多い．また，

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)\big)$$

で定まる写像 $\mathbf{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ は C^1 級写像であるとする．このとき，$\mathbf{f}$ を U 上の**ベクトル場**ともいう．ベクトル場に対して U 上の関数を**スカラー場**ともいう．

$$\operatorname{div}\mathbf{f} = \nabla\cdot\mathbf{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

を $\mathbf{f}$ の**発散**とか**ダイバージェンス**という．ここで，$\nabla\cdot\mathbf{f}$ は形式的に ∇ をベクトルと考えたときの内積を表す．定義から，

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

である．これらは $\mathbb{R}^n$ の場合でも同様に定義できるが，$n \neq 3$ の場合はあまり使われない．

7. 多変数関数の積分の定義

以下の定義の中で，上限 sup, 下限 inf などの用語は，微積分学 B1 講義ノートの定理 1.5 を参照してほしい．

定義 7.1. (1) $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}$ で，$a_k \leqq b_k$ $(k = 1,\ldots, n)$ であるとする．$I_k := [a_k, b_k]$ は $\mathbb{R}$ 上の閉区間とし，$I_1,\ldots, I_n$ の直積集合を，

$$I := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_k \leqq x_k \leqq b_k \ k = 1,\ldots, b_n)\right\}$$

とおく．I と合同な図形を n **次元超直方体**という.「合同」というのは，適当な平行移動，回転移動，対称移動を何回か行うと 2 つの図形が一致する，という意味である．回転移動と対称移動の定義は「線形代数学 B2」の講義ノートで説明してある．上の I に対し，

$$\mu_n(I) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

と定め，$\mu_n(I)$ を I の (n 次元)**(ジョルダン) 測度**とか**超体積**という．$\mu_n(I)$ は $v(I)$ とか $\mathrm{vol}_n(I)$ などと書くことも多く，あまり定まった記号はない．3 次元超直方体は普通の「直方体」で $\mu_3(I)$ は I の体積, 2 次元超直方体は長方形で $\mu_2(I)$ は I の面積，1 次元超直方体が線分で $\mu_1(I)$ は I の長さである．

(2) 上のような I を取る．自然数 r_k と，$a_k = x_{k,0} \leqq x_{k,1} \leqq \cdots \leqq x_{k,r_k} = b_k$ を満たす実数を選んで

$$\Delta_k := \left\{[x_{k,i-1}, x_{k,i}] \;\middle|\; i = 1, 2,\ldots, r_k\right\}$$

と，区間 I_k を r_k 個の区間に分けることを，区間 I_k の**分割**という．今，$I_{k,i} := [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ とおく．各 $k = 1,\ldots, n$ に対して上のような I_k の分割 Δ_k があるとき，

$$\Delta := \left\{I_{1,i_1} \times I_{2,i_2} \times \cdots \times I_{n,i_n} \;\middle|\; 1 \leqq k \leqq n,\, 1 \leqq i_k \leqq r_k\right\}$$

として I を $r_1 r_2 \cdots r_n$ 個の n 次元超直方体に分けることを，I の**超直方体による分割**という．もっと一般的な分割も後で定義するが，しばらくは，超直方体による分割のみを考える．一時的な記号であるが, Δ に属する超直方体 $D := I_{1,i_1} \times I_{2,i_2} \times \cdots \times I_{n,i_n}$ に対し，D の直径 (対角線の長さ) を

$$\delta(D) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{k,i_k} - x_{k,i_k-1})^2}$$

と書くことにし，

$$\delta(\Delta) := \max\left\{\delta(D) \;\middle|\; D \in \Delta\right\}$$

とおいて，$\delta(\Delta)$ を，分割 Δ の**粗さ**とか**細かさ**と呼ぶことにする．$\delta(\Delta)$ を $|\Delta|$ と書く人も多い．また，ここだけの記号であるが，超直方体 I の超直方体による分割全体の集合を，

$$\mathcal{B}(I) = \left\{\Delta \;\middle|\; \Delta \text{ は } I \text{ の超直方体による分割}\right\}$$

と書くことにする．

(3) $y = f(x_1,\ldots, x_n)$ は I 上で定義され，I 上で有界な関数とする．$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ と書き，便宜的に，

$$\Sigma(f, \Delta) := \sum_{D\in\Delta} \left(\sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})\right) \mu_n(D), \quad \sigma(f, \Delta) := \sum_{D\in\Delta} \left(\inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})\right) \mu_n(D)$$

とおき，$\Sigma(f, \Delta)$ を**過剰和**, $\sigma(f, \Delta)$ を**不足和**という．$\Sigma(f, \Delta) \geqq \sigma(f, \Delta)$ である．記号の簡略化のために，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$ と略記する．

$$\overline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \inf_{\Delta\in\mathcal{B}(I)} \Sigma(f, \Delta), \quad \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \sup_{\Delta\in\mathcal{B}(I)} \sigma(f, \Delta)$$

と定義し，前者を I 上での $f(\mathbf{x})$ の**上積分**, 後者を $I = [a, b]$ 上での $f(\mathbf{x})$ の**下積分**という．もし，$\overline{\int_I} f(\mathbf{x})\, dx = \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\, dx$ が成立するとき，$f(\mathbf{x})$ は I 上で (**ジョルダン**) **積分可能**であるといい，その値を

$$\int_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

と書き，I 上での $f(\mathbf{x})$ 上での (**ジョルダン**) **積分**という．$\displaystyle\int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ は以下のように，様々な書き方で表わされる．

$$
\begin{aligned}
\int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} &= \int_I f\,d\mathbf{x} = \int_I f\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n = \int_I f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n \\
&= \int\!\!\int\cdots\int_I f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int\!\!\int\cdots\int_I dx_1\cdots dx_n f(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

ただし，最後の書き方は誤解の恐れのない場合のみに用いる．下の行では，それぞれ $\displaystyle\int$ を n 個並べているつもりである．

命題 7.2. I は上の定義のような $\mathbb{R}^n$ 内の超直方体とする．また，f, g は I 上で定義された関数で，I 上で積分可能であるとする．a, b は定数とする．$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ として，$f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ と書く．このとき，以下が成り立つ．

(1) $af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})$ も I 上で積分可能で，

$$\int_I \big(af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\big)\,dx_1\cdots dx_n = a\int_I f(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n + b\int_I g(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

(2) $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ が I 上で有界ならば $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ も I 上で積分可能である．

証明. (1) は簡単なので (2) のみ証明する．$C_1 := \sup\limits_{\mathbf{x}\in I}|f(\mathbf{x})|$, $C_2 := \inf\limits_{\mathbf{x}\in I}|g(\mathbf{x})|$ とおき，$C := \max\{C_1, C_2\}$ とおく．

$\Delta \in \mathfrak{B}(I)$ を取る．$D \in \Delta$ と D 上の関数 h に対し．$M_D(h) := \sup_{\mathbf{x}\in D} h(\mathbf{x})$, $m_D(h) := \inf_{\mathbf{x}\in D} h(\mathbf{x})$ とおく．$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\big|f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})g(\mathbf{y})\big| &\leqq \big|(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})(g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y}))\big| \\
&\leqq C\cdot\big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\big| + +C\cdot\big|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\big| \\
&\leqq C(M_D(f) - m_D(f)) + C(M_D(g) - m_D(g))
\end{aligned}
$$

なので，$M_D(fg)-m_D(fg) \leqq C\big((M_D(f)-m_D(f))+(M_D(g)-m_D(g)\big)$ が成り立つ．これより，$A(\Delta) := \Sigma(fg, \Delta)$, $B(\Delta) := \sigma(fg, \Delta)$ は有限の値であることがわかる．

$$\big|A(\Delta) - B(\Delta)\big| \leqq C\big\{\big(\Sigma(f,\Delta) - \sigma(f,\Delta)\big) + \big(\Sigma(g,\Delta) - \sigma(g,\Delta)\big)\big\}$$

で，$\inf\limits_{D\in\mathfrak{B}(I)}\big(\Sigma(f, \Delta) - \sigma(f, \Delta)\big) = 0$ 成り立つ (g についても同様) だから，$\inf\limits_{\Delta\in\mathfrak{B}(I)}\big|A(\Delta) - B(\Delta)\big| = 0$ である．よって，fg は I 上で積分可能である．□

注意. 上の (2) は f, g が有界でないと成立しない場合がある．例えば，$n = 1$, $I = [0, 1]$ とし，$x \neq 0$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $f(0) = 0$ で $f(x)$ を定めると $f(x)$ は I 上で積分可能である．$g(x) = f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = +\infty$ で積分可能でない．

定義 7.3. (1) $A \subset \mathbb{R}^n$ は空でない有界な集合とする．すると，$A \subset I \subset \mathbb{R}^n$ を満たす定義 7.1(1) のような超直方体 I が存在する．このとき，$\mathbf{x} \in I$ に対して

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{x} \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

として I 上の関数 χ_A を定める．もし，χ_A が I 上で積分可能なとき A は **(ジョルダン) 可測**であるといい，

$$\mu_n(A) := \int_I \chi_A(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

を A の n 次元の **(ジョルダン) 測度**という．3 次元の測度を体積，2 次元の測度を面積という．A が線分のとき 1 次元の測度は A の長さである．これらが I の選び方に依存しないことは，明らかであろう．

(2) 上の設定のもと，$f(\mathbf{x})$ は A 上で定義され，A 上で有界な関数とする．今,

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

として I 上の関数 $\overline{f}(\mathbf{x})$ を定める．もし，$\overline{f}$ が I 上で積分可能なとき f は A 上で **(ジョルダン) 積分可能**であるといい,

$$\int_A f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n := \int_I \overline{f}(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n$$

と定義し，A 上での $f(\mathbf{x})$ 上での **(ジョルダン) 積分**という．

定理 7.4. $A,\, B \subset \mathbb{R}^n$ はいずれも有界で可測な集合とする．すると，$A \cup B$ と $A \cap B$ も有界かつ可測で,

$$\mu_n(A \cup B) + \mu_n(A \cap B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) \qquad ①$$

が成り立つ．

証明. 有界であることはすぐわかるので，可測であることを証明する．$A,\, B$ が可測だから，$\chi_A,\, \chi_B$ は I 上で積分可能である．命題 7.2(2) より，$\chi_{(A \cap B)}(\mathbf{x}) = \chi_A(\mathbf{x})\chi_B(\mathbf{x})$ も I 上で積分可能である．よって，$A \cap B$ は可測である．また，$\chi_{(A \cup B)}(\mathbf{x}) = \chi_A(\mathbf{x}) + \chi_B(\mathbf{x}) - \chi_{(A \cap B)}(\mathbf{x})$ なので，$A \cup B$ も可測であり，①が成り立つ． □

定理 7.5. A は $\mathbb{R}^n$ 内の可測で有界な集合で，$f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ は A 上で積分可能な関数とする．また，$a,\, b$ は定数とする．すると，次が成り立つ．

$$\int_A \big(af(\mathbf{x}) + bg(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} = a\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + b\int_A g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

証明. 命題 7.2 よりわかる． □

定理 7.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ は可測な有界閉集合とし，f は A 上の連続関数とする．すると，f は A 上で積分可能である．

証明. この証明は専門的なので読まなくてよい．

A はコンパクトなので，f は A 上で一様連続で，最大値と最小値を取り，有界である (定理 1.8, 定理 1.10)．$C := \sup\limits_{\mathbf{x} \in A} |f(\mathbf{x})|$ とおく．

A を含む超直方体 I を 1 つ固定する．また，任意の (十分 0 に近い) 正の実数 ε を取り固定する．$\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{2\mu_n(I)}$ とおく．f は一様連続なので，ある正の実数 δ をうまく選べば，$d(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) < \delta$ を満たす任意の $\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in A$ に対して $\big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\big| < \varepsilon'$ が成り立つ．超直方体による I の分割 Δ を，Δ に属するどの超直方体 D の直径も δ 未満になるように選ぶ．命題 7.2 の証明の記号で，$|M_D(f) - m_D(f)| < \varepsilon'$ である．

$\overline{f} = f\chi_A$ とおく．$\displaystyle\int_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} := \int_I \overline{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ であった．$\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in D$ に対し，$D \subset A$ の場合は

$$\big|\overline{f}(\mathbf{x}) - \overline{f}(\mathbf{y})\big| = \big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\big| < \varepsilon'$$

で，$D \cap A = \phi$ の場合は，$\big|\overline{f}(\mathbf{x}) - \overline{f}(\mathbf{y})\big| = |0 - 0| = 0$ であり，$D \cap A \neq \phi$ かつ $D \not\subset A$ の場合は,

$$\begin{aligned} \big|\overline{f}(\mathbf{x}) - \overline{f}(\mathbf{y})\big| &\leqq \big|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\big| + \max\big\{|f(\mathbf{x})|, |f(\mathbf{y})|\big\} \\ &\leqq \varepsilon' + C \end{aligned}$$

である．今，$D \cap A \neq \phi$ かつ $D \not\subset A$ を満たすような Δ 内の D 全体の集合を $B(\Delta)$ とおけば,

$$\begin{aligned} \Sigma(f,\, \Delta) - \sigma(f,\, \Delta) &= \sum_{D \in \Delta} \left(\sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \right) \mu_n(D) \\ &\leqq \sum_{D \in \Delta} \varepsilon' \mu_n(D) + C \sum_{D \in B(\Delta)} \mu_n(D) \end{aligned}$$

$$\leqq \varepsilon' \mu_n(I) + C \sum_{D \in B(\Delta)} \mu_n(D) = \frac{\varepsilon}{2} + C \sum_{D \in B(\Delta)} \mu_n(D) \qquad ①$$

となる．ところで，$\mu_n(A)$ の定義を思い出すと，

$$\sum_{D \in B(\Delta)} \mu_n(D) = \Sigma(\chi_A, \Delta) - \sigma(\chi_A, \Delta) \qquad ②$$

である．A が可測なのだから，

$$\inf_{\Delta \in \mathfrak{B}(I)} \Sigma(\chi_A, \Delta) = \sup_{\Delta \in \mathfrak{B}(I)} \sigma(\chi_A, \Delta)$$

である．よって，$\displaystyle \inf_{\Delta \in \mathfrak{B}(I)} \sum_{D \in B(\Delta)} \mu_n(D) = 0$ である．よって，①は 0 に収束し，f は A 上で積分可能である． □

8. 累次積分

補題 8.1. $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}$; $a'_1,\ldots, a'_m \in \mathbb{R}$, $b'_1,\ldots, b'_n m \in \mathbb{R}$ で，$a_i \leqq b_i$ $(i = 1,\ldots, n)$, $a'_j \leqq b'_j$ $(j = 1,\ldots, m)$ であるとする．$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, $J := [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_m, b'_m] \subset \mathbb{R}^m$ とおく．また，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の座標系，$\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の座標系とし，$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_m)$ を $\mathbb{R}^{n+m}$ の座標系とする．$f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ 内の超直方体 $I \times J$ 上で有界で積分可能であるとする．また，$\mathbf{y}_0 \in J$ を固定したとき，$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ は I 上で積分可能であると仮定する．このとき，

$$\int_{I\times J} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right) d\mathbf{y}$$

が成り立つ．ここで，$d\mathbf{x}\,d\mathbf{y} = dx_1 \cdots dx_n\, dy_1 \cdots dy_m$ である．

証明. $\Delta := \{D_i\}_{i=1}^r$ は超直方体による I の分割とし，$\Delta' := \{D'_j\}_{j=1}^q$ は超直方体による J の分割とする．$D_i \times D'_j$ は $\mathbb{R}^{m+n}$ 内の超直方体で，$\mu_{n+m}(D_i \times D'_j) = \mu_n(D_i)\mu_m(D'_j)$ が成り立つ．また，

$$\Delta \times \Delta' := \left\{D_i \times D'_j \;\middle|\; i = 1,\ldots, r;\ j = 1,\ldots, q\right\}$$

は $I \times J$ の分割である．点 $\mathbf{y}_0 \in J$ を任意に選んで固定する．

$$\begin{aligned}\inf_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_n(D_i) &\leqq \inf_{\mathbf{x}\in D_i} f(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\mu_n(D_i) \leqq \int_{D_i} f(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\,d\mathbf{x}\\ &\leqq \sup_{\mathbf{x}\in D_i} f(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\mu_n(D_i) \leqq \sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_n(D_i)\end{aligned}$$

である．$i = 1,\ldots, r$ について和を取り，$\mathbf{y}_0$ を D'_j 内を動かすと，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r \inf_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_n(D_i) &\leqq \inf_{\mathbf{y}\in D'_j} \int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\\ &\leqq \sup_{\mathbf{y}\in D'_j} \int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x} \leqq \sum_{i=1}^r \sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_n(D_i)\end{aligned}$$

が得られる．$\mu_m(D'_j)$ をかけて $j = 1,\ldots, q$ について和を取ると，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r \inf_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_{n+m}(D_i\times D_j) \leqq \sum_{j=1}^q \inf_{\mathbf{y}\in D'_j} \left(\int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right)\mu_m(D'_j)\\ &\leqq \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right) d\mathbf{y} \leqq \sum_{j=1}^q \sup_{\mathbf{y}\in D'_j} \left(\int_I f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right)\mu_m(D'_j)\\ &\leqq \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^r \sup_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in D_i\times D'_j} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu_{n+m}(D_i\times D_j)\end{aligned}$$

ここで，Δ と Δ' を動かして $\delta(\Delta) \to 0$, $\delta(\Delta') \to 0$ とすると，上式の最初の辺と最後の辺はともに $\displaystyle\int_{I\times J} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}$ に収束する．よって，求める公式を得る． □

定理 8.2. $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}$ で，$a_k \leqq b_k$ $(k = 1,\ldots, n)$ であるとする．$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ とおく．f は I 上で連続な関数とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\int_I f\,dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\right)\cdots\right) dx_2\right) dx_1$$

なお，上式の右辺において，$\displaystyle\int_{a_i}^{b_i}$ と dx_i の順番は，積分区間と積分変数が正しく対応していれば，自由に順番を並べ変えてよい．この積分の計算方法を**累次積分**という．

証明. I 上の連続関数は有界で積分可能なので，前補題の仮定は満たされている．$n=2$ の場合は，前補題の記号で $n=m=1$ とした場合であるので，本定理は成立する．$n \geqq 3$ の場合は，帰納法を用いて，前補題を適用すればよい． □

例 8.3. $I=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]$ とし，f は $[a_1, b_1]$ 上の連続関数，g は $[a_2, b_2]$ 上の連続関数とする．すると，

$$\int_I f(x)g(y)\,dx\,dy = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)g(y)\,dx\right)dy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x)g(y)\,dy\right)dx$$
$$= \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx\right)\left(\int_{a_1}^{b_1} g(y)\,dy\right)$$

が成り立つ．このように 2 つの積分の積に表せる積分を**変数分離形**という．最後の等号は，1 変数関数の積分公式

$$\int_{a_2}^{b_2} f(x)g(y)\,dy = f(x)\int_{a_2}^{b_2} g(y)\,dy$$

からすぐ証明できる．

現在の積分の定義は，定義 7.1 と定義 7.3 を組み合わせたものであるが，分割の選び方にもっと自由度を持たせないと後の議論 (証明) が困難になるので，次の定理を証明しておく．補題 8.5 と定理 8.6 の証明は難しいので読まなくてもよいが，定理 8.6 の結論は理解しておいてほしい．また，定理 8.7 と定理 8.8 は基本的な定理である．ただし，厳密な証明は定理 8.6 などを使わないと面倒である．

定義 8.4. A は $\mathbb{R}^n$ 内の有界で可測な集合で，$f(\mathbf{x})$ は A 上で有界な関数とする．A の部分集合 D_i $(i=1,\dots, r)$ で，
(1) 各 D_i は閉集合でジョルダン可測である．
(2) $A = D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_r$.
(3) $i, j\in\{1,\dots, r\}$, $i\neq j$ ならば，$\mu_n(D_i\cap D_j)=0$.
が成り立つとき，$\Delta := \{D_i\}_{i=1}^r$ は A の**分割**であるという．また，

$$\delta(D_i) = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x}, \mathbf{y}\in D_i\}, \qquad \delta(\Delta) := \max\{\delta(D_i) \mid D_i\in\Delta\}$$
$$\Sigma(f, \Delta) := \sum_{D\in\Delta}\left(\sup_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})\right)\mu_n(D), \qquad \sigma(f, \Delta) := \sum_{D\in\Delta}\left(\inf_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})\right)\mu_n(D)$$

とおく．また，ここだけの記号であるが，A の分割全体の集合を，

$$\mathfrak{D}(A) = \{\Delta \mid \Delta \text{ は } A \text{ の分割}\}$$

と書くことにする．

補題 8.5. I は定義 7.1(1) のような $\mathbb{R}^n$ 内の超直方体で，$f(\mathbf{x})$ は I 上で有界な関数とする．すると，任意の正の実数 $\varepsilon>0$ に対して，ある正の実数 $c(\varepsilon)>0$ が存在して，$\delta(\Delta)<c(\varepsilon)$ を満たす任意の $\Delta\in\mathfrak{D}(I)$ に対して，

$$\Sigma(f, \Delta) - \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} < \varepsilon, \quad \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \sigma(f, \Delta) < \varepsilon$$

が成り立つ．

証明. (1) B は $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元超直方体とする．B の境界は，$2n$ 個の $(n-1)$ 次元超直方体 $F_1,\dots, F_{2n}$ の合併集合である．各 F_i を B の**超面**と言う．F_i の $(n-1)$ 次元測度 $\mu_{n-1}(F_i)$ が定義できる．$\displaystyle\sum_{i=1}^{2n}\mu_{n-1}(F_i)$ を B の**超表面積**といい，$\mu_{n-1}(\partial B)$ と書くことにする．

(2) $\displaystyle\overline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \inf_{\Delta\in\mathfrak{B}(I)}\Sigma(f, \Delta)$ であったから，ある，$\Delta_0=\{B_j\}_{j=1}^m\in\mathfrak{B}(I)$ を選ぶと，

$$0 \leqq \Sigma(f, \Delta_0) - \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad ①$$

となる．今，$\Delta = \{D_i\}_{i=1}^{r} \in \mathfrak{D}(I)$ を取る．ただし，$\delta(\Delta) < \dfrac{\delta(\Delta_0)}{3\sqrt{n}}$ となるように選んでおく．$\delta(D_i)$ はどの B_j の辺の長さの 1/3 未満であるので，B_j の向かい合う 2 つの超面と同時に交わることはない．したがって，各 D_i に対し，$B_j \cap D_i \neq \phi$ となる B_j は高々 2^n 個しかない．また，$B \in \Delta_0$ に対し，

$$\mathfrak{E}_B := \{D \in \Delta \mid B \cap \partial D \neq \phi \text{ かつ } D \not\subset B\}$$

とおく．$D \in \mathfrak{E}_B$ に対し D に属する点から B の超表面までの距離は $\delta(\Delta)$ 以下なので，

$$\sum_{D \in \mathfrak{E}_B} \mu_n(B \cap D) \leqq \mu_{n-1}(\partial B)\delta(\Delta) \qquad ②$$

が成り立つ．

(3) $\Sigma(f,\, \Delta) - \Sigma(f,\, \Delta_0) < \varepsilon/2$ となるための条件を考察する．$B \in \Delta_0$ に対して，

$$\mathfrak{D}_B := \{D \in \Delta \mid D \subset B\}, \quad \mathfrak{E} := \Delta - \bigcup_{B \in \Delta_0} \mathfrak{D}_B$$

とおく．また，$C := \sup_{\mathbf{x} \in I} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in I} f(\mathbf{x})$ とおく．$D \in \mathfrak{D}_B$ ならば $\sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \leqq \sup_{\mathbf{y} \in B} f(\mathbf{y})$ なので，

$$\Sigma(f,\, \Delta) - \Sigma(f,\, \Delta_0) \leqq \sum_{B \in \Delta_0} \sum_{D \in \mathfrak{D}_B} \left(\sup_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) - \sup_{\mathbf{y} \in B} f(\mathbf{y}) \right) \mu_n(D) + \sum_{D \in \mathfrak{E}} C\mu_n(D) \leqq C \sum_{D \in \mathfrak{E}} \mu_n(D)$$

である．また，$\displaystyle\bigcup_{B \in \Delta_0} \mathfrak{E}_B = \mathfrak{E}$ なので，②を用いると，

$$C \sum_{D \in \mathfrak{E}} \mu_n(D) \leqq C \sum_{B \in \Delta_0} \sum_{D \in \mathfrak{E}_B} \mu_n(B \cap D) \leqq C\delta(\Delta) \sum_{B \in \Delta_0} \mu_{n-1}(\partial B)$$

となる．今，Δ_0 は固定してあるから，$C_2 := \displaystyle\sum_{B \in \Delta_0} \mu_{n-1}(\partial B)$ は Δ に依存しない定数である．そこで，$\delta(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2CC_2}$ であれば，$\Sigma(f,\, \Delta) - \Sigma(f,\, \Delta_0) < \varepsilon/2$ となる．①と合わせると，

$$\Sigma(f,\, \Delta) - \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} < \varepsilon$$

が得られる．$\displaystyle\underline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \sigma(f,\, \Delta) < \varepsilon$ のほうは，$-f(\mathbf{x})$ を利用すれば，上の証明に帰着し，$-f(\mathbf{x})$ についての C も変わらないので，$\delta(\Delta) < \dfrac{\varepsilon}{2CC_2}$ であれば，目的の不等式が成立する． □

定理 8.6. A は $\mathbb{R}^n$ 内の有界で可測な合で，$f(\mathbf{x})$ は A 上で有界な関数とする．各 $l \in \mathbb{N}$ に対し A の分割 Δ_l が与えられていて，$\displaystyle\lim_{l \to \infty} \delta(\Delta_l) = 0$ を満たしているとする．すると，

$$\lim_{l \to \infty} \Sigma(f,\, \Delta_l) = \lim_{l \to \infty} \sigma(f,\, \Delta_l) \qquad ①$$

が成り立つことと，f が A 上積分可能であることは同値である．さらに，①が成り立つとき，

$$\int_A f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \lim_{l \to \infty} \Sigma(f,\, \Delta_l) = \lim_{l \to \infty} \sigma(f,\, \Delta_l)$$

が成り立つ．

証明. (I) まず，$A = I$ (超直方体) の場合に証明する．$\displaystyle\lim_{l \to \infty} \delta(\Delta_l) = 0$ であるから，上の補題より，

$$\lim_{l \to \infty} \Sigma(f,\, \Delta_l) = \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \lim_{l \to \infty} \sigma(f,\, \Delta_l) = \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

である．これより，定理の主張は容易にわかる．

(II) A が一般の有界で可測な集合の場合に証明する．$A \subset I$ となるような超直方体 I を取り，$\mathbf{x} \in I$ に対し，定義 7.3 のように，

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & (\mathbf{x} \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\mathbf{x} \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく．$\displaystyle\int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_I \overline{f}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ であった，分割 Δ_l に対し，補集合 $I-A$ のほうも直径が $\delta(\Delta_l)$ 以下になるように適当に分割し，Δ_l と合わせて I の分割 $\overline{\Delta_l}$ を作る．

$$\Sigma(\overline{f},\,\overline{\Delta_l}) = \Sigma(f,\,\Delta_l), \quad \sigma(\overline{f},\,\overline{\Delta_l}) = \sigma(f,\,\Delta_l)$$

である．よって，$I = A$ の場合から定理の結論が得られる． □

定理 8.7. A と B が $\mathbb{R}^n$ 内の有界で可測な集合で，$f(\mathbf{x})$ が $A \cup B$ 上で積分可能なとき，次が成り立つ．

$$\int_{A\cup B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{A\cap B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

証明. $A \cap B$ の分割，$A - B$ の分割，$B - A$ の分割を合わせて $A \cup B$ の分割を作り，前定理を利用すればよい． □

定理 8.8. A は $\mathbb{R}^n$ 内の有界で可測な集合で $\mu_n(A) = 0$ とする．$f(\mathbf{x})$ は A 上で有界な関数とする．すると，$f(\mathbf{x})$ は A 上で積分可能で，

$$\int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$$

である．

証明. $\Delta := \{A\}$ とおくと，

$$0 = \Sigma(f,\,\Delta) \geqq \overline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqq \underline{\int_I} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geqq \sigma(f,\,\Delta) = 0$$

なので，$\displaystyle\int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$ である． □

9. グラフで囲まれた領域上での積分

定理 9.1. A は $\mathbb{R}^{n+m}$ 内の有界で可測な閉集合とする．$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の座標系，$\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ を $\mathbb{R}^m$ の座標系とし，$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ を $\mathbb{R}^{n+m}$ の座標系とする．$f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ は A 上の連続関数とする．$p\colon\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ は $p(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}$ で定まる写像とし，$D:=p(A)$ とおく．各 $\mathbf{x}\in D$ に対し，

$$A_{\mathbf{x}}:=\left\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m \;\middle|\; (\mathbf{x},\mathbf{y})\in A\right\}$$

とおく．すると，

$$\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}=\int_D\left(\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}$$

が成り立つ．

証明. $\mathbb{R}^n$ 内の超直方体 I と $\mathbb{R}^m$ 内の超直方体 J を $A\subset I\times J$ となるように取る．$D\subset I$, $A_{\mathbf{x}}\subset J$ である．$(\mathbf{x},\mathbf{y})\notin A$ のときは $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ であるとして，f の定義域を $I\times J$ まで拡張しておく．連続関数は有界閉集合上で積分可能なので補題 8.1 より，

$$\int_{I\times J} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}=\int_I\left(\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}$$

が成り立つ．$\mathbf{x}\in I$ を固定したとき,. $\displaystyle\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$ である．これより，

$$\int_I\left(\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}=\int_D\left(\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x},\mathbf{y}),\,d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}$$

である．また，$\displaystyle\int_{I\times J} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}=\int_A f(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{y}$ なので，定理の等式が成り立つ． □

実際の計算では $m=1$ の場合や $n=1$ の場合をよく用いる．それぞれの場合の定理を書き直しておく．

定理 9.2. A は $\mathbb{R}^n$ 内の有界で可測な閉集合，$f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$ は A 上の連続関数とする．$p\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $p(x_1,\ldots,x_{n-1},y)=y$ で定まる写像とし，$\pi(A)=[a,b]$ であると仮定する．各 $y\in[a,b]$ に対し，

$$A_y:=\left\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}\;\middle|\;(x_1,\ldots,x_{n-1},y)\in A\right\}$$

とおく．すると，

$$\int_A f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)\,dx_1\cdots dx_{n-1}\,dy=\int_a^b\left(\int_{A_y} f(x_1,\ldots,x_{n-1},y)\,dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dy$$

が成り立つ．

例 9.3. R は正の実数とし，$\mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$ とする．

$$B_n(R):=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;d(\mathbf{x},\mathbf{0})\leqq R\right\}$$

を $\mathbf{0}$ を中心とする半径 R の n 次元**超球**という．その測度は，

$$\begin{cases}\mu_{2m}\big(B_{2m}(R)\big)=\dfrac{\pi^m}{m!}R^{2m} & (n=2m\ (\text{偶数})\ \text{の場合．}\ m\geqq 1)\\[2ex] \mu_{2m+1}\big(B_{2m+1}(R)\big)=\dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1} & (n=2m+1\ (\text{奇数})\ \text{の場合．}\ m\geqq 0)\end{cases}$$

である．中心が原点でないときも同じである．

証明. $\mu_n\big(B_n(R)\big)=a_nR^n$ という形であることを，n に関する帰納法で示す．$n=1,2$ の場合は，$a_1=2$, $a_2=\pi$ であることはよく知られている．

$n\geqq 3$ とし，$A=B_n(R)$ として前定理を使う．$-R\leqq y\leqq R$ に対して，$A_y=B_{n-1}(\sqrt{R^2-y^2})$ である．$\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $y=R\sin\theta$ として，$dy=R\cos\theta\,d\theta$ なので，

$$\mu_n\big(B_n(R)\big)=\int_{-R}^R\left(\int_{A_y}d\mathbf{x}\right)dy=\int_{-R}^R\mu_{n-1}\big(B_{n-1}(\sqrt{R^2-y^2})\big)dy$$

$$= \int_{-R}^{R} a_{n-1}(R^2-y^2)^{(n-1)/2}dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a_{n-1}R^{n-1}\cos^{n-1}\theta\cdot R\cos\theta\,d\theta$$
$$= a_{n-1}R^n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n\theta d\theta$$
である．微積分学 B1 の例 11.2 で計算したように，
$$\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (m,\, n\text{ がともに偶数のとき}) \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$
であった．これより，n が偶数のときは，
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi, \quad a_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi a_{n-1}$$
n が奇数のときは，
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n x\,dx = 2\frac{(n-1)!!}{n!!}, \quad a_n = 2\frac{(n-1)!!}{n!!}a_{n-1}$$
である．この漸化式だと計算しにくいので，a_n と a_{n-2} の関係式に書き直すと，
$$a_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot 2\pi a_{n-2} = \frac{2\pi}{n}a_{n-2}$$
と簡明な漸化式になる．この後の計算は暗算でもできるので割愛する． □

定理 9.4. D は $\mathbb{R}^{n-1}$ 内の有界で可測な閉集合とし，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots, x_{n-1})$ と略記する．$x_n = g(\mathbf{x})$ と $x_n = h(\mathbf{x})$ は D 上の連続関数で，任意の $\mathbf{x}\in D$ に対して $g(\mathbf{x}) \leqq h(\mathbf{x})$ が成り立つと仮定する．
$$A := \left\{(\mathbf{x}, x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{x}\in D,\, g(\mathbf{x})\leqq x_n\leqq h(\mathbf{x})\right\}$$
とおく．また，$y = f(\mathbf{x},\, x_n)$ は A 上の連続関数とする．すると，A は可測な有界閉集合で，
$$\int_A f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_D\left(\int_{g(\mathbf{x})}^{h(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},x_n)\,dx_n\right)d\mathbf{x}$$
が成り立つ．

証明. $g,\, h$ は D 上で連続なので有界で，A も有界である．A の境界は，$g,\, h$ のグラフと，$(\partial D)\times\mathbb{R}$ の合併集合に含まれ，それは A に属するので A は閉集合である．また，$h-g$ も D 上可測で，$\mu_n(A) = \int_D (g-h)\,d\mathbf{x}$ の右辺は積分可能なので，A は可測である．それで定理 9.1 の仮定が満たされる．ここで，$\mathbf{x}\in\mathbf{D}$ に対し，$A_{\mathbf{x}} = [g(\mathbf{x}),\, h(\mathbf{x})]$ であるので，
$$\int_{A_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x},x_n)\,dx_{n-1} = \int_{g(\mathbf{x})}^{h(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},x_n)\,dx_n$$
である．あとは，定理 9.1 から定理の公式が得られる． □

例 9.5. $y = 1-x^2$ と x 軸で囲まれる $(x,\, y)$-平面上の閉領域を D とする．つまり，
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\leqq x\leqq 1,\, 0\leqq y\leqq 1-x^2\right\}$$
である．このとき，$\int_D y\,dx\,dy$ の値を求めよう．上の定理より，
$$\int_D x\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{1-x^2} y\,dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2}dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\frac{(1-x^2)^2}{2}-0\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-2x^2+x^4)dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{2x^3}{3}+x^5 4\right]_{-1}^{1}$$
$$= 1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5} = \frac{8}{15}$$

定理 9.6. $A \subset \mathbb{R}^n$ は可測な有界集合とし，$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ を固定する．$f_{\mathbf{c}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ で定義する．この写像 $f_{\mathbf{c}}$ を $\mathbf{c}$ による平行移動という．このとき，A を $\mathbf{c}$ で平行移動して得られる集合 $f_{\mathbf{c}}(A)$ も可測な有界集合で，

$$\mu_n(f_{\mathbf{c}}(A)) = \mu_n(A)$$

が成り立つ．

証明. Δ が A の分割のとき，

$$f_{\mathbf{c}}(\Delta) := \{f_{\mathbf{c}}(I) \mid I \in \Delta\}$$

は $f_{\mathbf{c}}(A)$ の分割である．定義 7.3 と定理 8.6 によれば，任意の $I \in \Delta$ に対して $\mu_n(f_{\mathbf{c}}(I)) = \mu_n(I)$ が成り立つならば，$\mu_n(f_{\mathbf{c}}(A)) = \mu_n(A)$ が成り立つ．定義 7.1 より，$\mu_n(f_{\mathbf{c}}(I)) = \mu_n(I)$ はすぐわかる． □

定理 9.7. A は実数を成分とする n 次正方行列とする．$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を列ベクトルで表示して $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定まる線形写像を $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする．$D \subset \mathbb{R}^n$ は可測な有界集合とする．すると，$f_A(D)$ も可測な有界集合で，

$$\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$$

が成り立つ．ここで，$\det A$ は A の行列式で，$|\det A|$ はその絶対値である．

証明. 前定理と同様に，D が n 次元超立方体 (各辺は座標軸に平行とする) の場合に証明すればよい．そこで，D は $a_i \leqq x_i \leqq a_i + r$ (r は 1 辺の長さで，$i = 1,\ldots, n$) で定まる超立方体であるとする．

もし $\det A = 0$ ならば，$r = \operatorname{rank} A$ とするとき $r < n$ で，$\dim f(\mathbb{R}^n) = r$ である．特に，B は $n-1$ 次元以下の部分ベクトル空間 $f(\mathbb{R}^n)$ の部分集合だから，$\mu_n(B) = 0$ である．

以下，$\det A \neq 0$ の場合を考える．行列 A から始めて

(L1) 行列の第 i 行に定数 c を掛け，それを第 j 行目に足す ($1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$, $i \neq j$).

(L2) 行列の第 i 行に定数 $c \neq 0$ を掛ける．

(L3) 行列の第 i 行と第 j 列を交換する．

という 3 種類の行基本操作をうまく行うと，A は階段行列 B に変形できるのであった．$\det A \neq 0$ の場合は $\operatorname{rank} A = n$ なので，$B = I_n$ (単位行列) である．ただし，上の操作 (L3) は，(L1)「第 i 行に 1 を掛け第 j 行目に足す」，(L1)「第 j 行に (-1) を掛け第 i 行目に足す」，(L1)「第 i 行に 1 を掛け第 j 行目に足す」，(L2)「第 i 行に -1 を掛ける」という操作を順に行うことによって得られるので，(L1) と (L2) のタイプの操作で A から $B = I_n$ を作ることができる．

(j, i)-成分だけが 1 で，それ以外の成分が 0 である n 次正方行列を $E_{j,i}$ とし，$\Lambda_{j,i}(c) := I_n + cE_{j,i}^{(n)}$ $(i \neq j)$ とする．$\Lambda_{j,i}(c)A$ は A に (L1) の操作を行って得られる行列である．

また，単位行列 I_n の (i, i)-成分だけを c でおきかえた行列を $M_i(c) := I_n + (c-1)E_{k,k}^{(n)}$ $(c \neq 0)$ とおく．$M_i(c)A$ は A に (L1) の操作を行って得られる行列である．

A から B を作る行基本操作に対応して上の $\Lambda_{j,i}(c)$ や $M_i(c)$ の形の行列を右から左に掛けてできる行列を P とすると，$B = PA$ である．つまり，$A = P^{-1}$ である．$\Lambda_{j,i}(c)^{-1} = \Lambda_{j,i}(-c)$, $M_i(c)^{-1} = M_i(1/c)$ なので，P^{-1} も $\Lambda_{j,i}(c)$ や $M_i(c)$ の形の行列の積で表せる．一般に n 次正方行列 A_1, A_2 に対して $\det(A_1A_2) = (\det A_1)(\det A_2)$ であるので，$A = \Lambda_{j,i}(c)$ および $A = M_i(c)$ の場合に $\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ が証明できれば，一般の A に対しても $\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ が成り立つ.,

(1) $A = \Lambda_{j,i}(c)$ の場合に $\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ を証明する．

適当に変数 $x_1,\ldots, x_n$ を並べ変えて考えれば $j = 1$, $i = 2$ の場合の証明すれば十分である．$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ を列ベクトルで表わして，その k 行目の成分を x_i, y_i とおく．$\mathbf{y} = \Lambda_{2,1}(c)\mathbf{x}$ のとき，$y_1 = x_1 + cx_2$ で，$2 \leqq k \leqq n$ のとき $y_k = x_k$ である．よって，定理 9.4 より，

$$\begin{aligned}
\mu_n(f_A(D)) &= \int_{f_A(D)} d\mathbf{y} = \int_{a_n}^{a_n+r} \cdots \int_{a_2}^{a_2+r} \int_{a_1+cy_1}^{a_1+cy_1+r} dy_1\, dy_2 \cdots dy_n \\
&= \int_{a_n}^{a_n+r} \cdots \int_{a_2}^{a_2+r} r\, dy_2 \cdots dy_n = r^n = \mu_n(D)
\end{aligned}$$

である．$\det \Lambda_{j,i}(c) = 1$ なので，$\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ が成り立つ．

(2) $A = M_i(c)$ の場合に $\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ を証明する．適当に変数 $x_1,\ldots, x_n$ を並べ変えて考えれば $i = 1$ の場合の証明すれば十分である．

$\det M_i(c) = c \neq 0$ である．$y_1 = cx_1$ で，$2 \leqq k \leqq n$ のとき $y_k = x_k$ である．定理 9.4 より，

$$\begin{aligned}\mu_n(f_A(D)) &= \int_{f_A(D)} d\mathbf{y} = \int_{a_n}^{a_n+r} \cdots \int_{a_2}^{a_2+r} \int_{ca_1}^{ca_1+cr} dy_1\, dy_2 \cdots dy_n \\ &= \int_{a_n}^{a_n+r} \cdots \int_{a_2}^{a_2+r} cr\, dy_2 \cdots dy_n = cr^n = c\mu_n(D)\end{aligned}$$

である．よって，$\mu_n(f_A(D)) = |\det A| \cdot \mu_n(D)$ が成り立つ． □

系 9.8. $\mathbf{a}_1,\ldots, \mathbf{a}_n$ は 1 次独立な $\mathbb{R}^n$ のベクトルとし，それを並べてできる n 次正方行列を A とする．

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{a}_i \;\middle|\; \text{各 } i = 1,\ldots n \text{ について } 0 \leqq t_i \leqq 1 \right\}$$

$$Q := \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{a}_i \;\middle|\; \text{各 } i = 1,\ldots n \text{ について } 0 \leqq t_i \leqq 1 \text{ で } t_1 + \cdots + t_n \leqq 1 \right\}$$

とする．P を $\mathbf{a}_1,\ldots, \mathbf{a}_n$ を辺とする**平行** $2n$ **面体**という．$n = 2$ のときは平行四辺形で，$n = 3$ のときは平行 6 面体である．Q を $\mathbf{a}_1,\ldots, \mathbf{a}_n$ と原点を頂点とする n-**単体**という．2-単体は三角形で，3-単体は四面体であるこれらの測度について，以下が成り立つ．

(1) $\mu_n(P) = \big|\det A\big|$

(2) $\mu_n(Q) = \dfrac{1}{n!}\big|\det A\big|$

証明. 各 $\mathbf{a}_i$ は列ベクトルで表わし，$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$ である．f_A は前定理の通りとする．

(1) $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n$ を辺とする平行 $2n$ 面体は，超立方体 $I := [0, 1]^n$ で，$P = f_A(I)$ である．$\mu_n(I) = 1$ だから，前定理によって $\mu_n(P) = \big|\det A\big|$ である．

(2) $\mathbf{e}_1,\ldots, \mathbf{e}_n$ と原点を頂点とする n-単体を J_n とする．$f_A(J_n) = Q$ だから，前定理より $\mu_n(Q_n) = \big|\det A\big|\mu_n(J)$ である．あと，$\mu_n(J_n) = \dfrac{1}{n!}$ を証明すればよい．これを n に関する帰納法で証明する．

$n = 1$ の場合は $J_1 = [0, 1]$ だから，$\mu_1(J_1) = 1 = \dfrac{1}{1!}$ である．

$n \geqq 2$ とする．$0 \leqq t \leqq 1$ とし $x_n = 1 - t$ で定まる $\mathbb{R}^n$ 内の超平面で J_n を切断した切り口を D_t とする．D_t は J_{n-1} と相似な図形で，相似比は $t : 1$ である．帰納法の仮定から $\mu_{n-1}(J_{n-1}) = \dfrac{1}{(n-1)!}$ なので，$\mu_{n-1}(D_t) = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ である．定理 9.2 より，

$$\mu_n(J_n) = \int_0^1 \mu_{n-1}(D_t)\, dt = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = \frac{1}{n!}$$

である． □

10. 積分の変数変換

重積分の変数変換公式は次の定理で与えられる．

定理 10.1. A, B は $\mathbb{R}^2$ 内の可測な有界閉集合とする．$N \subset A$ で N の面積は 0 とする ($N = \phi$ でもよい)．$g\colon A \to B$ は $x = g_1(u,\, v)$, $y = g_2(u,\, v)$ で定まる写像で g_1, g_2 は A 上で C^1 級とする．g のヤコビアンを

$$D_g(u,v) = \frac{D(g_1, g_2)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial u}$$

とする．さらに，g は以下の (1), (2), (3) を満たすものとする．
(1) $g(A) = B$
(2) 任意の $(u,\, v) \in A - N$ に対し $D_g(u,\, v) \neq 0$.
(3) g の定義域を $A - N$ に制限した写像 $g|_{A-N}\colon (A-N) \longrightarrow B$ は単射である．
すると，B 上の任意の連続関数 g に対して，次が成り立つ．

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f\bigl(g_1(u,v),\, g_2(u,v)\bigr) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv$$

が成り立つ．

3 重積分の変数変換公式も同様で，次の定理で与えられる．

定理 10.2. A, B は $\mathbb{R}^3$ 内の可測な有界閉集合とする．$N \subset A$ で N の体積は 0 とする ($N = \phi$ でもよい)．$g\colon A \to B$ は $x = g_1(s,\, t,\, u)$, $y = g_2(s,\, t,\, u)$, $z = g_3(s,\, t,\, u)$ で定まる写像で g_1, g_2, g_3 は A 上で C^1 級とする．g のヤコビアンを

$$D_g(s,t,u) = \frac{D(g_1, g_2, g_3)}{D(s,t,u)} = \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)}$$

とする．さらに，g は以下の (1), (2), (3) を満たすものとする．
(1) $g(A) = B$
(2) 任意の $(s,\, t,\, u) \in A - N$ に対し $D_g(s,\, t,\, u) \neq 0$.
(3) g の定義域を $A - N$ に制限した写像 $g|_{A-N}\colon (A-N) \longrightarrow B$ は単射である．
すると，B 上の任意の連続関数 g に対して，次が成り立つ．

$$\int_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_A f\bigl(g_1(s,t,u),\, g_2(s,t,u),\, g_3(s,t,u)\bigr) \cdot \left| \frac{D(x,y,z)}{D(s,t,u)} \right| ds\,dt\,du$$

が成り立つ．

これらの定理の n 重積分のバージョンもあって，この章の付録の最後の定理 10.10 で，厳密な証明とともに記載する．ただし，その証明はかなり難しいので，ここでは定理 10.1 の直感的な証明 (あまり厳密でない説明) を述べておく．

定理 10.1 の略証. 重積分の定義は A が長方形の場合をもとにして与えたので，A が辺が座標軸に平行な長方形の場合に証明すればよい．A の各辺を n 等分して A の分割 Δ_n を作る．

$$g(\Delta_n) = \bigl\{ g(D) \bigm| D \in \Delta_n \bigr\}$$

とおくと，$g(\Delta_n)$ は B の分割になる．g はコンパクト集合上の連続関数だから一様連続で，$n \to \infty$ のとき $g(\Delta_n)$ の分割の細かさ $\delta(g(\Delta_n))$ も 0 に収束していく．よって，定理 8.6 より，

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{D \in \Delta_n} \left(\sup_{\mathbf{x} \in g(D)} f(\mathbf{x}) \right) \mu_2(g(D))$$

である．まず，$\displaystyle\sup_{\mathbf{x}\in g(D)} f(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u}\in D} f(g(\mathbf{u}))$ である．次に，長方形 $D \in \Delta_n$ に対し，D の左下の頂点を $(u_D,\, v_D) \in D$ として，

$$g_D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := J_g(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} u - u_D \\ v - v_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u_D, v_D) \\ g_2(u_D, v_D) \end{pmatrix}$$

で 1 次変換 g_D を定めるとき，D 上では写像 g は g_D で近似できて，集合 $g(D)$ は平行四辺形 $g_D(D)$ とほぼ一致する．よって，$\mu_2(g(D)) \fallingdotseq \mu_2(g_D(D))$ である．定理 9.7 より，$\mu_2(g_D(D)) = |\det J_g(\mathbf{u})| \cdot \mu_2(D)$ である．以上より，

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{D\in\Delta_n} \left(\sup_{\mathbf{u}\in D} f(g(\mathbf{u}))\right) |\det J_g(\mathbf{u})| \cdot \mu_2(D)$$
$$= \int_A f\big(g_1(u,v),\, g_2(u,v)\big) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\,dv$$

である．□

上の略証の中で，$\mu_2(g(D)) \fallingdotseq \mu_2(g_D(D))$ と書いて胡麻化している部分を厳密に証明するのが厄介で，それで証明をきちんと書くと後の付録のような長くて理解困難な証明になってしまう．

極座標表示による変数変換公式は特によく使うので，別途書いておく．証明は上の 2 つ定理と，定義 6.1, 定義 6.2 で述べた極座標表示のヤコビアンを利用すればよい．

系 10.3. 半径 R の円板 $D = \left\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leqq R^2\right\}$ 上で連続な関数 $f(x,\,y)$ については，

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) \cdot r\,dr\,d\theta$$

が成り立つ．

系 10.4. 半径 R の球体 $D = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \leqq R^2\right\}$ 上で連続な関数 $f(x,\,y,\,z)$ については，

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy,\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f\Big(r\cos\varphi\sin\theta,\; r\sin\varphi\sin\theta,\; r\cos\theta\Big) \cdot r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

が成り立つ．

★ 付録 — 積分の変数変換公式の厳密な証明

積分の変数変換公式を厳密に証明しようとすると，$\mu_2(g(D)) \fallingdotseq \mu_2(g_D(D))$ のように「ほぼ等しい」と書いた部分について，その誤差の上限がどれくらいあるのかを，厳密に考える必要があって，この場合はその誤差の見積もりがかなり難しい．一応証明を紹介するが，理解することは全然期待してないので，読む必要はない．最後の定理 10.10 が n 重積分の変数変換公式である．$n=2$ の場合でも，証明が以下に書いたものより簡単になるわけではない．

定義 10.5. $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$|\mathbf{x}|_1 := \max\left\{|x_1|,\,|x_2|,\ldots,\,|x_n|\right\}$$

と定め，$\mathbf{x}$ の**最大値ノルム**という．また，n 次実行列 A に対し，

$$|A|_1 := \sup\left\{|A\mathbf{x}|_1 \;\middle|\; \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,\, |\mathbf{x}|_1 \leqq 1\right\}$$

と定め，A の**最大値ノルム**という．ただし，$A\mathbf{x}$ という書き方をするときは，$\mathbf{x}$ は列ベクトルの形に表すと約束しておく．他方，$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ である．

用途にもよるが，平方根を含まないので $|\mathbf{x}|_1$ のほうが $|\mathbf{x}|$ より取り扱いが楽な場合も多い．

命題 10.6. 絶対値ノルムは以下の性質を満たす．ただし，$\mathbf{x},\,\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ で，$A,\,B$ は n 次実正方行列とする．
(1) $c \in \mathbb{R}$ に対して，$|c\mathbf{x}|_1 = |c| \cdot |\mathbf{x}|_1$,
(2) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_1 \leqq |\mathbf{x}|_1 + |\mathbf{y}|_1$, $|\mathbf{x}|_1 - |\mathbf{y}|_1 \leqq |\mathbf{x}-\mathbf{y}|_1$.
(3) $|\mathbf{x}|_1 \leqq |\mathbf{x}| \leqq \sqrt{n}|\mathbf{x}|_1$.
(4) $|A\mathbf{x}|_1 \leqq |A|_1 \cdot |\mathbf{x}|_1$.
(5) $|AB|_1 \leqq |A|_1 \cdot |B|_1$.

(6) U は $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ で，L は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を両端とする線分とする．$L \subset U$ であると仮定する．また，$f: U \to \mathbb{R}^n$ は U 上で微分可能な写像とし，点 $\mathbf{z} \in U$ における f のヤコビ行列を $J_f(\mathbf{z})$ とする．$M := \sup_{\mathbf{z}\in L} \left|J_f(\mathbf{z})\right|_1$ とおくとき，

$$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right|_1 \leqq M \cdot \left|\mathbf{x} - \mathbf{y}\right|_1$$

が成り立つ．

証明. (1) $|c\mathbf{x}|_1 = \max_{1\leqq i\leqq n} |cx_i| = |c| \cdot \max_{1\leqq i\leqq n} |x_i| = |c| \cdot |\mathbf{x}|_1$.

(2) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|_1 = \max_{1\leqq i\leqq n} |x_i + y_i| \leqq \max_{1\leqq i\leqq n} (|x_i| + |y_i|) \leqq \max_{1\leqq i\leqq n} |x_i| + \max_{1\leqq i\leqq n} |y_i| = |\mathbf{x}|_1 + |\mathbf{y}|_1$.

(3) は簡単.

(4) $|\mathbf{x}|_1 = c$ とする，$c = 0$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ で $|A\mathbf{x}|_1 = 0 = |A|_1 \cdot |\mathbf{x}|_1$ だから，$c > 0$ の場合を考える．$\mathbf{y} = \dfrac{1}{c}\mathbf{x}$ とおくと，$|\mathbf{y}|_1 = 1$ である．$|A|_1$ の定義から，$|A\mathbf{y}|_1 \leqq |A|_1$ である．よって，$|A\mathbf{y}|_1 \leqq |A|_1 = |A|_1 \cdot |\mathbf{y}|_1$ である．これより，

$$|A\mathbf{x}|_1 = |A(c\mathbf{y})|_1 = c|A\mathbf{y}|_1 \leqq c|A|_1 \cdot |\mathbf{y}|_1 = |A|_1 \cdot |c\mathbf{y}|_1 = |A|_1 \cdot |\mathbf{x}|_1$$

である．

(5) $|AB|_1$ の定義から，$|AB|_1 = |AB\mathbf{x}|_1$, $|\mathbf{x}|_1 = 1$ を満たす $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する．(3) より，

$$|AB|_1 = |AB\mathbf{x}|_1 = |A(B\mathbf{x})|_1 = |A|_1 \cdot |B\mathbf{x}|_1 \leqq |A|_1 \cdot |B|_1$$

である．

(6) 一般に $g_i(t)$ が閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数のとき，

$$\left|\int_a^b g_i(t)\,dt\right| \leqq \int_a^b |g_i(t)|\,dt$$

が成り立つ．$g(t) = \bigl(g_1(t),\ldots, g_n(t)\bigr)$ とおくとき，上の不等式から，

$$\left|\int_a^b \mathbf{g}(t)dt\right|_1 \leqq \int_a^b |\mathbf{g}(t)|_1\,dt$$

が成り立つことがわかる．$P(t) := t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$, $G(t) := f\bigl(P(t)\bigr)$, $g(t) := \dfrac{d}{dt}G(t)$ とすると，

$$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right|_1 = \left|G(1) - G(0)\right|_1 = \left|\int_0^1 g(t)\,dt\right|_1 \leqq \int_0^1 |g(t)|_1\,dt$$

である．点 $\mathbf{y}$ から $\mathbf{x}$ へ向かう単位ベクトルを $\mathbf{e}$ とし，線分 L 長さを ℓ とするとき，$\mathbf{x}-\mathbf{y} = \ell\mathbf{e}$ で，写像 f の点 $P(t)$ における $\mathbf{e}$ 方向への微分係数ベクトル は $\bigl(J_f(P(t)\bigr)\mathbf{e}$ である．$G'(t)$ はこのベクトルの ℓ 倍である．つまり，

$$g(t) = \ell\bigl(J_f(P(t)\bigr)\mathbf{e} = \bigl(J_f(P(t)\bigr)(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

である．(4) より，

$$|g(t)|_1 = \left|\bigl(J_f(P(t)\bigr)(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right|_1 \leqq \left|\bigl(J_f(P(t)\bigr)\right|_1 \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{y}|_1 \leqq M \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{y}|_1$$

が得られる．よって，

$$\left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right|_1 \leqq \int_0^1 |g(t)|_1\,dt \leqq M \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{y}|_1$$

である． □

補題 10.7. 一般に $r > 0$ に対し，$W(r) := [-r, r]^n \subset \mathbb{R}^n$ (原点を中心とする 1 辺の長さ $2r$ の超立方体) とし，定数 ρ は $0 < \rho < 1$ を満たすとする．$a > 0$ は定数，$h: W(a) \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級の同相写像で，$h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ かつ

$$|J_h(\mathbf{x}) - I_n|_1 \leqq \rho \quad (\forall \mathbf{x} \in W(a))$$

を満たすとする．ただし，J_h は h のヤコビ行列で，I_n は n 次の単位行列である．すると，

$$W\bigl((1-\rho)a\bigr) \subset h\bigl((W(a)\bigr) \subset W\bigl((1+\rho)a\bigr)$$

が成り立つ．

証明. $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ とおく．すると，$J_g = J_h - I_n$ で，$|J_g(\mathbf{x})|_1 = |J_h(\mathbf{x}) - I_n|_1 \leqq \rho$ $(\forall \mathbf{x} \in W(a))$ である．$c = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{e} = \dfrac{1}{c}\mathbf{x}$ とおくと，$\big(J_g(\mathbf{x})\big)\mathbf{e}$ は点 $\mathbf{x}$ における g の $\mathbf{e}$ 方向への微分係数だから，

$$\int_0^c \big(J_g(t\mathbf{x})\big)\mathbf{e}\,dt = g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{0}) = g(\mathbf{x})$$

である．これより，

$$\big|h(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\big|_1 = |g(\mathbf{x})|_1 = \left|\int_0^c \big(J_g(t\mathbf{x})\big)\mathbf{e}\,dt\right|_1 \leqq \int_0^c \big|J_g(t\mathbf{x})\big|_1\,dt \leqq \rho\cdot|\mathbf{x}|_1 \leqq \rho a$$

が得られる．これより，

$$\big|h(\mathbf{x})\big|_1 \leqq \big|\mathbf{x}\big|_1 + \big|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\big|_1 \leqq (1+\rho)a$$

である．$b > 0$ のとき，$\mathbf{x} \in W(b)$ と $|\mathbf{x}|_1 \leqq b$ は同値だから，$h\big(W(a)\big) \subset W\big((1+\rho)\big)$ である．

以下，$h\big(W(a)\big) \supset W\big((1+\rho)\big)$ を証明する．$\mathbf{y}$ が $W(a)$ の境界上の点のとき $|\mathbf{y}|_1 = a$ なので，$\big|\mathbf{y} - h(\mathbf{y})\big|_1 = \big|h(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\big|_1 \leqq \rho\cdot|\mathbf{y}|_1$ とあわせて，

$$\begin{aligned}\big|h(\mathbf{y})\big|_1 &= \big|\mathbf{y} - (\mathbf{y} - h(\mathbf{y}))\big|_1 \geqq \big|\mathbf{y}\big|_1 - \big|\mathbf{y} - h(\mathbf{y})\big|_1 \\ &\geqq (1-\rho)\big|\mathbf{y}\big|_1 = (1-\rho)a\end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，$W(a)$ の境界は h によって，$W((1-\rho)a)$ の外部または境界上に写像される．h は単射連続写像であったから，W の境界の h による像が $h(W)$ の境界である．しかも，$\mathbf{y}$ と $\mathbf{0}$ を結ぶ線分の像 C は，$h(\mathbf{y})$ と $\mathbf{0}$ を結ぶ連続曲線なので，C は $W((1-\rho)a)$ の境界と共有点を持つ．これは，$h\big(W(a)\big) \supset W\big((1+\rho)\big)$ を意味する． □

一般に，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が微分可能な写像のとき，$g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ も微分可能で，

$$J_{(g\circ f)} = g \circ J_f + J_g \circ f$$

が成り立つ．

補題 10.8. 前補題と同様に，$g\colon W(a) \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級の同相写像で，$g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ を満たすとする．原点におけるヤコビ行列 $J_g(\mathbf{0})$ が定める線形写像を $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とする．今，ある定数 $p > 0$ と $q > 0$ を選べば，

$$0 < pq < 1, \quad \left|\big(J_g(\mathbf{0})\big)^{-1}\right|_1 \leqq p, \quad \big|J_g(\mathbf{x}) - J_g(\mathbf{0})\big|_1 \leqq q \quad (\forall \mathbf{x} \in W(a))$$

を満たすとする．すると，

$$f\big(W(1-pq)\big) \subset g\big((W(a)\big) \subset f\big(W(1+pq)\big)$$

が成り立つ．

証明. $h := f^{-1} \circ g$ とおく．f^{-1} は定数の行列だから，$J_{f^{-1}} = O$ (ゼロ行列) で，$J_h = f^{-1} \circ J_g$ が成り立つ．よって，

$$\big|J_h(\mathbf{x}) - I_n\big|_1 = \big|f^{-1} \circ (J_g(\mathbf{x}) - J_g(0))\big|_1 \leqq \big|f^{-1}\big|_1 \cdot \big|(J_g(\mathbf{x}) - J_g(0))\big|_1 \leqq pq$$

が成り立つ．$\rho = pq$ として前補題を適用すると，

$$W(1-pq) \subset h\big((W(a)\big) \subset W(1+pq)$$

となる．$f \circ h = g$ だから，すべての集合の f による像をとると，

$$f\big(W(1-pq)\big) \subset g\big((W(a)\big) \subset f\big(W(1+pq)\big)$$

となる． □

補題 10.9. K は $\mathbb{R}^n$ 内のコンパクト集合，$f\colon K \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級で，点 $\mathbf{u} \in K$ における f のヤコビアンを $D_f(\mathbf{u})$ と書くとき，任意の $\mathbf{u} \in K$ に対して $D_f(\mathbf{u}) \neq 0$ を満たすと仮定する．このとき，任意の

正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ を選ぶと，K に含まれる 1 辺の長さが δ 以下の任意の超立方体 I (ただし，I の各辺は座標軸に平行であるとする) に対し，

$$\Big|\mu_n(f(I)) - |D_f(\mathbf{u}_I)|\mu_n(I)\Big| \leqq \varepsilon\mu_n(I)$$

が成り立つ．ここで，$\mathbf{u}_I$ は超立方体 I の中心である．

証明. f の点 $\mathbf{u} \in K$ における f のヤコビ行列を $J_f(\mathbf{u})$ とする．$D_f(\mathbf{u}) = \det J_f(\mathbf{u})$ である．逆行列 $J_f(\mathbf{u})^{-1}$ の各成分はコンパクト集合 K 上で連続だから，ある定数 $p > 0$ を選べば，任意の $\mathbf{u} \in K$ に対して $\big|J_f(\mathbf{u})^{-1}\big|_1 \leqq p$ が成り立つ．同様に，ある定数 $C > 0$ を選べば，任意の $\mathbf{u} \in K$ に対して $\big|J_f(\mathbf{u})\big| \leqq p$ が成り立つ．

さて，任意の $\varepsilon > 0$ を取る．定数 $q = q(\varepsilon)$ を

$$0 < q < 1, \quad 0 < pq < 1, \quad (1+pq)^n - (1-pq)^n \leqq \frac{\varepsilon}{C}$$

を満たすように選ぶことができる．J_f は K 上で一様連続なので，ある $\delta > 0$ を選べば，

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K,\ \big|\mathbf{u} - \mathbf{v}\big|_1 < \delta \text{ ならば } \big|J_f(\mathbf{u}) - J_f(\mathbf{v})\big|_1 < q$$

が成り立つ．$I \subset K$ は 1 辺の長さが $2a$ で $a \leqq \delta$ を満たす任意の超立方体 (ただし，各辺は座標軸に平行) とする．つまり，I は $W(2a)$ を $\mathbf{u}_I$ で平行移動した超立方体である．$g(\mathbf{u}) := f(\mathbf{u}+\mathbf{u}_I) - f(\mathbf{u}_I)$ とおくと，$\big|J_g(\mathbf{u}_I)^{-1}\big|_1 = \big|J_f(\mathbf{u}_I)^{-1}\big|_1 \leqq p$ なので，$J_f(\mathbf{0}) = J_g(\mathbf{u}_I)$ が定める線形写像を f_0 とすると，前補題より，

$$f_0\big(W((1-pq)a)\big) \subset g(W(a)) \subset f_0\big(W((1+pq)a)\big)$$

が成り立つ．f_0 は線形写像で $\det f_0 = D_g(\mathbf{0}) = D_f(\mathbf{u}_I)$ だから，定理 9.7 より

$$\mu_n\big(f_0(W(1-pq)a)\big) = |\det f_0| \cdot \mu_n\big(W((1-pq)a)\big) = \big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|(1-pq)^n(2a)^n$$

である．同様に，$\mu_n\big(f_0(W(1+pq)a)\big) = \big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|(1+pq)^n(2a)^n$ である．また，$g(W(a))$ は $f(I)$ を平行移動した図形である．よって，$\mu_n\big(g(W(a))\big) = \mu_n\big(f(I)\big)$ で，

$$\big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|(1-pq)^n\mu_n(I) \leqq \mu_n\big(f(I)\big) \leqq \big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|(1+pq)^n\mu_n(I)$$

である．$v := \big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|\mu_n(I)$, $w := \mu_n\big(g(I)\big)$, $a := (1-pq)^n$, $b := (1+pq)^n$ とおくと，$0 < a < 1 < b$ で，$av \leqq w \leqq bv$, $v \geqq 0$ である．$w - v \leqq (b-1)v < (b-a)v$, $v - w \leqq (1-a)v < (b-a)v$ だから，$|w-v| \leqq (b-a)v$ である．よって，

$$\begin{aligned}\Big|\mu_n(f(I)) - |D_f(\mathbf{u}_I)|\mu_n(I)\Big| &= |w-v| \leqq (b-a)v = \big((1+pq)^n - (1-pq)^n\big)\big|D_f(\mathbf{u}_I)\big|\mu_n(I) \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{C} \cdot C \cdot \mu_n(I) \leqq \varepsilon\mu_n(I)\end{aligned}$$

となる． □

定理 10.10.(変数変換公式) A, B は $\mathbb{R}^n$ 内の可測なコンパクト集合とする．$N \subset A$ で $\mu_n(N) = 0$ とする ($N = \phi$ でもよい)．$g\colon A \to B$ は C^1 級写像で以下の (1), (2), (3) を満たすものとする．

(1) $g(A) = B$

(2) 任意の $\mathbf{u} \in A - N$ に対し $D_g(\mathbf{u}) \neq 0$. ただし，$D_g(\mathbf{u})$ は $\mathbf{u}$ における g のヤコビアンである．

(3) g の定義域を $A - N$ に制限した写像 $g|_{A-N}\colon (A-N) \longrightarrow B$ は単射である．

すると，B 上の任意の連続関数 g に対して，次が成り立つ．

$$\int_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_A f\big(g(\mathbf{u})\big) \cdot \big|D_g(\mathbf{u})\big|\,d\mathbf{u}$$

証明. 定理 1.8, 定理 1.10 より g は A 上で一様連続なので，ある定数 $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ が存在して任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ に対して

$$\big|D_g(\mathbf{u})\big| \leqq C_1, \quad \big|g(\mathbf{u}) - g(\mathbf{v})\big| \leqq C_2 \cdot |\mathbf{u} - \mathbf{y}| \qquad ①|$$

が成り立つ．また，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の $\mathbf{x} \in B$ に対して $\big|f(\mathbf{x})\big| \leqq M$ が成り立つ．

A は有界だから，A を含む n 次元超立方体 I_0 で，各辺が座標軸に平常であるようなものが存在する．$l \in \mathbb{N}$ として，I_0 の各辺を l 等分してできる l^n 個の小超立方体のうち A に含まれるもの全体の集合を

Δ_l とする．小立方体 $I \in \Delta_l$ の中心を $\mathbf{u}_I$ と書く．また，Δ_l に含まれる小超立方体すべての合併集合を K_l とする．$K_l \subset A$ で，A は可測だから定理 8.6 より，

$$\lim_{l\to\infty} \mu_n(K_l) = \mu_n(A)$$

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{I\in\Delta_l} f(g(\mathbf{u}_I)) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u}_I)\bigr| \cdot \mu_n(I) = \int_A f\bigl(g(\mathbf{u})\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr|\, d\mathbf{u}$$

である．

さて，$\varepsilon > 0$ を任意に選び，しばらく固定する．前補題より，$l_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば，任意の $l \geqq l_0(\varepsilon)$ と任意の $I \in \Delta_l$ に対して

$$\Bigl|\mu_n(g(I)) - |D_g(\mathbf{u}_I)|\mu_n(I)\Bigr| \leqq \frac{\varepsilon}{6M(\mu_n(A)+1)}\mu_n(I) \tag{②}$$

が成り立つ．さらに，

$$\mu_n(A - (N \cup K_l)) = \mu_n(A - K_l) < \frac{\varepsilon}{4M} \min\left\{\frac{1}{C_1},\ \frac{1}{(\sqrt{n}C_2)^n}\right\} \tag{③}$$

と，任意の $I \in \Delta_l$ と任意の $\mathbf{x} \in g(I)$ に対して

$$\bigl|f(\mathbf{x}) - f(g(\mathbf{u}_I))\bigr| \leqq \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(B)+1)} \tag{④}$$

$$\Bigl|f\bigl(g(\mathbf{u})\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr| - f\bigl(g(\mathbf{u}_I)\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u}_I)\bigr|\Bigr| \leqq \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(A)+1)} \tag{⑤}$$

を満たすように $l_0(\varepsilon)$ を選んでおく．$I \in \Delta_l$ に対して，

$$P_I := \int_I f\bigl(g(\mathbf{u})\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr|\, d\mathbf{u} - \int_{g(I)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

$$P := \int_{K_l} f\bigl(g(\mathbf{u})\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr|\, d\mathbf{u} - \int_{g(K_l)} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

とおく．$\mathbf{x}_I := g(\mathbf{u}_I)$ とすると，⑤ ④ ② より，

$$\begin{aligned}
|P_I| &\leqq \int_I \Bigl|f\bigl(g(\mathbf{u})\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr| - f\bigl(g(\mathbf{u}_I)\bigr) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u}_I)\bigr|\Bigr|\, d\mathbf{u} \\
&\quad + \int_{g(I)} \bigl|f(\mathbf{x}_I) - f(\mathbf{x})\bigr|\, d\mathbf{x} \\
&\quad + f(\mathbf{x}_I)\Bigl(|D_g(\mathbf{u}_I)| \cdot \mu_n(I) - \mu_n(g(I))\Bigr) \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(A)+1)} \cdot \mu_n(I) + \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(B)+1)} \cdot \mu_n(g(I)) + \frac{\varepsilon}{6M(\mu_n(A)+1)} \cdot \mu_n(I)
\end{aligned}$$

$I,\, J \in \Delta_l,\, I \neq J$ のとき $\mu_n(I \cap J) = 0$ で，(3) より $\mu_n(g(I) \cap g(J)) = \mu_n(g(I \cap J)) = 0$ である．よって，$\mu_n(g(K_l)) = \sum_{I\in\Delta_l} \mu_n(g(I))$ で，

$$\begin{aligned}
|P| &= \left|\sum_{I\in\Delta_l} P_I\right| \leqq \sum_{I\in\Delta_l} |P_I| \\
&\leqq \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(A)+1)} \cdot \sum_{I\in\Delta_l} \mu_n(I) + \frac{\varepsilon}{6(\mu_n(B)+1)} \cdot \sum_{I\in\Delta_l} \mu_n(g(I)) + \frac{\varepsilon}{6M(\mu_n(A)+1)} \cdot \sum_{I\in\Delta_l} \mu_n(I) \\
&= \frac{\varepsilon}{6}\frac{\mu_n(K_l)}{\mu_n(A)+1} + \frac{\varepsilon}{6}\frac{\mu_n(g(K_l))}{\mu_n(B)+1} + \frac{\varepsilon}{6}\frac{\mu_n(K_l)}{\mu_n(A)+1} < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

となる．次に，

$$Q := \int_{A-K_l} f(g(\mathbf{u})) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr|\, d\mathbf{u}$$

とおくと，$\bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr| \leqq C_1$, $\bigl|f(\mathbf{x})\bigr| \leqq M$ と ③ より

$$|Q| \leqq \int_{A-K_l} \Bigl|f(g(\mathbf{u})) \cdot \bigl|D_g(\mathbf{u})\bigr|\Bigr|\, d\mathbf{u} \leqq MC_1\mu_n(A - K_l) < \frac{\varepsilon}{4}$$

となる．最後に，

$$R := \int_{B-g(K_l)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

とおく．一般に，$I' \subset A$ は 1 辺の長さが r の超立方体とする．I' の対角線の長さは $\sqrt{n}r$ である．① より，$g(I')$ は，1 辺の長さが $\sqrt{n}rC_2$ のある超立方体に含まれる．よって，$\mu_n(g(I')) \leqq (\sqrt{n}C_2)^n\mu_n(I')$ である．測度は超立方体による分割で定義できるから，$\mu_n(g(A-K_l)) \leqq (\sqrt{n}C_2)^n\mu_n(A-K_l)$ である．(3) より，$B - g(K_l) = g(A) - g(K_l) \subset g(A-K_l)$ である．③ より，

$$\mu_n(B-g(K_l)) \leqq \mu_n(g(A-K_l)) \leqq (\sqrt{n}C_2)^n\mu_n(A-K_l) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

である，$|f(\mathbf{x})| \leqq M$ であったから，

$$R \leqq \int_{B-g(K_l)} |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} < M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}$$

である．以上をあわせると，

$$\left|\int_A f\big(g(\mathbf{u})\big)\cdot\big|D_g(\mathbf{u})\big|\,d\mathbf{u} - \int_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| = |P+Q-R| \leqq |P|+|Q|+|R| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

が得られる．ε は任意の正の実数であったから，定理の結論を得る． □

11. 広義積分

$\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to\infty}\int_0^a f(x)\,dx$ のような広義積分の話を多変数で考える．ただ，広義積分が定義できるのは，ある程度図形として認識できるような集合上でないといけない．例えば，1 変数関数のとき $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ 上での広義積分が定義できなかったように，$A=\mathbb{R}^n-\mathbb{Q}^n$ の場合は広義積分が定義できない．

定義 11.1. A は $\mathbb{R}^m$ 内の集合で，以下の条件 (1), (2) を満たすものとする．

(1) $\mathbb{R}^m$ 内の任意の可測な有界閉集合 K に対して，$A\cap K$ も可測である．

(2) 各自然数 $n\in\mathbb{N}$ に対してある可測な有界閉集合 K_n が存在し，次の条件 (2-1), (2-2), (2-3) を満たす．

(2-1) $K_n\subset A$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

(2-2) $K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots$. つまり，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $K_n\subset K_{n+1}$.

(2-3) A 内の任意の可測な有界閉集合 K に対し，ある自然数 $n=n(K)$ が存在して $K\subset K_n$ となる．

なお，(2) を満たす集合列 $\{K_n\}$ を**単調増大に A に収束する可測な有界閉集合の増大列**といい，以下簡単のため $K_n\to A$ という記号で表す．

今，A は上の通りとし，$f(x_1,\ldots,x_m)$ は A 上で定義された関数で，A に含まれる任意の可測な有界閉集合 K 上で積分可能であるとする．さらに，もし極限値

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m$$

が有限の値として確定し，その極限値が $K_n\to A$ となるような可測な有界閉集合の増大列 $\{K_n\}$ の選び方に依存しない一定の値であるとき，その極限値を

$$\int_A f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m \qquad ②$$

と表わし，A での f の**広義積分**という．この極限値は $+\infty$ や $-\infty$ であってもよい．

定理 11.2. $A\subset\mathbb{R}^m$ は集合で，上の定義の (1), (2) を満たすとする．$f(x_1,\ldots,x_m)$ は A 上で定義された関数であり，任意の $x=(x_1,\ldots,x_m)\in A$ に対して $f(x)\geqq 0$ であると仮定する．$\{K_n\}$ と $\{L_n\}$ はいずれも可測な有界閉集合の増大列で $K_n\to A$, $L_n\to A$ を満たすとする．また，f は任意の K_n, L_n 上で積分可能であると仮定する．すると，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m = \lim_{n\to\infty}\int_{L_n} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m$$

が成り立つ．

証明. 以下 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ として，$\displaystyle\int_B f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\cdots dx_m$ を $\displaystyle\int_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ と書く．$M_n := K_n\cup L_n$ とし，$a_n := \displaystyle\int_{K_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $b_n := \displaystyle\int_{L_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $c_n := \displaystyle\int_{M_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ とおく．また，$a_\infty := \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, $b_\infty := \displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$, $c_\infty := \displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ とおく．

$a_\infty = c_\infty$ を証明する．これを示せば，同様に $b_\infty = c_\infty$ もわかるから，$a_\infty = b_\infty$ が得られる．

$K_n\subset M_n$ で $f\geqq 0$ だから，$a_n\leqq c_n$ である．よって，$a_\infty\leqq c_\infty$ である．今 $a_\infty < c_\infty$ であると仮定して矛盾を導く．$a_\infty < c_{n_0}\leqq c_\infty$ を満たす $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する．前定義の仮定 (2-3) より，$M_{n_0}\subset K_{n_1}$ となるような $n_1\in\mathbb{N}$ が存在する．すると，$a_{n_1}\leqq a_\infty < c_{n_0}\leqq a_{n_1}$ となり矛盾する． □

定理 11.3. A は前定理と同様とする．$f(x_1,\ldots,x_m)$ は A 上で定義された関数とする．

$$f_+(x_1,\ldots,x_m) := \max\big\{f(x_1,\ldots,x_m),\ 0\big\}$$
$$f_-(x_1,\ldots,x_m) := \max\big\{-f(x_1,\ldots,x_m),\ 0\big\}$$

とし，$f(x_1,\ldots,x_m) = f_+(x_1,\ldots,x_m) - f_-(x_1,\ldots,x_m)$ と正の部分と負の部分に分解する．f の A 上での広義積分の値が ($\pm\infty$ を含めて) 定まるための必要十分条件は，f_+ と f_- の A 上で広義積分の値が定まり，その広義積分の値の少なくとも一方は有限な値であることである．そのとき，

$$\int_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_A f_+(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int_A f_-(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \qquad ①$$

が成り立つ．

証明. $\{K_n\}$ は可測な有界閉集合の増大列で $K_n \to A$ を満たすとする．

f_+ と f_- の A 上での広義積分の値が定まると仮定し，その少なくとも一方は有限の値であると仮定する．$a_n := \int_{K_n} f_+(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $b_n := \int_{K_n} f_-(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $c_n := \int_{K_n} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ とおく．$c_n = a_n - b_n$ である．

$a_\infty := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b_\infty := \lim_{n\to\infty} b_n$, $c_\infty := \lim_{n\to\infty} c_n$ とおく．$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は単調増加な数列だから，a_∞, b_∞ は有限な値か $+\infty$ のいずれかとして定まる．前定理より，a_∞, b_∞ の値は $\{K_n\}$ の選び方に依存しない．

仮定から，a_∞, b_∞ の少なくとも一方は有限な値である．このとき数列 $\{c_n\}$ の極限値は ($\pm\infty$ を許して) 定まる．例えば，$a_\infty = +\infty$ で b_∞ が有限な値ならば $c_\infty = +\infty$ である．また，$a_\infty = +\infty$ が有限な値で $b_\infty = +\infty$ ならば $c_\infty = -\infty$ である．いずれの場合も，f の A 上での広義積分の値が定まる．

対偶を証明する．もし f_+ か f_- がある K_n 上で積分不可能ならば f も K_n 上で積分不可能だから，f_+ と f_- が任意の K_n 上で積分可能な場合を考察する．また，$a_\infty = +\infty$ かつ $b_\infty = +\infty$ の場合には，$\{K_n\}$ の選び方によって $\{c_n\}$ はいろいろな値 ($\pm\infty$ を含む) に収束し，c_∞ は一定値として定まらない．

□

例 11.4. $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \pi$ を示し，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ であることを示す．

自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し，I_n は $-n \leqq x \leqq n$, $-n \leqq y \leqq n$ で定まる正方形とする．また，D_n は $x^2 + y^2 \leqq n^2$ で定まる円板とする．極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を利用して変数変換すると，

$$\begin{aligned}\int_{D_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-r^2}\cdot r dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^n e^{-r^2}\cdot r dr\right)\\ &= 2\pi\cdot\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^n = \pi(1-e^{-n^2})\end{aligned}$$

である，定理 11.2 より，

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{n\to\infty}\int_{D_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{I_n} e^{-x^2-y^2}dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n\int_{-n}^n e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-n}^n e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-n}^n e^{-y^2}dy\right) = \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^n e^{-x^2}dx\right)^2\end{aligned}$$

である．よって，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ である． □

12. 曲面の面積と面積分

さしあたって，$\mathbb{R}^3$ 内の曲面について考察する．一般の多様体まで拡張できる話も多いが，$\mathbb{R}^3$ の場合は空間ベクトルの外積 (ベクトル) が利用できるし，感覚的にも理解しやすいと思う．線形代数学でも $\mathbb{R}^3$ のベクトルの外積は説明しないことが多いので，そこからスタートする．後で述べるように，空間内の平行四辺形の面積が，ベクトルの外積を使うと簡単に求められるところがポイントである．

★ 空間ベクトルの外積

本来は列ベクトルで書いたほうがいいが，全部を列ベクトルで書くとスペースを浪費するので，行列との積 $A\mathbf{x}$ のように列ベクトルで書かないと仕方がない部分だけは列ベクトルで表示して，そうでない部分は行ベクトルで書かせてもらう．

空間ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ はいずれもゼロベクトルでないとし，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角度を θ とする．つまり，

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

である．ここで，$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ である．以下の説明は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ がゼロベクトルでも成立する部分が多いが，そのときは θ は任意の角と約束しておく．$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ (ゼロベクトルでもよい) に対し，

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &:= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= \left(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1 \right)\end{aligned}$$

を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**外積**とか**ベクトル積**とか**クロス積**という．また，$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対し，

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

と書くことにする．

定理 12.1. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ と θ は上の通りとする．また，$p, q \in \mathbb{R}$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) (交代性) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
(2) (双線形性 1) $(p\mathbf{a} + q\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + q(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(3) (双線形性 2) $\mathbf{a} \times (p\mathbf{b} + q\mathbf{c}) = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + q(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$
(4) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
(5) $\left|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = \left|\mathbf{a}\right| \cdot \left|\mathbf{b}\right| \sin\theta$
(6) (三重積公式) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
(7) (ヤコビ恒等式) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$
(8) A が 2 次正方行列，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ が，

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} A$$

を満たすならば，

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\det A)\,(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$$

が成り立つ．

証明. (1) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \left(b_2a_3 - b_3a_2,\ b_3a_1 - b_1a_3,\ b_1a_2 - b_2a_1\right) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(2)
$$\begin{aligned}(p\mathbf{a} + q\mathbf{b}) \times \mathbf{c} &:= \left(\begin{vmatrix} pa_2 + qb_2 & c_2 \\ pa_3 + qb_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} pa_3 + qb_3 & c_3 \\ pa_1 + qb_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} pa_1 + qb_1 & c_1 \\ pa_2 + qb_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= p\left(\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) + q\left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= p(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + q(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\end{aligned}$$

(3) 上の結果から，$\mathbf{a} \times (p\mathbf{b} + q\mathbf{c}) = -(p\mathbf{b} + q\mathbf{c}) \times \mathbf{a} = -p(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - q(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + q(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

(4)
$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1, a_2, a_3)\cdot\bigl(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1\bigr)\\ &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1\\ &= \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\bigl|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\bigr|^2 &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\\ &= (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\\ &= |\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\\ &= \bigl(|\mathbf{a}|^2\cdot|\mathbf{b}|^2\bigr)(1-\cos^2\theta)\\ &= \bigl(|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin\theta\bigr)^2\end{aligned}$$

(6) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ の第 1 成分 (x 座標) x を計算する．

$$\begin{aligned}x &= a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix} - a_3\begin{vmatrix} b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix}\\ &= (a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1\\ &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_1-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_1\end{aligned}$$

第 2 成分 (y 成分) と第 3 成分 (z 成分) も同様なので，(6) が得られる．
(7) これは，(6) から簡単に導かれる．
(8) $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とすると，$\mathbf{a}=a\mathbf{x}+c\mathbf{y}$, $\mathbf{b}=b\mathbf{x}+d\mathbf{y}$ だから，

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a\mathbf{x}+c\mathbf{y})\times(b\mathbf{x}+d\mathbf{y})=(ad-bc)\mathbf{x}\times\mathbf{y}=(\det A)\mathbf{x}\times\mathbf{y}$$

□

上の定理の (5) が，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を二辺とする空間内の平行四辺形の面積を表わしていることに注意する．これが曲面の面積の計算に非常に役立つ．また，(4) より，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ と直交することに注意する．

★ 曲面の面積とは何か？

曲線の長さは，曲線上に沢山点を取って，それらを結ぶ折れ線を考え，点の間隔を 0 に近づけたときの折れ線の長さの極限として定義した．曲面の場合は，それを真似して定義すると正しい曲面の面積が得られないことが知られている．

古典的な曲面の面積の定義では，以下のように考えた．まず，曲面を細かく分割する．問題は，細かく分割された各成分 D の面積が何か考えることである．分割を細かくすると，各成分 D は大体平面図形で近似される．もう少し厳密に言うと，成分 D 上の 1 点 P を取って，P での D の接平面 T を考える．D を T に正射影した図形を D' とすると，D と D' はほぼ一致している．だから，D の面積が D' の面積で近似できるはずである．あとは，曲面の分割を細かくしていって極限を取る．そうすると，前章の積分の変数変換公式のように，その面積は積分で計算できるはずである．

もちろん，この考えは正しいが，面積の定義から積分の公式を証明するのが，変数変換の公式と同じくらい面倒くさい．それだったら，最初から積分のほうで曲面の面積を定義してしまったほうが早いのではないか，という考え方もある．

というわけで，以下，ある程度納得できる形で，曲面の面積を積分を使って定義することを考える．

まず，A は (x, y)-平面の可測な有界閉集合とし，$z=f(x, y)$ は A を含む開集合上で C^1 級な関数とする．

$$S=\bigl\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \bigm| (x, y)\in A,\ z=f(x, y)\bigr\}$$

という関数 $z=f(x, y)$ のグラフとして定まる曲面 S の面積の定義を考える．特殊な場合を考えているようであるが，必要なら曲面をいくつかに分割して考えればよいから，結局はこの場合に帰着される．

S を細かく分割するために，A の分割 Δ を取る．A の境界付近はあとで考えることにして，さしあたって Δ の成分 I は辺が座標軸に平行な長方形であるとする．I の中心点を $P_I=(x_I, y_I)$ とし，$z_I=f(x_I,$

$y_I)$ とする，$Q_I := (x_I,\, y_I,\, z_I)$ は S 上の点である．点 Q_I における S の接平面を T_I とする．T_I の定義方程式は，

$$z - z_I = f_x(x_I, y_I)(x - x_I) + f_y(x_I, y_I)(y - y_I)$$

である．I の真上にある S の部分を

$$S_I = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,\, y) \in I,\, z = f(x,\, y)\big\}$$

とする．同様に，I の真上にある T_I 内の平行四辺形を B_I とする．上で述べた考え方では，S_I の T_I への正射影 S'_I の面積を考えていたが，分割が細かければ，S_I は S'_I でも B_I でも近似できるので，S'_I の代わりに面積の計算が簡単な B_I のほうを利用する．B_I の面積を計算しておこう．

長方形 I の 2 辺のベクトルを $(r_1,\, 0,\, 0)$ と $(0,\, r_1,\, 0)$ とする．すると，平行四辺形 B_I の 2 辺のベクトルは，

$$\mathbf{a}_I := \big(r_1,\, 0, r_1 f_x(x_I, y_I)\big), \quad \mathbf{b}_I := \big(0,\, r_2, r_2 f_y(x_I, y_I)\big)$$

である．前定理の (5) の公式を使うと，平行四辺形 B_I の面積 $\mu_2(B_I)$ は，

$$\begin{aligned}\mu_2(B_I) &= \big|\mathbf{a}_I \times \mathbf{b}_I\big| = r_1 r_2 \sqrt{1 + f_x(x_I, y_I)^2 + f_y(x_I, y_I)^2} \\ &= \sqrt{1 + f_x(x_I, y_I)^2 + f_y(x_I, y_I)^2} \cdot \mu_2(I)\end{aligned}$$

である．これらの面積の和

$$\Sigma_\Delta := \sum_{I \in \Delta} \sqrt{1 + f_x(x_I, y_I)^2 + f_y(x_I, y_I)^2} \cdot \mu_2(I)$$

をとって，分割 Δ を細かくしていって $\delta(\Delta) \to 0$ とすれば，それが S の面積 $\mu_2(S)$ のはずである．Σ_Δ の極限を積分で表すのは重積分の定義通りなので，以下の定義にたどり着く．

定義 12.2. 上の説明のように A は $(x,\, y)$-平面の可測な有界閉集合，$z = f(x,\, y)$ は A を含む開集合上で C^1 級な関数とし，

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; (x,\, y) \in A,\, z = f(x,\, y)\big\}$$

とするとき，曲面 S の面積 $\mu_2(S)$ を以下の積分で定義する．

$$\mu_2(S) = \int_A \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dx\, dy$$

また，$w = g(x,\, y,\, z)$ が S 上の連続関数のとき，S 上での g の**面積分**を

$$\int_S g\, d\sigma := \int_A g\big(x,\, y,\, f(x, y)\big) \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dx\, dy$$

で定義する．

上の定義を「定理」と書いてある本は，古典的な面積の定義を採用して，それが上の積分と一致することを証明している本である．S'_I と B_I の面積のずれの誤差を評価するのに苦労するのである．また，面積分の定義は微積分学 B1 講義ノートの定義 12.4 の線積分の考え方と同じである．$\displaystyle\int_S g\, d\sigma$ の $d\sigma$ は $dS,\, d\mu$ など様々な記号で書かれ，**面積 (分) 要素**と呼ばれる．また，

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\, dx\, dy$$

と表記することも多い．上の面積の定義だと，S を平行移動しても面積が変わらないことは重積分の性質からすぐわかるが，回転しても面積が変わらないことは証明を要する．しかし，以下のように，面積の公式を形に書き直して，座標系 $(x,\, y,\, z)$ に依存しない形にしてしまえば，それも自動的に導かれる．

★ パラメータ表示された曲面の面積

曲面の定義は定義 4.5 で与えれれているが，そこではパラメータ表示の考え方が基礎になっている．

E は $(u,\, v)$-平面 $\mathbb{R}^2$ 内の可測な有界閉集合とする．また，$N \subset E$ は面積が 0 の部分集合とする ($N = \phi$ でもよい)．$h\colon E \to \mathbb{R}^3$ は $x = h_1(u,\, v),\, y = h_2(u,\, v),\, z = h_3(u,\, v)$ で定義される写像で，$h_1,\, h_2,\, h_3$ は E 上で連続で，$E - N$ のすべての内部の点で C^1 級であるとする．さらに，$h|_{E-N} : (E - N) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ は単射であるとする．曲面 $S = h(E)$ の面積を求めることを考える．しかし，今のところ，面積の定義

は S がある関数 $z=f(x,\,y)$ のグラフになっている場合しか与えられていないので，便宜的に次の仮定を追加する．

$\pi\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ は $\pi(x,\,y,\,z)=(x,\,y)$ で定まる $(x,\,y)$-平面上への正射影とする．$A=\pi(S)$ とし，$\pi|_S\colon S\to A$ は全単射であると仮定する．すると，陰関数定理より，ある関数 $z=f(x,\,y)$ が存在し，

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;(x,\,y)\in A,\,z=f(x,\,y)\right\}$$

と書ける．陰関数定理より f は $\pi(S-h(N))$ 上で C^1 級である．$\pi(f(N))$ の面積は 0 なので，積分には影響せず，

$$\mu_2(S)=\int_A\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dx\,dy$$

である．以下，これを $h_1,\,h_2,\,h_3$ で書き直す．

$$h_u(u,v):=\left(\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u},\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u},\ \frac{\partial h_3(u,v)}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$h_v(u,v):=\left(\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v},\ \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v},\ \frac{\partial h_3(u,v)}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

とおく．

定理 12.3. 上の設定のもと，空間ベクトル $h_u(u,v)$ と $h_v(u,\,v)$ の外積を用いて，

$$\mu_2(S)=\int_E\left|h_u(u,v)\times h_v(u,v)\right|du\,dv$$

が成り立つ．これは，S が $z=f(x,\,y)$ のグラフであるという仮定無しで成立する．

証明. S が $z=f(x,\,y)$ のグラフであるという仮定に戻して考える．

$$\mathbf{a}(x,y):=\big(1,\,0,\,f_x(x,y)\big),\quad \mathbf{b}(x,y):=\big(0,\,1,\,f_y(x,y)\big)$$

とおくと，$\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}=\big|\mathbf{a}(x,y)\times\mathbf{b}(x,y)\big|$ であった．つまり，

$$\mu_2(S)=\int_A\left|\mathbf{a}(x,y)\times\mathbf{b}(x,y)\right|dx\,dy$$

である．$\varphi=\pi\circ h:E\longrightarrow A$ で φ を定義する．成分で表示すると $x=h_1(u,\,v),\,y=h_2(u,\,v)$ である．仮定から，$A'=\varphi(E-N)$ とおくと $\varphi:(E-N)\longrightarrow A'$ は全単射である．

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v}\\ \dfrac{\partial h_3}{\partial u} & \dfrac{\partial h_3}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\f_x&f_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v}\end{pmatrix}$$

なので，定理 12.1(8) より，$\big|h_u\times h_v\big|=|J_\varphi|\cdot\big|\mathbf{a}(x,y)\times\mathbf{b}(x,y)\big|$ が得られる．$dx\,dy=|J_\varphi|\,du\,dv$ とあわせると，定理の等式が得られる．

なお，S が $z=f(x,\,y)$ のグラフでない場合には，陰関数定理を用いて E を幾つかの閉領域に分割して考えればよい． □

定理 12.4. 上の設定のもと，$w=g(x,\,y,\,z)$ が S 上の連続関数のとき，S 上での g の面積分は，

$$\int_S g\,d\sigma:=\int_E g\big(h_1(u,v),\,h_2(u,v),\,h_3(u,v)\big)\cdot\Big|h_u(u,v)\times h_v(u,v)\Big|\,du\,dv$$

で与えられる．

証明. 前定理の証明とその前の説明からすぐわかる． □

例 12.5. (x,z)-平面上の円板 $(x-b)^2+z^2\leqq a^2$ (ただし $0<a<b$) を z-軸を軸として一回転して得られるドーナッツ状の立体の表面を S とする．S をトーラスという．S の面積を求めてみる．トーラス上の点は

$$h(\theta,\varphi):=\begin{pmatrix}(b+a\cos\theta)\cos\varphi\\(b+a\cos\theta)\sin\varphi\\a\sin\theta\end{pmatrix},\quad(0\leqq\theta<2\pi,\,0\leqq\varphi<2\pi)$$

とパラメータ θ, φ を使って書ける．

$$h_\theta = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta \end{pmatrix}, \quad h_\varphi = \begin{pmatrix} -(b+a\cos\theta)\sin\varphi \\ (b+a\cos\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|h_\theta\right| = a, \quad \left|h_\varphi\right| = b+a\cos\theta, \quad h_\theta \cdot h_\varphi = 0$$

なので，面積要素は

$$d\sigma = |h_\theta \times h_\varphi|\ d\theta\, d\varphi = \sqrt{|h_\theta|^2 \cdot |h_\varphi|^2 - (h_\theta \cdot h_\varphi)^2}\, d\theta\, d\varphi = a(b+a\cos\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

である．よって求める面積 S は $S = \int_S d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\theta)\, d\theta = 2\pi \cdot 2\pi ab = 4\pi^2 ab$ である．

13. ストークスの定理

この章だけは少し長くて，90 分の講義 2 回分の量がある．切れ目の良い場所がないので，長い章のまま書いた．

ガウスの定理，ストークスの定理，グリーンの定理と呼ばれる定理があるが，歴史的な経緯で細部や記法が異なるが，数学的には同一の内容に基づく定理なので，ここでは簡単のため，まとめて「ストークスの定理」と呼ぶことにする．テーラー展開，マクローリン展開，巾級数展開を，どの名前で呼ぶかと似たような事情である．まず，簡単な平面上のバージョンから述べる．

定理 13.1.(平面のガウスの定理) 平面上の可測な有界閉集合 D の境界は C^1 級の曲線 C であるとする．C は有限個の，長さ有限な単純閉曲線の和集合であると仮定する．C 上を動点が進行する場合は，進行方向の左手側に D の内部が見える方向に進むものとし，C 上での線積分はその方向に行う．C 上の各点 $(x,\,y)$ に対し，$\mathbf{n}(x,\,y)$ は点 $(x,\,y)$ における長さが 1 の C の法線ベクトルで，その方向は D の外部を向いているものとする．また，$f_1(x,\,y)$ と $f_2(x,\,y)$ は D を含むある開集合上で C^1 級な関数とする．$\mathbf{f}(x,\,y) = \big(f_1(x,y),\, f_2(x,y)\big)$ とし，

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y) := \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}$$

と書くことにする．$\operatorname{div}\mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ の**ダイバージェンス**とか**発散**という (物理用語)．このとき，次が成り立つ．

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_C \mathbf{f}(x,y)\cdot\mathbf{n}(x,y)\,ds \qquad ①$$

ここで $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ は線積分要素である．この等式は，以下のように書き換えられる．

$$\int_D \left(\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_C f_1(x,y)\,dy - \int_C f_2(x,y)\,dx \qquad ②$$

この公式は，$h_1(x,\,y) := -f_2(x,\,y)$, $h_2(c,\,y) := f_1(x,\,y)$,

$$\omega := h_1(x,y)\,dx + h_2(x,y)\,dy$$

とおいて，

$$d\omega := \left(-\frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x}\right)dx\,dy$$

として ω の**外微分** $d\omega$ を定義し，$C = \partial D$ と書くことにすると，

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D}\omega$$

というシンプルな形の公式に書き直せる．

証明. (1) ① 式を ② の形に変形する部分を説明する．

今，動点 $P(x,\,y)$ は C 上を速さ 1 で進んでいるとする．接線ベクトルの偏角を θ とし，P が進んだ道のりを s をする．P の速さが 1 だから s は時刻でもあり，速度ベクトル $\mathbf{v}$ は，

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{ds},\,\frac{dy}{ds}\right) = (\cos\theta,\,\sin\theta)$$

と書ける．法線ベクトルはこの速度ベクトルを -90° 回転したものだから，

$$\mathbf{n} = (\sin\theta,\,-\cos\theta) = \left(\frac{dy}{ds},\,-\frac{dx}{ds}\right)$$

である．よって，

$$\int_C \mathbf{f}(x,y)\cdot\mathbf{n}(x,y)\,ds = \int_C\left(f_1(x,y)\frac{dy}{ds} - f_2(x,y)\frac{dx}{ds}\right)ds = \int_C f_1(x,y)\,dy - \int_C f_2(x,y)\,dx$$

である．また，$\displaystyle\int_D \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_D\left(\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\right)dx\,dy$ なので ②が得られる．

(2) ②は，

$$\int_D \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C f_1(x,y)\,dy \qquad ③$$

$$\int_D \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C f_2(x,y)\,dx \qquad ④$$

という 2 つの等式に分解できる．

まず，④を，閉領域 D の境界の曲線 C が以下のような簡単な形の場合に証明する．

$a \leqq x \leqq b$ で連続で，$a < x < b$ で C^1 級な関数 $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ があり，$g_1(a) = g_2(a)$, $g_1(b) = g_2(b)$ で，$a < x < b$ のとき $g_1(x) < g_2(x)$ とする．そして，D は $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ のグラフで囲まれた閉領域で，

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\right\}$$

であるものとする．$y = g_1(x)$ のグラフを C_1 とする．$y = g_2(x)$ のグラフを $x = b$ から $x = a$ の方向に進む曲線を C_2 とする．$C = C_1 \cap C_2$ である．

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y}\,dy\right) dx \\
&= \int_a^b \left[f_2(x,y)\right]_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\,dx \\
&= \int_a^b f_2(x,g_2(x))\,dx - \int_a^b f_2(x,g_1(x))\,dx \\
&= -\int_b^a f_2(x,g_2(x))\,dx - \int_a^b f_2(x,g_1(x))\,dx \\
&= -\int_{C_2} f_2(x,y)\,dx - \int_{C_1} f_2(x,y)\,dx \\
&= -\int_C f_2(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

となる．

(3) D, C が一般の形の場合には，D を細かく分割して，(2) のような形の閉領域の合併集合に分割して考えると，④証明できる．

(4) ③の証明は，④の証明において，x, y を入れ替えて考えればよい．ただし，(y,x)-平面と (x,y)-平面では偏角の符号が反対になるため，線積分の符号が逆になる． □

★ 符号付きの面積

$x = g(t)$ のとき 1 変数の変数変換公式は $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$ であるが，n 積分の変数変換公式の $n = 1$ の場合は，$\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\left|\frac{dx}{dt}\right| dt$ で，上の公式と一致しない．閉区間 $I = [a,\,b]$ の場合に，$\displaystyle\int_I f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ であるが，$\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ に相当する公式が，重積分ではどうなるのか考察する必要がある．この最後の公式は，x が b から a に向かうときは，a から b へ向かうときの反対であると考え，$-I := [b,\,a]$ とおくとき，$-I$ の長さは $a - b < 0$ で I の長さの符号を反対にしたものである，という解釈のもとに成立しているのである．このように，向きを考えた線分を**有向線分**という．有向線分は向きを反対にすると，長さは (-1) 倍になると約束し，負の長さを許した**符号付き長さ**で考える．

(x,y)-平面を直線 $y = x$ について線対称移動して (y,x)-平面を作ると表裏が反対になる．平面上の可測な閉領域 D について，それを裏返して反対側から見た図形を $-D$ と書くことにし，$\mu_2(-D) = -\mu_2(D)$ と約束して負の面積を許した**符号付き面積**を考えることができる．このように，面積に負の値まで許す

と，定理 10.1 の変数変換公式

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f\bigl(g_1(u,v),\,g_2(u,v)\bigr)\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\,du\,dv$$

は，ヤコビアンについている絶対値がはずれて，

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_A f\bigl(g_1(u,v),\,g_2(u,v)\bigr)\cdot\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\,dv$$

という形になる．ただし，このように考えるとき，$(y,\,x)$-平面は $(x,\,y)$-平面を裏返したものなので，向きが反対で，

$$\int_B f(x,y)\,dy\,dx = -\int_B f(x,y)\,dx\,dy$$

でなければならない．本来は，

$$\int_{-B} f(x,y)\,dy\,dx = -\int_B f(x,y)\,dx\,dy$$

と書くほうがよいかもしれない．現代数学での別の流儀では，$dx\,dy$ と書く代わりに $dx\wedge dy$ という記号を用いて，$dy\wedge dx = -dx\wedge dy$ と約束する．つまり，

$$\int_B f(x,y)\,dy\wedge dx = -\int_B f(x,y)\,dx\wedge dy$$

と書く．実は，これは線形代数学のテンソルで使われる交代積の記号である．

$$(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})\wedge\mathbf{z} = a(\mathbf{x}\wedge\mathbf{z})+b(\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}),\quad \mathbf{y}\wedge\mathbf{x} = -(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})$$

と約束すると，$\mathbf{x}\wedge\mathbf{x} = -(\mathbf{x}\wedge\mathbf{x})$ より $\mathbf{x}\wedge\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となる．

よって，$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2)\wedge(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2)\\
&= a_1b_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\\
&= a_1b_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 - a_2b_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\\
&= (a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

となって，積分の変数変換の公式

$$dx\wedge dy = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\wedge dv$$

と一致して，大変相性がよい．

以下のストークスの定理では，こちらの符号付き面積をもとにした積分のほうを利用する．また，3 重積分 $dx\,dy\,dz$ も $dx\wedge dy\wedge dz$ という記号で書かせてもらう．そのほうが，外微分の公式と一致して都合がよい．

定理 13.2.(空間のガウスの定理) 空間内の可測な有界閉集合 D の境界は C^1 級曲面 S であるとする．S は有限個の，面積を持つ連結閉曲面の和集合であると仮定する．S 上の各点 $(x,\,y)$ に対し，$\mathbf{n}(x,\,y,\,z)$ は点 $(x,\,y,\,z)$ における長さが 1 の S の法線ベクトルで，その方向は D の外部を向いているものとする．また，$f_i(x,\,y,\,z)$ $(i=1,\,2,\,3)$ は D を含むある開集合上で C^1 級な関数とする．$\mathbf{f}(x,\,y,\,z) = \bigl(f_1(x,y,z),\,f_2(x,y,z),\,f_3(x,y,z)\bigr)$ とし，

$$\operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z) := \frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}$$

と書くことにする．$\operatorname{div}\mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ の**ダイバージェンス**とか**発散**という．このとき，次が成り立つ．

$$\int_D \operatorname{div}\mathbf{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_S \mathbf{f}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,d\sigma \qquad ①$$

ここで $d\sigma$ は面積要素である．この等式は，以下のように書き換えられる．

$$\int_D \left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$
$$= \int_S f_1(x,y,z)\, dy \wedge dz + \int_S f_2(x,y,z)\, dz \wedge dx + \int_S f_3(x,y,z)\, dx \wedge dy \qquad ②$$

この公式は，

$$\omega := f_1(x,y,z)\, dy \wedge dz + f_2(x,y,z)\, dz \wedge dx + f_3(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

とおいて，

$$d\omega := \left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

として ω の**外微分** $d\omega$ を定義し，$S = \partial D$ と書くことにすると，

$$\int_S d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

という形に書き直せる．

証明. (1) ① 式を ② の形に変形する部分を説明する．

定理 12.3 の記号で，$d\sigma = \left|h_u(u,v) \times h_v(u,v)\right| du\, dv$ である．$P = h(u,\, v) \in S$ とするとき，$h_u(u,\, v)$ と $h_v(u,\, v)$ は点 P における S の接線ベクトルだから，$d\sigma \neq 0$ のときは $h_u(u,v) \times h_v(u,v)$ は $h_u(u,\, v)$ と $h_v(u,\, v)$ に垂直だから，法線ベクトル $\mathbf{n}(x,y,z)$ に平行である．$(x,\, y,\, z) = h(u,\, v)$ とすると，

$$h_u(u,v) \times h_v(u,v) = \pm \left|h_u(u,v) \times h_v(u,v)\right| \cdot \mathbf{n}(x,y,z)$$

である．ここで符号 $\pm$ は $(u,\, v)$-平面の向きと S の表裏が一致しているか否かで定まる．それが一致しないときは u と v を入れ替えて $\pm$ が $+$ の符号になるようにしておく．このとき，外積の定義に戻ると

$$h_u(u,v) \times h_v(u,v) = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right)$$

である．ここで，$dy \wedge dz = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du \wedge dv$ 等の関係を使うと，

$$\int_S \mathbf{f}(x,y,z) \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma = \int_E \mathbf{f}(h(u,v)) \cdot \frac{h_u(u,v) \times h_v(u,v)}{\left|h_u(u,v) \times h_v(u,v)\right|} \cdot \left|h_u(u,v) \times h_v(u,v)\right| du \wedge dv$$
$$= \int_E \mathbf{f}(h(u,v)) \cdot \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right) du \wedge dv$$
$$= \int_S f_1(x,y,z)\, dy \wedge dz + \int_S f_2(x,y,z)\, dz \wedge dx + \int_S f_3(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

となる．また，

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{f}(x,y,z)\, dx\, dy, dz = \int_D \left(\frac{\partial f_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

なので ② が得られる．

(2) ② は，

$$\int_D \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}\, dx \wedge dy \wedge dz = \int_S f_3(x,y,z)\, dx \wedge dy$$

などの 3 つの等式に分解できる．どれも対称なので，この等式のみ証明する．閉領域 D の境界の曲面 S が以下のような簡単な形の場合に証明する．一般の場合の考え方は前定理の証明と同様である．

A は $(x,\, y)$-平面の可測な有界閉集合とし，$z = g_1(x,\, y)$ と $x = g_2(x,\, y)$ は A で連続で A の内部の各点で C^1 級な関数とする．また，A 上で $g_2(x,\, y) \geqq g_1(x,\, y)$ であると仮定する．

$$S_i := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,\, y) \in A,\ z = g_i(x,\, y) \right\}$$

とおき，$S = S_1 \cup S_2$ であると仮定する．つまり，D は 2 つのグラフ $z = g_1(x,\, y)$ と $z = g_2(x,\, y)$ で囲まれる閉領域であると仮定する．ここで，S_1 の法線ベクトルは下を向いていて $(x,\, y)$-平面の表裏と反

対になっていることに注意する．S_2 の表裏は $(x,\, y)$-平面の表裏と一致している．

$$\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}\, dx\, dy\, dz &= \int_A \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial f_3(x,y,z)}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy \\
&= \int_A [f_3(x,y,z)]_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)}\, dx\, dy \\
&= \int_A f_3(x,y,g_2(x,y))\, dx\, dy - \int_A f_3(x,y,g_1(x,y))\, dx\, dy \\
&= \int_{S_2} f_3(x,y,z)\, dx\, dy + \int_{S_1} f_3(x,y,z)\, dx\, dy \\
&= \int_S f_3(x,y,z)\, dx\, dy = \int_S f_3(x,y,z)\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

となる． □

電磁気学を勉強すると Maxwell 方程式という次の方程式を勉強する．

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

この中身は物理の授業に任せるとして，これらの方程式を変形して，いろいろな関係式を導くための最低限の数学的道具は，ここで用意しておこう．さしあったって，上の定理は $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ と $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ を処理するのに役に立つ．まだ，rot は説明していないので，この記号の説明から始める．

定義 13.3. $f_1(x,\, y,\, z)$, $f_2(x,\, y,\, z)$, $f_2(x,\, y,\, z)$ は $\mathbb{R}^3$ の開集合 U 上で C^r 級 $(r \geqq 1)$ な関数とし，

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \Big(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_2(x,y,z) \Big)$$

とする．このような $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x,\, y,\, z)$ を U 上の**ベクトル場**という．このとき，

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

と定義し，$\operatorname{rot} \mathbf{f}$ を $\mathbf{f}$ の**回転**とか**ローテーション**という．形式的に**ナブラ**と呼ばれる微分演算子

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

を用いて，$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f}$ と表示することも多い．この記号 ∇ を用いると，$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$ (内積) と書ける．ラプラシアンは $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ と表せる．また，U 上 C^r 級 $(r \geqq 1)$ な関数 $g(x,\, y,\, z)$ に対し，

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) := \nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x},\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y},\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} \right)$$

と定め，g の**勾配**とか**グラジエント**という．普通の関数 $g(x,\, y,\, z)$ をベクトル場に対比して**スカラー場**と呼ぶこともある．

定理 13.4.(Stokes の定理) S は $\mathbb{R}^3$ の連結で有界な C^1 級曲面で有限の面積を持ち，その境界は C^1 級曲線 C で有限の長さを持つとする．C は有限個の，長さ有限な単純閉曲線の和集合であると仮定する．S には表裏の区別があると仮定し，S 上の点 $(x,\, y,\, z)$ に対し表の方向を向いた単位法線ベクトルを $\mathbf{n}(x,\, y,\, z)$ とする．C 上を動点が進む方向は，定理 13.1 の仮定に準じて正の方向を定める．C 上の点 $(x,\, y,\, z)$ における正の方向を向いた C の単位接線ベクトルを $\mathbf{t}(x,\, y,\, z)$ とする．U は S を含む開集合で，$\mathbf{f}(x,\, y,\, z)$ は前命題のような U 上の C^1 級のベクトル場とする．このとき，次が成り立つ．

$$\int_S \big(\operatorname{rot} \mathbf{f}(x,y,z) \big) \cdot \mathbf{n}(x,y,z)\, d\sigma = \int_C \mathbf{f}(x,y,z) \cdot \mathbf{t}(x,y,z)\, ds \qquad ①$$

この等式は，以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
&\int_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
&= \int_C f_1(x,y,z)\, dx + \int_C f_2(x,y,z)\, dy + \int_C f_3(x,y,z)\, dz \qquad ②
\end{aligned}$$

また，$\omega := f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$ とおき，

$$d\omega := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f z_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

として ω の**外微分** $d\omega$ を定義し，$C = \partial S$ と書くことにすると，

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

と書き直せる．

証明. (1) ① 式を ② の形に変形する部分を説明する．

$$\int_S \big(\operatorname{rot}\mathbf{f}\big)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_S \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\wedge dy$$

の部分は，定理 13.2 の証明と同様にして証明できる．

$$\int_C \mathbf{f}(x,y,z)\cdot\mathbf{t}(x,y,z)\,ds = \int_C f_1(x,y,z)\,dx + \int_C f_2(x,y,z)\,dy + \int_C f_3(x,y,z)\,dz$$

は自明である．

(2) ② は，

$$\int_S \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz\wedge dx - \int_S \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx\wedge dy = \int_C f_1(x,y,z)\,dx$$

などの 3 つの等式に分解できる．どれも対称なので，この等式のみ証明する．

曲面 S と C 以下のような簡単な形の場合に証明する．$(u,\,v)$-平面上の有界で可測な閉領域 E があり，その境界は C^1 級曲線 $C' = \partial E$ であるとする．C^1 級の全単射 $h\colon E \to S$ が存在し，$h(C') = C$ で，h は表裏を反転させないものとする．すると定理 13.1 より，

$$\begin{aligned}
&\int_S \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz\wedge dx - \int_S \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx\wedge dy \\
&= \int_E \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,du\wedge dv - \int_E \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,du\wedge dv \\
&= \int_E \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right) du\wedge dv \\
&= \int_E \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\wedge dv \\
&= \int_E \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\wedge dv \\
&= \int_{C'} f_1\frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \int_{C'} f_1\frac{\partial x}{\partial u}\,du
\end{aligned}$$

が得られる．$x = x(u,\,v) = h_1(u,\,v)$ と考えているから，$\dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv + \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du = dx$ なので，

$$\int_{C'} f_1\frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \int_{C'} f_1\frac{\partial x}{\partial u}\,du = \int_C f_1\,dx$$

となり，目的の等式が得られる． □

定義 13.5. U は $\mathbb{R}^3$ の開集合で，$\mathbf{f}(x,\,y,\,z)$ は U 上の C^1 級のベクトル場とする．$-\operatorname{grad} g(x,\,y,\,z) = \mathbf{f}(x,\,y,\,z)$ を満たす関数 $g(x,\,y,\,z)$ が存在するとき，g を $\mathbf{f}$ の**ポテンシャル** (関数) という．物理では $-\operatorname{grad} g$ のように最初にマイナス符号 $-$ を付けることが多いが，$\operatorname{grad} g = \mathbf{f}$ のようにマイナス符号を付けないこともある．

$A \subset \mathbb{R}^n$ は集合とする．$I = [a, b]$ は閉区間で，$f\colon I \to A$ と $g\colon I \to A$ は C^1 級の写像で $C_1 := f(I)$ と $C_2 := g(I)$ は $\mathbb{R}^n$ 内の閉曲線であるか，または 1 点であるとする．もし，C^1 級関数 $\varphi : \bigl(I \times [0,1]\bigr) \longrightarrow A$ で，任意の $t \in I$ に対して $\varphi(t, 0) = f(t)$ かつ $\varphi(t, 1) = g(t)$ を満たすものが存在するとき，C_1 と C_2 は A 内で**ホモトープ**であるという．もし，A 内の上のような任意の C^1 級の閉曲線 C_1 が A 内で 1 点にホモトープであるとき，A は**単連結**であるという．

A 内の任意の 2 点 P, Q に対し，ある C^1 級関数 $h\colon [0, 1] \longrightarrow A$ が存在し $h(0) = P, h(1) = Q$ を満たすとき，A は**弧状連結**であるという．

(注意: 本来のホモトープや単連結や弧状連結の定義では f, g, h は「C^1 級」ではなく「連続」という仮定で定義して，その後に定理として「A とその境界 ∂A が C^1 級多様体ならば、f, g, h が C^1 級写像として選べる」ことを証明するのであるが，その証明が結構難しいので，ここでは上の定義を採用した.)

定理 13.6.(ポテンシャルの存在) $A \subset \mathbb{R}^3$ は単連結かつ弧状連結な領域または閉領域とする．

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \Bigl(f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)\Bigr)$$

は A 上で連続で，すべての A の内部の点で C^1 級であって，$\operatorname{rot}\mathbf{f}(x, u, z) = \mathbf{0}$ (ゼロベクトル) を満たすとする．すると，$\mathbf{f}(x, y, z)$ のポテンシャルが存在する．ポテンシャルは積分定数の差を除いて一意的で，以下のようにして計算できる．

積分定数 C を 1 つ選んで固定しておく．A 内の 1 点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A$ を固定する．$P = (x, y, z) \in A$ を勝手な点とする．$h(0) = P_0$, $h(1) = P$ を満たす C^1 級関数 $h\colon [0, 1] \longrightarrow A$ を取る．$h(t) = \bigl(h_1(t), h_2(t), h_3(t)\bigr)$ とする．そして，

$$g(x,y,z) := \int_0^1 \sum_{i=1}^3 f_i\bigl(h_1(t), h_2(t), h_3(t)\bigr)\, \frac{dh_i(t)}{dt}\, dt + C \qquad ①$$

とおくと，$-g(x, y, z)$ が $\mathbf{f}(x, y, z)$ のポテンシャル関数になる．

証明. (1) まず，① 式によって，$h(t)$ の選び方に依存せずに g が矛盾なく定まることを証明する．$C_1 = h([0, 1])$ で P_0 を始点 P を終点とする曲線 C_1 を定める．① 式の右辺は $\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}\, ds$ と書き直すことができる，C^1 級関数 $k\colon [0, 1] \longrightarrow A$ も $k(0) = P_0, k(1) = P$ を満たすとし，$C_2 = k([0, 1])$ とするとき，$\displaystyle\int_{C_1} \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}\, ds = \int_{C_2} \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}\, ds$ であることを証明すればよい．それには，$C := C_1 - C_2$ (曲線 C_1 と，C_2 の向きを反対にした曲線 $-C_2$ をつないでできる閉曲線) として，$\displaystyle\int_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}\, ds = 0$ を証明すればよい．C のパラメータ表示 $\ell\colon [0, 1] \longrightarrow A$ を，$0 \leqq t \leqq 1/2$ のとき $\ell(t) = h(2t)$, $1/2 \leqq t \leqq 1$ のとき $\ell(t) = k(2-2t)$ として定めておく．

A は単連結だから連続関数 $\varphi : \bigl([0,1] \times [0,1]\bigr) \longrightarrow A$ で，$\varphi(t, 0) = \ell(t)$ かつ $\varphi(t, 1) = 1$ 点 を満たすものが存在する．$S = \varphi\bigl([0,1] \times [0,1]\bigr)$ で曲面 S を定める．$\partial S = C$ となるように S に表裏を定めておく．ストークスの定理と $\operatorname{rot}\mathbf{f} = \mathbf{0}$ より，

$$\int_C \mathbf{f}\cdot\mathbf{t}\, ds = \int_S \bigl(\operatorname{rot}\mathbf{f}\bigr)\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = 0$$

である．よって，g は矛盾なく定義されている．

(2) $\operatorname{grad} g = \mathbf{f}$ を証明する．$\dfrac{\partial g}{\partial x} = f_1$ を証明すれば十分である．点 $P = (x_1, y_1, z_1)$ での偏微分係数 $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1, z_1)$ を計算しよう．この偏微分係数は

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{g(x, y_1, z_1) - g(x_1, y_1, z_1)}{x - x_1}$$

として計算され，動点 (x, y_1, z_1) は点 P を通り x-軸に平行な直線 ℓ 上を動く．この計算は局所的であるから，始点 P_0 を移動して ℓ 上にあると考えても g は定数分変化するだけだから，微分係数の値には影響しない．$P_0 = (x_0, y_1, z_1)$ としておくと，曲線 C_1 として P_0 と P_1 を結ぶ線分を選んでよく，$h_1(t) = (1-t)x_0 + tx_1$, $h_2(t) = y_1$ (定数), $h_3(t) = z_1$ (定数) と選ぶことができる．$h_1'(t) = x_1 - x_0$,

$h_2'(t)=0,\ h_3'(t)=0$ なので，

$$
\begin{aligned}
g(x_1, y_1, z_1) &= \int_0^1 f_1\bigl((1-t)x_0 + tx_1,\ y_1,\ z_1\bigr)(x_1 - x_0)\,dt + C \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f_1\bigl(x,\ y_1,\ z_1\bigr)\,dx + C
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\frac{\partial g(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} = f_1\bigl(x_1,\ y_1,\ z_1\bigr)
$$

となり，目的の等式が得られる．

(3) $g_2(x,\ y,\ z)$ も $\operatorname{grad} g_2 = \mathbf{f}$ を満たすとき，$g_2 - g$ が定数関数であることを証明する．それには，$\mathbf{f}=\mathbf{0}$ の場合に g が定数関数であることを証明すればよい．それは，$\dfrac{\partial g}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial g}{\partial y}=0,\ \dfrac{\partial g}{\partial z}=0$ のとき，g は A の連結成分上では定数関数である，という性質からわかる． □

14. 付録 — 多様体の測度とストークスの定理の一般型

この章は，通常の 1 年生の微積分学の講義内容の範囲外で，講義時間的にもここまで到達するのは困難だと思う．ただ，興味のある学生はいるかもしれないので，付録として書いた．この付録の目的は，$\mathbb{R}^3$ 内の曲面の面積の話を一般化して，$\mathbb{R}^n$ 内の m 次元多様体の測度の計算方法を与えることである．また，面積分を多様体に一般化し，多様体上の微分形式とストークスの定理を説明する．この付録は本来の講義の範囲外の内容なので読まなくてもよい．

まず、$n \geqq m \geqq 1$ とし $\mathbb{R}^n$ 内の m 次元多様体 M の測度 $\mu_m(M)$ について考える．曲面の面積で平行四辺形の面積が重要な役割を果したように，$\mathbb{R}^n$ 内の平行 $2m$ 面体の測度が大切である．$\mathbb{R}^3$ 内の平行四辺形の面積では，ベクトルの外積を利用するのが便利であった．同様に，$\mathbb{R}^n$ 内の平行 $2m$ 面体の測度を扱うには，ベクトルの**交代積**という概念が役に立つ．定理 14.6 の公式がほしいのであるが，その公式に登場する諸概念の定義と，その性質の証明に手間がかかる．それで，しばらく，通常の線形代数学の講義では学習しない交代積の話をする．90 分の講義 1 〜 2 回分の量があってちょっと長いが，ここが理解できると応用も広い．

★ 交代積

定義 14.1. V は n 次元実ベクトル空間とし，$\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ は V の基底とする．整数 $0 \leqq m \leqq n$ を 1 つ固定し，

$$\mathfrak{I}^n_m := \left\{(i_1, i_2, \dots, i_m) \,\middle|\, i_1,\dots,i_m \text{ は整数で } 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n\right\}$$

とおく．形式的に $i < 0$ または $i > n$ のときは $\mathfrak{I}^n_m = \phi$ と約束しておく．$\mathfrak{I}^n_0$ だけは空順列という 1 個の元を持つ集合と解釈する．すると，集合 $\mathfrak{I}^n_m$ の要素の個数 $\#\mathfrak{I}^n_m$ は，$\#\mathfrak{I}^n_m = {}_nC_m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ である．また，1 以上 k 以下の整数の集合を一時的に $\mathbb{N}_k := \{1, 2,\dots, k\}$ と書くことにする．

今，$j_1,\dots, j_m \in \mathbb{N}_n$ とし，これらを順に並べた順列を $J = (j_1, j_2,\dots, j_m)$ とする．もし，$j_1,\dots, j_m$ の中に同じ整数が 1 組でも含まれていたら $\mathrm{sign}(J) = 0$ と約束する．$j_1,\dots, j_m$ が相異なる整数のときは，それを昇順 (小さい数から大きい数への順) に並べ替えたものを $i_1,\dots, i_n$ $(i_1 < \cdots < i_m)$ とし，$j_1,\dots, j_n$ が $i_1,\dots, i_n$ の偶置換のとき $\mathrm{sign}(J) = +1$, 奇置換のとき $\mathrm{sign}(J) = -1$ と約束する．

今，$I = (i_1,\dots, i_m) \in \mathfrak{I}^n_m$ に対し，

$$\mathbf{e}_I := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_m}$$

という記号で表わされる元を考える．$\wedge$ の意味は後で拡張するが，さしあたって単なる文字で「意味」はないと思ってほしい．集合 $\left\{\mathbf{e}_I \,\middle|\, I \in \mathfrak{I}^n_m\right\}$ を基底とする実ベクトル空間を $\bigwedge^m V$ と書く．これは ${}_nC_m$ 次元ベクトル空間である．形式的に $m = 0$ の場合は，$\bigwedge^0 V := \mathbb{R}$ と定義する．$\bigwedge^m V$ を V の m 次の**交代積**という．

次に，$J = (j_1, j_2,\dots, j_m)$ $(j_1,\dots, j_m \in \mathbb{N}_n)$ に対し，$\mathrm{sign}(J) = 0$ の場合には

$$\mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_m} := \mathbf{0} \in \bigwedge^m V \quad \text{(ゼロベクトル)}$$

と約束する．$\mathrm{sign}(J) \neq 0$ の場合には $j_1,\dots, j_m$ を昇順に並べ替えたものを $i_1,\dots, i_n$ とし，

$$\mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_m} := \mathrm{sign}(J)\, \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_m}$$

と約束する．

最後に，一般の $\mathbf{a}_1,\dots, \mathbf{a}_m \in V$ に対して $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m$ を以下のように定義する．$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\mathbf{e}_j$ $(a_{i,j} \in \mathbb{R})$ と一意的に表すことができる．そこで，

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m := \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_m=1}^{n} a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{m,j_m}\mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{j_m} \in \bigwedge^m V \qquad ①$$

と定義する．

定理 14.2. (1) 上の記号のもと，列ベクトル $\mathbf{a}_1,\dots, \mathbf{a}_m$ を順に並べてできる n 行 m 列の行列を A とし，$I = (i_1,\dots, i_m) \in \mathfrak{I}^n_m$ に対して，A の i_1 行目，i_2 行目,$\dots$, i_m 行目を取り出してその順に並べてで

きる m 次の小行列を A_I とする．すると，

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m := \sum_{I \in \mathfrak{I}^n_m} (\det A_I)\, \mathbf{e}_I$$

が成り立つ．特に $m = n$ の場合は，

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n := (\det A)\, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$$

である．

(2) ある $1 \leqq j \leqq m$ に対し $\mathbf{a}_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{b}_k$ ($c_k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$) と書けるとき，

$$\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{j-1} \wedge \left(\sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{b}_k \right) \wedge \mathbf{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m = \sum_{k=1}^{m} c_k\, \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{j-1} \wedge \mathbf{b}_k \wedge \mathbf{a}_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m$$

が成り立つ．

(3) $k_1, k_2, \ldots, k_m$ が $1, 2, \ldots, m$ の置換のとき

$$\mathbf{a}_{k_1} \wedge \mathbf{a}_{k_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_{k_m} = \mathrm{sign}(k_1, k_2, \ldots, k_m)\, \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m$$

が成り立つ．

証明. (1) $\mathbf{a} = \displaystyle\sum_{I \in \mathfrak{I}^n_m} a_I \mathbf{e}_I$ で $a_I \in \mathbb{R}$ を定める．$a_I = \det A_I$ を示せばよい．$I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}^n_m$ を1つ固定して，定理 14.1 の ① 式の右辺から $\mathbf{e}_I$ を含む項 (I を置換したものも含む) のみを抽出しよう．$J = (j_1, \ldots, i_m)$ が I の置換になっている項を取り出せばよい．$1, 2, \ldots, m$ の置換 $\sigma\colon \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_m$ 全体の集合を $\mathfrak{S}_m$ とする．$\mathfrak{S}_m$ は写像の合成について群になっていて m 次対称群と呼ばれる．I の置換になっている J 全体の集合 $\mathfrak{J}_I$ は

$$\mathfrak{J}_I := \left\{ (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \ldots, i_{\sigma(m)}) \;\middle|\; \sigma \in \mathfrak{S}_m \right\}$$

と表すことができる．よって，

$$\begin{aligned} a_I &= \sum_{(j_1, \ldots, j_m) \in \mathfrak{J}_I} \mathrm{sign}(j_1, \ldots, j_m)\, a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{m,j_m} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sign}(\sigma)\, a_{1,i_{\sigma(1)}} a_{2,i_{\sigma(2)}} \cdots a_{m,i_{\sigma(m)}} = \det A_I \end{aligned}$$

である．

(2) と (3) は (1) と行列式の性質からすぐ導かれる． □

$n = 3$, $m = 2$ の場合には ${}_3C_2 = 3$ であるが，$\bigwedge^2 V$ 内の $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ を V 内の $\mathbf{e}_1$ と同一視し，同様に $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ を $\mathbf{e}_2$ と同一視し，$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ を $\mathbf{e}_3$ と同一視して $\bigwedge^2 V = V = \mathbb{R}^3$ と考えるとき，$\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V = \mathbb{R}^3$ に対して $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が成り立つことが，上の定理からすぐ導かれる．この意味で，交代積は外積の一般化になっている．

定義 14.3. V は上の定義と同じとし，p, q を自然数として $W_1 := \bigwedge^p V$, $W_2 := \bigwedge^q V$ とする．$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_p \in W_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_q \in W_2$ に対し，

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_p \wedge \mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_q \in \bigwedge^{p+q} V$$

と定義する．上の定義を線形に拡張することによって，任意の W_1 の元 $\mathbf{a}$ と任意の W_2 の元 $\mathbf{b}$ に対して $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ が定義できる．

定義 14.4.(Hodge 作用素) V は n 次元実ベクトル空間で，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を (右手系の) 正規直交基底とするような内積が定められているとする．$\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ に対する内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を記号 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ という記号で表すことにする (ドットだと式が見づらくなる)．

$I=(i_1,\,i_2,\ldots,\,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m$ に対し，$\mathbb{N}_n$ における集合 $\{i_1,\,i_2,\ldots,\,i_m\}$ の補集合を $\{j_1,\,j_2,\ldots,\,j_{n-m}\}$ とする．ここで，$j_1<j_2<\cdots<j_{n-m}$ となるように並べ替えておいて，

$$\overline{I}:=(j_1,\,j_2,\ldots,\,j_m)\in\mathfrak{I}^n_{n-m}$$

と書くことにする．さらに，

$$\varepsilon(I)=\mathrm{sign}(I,\overline{I}):=\mathrm{sign}(i_1,\,i_2,\ldots,\,i_m,\,j_1,\,j_2,\ldots,\,j_{n-m})$$

と約束する．また，この設定のもとで $\mathbf{e}_I=\mathbf{e}_{i_1}\wedge\mathbf{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_m}\in\bigwedge^m V$ に対し，

$$\mathbf{e}_{\overline{I}}=\mathbf{e}_{j_1}\wedge\mathbf{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{j_m}\in\bigwedge^{n-m}V$$

と書く．そして，$\mathbf{a}=\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}a_I\mathbf{e}_I\in\bigwedge^m V$ に対し

$$*\mathbf{a}=\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}\varepsilon(I)\,a_I\,\mathbf{e}_{\overline{I}}\in\bigwedge^{n-m}V$$

として写像 $*:\bigwedge^m V\longrightarrow\bigwedge^{n-m}V$ を定義する．これは線形写像である．$*$ を**ホッジ作用素**とか**スター作用素**という．

$\mathbf{a},\,\mathbf{b}\in\bigwedge^m V$ に対し $\mathbf{a}\wedge(*\mathbf{b})\in\bigwedge^n V$ で，$\bigwedge^n V$ は $\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n$ を基底とする 1 次元実ベクトル空間なので，ある実数 $c\in\mathbb{R}$ により

$$\mathbf{a}\wedge(*\mathbf{b})=c\,\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n$$

と書ける．そこで，

$$\langle\mathbf{a},\,\mathbf{b}\rangle=c$$

と定める．

定理 14.5. 記号は上の通りとし，$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_m$ と $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{b}_m\in\bigwedge^m V$ に対し $\langle\mathbf{a}_i,\,\mathbf{b}_j\rangle$ を $(i,\,j)$-成分とする m 次正方行列を C とする．すると，

$$\langle\mathbf{a},\,\mathbf{b}\rangle=\det C$$

が成り立つ．特に，$\langle\mathbf{a},\,\mathbf{b}\rangle$ の値は V の正規直交基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\,\mathbf{e}_n$ の選び方に依存せずに定まり，この $\bigwedge^m V$ 上の $\langle\ ,\ \rangle$ は内積になっている．また，$\{\mathbf{e}_I\mid I\in\mathfrak{I}^n_m\}$ は正規直交基底である．

証明. $\langle\ ,\ \rangle$ の定義から，これが双線形性を持っていることはすぐわかる．$I,\,J\in\mathfrak{I}^n_m$ について，$I\neq J$ ならば $\langle\mathbf{e}_I,\,\mathbf{e}_J\rangle=0$ で，$\langle\mathbf{e}_I,\,\mathbf{e}_I\rangle=1$ であることもすぐわかる．このことから正定値性もわかり，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\bigwedge^m V$ 上の内積であることがわかる．

他方，$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_m$ と $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{b}_m\in\bigwedge^m V$ に対し $\langle\mathbf{a}_i,\,\mathbf{b}_j\rangle$ を $(i,\,j)$-成分とする m 次正方行列を C とし，$(\mathbf{a},\,\mathbf{b}):=\det C$ として $(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\in\mathbb{R}$ を定める．一般の $\mathbf{x},\,\mathbf{y}\in\bigwedge^m V$ に対しては，上の定義を双線形に拡張して $(\mathbf{x},\,\mathbf{y})\in\mathbb{R}$ を定める．この定義から，$(\mathbf{x},\,\mathbf{y})$ は双線形性を持つ．

$I\neq J$ ならば $(\mathbf{e}_I,\,\mathbf{e}_J)=0$ で，$(\mathbf{e}_I,\,\mathbf{e}_I)=1$ であることは，直接的な計算でわかる．これより正定値性もわかるので，$(\mathbf{a},\,\mathbf{b})=\langle\mathbf{a},\,\mathbf{b}\rangle$ である．

以上の証明を気持ち悪いと感じる人には，以下のような直接的な計算による証明も可能である．

$a_{i,j}$, A, A_I は上の通りとする．また，$\mathbf{b}_j$ の i 行目の成分を $b_{i,j}$ とし，$b_{i,j}$ を $(i,\,j)$-成分とする n 行 m 列行列を B とし，A_I と同じように B から B_I を定める．

$$\mathbf{a}\wedge(*\mathbf{b})=\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}(\det A_I)\mathbf{e}_I\right)\left(\sum_{J\in\mathfrak{I}^n_m}\varepsilon(J)(\det B_J)\,\mathbf{e}_{\overline{J}}\right)$$

$$= \sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}\sum_{J\in\mathfrak{I}^n_m}\varepsilon(J)(\det A_I)(\det B_J)\,\mathbf{e}_I\wedge\mathbf{e}_{\overline{J}}$$

であるが，$I\neq J$ のときは $\mathbf{e}_I\wedge\mathbf{e}_{\overline{J}}=\mathbf{0}$ であり，$I=J$ のときは $\mathbf{e}_I\wedge\mathbf{e}_{\overline{I}}=\varepsilon(I)\,\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n$ である．よって，

$$\mathbf{a}\wedge(*\mathbf{b}) = \left(\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}\varepsilon(I)^2(\det A_I)(\det B_I)\right)\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n = \left(\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}(\det A_I)(\det B_I)\right)\mathbf{e}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n$$

である．よって，$\langle\mathbf{a},\,\mathbf{b}\rangle = \sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}(\det A_I)(\det B_I)$ である．ところで,「佐武一郎・線形代数学」の p.67 の定理 9 に書いてあるように，この値は $\det C$ に等しい． □

定理 14.6. $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\in\mathbb{R}^n$ を辺とする平行 $2m$ 面体を K とする．また，$\mathbf{a}:=\mathbf{a}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_m$ とおく．すると，K の m 次元の測度 $\mu_m(K)$ について

$$\mu_m(K)=\sqrt{\langle\mathbf{a},\,\mathbf{a}\rangle}$$

が成り立つ．$\left|\mathbf{a}\right|:=\sqrt{\langle\mathbf{a},\,\mathbf{a}\rangle}$ とおけば，

$$\mu_m(K)=\left|\mathbf{a}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_m\right|$$

である．

証明. そもそも，$\mathbb{R}^n$ 内の平行 $2m$ 面体 K の測度 $\mu_m(K)$ の定義は何か，という問題もあるが，それについては以下のように考える．図形を平行移動したり回転移動しても測度は変わらない (変わってはいけない) というのが基礎になる．K の 1 つの頂点は原点であるとすると，K を含む m 次元の $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間 H が存在する．$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$ に対してシュミットの直交化法を使うと，$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ を $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m\in H$ となるように選ぶことができる．ただし，$\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ を並べた n 次正方行列を P とするとき $\det P=1$ となるように選ぶ．このとき $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ は**右手系**であるという．$\det P=-1$ の場合は**左手系**であるという．$\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m$ が H の正規直交基底になるように H に内積を定める．すると，$H=\mathbb{R}^m$ と考えることができ，$H=\mathbb{R}^m$ 内の図形 K は，m 次元測度 $\mu_m(K)$ が定義できる．P は直交行列で ${}^tP=P^{-1}$ を満たし，P^{-1} も直交行列である．$c_{i,j}:=\langle\mathbf{a}_i,\,\mathbf{a}_j\rangle$ を $(i,\,j)$-成分とする m 次正方行列を C とする．直交行列の性質から，$c_{i,j}:=\langle P^{-1}\mathbf{a}_i,\,P^{-1}\mathbf{a}_j\rangle$ が成り立つ．P の構成法から，

$$P^{-1}\mathbf{a}_i=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{という形なので}\quad \mathbf{b}_i:=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m$$

とおく．$\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m$ を並べた行列を B とすると，系 9.8(1) より，$\mu_m(K)=\left|\det B\right|$ である．$c_{i,j}=\langle P^{-1}\mathbf{a}_i,\,P^{-1}\mathbf{a}_j\rangle=\langle\mathbf{b}_i,\,\mathbf{b}_j\rangle$ だから，$C=({}^tB)B$ である．よって，$\det C=(\det B)^2$ である．前定理より，$\det C=\langle\mathbf{a},\,\mathbf{a}\rangle$ なので結論が得られる． □

今までに証明した諸定理を合わせると，上の公式は以下の形に書き直せる．

系 14.7. $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\in\mathbb{R}^n$ を辺とする平行 $2m$ 面体を K とする．$\mathbf{a}_j$ の i 行目の成分を $a_{i,j}$ とし，$a_{i,j}$ を i 行 j 列の成分とする n 行 m 列の行列を A とする．$I=(i_1,\ldots,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m$ に対して，A の i_1 行目，i_2 行目,…, i_m 行目を取り出してその順に並べてできる m 次の小行列を A_I とする．すると，

$$\mu_m(K)=\sqrt{\sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}(\det A_I)^2}$$

である．

★ 多様体の測度

定義 14.8. m, n は自然数で $m \leqq n$ とする．$E \subset \mathbb{R}^m$ は可測な有界閉領域とし，$N \subset E$ は $\mu_m(N) = 0$ を満たす集合 ($N = \phi$ でもよい) とする．$h\colon E \to \mathbb{R}^n$ は連続写像で，$E - N$ のすべての内部の点で C^1 級であり，$h|_{E-N} : (E - N) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は単射であるとする．ここで h は $x_i = h_i(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ で与えれれているとする．$\mathbb{R}^n$ 内の m 次元多用体 $M := h(E - N)$ の測度 $\mu_m(M)$ の定義を考える．

E を 1 辺の長さが l の m 次元超立方体で分割し，この分割を Δ_l とする．ただし，E の各辺は座標軸に平行とする．超立方体 $D \in \Delta_l$ の中心を $\mathbf{u}_D$ とする．h のヤコビ行列を $J_h(\mathbf{u})$ $(\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in E)$ とする．l が十分小さければ $h(D)$ は D を $J_h(\mathbf{u}_D)$ で 1 次変換して得られる平行 $2m$ 面体で近似できるので，

$$\lim_{l \to +0} \frac{\mu_m(h(D))}{\mu_m((J_h(\mathbf{u}_D))(D))} = 1$$

であると考えられる．$I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}_m^n$ に対し，$J_h(\mathbf{u})$ の i_1 行目,$\ldots$, i_m 行目を取り出してできる m 次の小行列を $A_I(\mathbf{u})$ とおく．

$$\mu_m((J_h(\mathbf{u}_D))(D)) = \sqrt{\sum_{I \in \mathfrak{I}_m^n} (\det A_I(\mathbf{u}_D))^2} \mu_m(D)$$

である．よって，$\displaystyle\sum_{D \in \Delta_l} \sqrt{\sum_{I \in \mathfrak{I}_m^n} (\det A_I(\mathbf{u}_D))^2} \mu_m(D)$ において $l \to +0$ とした極限値が $\mu_m(M)$ であると定義するのが妥当である．

$$\det A_I(\mathbf{u}) = \frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}$$

であるので，次の定義が妥当であることが理解できると思う．

$$\mu_m(M) := \int_E \sqrt{\sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}_m^n} \left(\frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)} \right)^2} du_1\, du_2 \cdots du_m$$

積分の変数変換公式から，これは $h\colon E \to \mathbb{R}^n$ の選び方に依存しないで定まる値である．特に定まった記号はないが，

$$d\mu_m := \sqrt{\sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}_m^n} \left(\frac{D(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)} \right)^2} du_1\, du_2 \cdots du_m$$

と書くことにする．$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ が M 上の連続関数の場合には，面積分に相当する概念の一般化 (特に定まった数学用語はない) を

$$\int_M f\, d\mu_m := \int_E f(h(u_1, \ldots, u_m)) \sqrt{\sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}_m^n} \left(\frac{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})}{D(u_1, \ldots, u_m)} \right)^2} du_1 \cdots du_m$$

によって定義する．

★ 微分形式

定義 14.9. U は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の座標系とする．$f_1, \ldots, f_n$ が U 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級関数のとき，

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i \qquad ①$$

を U 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級 **1 次微分形式**と言う．

今，形式的に $dx_1, \ldots, dx_n$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な元と考え，$dx_1, \ldots, dx_n$ を基底とするベクトル空間 V を考える．さらに，V には $dx_1, \ldots, dx_n$ を (右手系の) 正規直交基底とするような内積が定まっているとする．$\bigwedge^m V$ の元は，

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathfrak{I}_m^n} a_{i_1, \ldots, i_m}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} \qquad ②$$

と表すことができる．$I = (i_1, \ldots, i_n)$ に対し，

$$dx_I := dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$$

と略記することにする．②において，係数の $a_I = a_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}$ を U 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級関数 $f_I(x) = f_{i_1,\ldots,i_m}(x_1,\ldots,x_n)$ まで拡張して，

$$\omega = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m} f_{i_1,\ldots,i_m}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m} \qquad ③$$

という形の元を考える．③の形の元を U 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級 m **次微分形式**とか，短く m-**形式**と言う．$\wedge$ については $\bigwedge^m V$ の場合と同じ演算規則を適用する．例えば $dx_j\wedge dx_i = -dx_i\wedge dx_j$, $dx_i\wedge dx_i = 0$ である．ふたつの微分形式 ω_1, ω_2 に対して $\omega_1\wedge\omega_2$ を作るときに，dx_i は関数に作用させない．例えば，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n f_i dx_i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^n g_j dx_j\right) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n f_i g_j dx_i\wedge dx_j \\ &= \sum_{1\leqq i<j\leqq n}(f_i g_j - f_j g_i)dx_i\wedge dx_j\end{aligned}$$

である．

$x_i = h_i(u_1,\ldots, u_k)$ の場合 $dx_i = \displaystyle\sum_{j=1}^k \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\,du_j$ であるから，$m\leqq k\leqq n$ の場合，

$$dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m} = \sum_{(j_1,\ldots,j_m)\in\mathfrak{I}^k_m}\frac{D(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})}{D(u_{j_1},\cdots,u_{j_m})}\,du_{j_1}\wedge du_{j_2}\wedge\cdots\wedge du_{j_m}$$

という変数変換法則に従う．

定義&定理 14.10. 定義 14.8 と同じく $M\subset\mathbb{R}^n$ はパラメータ表示 $h\colon E\to M$ で定まる m 次元多様体とする．h は $x_i = h_i(u_1,\ldots, u_m)$ $(i=1,\ldots, n)$ で定まるものとする．U は M を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，ω は上の定義の③のような U 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級 m 次微分形式とする．ω の定義域を M に制限して考えたものを，M 上の $\mathbb{C}^\infty$ 級 m **次微分形式**という．このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_M\omega &= \int_M\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m} f_{i_1,\ldots,i_m}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m} \\ &= \int_E\left(\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m}\frac{D(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})}{D(u_1,\cdots,u_m)}\right)du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_m\end{aligned}$$

なお，

$$h^*\omega := \left(\sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in\mathfrak{I}^n_m}\frac{D(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})}{D(u_1,\cdots,u_m)}\right)du_1\wedge du_2\wedge\cdots\wedge du_m$$

と定義すれば，$\displaystyle\int_M\omega = \int_E h^*\omega$ である．

定義 14.11. 記号は定理 14.9 と同じとする．$f = f(x_1,\ldots, x_n)$ が U 上の C^r 級関数 $(r\geqq 1)$ のとき，

$$df = \sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i$$

として f の**外微分** df を定義する．これは C^{r-1} 級 1 次微分形式である．次に③のような C^r 級 m 次微分形式 $(r\geqq 1)$

$$\omega = \sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m} f_I\,dx_I$$

に対しては

$$\begin{aligned}d\omega &:= \sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}(df_I)\wedge dx_I \\ &= \sum_{I\in\mathfrak{I}^n_m}\sum_{j=1}^n\frac{df_I}{dx_j}\,dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\end{aligned}$$

によって ω の**外微分** $d\omega$ を定義する．これは C^{r-1} 級 $m+1$ 次微分形式である．また，ガウスの定理，ストークスの定理のところで個別に定義した 3 種類の外微分は上の定義と一致している．

定理 14.12. 設定や記号は上の通りとし，C^r 級 m 次微分形式 $(r \geqq 2)$

$$\omega = \sum_{I \in \mathfrak{I}^n_m} f_I \, dx_I$$

を考える．このとき，$d(d\omega) = 0$ である．

証明. まず，U 上の C^2 級関数 f に対して，$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, $dx_i \wedge dx_i = 0$ より，

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\right) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, dx_j\right) \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．よって，

$$d(d\omega) = \sum_{I \in \mathfrak{I}^n_m} (d(df_I)) \wedge dx_I = \sum_{I \in \mathfrak{I}^n_m} 0 \wedge dx_I = 0$$

である． □

★ 多様体上のストークスの定理

定理 14.13.(Stokes の定理) $h\colon E \to M$ は定義 14.8 の通りとする．さらに，E の境界 ∂E は $m-1$ 次元 C^1 級多様体の構造を持つと仮定し，E の反対側が表となるような向きを ∂E に定めておく．また，$\partial M := h(\partial E)$ も $m-1$ 次元 C^1 級多様体の構造を持つと仮定し，∂M の向きは ∂E から定まる向きと一致すると仮定する．

$$\omega = \sum_{I \in \mathfrak{I}^n_{m-1}} f_I \, dx_I$$

は $M = h(E)$ を含む $\mathbb{R}^n$ のある開集合上で定義された C^1 級 $m-1$ 次微分形式であるとする．すると，

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

が成り立つ．

証明. 定理 14.10 より，$\displaystyle\int_M d\omega = \int_E h^*(d\omega)$, $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial E} h^*\omega$ である．また，$h^*(d\omega) = d(h^*\omega)$ はすぐわかる．よって，E 上の $m-1$ 次微分形式 $\eta := h^*\omega$ に対して，

$$\int_E d\eta = \int_{\partial E} \eta \qquad ①$$

を証明すればよい．記号の単純化のため

$$\eta = \sum_{i=1}^m g_i(u_1, \ldots, u_m)\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_m$$

と書き直す．$du_i \wedge du_1 \wedge \cdots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \cdots \wedge du_m = (-1)^{i+1} du_1 \wedge \cdots \wedge du_m$ だから，

$$d\eta = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \frac{\partial g_i(u_1, \ldots, u_m)}{\partial u_i}\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_m$$

である．この後の証明は定理 13.2 の証明と同様である． □