微積分学Ｂ１講義ノート　　安藤哲哉

注意: (1) 校正をあまりきちんとしていないので，誤植等に注意して利用して下さい．
(2) 講義中に配布した演習問題と解答は含まれていません．

1. 数列 (1)

★ 基本的な記号や用語 (その 1).

集合の要素のことを**元** (element) ともいい，a が集合 A の元であるとき $a \in A$ とか $A \ni a$ と書き，a が A の元でないとき $a \notin A$ とか $A \not\ni a$ と書く．

等号 $a = b$ は,「a と b は等しい」という意味と,「a を b として定義する」の 2 つの意味で用いられる．後者は「a に b を代入する」というのと実質的には同じである．前者を「条件 (式) の等号」，後者を「代入の等号」という．

$$a := b \quad \text{とか} \quad b =: a$$

という記号は後者の「a を b として定義する」という代入の等号として用いられる．例えば「$a := 1$ とおく」というように使う．ただ，$=$ を前者の「条件の等号」と「代入の等号」の両方に意味で使うことは結構あって，そこは文脈で判断してほしい．

定義 1.1. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書き，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と書く．また，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書き，1 以上の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と書く．

定義 1.2. A は空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．
(1) ある元 $a_0 \in A$ が，すべての $x \in A$ に対して $x \geqq a_0$ を満たすとき，a_0 は A の**最小値**であるとか**最小元**であるといい，$\min A = a_0$ という記号で表す．
(2) ある元 $a_1 \in A$ が，すべての $x \in A$ に対して $x \leqq a_1$ を満たすとき，a_1 は A の**最大値**であるとか**最大元**であるといい，$\max A = a_0$ という記号で表す．

数に関する何かの性質を使わないと，議論が先に進まない．ここでは，直感的に納得しやすい以下の性質を仮定して話を進める．

前提条件 1.4. (1) $x = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{n} 10^i a_i$ または $x = -\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{n} 10^i a_i$ ($a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$) と十進法の小数で表示できる数は実数である．逆に実数はこのように表示できる．
(2) A が $\mathbb{N}$ の空でない部分集合ならば，$\min A$ が存在する．

定理&定義 1.5. A は $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とし，

$$B := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \text{任意の } a \in A \text{ に対して } x \geqq a \text{ が成り立つ} \right\}$$

とおく．もし，$B \neq \phi$ ならば $\min B$ が存在する．$B \neq \phi$ のとき $\sup A := \min B$, $B = \phi$ のとき $\sup A := +\infty$ と定義し，$\sup A$ を A の**上限**という．

証明. 以下，$B \neq \phi$ と仮定して，証明する．A が正の実数を含まない場合は，1 つの元 $a_0 \in A$ を選んで，$A' := \left\{ x + |a_0| + 1 \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in A \right\}$ とおけば，A' は正の実数を含む．A' に対して定理のように B' を定め，$b_0 = \min B'$ が存在することが証明できれば，$\min B = b_0 - |a_0| - 1$ であるから，最初から A は正の実数 a_0 を含むと仮定して証明すればよい．いま，非負整数 m に対して，

$$(1/10^m)\mathbb{Z} := \left\{ \frac{k}{10^m} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

とし，$B_m := B \cap (1/10^m)\mathbb{Z}$ とおく．B の元は a_0 以上なので正の数である．ある $b \in B$ を取れば，$\lceil b \rceil \in B$ ($\lceil b \rceil$ は b 以上の最小の整数を表す記号) なので，$B_m \neq \phi$ である．上の前提条件の (2) より $b_m := \min B_m$ が存在する．$c_m := b_m - \dfrac{1}{10^m}$ とおく．$c_m < a_m \leqq b_m$ を満たす $a_m \in A$ が存在する．$(1/10^m)\mathbb{Z} \subset (1/10^{m+1})\mathbb{Z}$ なので $B_m \subset B_{m+1}$ である．よって，$b_{m+1} \leqq b_m$ である．また，

$c_m \leqq c_{m+1} < a_{m+1} \leqq b_{m+1} \leqq b_m$ である．$c_{m+1} = \displaystyle\sum_{i=-m-1}^{n} 10^i d_i$ ($d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) と十進有限小数で表すとき，$c_m = \displaystyle\sum_{i=-m}^{n} 10^i d_i$ であって，d_i は $i \leqq m$ であれば m の選び方に依存せずに定まる．そこで，$c_\infty = \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{n} 10^i d_i$ とおく．上の前提条件 (1) から $c_\infty \in \mathbb{R}$ である．また，$|c_m - b_m| \leqq 1/10^m$ で $c_m \leqq c_\infty \leqq b_m$ なので，$\lim_{m\to\infty} c_m = \lim_{m\to\infty} b_m = c_\infty$ である．任意の $x \in A$ に対して $x \leqq b_m$ であるから，任意の $x \in A$ に対して $x \leqq c_\infty$ である．よって，$c_\infty \in B$ である．また，$y \in \mathbb{R}, y < c_\infty$ ならば $y < c_m$ となる m が存在し，$c_m \notin B$ だから $y \notin B$ である．よって，$c_\infty = \min B$ である． □

系&定義 1.6. A は $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とし，

$$B := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対して } x \leqq a \text{ が成り立つ}\}$$

とおく．もし，$B \neq \phi$ ならば $\max B$ が存在する．$B \neq \phi$ のとき $\inf A := \min B$, $B = \phi$ のとき $\inf A := -\infty$ と定義し，$\sup A$ を A の**下限**という．

証明. $-A := \{-a \mid a \in A\}$ に対して前定理を適用すればよい． □

問 1.7. $\phi \neq A \subset \mathbb{R}$ とする．もし $\max A$ が存在すれば，$\max A = \sup A$ であることを証明せよ．また，もし $\min A$ が存在すれば，$\min A = \inf A$ であることを証明せよ．

$k \in \mathbb{Z}$ とし，$n \geqq k$ を満たす任意の整数 n に対して実数 (または複素数) a_n が与えられているとき，$\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ などと書き，a_k を**初項**とする **(無限)(実・複素) 数列**という．極限を考えるときなど，初項がどこから始まるか，あまり気にしないときは，$\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ を単に $\{a_n\}$ と書き，こちらの書き方を主に用いる．初項が a_1 か a_0 である数列が多い．

定義 1.8. $\{a_n\}$ は実数の無限数列，$a_\infty \in \mathbb{R}$ とする．

(1) 任意の正の実数 ε に対し，ある自然数 $n(\varepsilon)$ が存在して，$m \geqq n(\varepsilon)$ を満たすすべての自然数 m に対し，$|a_m - a_\infty| < \varepsilon$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は a_∞ に**収束**するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ と書く．つまり，$\varepsilon > 0$ をどれだけ 0 に近く選んでも，十分大きな $n(\varepsilon)$ を取れば，$m \geqq n(\varepsilon)$ のとき，a_m と a_∞ の差は非常に小さい ε より小さくなる，ということで，こでが a_n が a_∞ に**近づく**という意味である.「近づく」とか「十分大きな」いう感覚的な言葉を数学的に厳密に定義すると，最初の表現になる．

(2) 任意の実数 M に対し，ある自然数 $n(M)$ が存在して，$m \geqq n(M)$ を満たすすべての自然数 m に対し，$a_m \geqq M$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は $+\infty$ に**発散**するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く．同様に，任意の実数 M' に対し，ある自然数 $n(M')$ が存在して，$m \geqq n(M')$ を満たすすべての自然数 m に対し，$a_m \leqq M'$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は $-\infty$ に**発散**するといい，$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く．

(3) ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対して $a_n \leqq M$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**上に有界**であるという．上に有界な数列が $+\infty$ に発散することはない．

(4) ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対して $a_n \geqq M$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**下に有界**であるという．下に有界な数列が $-\infty$ に発散することはない．

(5) ある実数 M が存在して，すべての自然数 n に対して $|a_n| \leqq M$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**有界**であるという．

(6) $n > m$ を満たす任意の自然数の組 m, n に対して $a_n \geqq a_m$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調増加**であるという．

(7) $n > m$ を満たす任意の自然数の組 m, n に対して $a_n \leqq a_m$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**単調減少**であるという．

(8) 任意の正の実数 ε に対し，ある自然数 $n(\varepsilon)$ が存在して，$m \geqq n(\varepsilon), n \geqq n(\varepsilon)$ を満たすすべての自然数 m, n に対し，$|a_m - a_n| < \varepsilon$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとか**基本列**であるという．

定理 1.9. 実数列 (実数の数列のこと) $\{a_n\}$ が単調増加で上に有界ならば，$\{a_n\}$ は収束する．同様に，$\{a_n\}$ が単調減少で下に有界ならば収束する．

証明. $\{a_n\}$ は単調増加で上に有界とする．集合 $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ を考える．$a_\infty = \sup A$ とおく．定理 1.5 のように B を定めると $\{a_n\}$ は上に有界だから $B \neq \phi$ で，$a_\infty \neq +\infty$ である．任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \leqq a_\infty$ である．

$\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$ であることを証明する．そうでないとすると，ある正の実数 ε を取ると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n - a_\infty| \geqq \varepsilon$ となる．$a_n \leqq a_\infty$ だから，$a_n \leqq a_\infty - \varepsilon$ である．これは，$a_\infty - \varepsilon \in B$ を意味し，$a_\infty = \min B$ であったことに矛盾する．

$\{a_n\}$ が単調減少で下に有界な場合は $\{-a_n\}$ に上の結果を適用すればよい． □

定義 1.10. (上極限・下極限) $\{a_n\}$ は実数の無限数列とする．$m \in \mathbb{N}$ に対して，

$$b_m := \sup\{a_i \mid i \geqq m\}, \quad c_m := \inf\{a_i \mid i \geqq m\}$$

とおく．もし $b_1 = +\infty$ ならば $\limsup_{n\to\infty} a_n := +\infty$ と約束する．以下，$b_1 \neq +\infty$ と仮定する．すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_{n+1} \leqq b_n$ が成り立ち，$\{b_n\}$ は単調減少である．もし，数列 $\{b_n\}$ が下に有界でなければ，$\limsup_{n\to\infty} a_n := -\infty$ と約束する．もし，数列 $\{b_n\}$ が下に有界ならば，前定理より数列 $\{b_n\}$ は収束するので，$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$ と定義する．すると，任意の実数列に対して $\limsup_{n\to\infty} a_n$ が定義できる．$\limsup_{n\to\infty} a_n$ を数列 $\{a_n\}$ の**上極限**という．

同様に，$c_1 = -\infty$ ならば $\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$ と約束し，数列 $\{c_n\}$ が上に有界でなければ，$\liminf_{n\to\infty} a_n := +\infty$ と約束する．それ以外の場合には，$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} c_n$ と定義する．$\liminf_{n\to\infty} a_n$ を数列 $\{a_n\}$ の**下極限**という．

任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $c_m \leqq a_m \leqq b_m$ であるから，$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqq \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つ．

命題 1.11. 実数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は，$\limsup_{n\to\infty} a_n$ と $\liminf_{n\to\infty} a_n$ がともに有限の値であって，$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つことである．このとき，$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ である．

証明. 定義 1.10 の記号を用い，$b := \limsup_{n\to\infty} a_n$, $c := \liminf_{n\to\infty} a_n$ とおく．

(1) $b = c$ と仮定すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$m \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$-\varepsilon < b_m - b < \varepsilon$, $-\varepsilon < c_m - b < \varepsilon$ が成り立つ．$c_m \leqq a_m \leqq b_m$ であるから，$c_m - b \leqq a_m - b \leqq b_m - b$ で，$-\varepsilon < c_m - b \leqq a_m - b \leqq b_m - b < \varepsilon$ が成り立ち，$\lim_{n\to\infty} a_n = b$ となる．

(2) $b < c$ であって $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ が存在したと仮定して矛盾を導く．$\varepsilon = (b-c)/6 > 0$ とおく．ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$m \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$|a_m - a| < \varepsilon = (b-c)/6$, $|b_m - b| < (b-c)/6$, $|c_m - c| < (b-c)/6$ が成り立つ．しかし，b_n の定義から，ある $k \geqq n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ を取ると，$|b_k - a_k| < \varepsilon = (b-c)/6$ となる．すると，$|b-a| \leqq |b-b_m| + |b_m - a_m| + |a_m - a| < (b-c)/2$ となる．同様に，$|a-c| \leqq |a-a_m| + |a_m - c_m| + |c_m - c| < (b-c)/2$ である．すると，$|b-c| \leqq |b-a| + |a-c| < b-c$ となって矛盾する．

よって，$\{a_n\}$ が収束すれば $b = c$ である． □

定理 1.12. 実数列 $\{a_n\}$ がコーシー列ならば，$\{a_n\}$ は収束する．

証明. 定義 1.10 の記号を用い，$b := \limsup_{n\to\infty} a_n$, $c := \liminf_{n\to\infty} a_n$ とおく．

(1) $b = +\infty$ ならば $\{a_n\}$ はコーシー列でないことを示す．もし $\{a_n\}$ がコーシー列ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$m \geqq n(\varepsilon)$, $n \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$|a_m - a_n| < \varepsilon$ が成り立つ．$n_0 = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ とおくと，$|a_m - a_{n_0}| < \varepsilon$ である．しかし，$b = +\infty$ だから，$a_m > a_{n_0} + \varepsilon$, $m \geqq n(\varepsilon)$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在し，矛盾する．

同様に，$c = -\infty$ ならば $\{a_n\}$ はコーシー列でない．そこで，$b \neq +\infty$, $c \neq -\infty$ と仮定する．$c \leqq b$ だから，$b \neq -\infty$, $c \neq +\infty$ であり，b も c も有限の値である．

(2) $c < b$ ならば $\{a_n\}$ はコーシー列でないことの証明は，前命題の証明の (2) を同様である．　□

2. 数列 (2)

★ 基本的な記号や用語 (その 2): 写像.

関数と似た概念に「写像」というものがある．A, B は集合で，A の元 x に対し B の元 (それを $f(x)$ としよう) を対応させる規則を $f\colon A \to B$ と書き，A から B への**写像**という．$x \in A$ に $y \in B$ が対応するとき

$$y = f(x) \quad \text{とか} \quad f(x) = y$$

と書く．ひとつの $x \in A$ に B の 2 つ以上の元が対応することは許されない．また，対応する B の元がないような $x \in A$ があってはいけない．A を f の**定義域**, B を f の**終域**という．$f\colon A \to B$ を $A \xrightarrow{f} B$ と書くこともある．

関数という用語は若干曖昧に使われるが，写像 f の終域 B が数の集合 ($\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の部分集合) である場合に，写像 f を関数と呼ぶ場合が多い．ただし，下記のように「関数」については定義域が A に一致することが必ずしも要求されない場合がある．

例えば $A = B = \mathbb{R}$ の場合を考える．$f(x) = \dfrac{1}{x}$ という規則は $0 \in A$ に対して対応する B の元がないので $f\colon A \to B$ という写像にはならない．もっとも，この場合は $A := \mathbb{R} - \{0\}$ と定義域を制限すれば，$f\colon A \to B$ は写像になる．$f(x) = 1/x$ を関数と考える場合には，定義域を気にしないで「$\mathbb{R}$ 上の関数」と考えてしまうことも多いが，このように必ずしも $f(x)$ が定義されていないが定義域を含む集合のことを，f の**始域**という．$f(x) = 1/x$ の場合 $\mathbb{R}$ が始域，$\mathbb{R} - \{0\}$ が定義域である．

今，A, B は一般の集合で，$f\colon A \to B$ は写像とする．また，$C \subset A$, $D \subset B$ は部分集合とする．

$$f(C) := \bigl\{ f(x) \in B \bigm| x \in C \bigr\} \subset B$$
$$f^{-1}(D) := \bigl\{ x \in A \bigm| f(x) \in D \bigr\} \subset A$$

と定義し，$f(C)$ を f による C の**像**といい，$f^{-1}(D)$ を f による D の**逆像**とか**原像**という．$f(C)$ や $f^{-1}(D)$ は集合であって，$f(x)$ のように 1 つの元を表すわけではない．

$f(A)$ を f の**値域**という．終域 B と値域 $f(A)$ は一致するとは限らないことに注意しよう．(このあたりの用語は，高校までは混乱しているので，ここで修正しておいてほしい.)

A, B は一般の集合で，$f\colon A \to B$ は写像とする．

(1) $x, y \in A$, $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ を満たすとき，f は**単射** (injection) であるという．対偶命題で書けば,「$x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ を満たすとき f を単射という」と言ってもよい．

(2) $f(A) = B$ を満たすとき，f は**全射** (surjection) であるという．

(3) $f\colon A \to B$ が単射かつ全射のとき，f は**全単射** (bijection) であるという．

(4) $f\colon A \to B$ は全単射であると仮定する．すると，各 $y \in B$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in A$ が 1 つだけ存在する (数学では「一意的に存在する」という言い方をする)．そこで，$y \in B$ に対して $f(x) = y$ を満たす $x \in A$ を対応させる写像を $f^{-1}(y) = x$, $f^{-1}\colon B \to A$ と書き，f^{-1} を f の**逆写像**という．

定義 2.1. $\{a_n\}$ は数列とする．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対し，$b_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ とおく．もし，数列 $\{b_n\}$ が収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n$ と定義し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**収束**するという．$\{b_n\}$ が $\pm\infty$ に発散する場合，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\pm\infty$ に**発散**するという．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**絶対 (値) 収束**するという．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が $+\infty$ に発散するのに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するときは，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は**条件収束**するという．

命題 2.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

証明. $b_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, $c_n := \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ とおく．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するので，$\{c_n\}$ は収束するのでコーシー列である．三角不等式より，$1 < m < n \in \mathbb{N}$ に対し，$|b_n - b_m| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leqq \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| = |c_n - c_m|$ が成り立つ．よって，$\{b_n\}$ もコーシー列であり，収束する． □

定理 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束すると仮定する．$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は任意の全単射とし，$b_n = a_{f(n)}$ によって数列 $\{b_n\}$ を定義する．すると，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も絶対収束し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が成り立つ．

証明. $n \in \mathbb{N}$ に対し，$c_n := \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, $S := \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$, $d_n := \sum_{i=1}^{n} |b_i|$ とおく．$\{c_n\}$ が収束すると仮定し，$\{d_n\}$ も同じ極限に収束することを証明する．$d_n \leqq S$ だから $\{d_n\}$ は上に有界な単調増加な数列である．よって，$\{d_n\}$ はある極限値 S' に収束する．$d_n \leqq S$ だから $S' \leqq S$ である．他方 $c_m \leqq S'$ だから $S \leqq S'$ である．よって $S = S'$ である． □

定理 2.4. 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はいずれも収束すると仮定する．すると，$\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ も収束し，

(1)
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

が成立する．また，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，

(3)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

が成り立つ．

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ とおく．

(2) $\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ も有界なので，十分大きい正の実数 M を選べば，$|a| < M$, $|b| < M$ かつ，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| < M$ かつ $|b_n| < M$ となる．

勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．ある $n_1 = n_1(\varepsilon)$ が存在して，任意の整数 $n \geqq n_1$ に対して，$|a - a_n| < \varepsilon/(2M)$, $|b - b_n| < \varepsilon/(2M)$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\left|ab - a_n b_n\right| &= \left|a(b - b_n) + b_n(a - a_n)\right| \leqq |a| \cdot |b - b_n| + |b_n| \cdot |a - a_n| \\
&\leqq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．よって，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$ である．

(3) 十分大きい正の実数 M とある $n_2 \in \mathbb{N}$ を選べば，すべての整数 $n \geqq n_2$ に対して，$\frac{|b|}{|aa_n|} < M$ かつ $\frac{1}{|a_n|} < M$ が成り立つ．

勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．$|a| < M$, $|b| < M$ かつ，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| < M$ かつ $|b_n| < M$ となる．ある $n_1 = n_1(\varepsilon) \geqq n_2$ が存在して，任意の整数 $n \geqq n_1$ に対して，$|a - a_n| < \varepsilon/(2M)$, $|b - b_n| < \varepsilon/(2M)$ が成り立つ．

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b_n}{a_n}\right| \leqq \frac{|a_n b - a b_n|}{|aa_n|} = \frac{|b(a_n - a) - a(b - b_n)|}{|aa_n|}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq \frac{|b|\cdot|a_n-a|+|a|\cdot|b-b_n|}{|aa_n|} = \frac{|b|}{|aa_n|}\cdot|a_n-a| + \frac{1}{|a_n|}\cdot|b-b_n| \\
&\leqq M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$ である．

(1) は簡単なので演習問題とする． □

定理 2.5. 任意の $i,\ j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して実数 $a_{i,j}$ が与えられていて，$n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $\displaystyle b_n := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}|a_{i,j}|$ とおくとき，数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は収束すると仮定する．このとき，$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}$ は**絶対収束**するという．このとき，

$$
\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r-k}a_{k,r-k}\right)
$$

が成り立つ．

証明. $\displaystyle b := \lim_{n\to\infty}b_n$ とおく．仮定から，任意の正の実数 ε に対し，ある $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の整数 $n \geqq n(\varepsilon)$ に対して $0 \leqq b-b_n < \varepsilon$ を満たす．$\displaystyle s_n := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{i,j}$ とおく．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|s_{n+1}-s_n| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1}-b_n) \leqq \lim_{n\to\infty}b_n = b$ なので，$\{s_n\}$ は収束して，$\displaystyle S := \lim_{n\to\infty}s_n$ が存在する．

勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．ある自然数 $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ が存在し，$|b-b_n| < \varepsilon$ が成り立つ．三角不等式より $|S-s_n| \leqq |b-b_n|$ であるので，$\displaystyle c_i := \sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}$ とおく．

任意の整数 $n \geqq n(\varepsilon)$ に対して，

$$
\left|S-\sum_{i=0}^{n}c_i\right| \leqq \left|\sum_{i=n+1}^{\infty}c_i\right| \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty}|c_i| \leqq |b-b_n| \leqq \varepsilon
$$

であるので，

$$
S = \sum_{i=0}^{n}c_i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_{i,j}\right)
$$

が成り立つ．対称性から，

$$
S = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i,j}\right)
$$

も成り立つ．$\displaystyle d_n := \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r-k}a_{k,r-k}\right)$，$\displaystyle e_n := \sum_{r=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{r-k}|a_{k,r-k}|\right)$ とおく．$b_n \leqq e_{2n} \leqq b_{2n}$ なので，$|d_{2n}-s_n| \leqq |b_{2n}-b_{2n}|$, $|s_{2n}-d_n| \leqq |b_{2n}-b_{2n}|$ である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|b_{2n}-b_n| = 0$ だから，

$$
\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r-k}a_{k,r-k}\right) = \lim_{n\to\infty}d_n = \lim_{n\to\infty}s_n = S
$$

が成り立つ． □

定理 2.6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が絶対収束すれば以下が成立する．

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_mb_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}a_mb_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}
$$

証明. 前定理において，$a_{m,n} = a_m b_n$ とおけばよい． □

3. 連続関数

★ 区間.

定義 3.1. (I) $a \leqq b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$[a,\,b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \leqq x \leqq b \right\}, \quad (a,\,b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; a < x < b \right\}$$

と書き，$[a,\,b]$ を**閉区間**, $(a,\,b)$ を**開区間**といった．$[a,\,b)$, $(a,\,b]$, $(a,\,+\infty)$, $[a,\,+\infty)$, $(-\infty,\,b)$, $(-\infty,\,b]$ などの記号も高校で習った通りであり，これらを総称して**区間**という．区間 I に対し，$\inf I$ と $\sup I$ を I の**端点**という．例えば $\sup(a,\,b) = b$, $\sup(a,\,+\infty) = +\infty$ で，端点は必ずしも区間 I に属さない．端点以外の I の点を I の**内部の点**という．

$f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とする．

$$f(I) := \left\{ f(x) \;\middle|; x \in I \right\}$$

を (I を定義域とするときの) $f(x)$ の**値域**という．

$$\sup_{x \in I} f(x) := \sup f(I), \quad \inf_{x \in I} f(x) := \inf f(I)$$

として，区間 I における $f(x)$ の**上限**と**下限**を定義する．$\sup\limits_{x \in I} f(x)$ が実数のとき，つまり $+\infty$ でないとき，$f(x)$ は区間 I で**上に有界**であるという．同様に，$\inf\limits_{x \in I} f(x)$ が実数のとき，$f(x)$ は区間 I で**下に有界**であるという．$f(x)$ が I で上に有界でかつ下に有界であるとき，$f(x)$ は区間 I で**有界**であるという．

(II) $I \subset \mathbb{R}$ は区間とする．写像 $f\colon I \to \mathbb{R}$ を I 上で定義された**関数**といい「関数 $y = f(x)$ は I 上で定義されているとする」というような表現をする．以下，$y = f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とする．

(1) $a \in I$ であるか a は I の端点で，$a \neq \pm\infty$ であるとする．$\lim\limits_{x \to a} f(x) = y_0$ であるとは，任意の正の実数 ε に対し，あるの正の実数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在し，$|x - a| < \delta$ を満たすような任意の $x \in I$ に対し $\left| f(x) - y_0 \right| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．また $+\infty$ が I のひとつの端点の場合に，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ であるとは，任意の正の実数 ε に対し，ある実数 $M = M(\varepsilon)$ が存在し，$x > M$ を満たすような任意の $x \in I$ に対し $\left| f(x) - y_0 \right| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ も同様に定義する．$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ の値が有限の実数値として定まる場合，**極限** $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ が存在するといい，y_0 をその**極限値**という．

(2) $a \in I$ とする．$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという．任意の $a \in I$ に対し $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとき，$f(x)$ は I で連続であるとか，I 上の連続関数である，などという．

(3) $a \in I$ であるか a は I の端点で，$a \neq \pm\infty$ であるとする．$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = y_1$ であるとは，任意の正の実数 ε に対し，あるの正の実数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在し，$a < x < a + \delta$ を満たすような任意の $x \in I$ に対し $\left| f(x) - y_1 \right| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ を $x = a$ における $f(x)$ の**右極限**という．$a = 0$ のときは右極限を $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ と書く．

(4) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = y_2$ であるとは，任意の正の実数 ε に対し，あるの正の実数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在し，$a - \delta < x < a$ を満たすような任意の $x \in I$ に対し $\left| f(x) - y_2 \right| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ を $x = a$ における $f(x)$ の**左極限**という．

(5) $\sup\limits_{x \in I} f(x) := \sup \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I \right\}$, $\inf\limits_{x \in I} f(x) := \inf \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I \right\}$ と定義し，I 上での $f(x)$ の**上限**, **下限**という．

(6) もし $\max \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in I \right\}$ が存在すれば，$f(x)$ は I 上で**最大値を持つ**といい，その値を $\max\limits_{x \in I} f(x)$ と書き，I 上での $f(x)$ の**最大値**という．**最小値** $\min\limits_{x \in I} f(x)$ についても同様である．

(7) 任意の正の実数 ε に対し，あるの正の実数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ が存在し，$|x_1 - x_2| < \delta$ を満たす意の x_1, $x_2 \in I$ に対し $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon$ が成り立つとき，$f(x)$ は I で**一様連続**であるという．

命題 3.2. $I \subset \mathbb{R}$ は区間，$f(x)$ は I 上で定義された関数，$a \in I$ は I の内部の点とする．$f(x)$ が $x = a$ で連続であるための必要十分条件は，右極限 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ と左極限 $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ が存在し，

$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x)$ が成り立つことである．このとき，右極限と左極限は極限と一致する．

証明. 簡単なので省略. □

定理 3.3. $f(x)$ と $g(x)$ は I 上の連続関数とする．
(1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$af(x) + bg(x)$ も I 上の連続関数である．
(2) $f(x)g(x)$ も I 上の連続関数である．
(3) 任意の $x \in I$ に対して $f(x) \neq 0$ ならば，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ も I 上の連続関数である．
(4) $h(x)$ が $f(x)$ の値域 $f(I)$ を含むある区間で連続ならば，合成関数 $h(f(x))$ も I 上の連続関数である．

証明. $c \in I$ を固定し，$y_0 := \lim_{x\to c} f(x), y_1 := \lim_{x\to c} g(x)$ とおく．

(2) $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = y_0 y_1$ を示せばよい．$c \in [c-h, c+h] \subset I$ となる正の実数 h を取り，$J := [c-h, c+h]$ とおく．J は閉集合なので，$\max_{x\in J}|f(x)|, \max_{x\in J}|g(x)|$ が存在して有限の値である．$\max_{x\in J}|f(x)| < M$, $\max_{x\in J}|g(x)| < M$ を満たす正の実数 M を取る．$|y_0| < M, |y_1| < M$ である．

勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．ある $\delta = \delta(\varepsilon) < h$ が存在して，$|x - c| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して，$|f(x) - y_0| < \varepsilon/(2M), |g(x) - y_1| < \varepsilon/(2M)$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}\bigl|f(x)g(x) - y_0y_1\bigr| &= \bigl|f(x)(g(x) - y_1) + y_1(f(x) - y_0)\bigr| \leqq |f(x)|\cdot|g(x) - y_1| + |y_1|\cdot|f(x) - y_0| \\ &\leqq M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．よって，$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = y_0y_1$ である．

(3) (2) と同じ設定で考える．必要なら h と M を選び直して J 上で $f(x) \neq 0$ で，任意の $x \in J$ に対して $\dfrac{y_1}{|y_0 f(x)|} < M, \dfrac{1}{|y_1|} < M$ が成り立つと仮定してよい．

勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．ある $0 < \delta < h$ を選べば $|x - c| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して，

$$\begin{aligned}\left|\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{y_1}{y_0}\right| &\leqq \frac{|y_0 g(x) - y_1 f(x)|}{|y_0 f(x)|} = \frac{|y_0(g(x) - y_1) - y_1(y_0 - f(x))|}{|y_0 f(x)|} \\ &\leqq \frac{|y_0|\cdot|g(x) - y_1| + |y_1|\cdot|y_0 - f(x)|}{|y_0 f(x)|} \\ &= \frac{1}{|f(x)|}\cdot|g(x) - y_1| + \frac{|y_1|}{|y_0 f(x)|}\cdot|y_0 - f(x)| \\ &\leqq M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．よって，$\lim_{x\to c}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{y_1}{y_0}$ である．

(4) $c \in I, y_0 := \lim_{x\to c} f(x), z_0 := \lim_{y\to y_0} h(y)$ とおく．$\lim_{x\to c} g(f(x)) = z_0$ を示せばよい．

$f(I)$ を含み $h(y)$ が連続であるような区間 J を取る．勝手な正の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．ある正の実数 $h > 0$ を選べば $|y - y_0| < h$ を満たす任意の実数 $y \in J$ に対して $|h(y) - z_0| < \varepsilon$ が成り立つ．次に，ある $\delta > 0$ を選べば $|x - c| < \delta$ を満たす任意の実数 $x \in I$ に対して $|f(x) - y_0| < h$ が成り立つ．すると，$|h(f(x)) - z_0| < \varepsilon$ となる．したがって，$\lim_{x\to c} g(f(x)) = z_0$ である．

(1) は簡単なので演習問題とする． □

定理 3.4.(中間値の定理) $I \subset \mathbb{R}$ は区間で，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．$a < b \in I$ で $f(a)f(b) < 0$ であると仮定する．すると，$f(c) = 0, a < c < b$ を満たす $c \in I$ が存在する．

証明. $f(a) < 0, f(b) > 0$ の場合に証明する．$J := \bigl\{x \in I \bigm| a \leqq x \leqq b, f(x) \leqq 0\bigr\}$ とおく．$J \cup K = [a, b]$ である．$a \in J$ だから $J \neq \phi$ である．$c := \sup J$ とおく．上の関数の極限の定義から $\lim_{x\to c} f(x) \leqq 0$

がわかる．$f(x)$ は I 上で連続だから $f(c) \leqq 0$ である．もし $f(c) < 0$ とすると，$x > c, x \in I$ のとき $f(x) > 0$ だから，$x = c$ における左極限 $f(c)$ は負なのに，右極限は 0 以上となり．$f(x)$ は $x = c$ で連続でない．よって，$f(c) = 0$ である． □

この後の 2 つの定理は，ちょっと専門的なので，理解しなくてよい．

定理 3.5.(有界数列の収束する部分列) 数列 $\{a_n\}$ は有界であると仮定する．すると，ある無限個の自然数 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ をうまく選んで $b_i := a_{n_i}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ が収束するようにできる．このことを「有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{b_n\}$ を含む」と言い表す．

証明. $\{a_n\}$ は有界だから，すべての a_n を含む閉区間 I_1 がある．$I_1 = [c_1, d_1]$ とし，$e_1 = (c_1+d_1)/2$ とおく．2 つの閉区間 $[c_1, e_1]$ と $[e_1, d_1]$ の少なくとも一方は無限個の a_n を含んでいる．その区間を $I_2 = [c_2, d_2]$ とする．以下同様 $I_k = [c_k, d_k]$ まで定まったとき，$e_k = (c_k+d_k)/2$ とおいて，$[c_k, e_k]$ と $[e_k, d_k]$ のうち無限個の a_n を含んでいる区間を選んで $I_{k+1} = [c_{k+1}, d_{k+1}]$ とする．$c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 \leqq \cdots \leqq d_3 \leqq d_2 \leqq d_1$ で，$d_n - c_n = (d_1 - c_1)/2^n$ である．よって，数列 $\{c_n\}$ と $\{d_n\}$ は同じ極限値に収束する．その極限値を c とする．まず，$n_1 = 1, b_1 = a_1 \in I_1$ としておく．$k \geqq 2$ とし，$b_1 = a_{n_1}, \ldots, b_{k-1} = a_{n_{k-1}}$ まで定まっているとする．I_k は無限個の a_n を含むから，I_k に含まれる a_n で，n が $n_1, \ldots, n_{k-1}$ のいすれとも異なるものを取り，$n_k = n, b_k = a_{n_k}$ とおく．すると，$\lim_{n\to\infty} b_n = c$ となる． □

定理 3.6.(ハイネ・ボレルの定理) I は区間，M は無限集合とし，各 $m \in M$ に対して開区間 U_m が与えられているとする．任意の $x \in I$ に対して，ある $m \in M$ を選ぶと $x \in U_m$ となるとき，開区間の集合 $\mathfrak{U} := \{U_m \mid m \in M\}$ は I の**開被覆**であるという．いま，$\mathfrak{U}$ が閉区間 I の開被覆であるならば，有限個の元 $m_1, \ldots, m_r \in M$ をうまく選んで，$I \subset U_{m_1} \cup U_{m_2} \cup \cdots \cup U_{m_r}$ が成り立つようにできる．このような性質を持つ I は**コンパクト**であるという．つまり，閉区間はコンパクトである．逆に，区間 I がコンパクトならば，I は閉区間である．

証明. (1) 閉区間 I がコンパクトでないと仮定する．つまり，I のある開被覆 $\mathfrak{U}$ から上のような有限個の $U_{m_1}, \ldots, U_{m_r}$ は選べないと仮定する．

前定理と同様に $I_1 = [c_1, d_1]$ とし，$e_1 = (c_1 + d_1)/2$ とおく．2 つの閉区間 $[c_1, e_1]$ と $[e_1, d_1]$ の少なくとも一方はコンパクトでない．その区間を $I_2 = [c_2, d_2]$ とする．以下同様 $I_k = [c_k, d_k]$ まで定まったとき，$e_k = (c_k + d_k)/2$ とおいて，$[c_k, e_k]$ と $[e_k, d_k]$ のうちコンパクトでない区間を選んで $I_{k+1} = [c_{k+1}, d_{k+1}]$ とする．$c := \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n$ とおく．$c \in U_m \in \mathfrak{U}$ となる U_m がある．$U_m = (a, b)$ とし $d = \min\{c - a, b - c\}$ とする．$d_k - e_k < d$ を満たす k については $I_k \subset U_m$ となる．これは U_m がコンパクトでないことに矛盾する．

(2) I が閉区間でない区間ならば I はコンパクトでないことを示す．例えば，$I = (a, b]$ の場合に証明する．平行移動して相似拡大した，$I = (0, 1]$ の場合に証明すれば十分である．$M = \mathbb{N}$ とし，$U_1 = (1/2, 2)$ とおき，$m \in M, m \geqq 2$ に対しては $U_m = (1/(m + 1), 1/(m - 1))$ とおく．$\{U_m \mid m \in M\}$ は I の開被覆である．また，$i \in \mathbb{N}, i \geqq 2$ に対し $1/i \in U_m$ を満たす m は $m = i$ しか存在しない．よって，どの U_m を取り除いても I の開被覆にならない．したがって，I はコンパクトでない．

I がその他の形の区間の場合も同様である． □

次の定理の証明は理解しなくてよいが，定理の結果だけは覚えておいてほしい．

定理 3.7.(閉区間上の連続関数) $I = [a, b]$ は閉区間とし，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．このとき，$f(x)$ は I 上で最大値と最小値を持ち，ある $x_1, x_2 \in I$ で $f(x_1) = \max_{x\in I} f(x)$，$f(x_2) = \min_{x\in I} f(x)$ となる．

証明. (1) $\sup_{x\in I} f(x) \neq +\infty$ であることを証明する．もし $\sup_{x\in I} f(x) + \infty$ ならば，$f(a_n) \geqq n, f(a_{n+1}) > f(a_n)$ を満たすような I 内の数列 $\{a_n\}$ が存在する．$\{a_n\}$ は有界な数列であるから，定理 3.5 から，$\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{b_n\}$ を含む．I は閉区間だから $b := \lim_{n\to\infty} b_n \in I$ である．$b_i = a_{n_i}$ とすると $f(b_i) = f(a_{n_i}) \geqq n_i \geqq i$ だから，$\lim_{n\to\infty} f(b_n)$ が発散し，$f(x)$ が $x = b$ で連続であることに矛盾する．

(2) $y_1 = \sup_{x \in I} f(x)$ とおく．$f(x) = y_1$ を満たす $x \in I$ が存在しないと仮定して矛盾を導く．そうすると，任意の $x \in I$ に対して $f(x) < y_1$ だから，$g(x) := \dfrac{1}{y_1 - f(x)}$ は I 上で定義された関数で，連続関数になる．(1) の結果から $g(x)$ は上に有界である．しかし，$n \in \mathbb{N}$ をいくら大きく選んでも $y_1 - f(x) < 1/n$ を満たす $x \in I$ が存在し，$g(x) > n$ となる．これは $g(x)$ が上に有界でないことを意味し，矛盾である． □

上の定理は I が閉区間でないと正しくない．例えば $I = (0,\, 1]$ のとき，I 上の関数 $f(x) = 1/x$ は $x \to +0$ のとき $+\infty$ に発散し，最大値を持たない．次の定理は後の回の証明で使うが，少し難しいので理解しなくてよい．

定理 3.8.(一様連続性) I は区間とし，$f(x)$ は I 上の関数とする．
(1) $f(x)$ が I 上で一様連続ならば，$f(x)$ は I 上で連続である．
(2) $I = [a,\, b]$ (閉区間) で，$f(x)$ が I 上で連続ならば，$f(x)$ は I 上で一様連続である．

証明. (1) は定義をきちんと読めば自明である．
(2) を示す．$f(x)$ が $I = [a,\, b]$ 上で連続とする．任意の正の実数 ε を取る．各 $a \in I$ に対してある $\delta = \delta(\varepsilon,\, a) > 0$ が存在し，$|x - a| < \delta$ を満たす意の $x \in I$ に対し $\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < \varepsilon/3$ を満たす．
上のハイネ・ボレルの定理において $M = I$ とし，各 $a \in M$ に対し上の $\delta = \delta(\varepsilon/3,\, a)$ を取り，$U_a = \bigl(a - \delta/3,\, a + \delta/3\bigr)$ とおく．$\bigl\{U_a \bigm| a \in I\bigr\}$ は I の開被覆である．I はコンパクトだから，有限個の $a_1, \ldots, a_r \in I$ を選んで，$I \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_r}$ となるようにできる．

$$\delta_0 := (1/3) \min\bigl\{\delta(\varepsilon, a_i) \bigm| i = 1, \ldots, r\bigr\}$$

とおく．$x_1,\, x_2 \in I,\, |x_1 - x_2| < \delta_0$ とする．$x_1 \in U_a,\, x_2 \in U_b$ を満たす $a,\, b \in \{a_1, \ldots, a_r\}$ が存在する．すると，

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq |f(x_1) - f(a)| + |f(a) - f(b)| + |f(b) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となり，$f(x)$ は I 上で一様連続である． □

4. 導関数

定義 4.1. I は開区間とし，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．$a \in I$ に対して極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，その極限値を $f'(a)$ で表す．$f(x)$ が I 上のすべての点で微分可能であるとき，I は $f(x)$ 上の**微分可能**な関数であるという．微分係数 $f'(x)$ を I 上の関数と考えたものを，$f(x)$ の**導関数**という．$f'(x)$ は $\bigl(f(x)\bigr)'$ とか $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とか $\dfrac{df(x)}{dx}$ とか $\dfrac{df}{dx}(x)$ とか $\dfrac{dy}{dx}$ とか $Df(x)$ などとも書く．$f(x)$ が I 上で微分可能であって，導関数 $f'(x)$ が I 上で連続であるとき，$f(x)$ は I 上で C^1 **級**であるという．

$f^{(1)}(x) := f'(x)$ とし，これを **1 次導関数**とか **1 階導関数**ともいう．いま $k \in \mathbb{N}$ に対し k 次導関数 $f^{(k)}(x)$ が I 上で定義されていて，$f^{(k)}(x)$ は I 上で微分可能であると仮定する．このとき，$f^{(k)}(x)$ の導関数を $f^{(k+1)}(x)$ と書き，$f(x)$ の $(k+1)$ **次導関数**とか $(k+1)$ **階導関数**という．$f^{(k+1)}(x)$ が I 上の連続関数であるとき，$f(x)$ は I 上で C^k **級**であるという．

なお，$f^{(0)}(x)=f(x)$ と約束しておく．$f^{(2)}(x)$ は $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ は $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$ は $f^{iv}(x)$ とも書く．また，$f^{(n)}(x)$ を $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ とか $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ とか $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$ とか $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ とか $D^nf(x)$ などとも書く．

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $f(x)$ が I 上で C^k 級であるとき，$f(x)$ は I 上で C^∞ **級**であるとか，I 上で**無限階微分可能**であるとか**無限回微分可能**であるなどという．

1872 年にワイエルシュトラスが以下を証明している．ただ，その証明は 1 年生には難しすぎるので割愛する．

参考 4.3. a は奇数の自然数，b は実数で，$0<b<1$, $ab>1+3\pi/2$ を満たすとする．このとき，

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n\cos(\pi a^n x)$$

は，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して連続であるが，いかなる $x \in \mathbb{R}$ でも微分不可能である．

定義 4.4. I は区間で $f(x)$ は I 上の関数とする．

(1) $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成り立つとき，f は I 上で (**広義**) **単調増加**であるという．

(2) $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとき，f は I 上で**狭義単調増加**であるという．

(3) $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \geqq f(x_2)$ が成り立つとき，f は I 上で (**広義**) **単調減少**であるという．

(4) $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成り立つとき，f は I 上で**狭義単調減少**であるという．

(5) $a \in J \subset I$ を満たす開区間 J を十分小さく選べば，$f(a)=\max_{x\in J} f(x)$ が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ で**広義極大**であるといい，$f(a)=\min_{x\in J} f(x)$ が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ で**広義極小**であるという．

(6) $a \in J \subset I$ を満たす開区間 J を十分小さく選べば，$x \in J$ かつ $x \neq a$ を満たす任意の x に対して $f(x) < f(a)$ が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ で**狭義極大**であるという．また，$x \in J$ かつ $x \neq a$ を満たす任意の x に対して $f(x) > f(a)$ が成り立つとき $f(x)$ は $x=a$ で**狭義極小**であるという．$f(x)$ が $x=a$ で狭義極大または狭義極小であるとき，$f(x)$ は $x=a$ で**極値**を取るという．

命題 4.5. I は開区間で $f(x)$ と $g(x)$ は I 上で微分可能な関数とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $f(x)+g(x)$ と $f(x)g(x)$ の I 上で微分可能で，

$$\bigl(f(x)+g(x)\bigr)' = f'(x)+g'(x), \quad \bigl(f(x)g(x)\bigr)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

が成り立つ．

(2) I 上で $g(x) \neq 0$ のとき，$f(x)/g(x)$ も I 上で微分可能で，

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x)^2)}$$

が成り立つ．

(3) 任意の $x \in I$ に対して $f'(x) = 0$ であれば，ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in I$ に対して $f(x) = c$ が成り立つ．
(4) f が I 上で広義単調増加であるための必要十分条件は，任意の $x \in I$ に対して $f'(x) \geqq 0$ となることである．同様に，f が I 上で広義単調減少であるための必要十分条件は，任意の $x \in I$ に対して $f'(x) \leqq 0$ が成り立つことである．
(5) もし任意の $x \in I$ に対して $f'(x) > 0$ であれば，f は I 上で狭義単調増加である．反対に，任意の $x \in I$ に対して $f'(x) < 0$ であれば，f は I 上で狭義単調減少である．
(6) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在すると仮定し，$J = f(I)$ とする．もし I 上で $f'(x) \neq 0$ であれば，J は開区間であって，$f^{-1}(x)$ は J 上で微分可能であり，

$$\bigl(f^{-1}(x)\bigr)' = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(x)\bigr)}$$

が成り立つ．
(7) 関数 $f(x)$ が開区間 I で微分可能で，I 内の点 $x = a$ で広義極大または広義極小であれば，$f'(a) = 0$ である．
(8) 関数 $f(x)$ が開区間 I で微分可能で，任意の $x \in I$ に対し $f'(x) = 0$ ならば，$f(x)$ は定数関数である．つまり，ある定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in I$ に対して $f(x) = C$ となる．

証明は高校で習ったのと同じなので割愛する．

命題 4.6. (ライプニッツの公式) n は自然数，k は整数で $0 \leqq k \leqq n$ とする．高校で ${}_nC_r$ と書いていた組合せの場合の数は**二項係数**とも言い，

$$\binom{n}{t} := {}_nC_r = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

という記号で書くことが国際的には多い．さて，I は開区間で $f(x)$ と $g(x)$ は I で n 回微分可能とする．このとき，$f(x)g(x)$ の n 次導関数について，次の公式が成り立つ．

$$\frac{d^n}{dx^n}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \qquad ①$$

証明. $n = 1$ のときは $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ を書き換えただけである．① を仮定して，

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigl(f(x)g(x)\bigr) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \qquad ②$$

を証明する．まず，$1 \leqq k \leqq n$ のとき，

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+(n+1-k))}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

に注意する．① の両辺を微分すると，

$$\begin{aligned}&\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\bigl(f(x)g(x)\bigr) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dx}\bigl(f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\bigr) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Bigl(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\Bigr) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1} f^{(m)}(x)g^{(n+1-m)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) + f^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(m)}(x) g^{(n+1-m)}(x) + g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}
$$

となり，②を得る． □

★ 逆三角関数とその導関数

(1) $y = \sin x$ を定義域を閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限して I 上の関数と考えると $\sin\colon [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ は全単射な写像である．そこで，その逆写像 $\sin^{-1}\colon [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ を関数と考え，$y = \sin^{-1} x$ とか，$y = \arcsin x$ とか $y = \mathrm{Sin}^{-1} x$ などと書く．$\sin^{-1} x$ は後で説明する多価関数と考えることもあるが，しばらくは上記の定義を用いる．

(2) $y = \cos x$ を定義域を閉区間 $[0, \pi]$ 上の関数と考えると $\cos\colon [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ は全単射なので，その逆関数を $y = \cos^{-1} x$ とか，$y = \arccos x$ とか $y = \mathrm{Cos}^{-1} x$ などと書く．

(3) $y = \tan x$ を定義域を開区間 $(\pi/2, \pi/2)$ 上の関数と考えると $\tan\colon (\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ は全単射なので，その逆関数を $y = \tan^{-1} x$ とか，$y = \arctan x$ とか $y = \mathrm{Tan}^{-1} x$ などと書く．

(4) $\cot := \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ を**コタンジェント**とか**余接**関数という．$\cot\colon (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ は全単射なので，その逆関数を $y = \cot^{-1} x$ などと書く．

定理 4.7.

(1) $\sin^{-1} x$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で微分可能で，

$$\bigl(\sin^{-1}(x)\bigr)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) 任意の $-1 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．また，$\cos^{-1} x$ は開区間 $(-1, 1)$ 上で微分可能で，

$$\bigl(\cos^{-1}(x)\bigr)' = -\bigl(\sin^{-1}(x)\bigr)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $\tan^{-1} x$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，

$$\bigl(\tan^{-1}(x)\bigr)' = \frac{1}{x^2+1}$$

(4) 任意の $-1 \leqq x \leqq 1$ に対して

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．また，$\cot^{-1} x$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，

$$\bigl(\cot^{-1}(x)\bigr)' = -\bigl(\tan^{-1}(x)\bigr)' = -\frac{1}{x^2+1}$$

証明. (1) $y = \sin^{-1} x$ とおく．$x = \sin y$ で $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ なので $\cos y \geqq 0$ である．よって，

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

で，$\bigl(\sin^{-1}(x)\bigr)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．

(2) $y = \cos^{-1} x$ とおく．$x = \cos y = \sin(\pi/2 - y)$ で，$0 \leqq y \leqq \pi$ より $-\pi/2 \leqq \pi/2 - y \leqq \pi/2$ である．また $-1 \leqq x \leqq 1$ なので，$x = \sin(\pi/2 - y)$ より，$\sin^{-1} = \pi/2 - y = \pi/2 - \cos^{-1} x$ となる．よって，$\sin^{-1} x + \cos^{-1} = \pi/2$ である．導関数の公式は，この両辺を微分すれば得られる．

(3) $(\tan x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x$ を用いれば，(1) と同様に証明できる．

(4) $\cot(\pi/2 - x) = \tan x$ を用いれば，(3) と同様に証明できる． □

高校で学習した初歩的な積分の知識を仮定して話をすると，上の微分の公式から，以下の不定積分の公式が得られる．

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C = -\cot^{-1} x + C$$

ここで C は積分定数である．

5. 積分

この先の話は微分と積分はセットにして議論したほうが自然に進むので，通常の教科書の配列とは異なるが，先に積分の定義と基本性質だけ説明してしまう．まず，定積分を区分求積法によって定義するが，定義が長いので辛抱して読もう．

定義 5.1. $I = [a,\, b]$ は閉区間とする．

(1) $n \in \mathbb{N}$ とし $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を満たす有限実数列 $\Delta := \{x_k\}_{k=0}^{n}$ を I の**分割**という．$I_k := [x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 1,\, 2,\ldots,\, n)$ とおいて，$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ と表すとき，$\Delta = \{I_1,\, I_2,\ldots,\, I_n\}$ が I の**分割**であるといってもよい．また，ここだけの記号であるが，説明の都合上

$$\delta(\Delta) := \max_{1 \leqq k \leqq n} (x_k - x_{k-1})$$

と書くことにし，$\delta(\Delta)$ を細分 Δ の**粗さ**とか**細かさ**ということにする．$\delta(\Delta)$ は $|\Delta|$ 等とも書かれる．また，区間 I の分割全体の集合を，ここだけの記号であるが，

$$\mathfrak{D}(I) = \bigl\{\Delta \bigm| \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\bigr\}$$

と書くことにする．

(2) $f(x)$ は I 上で定義された有界な関数とし，$\Delta = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ は (1) のような I の分割とする．$I_k := [x_{k-1},\, x_k]$ とおき，いま一時的に，

$$\Sigma(f,\, \Delta) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in I_k} f(x)$$

$$\sigma(f,\, \Delta) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in I_k} f(x)$$

$\Sigma(f,\, \Delta)$ を**過剰和**, $\sigma(f,\, \Delta)$ を**不足和**という．$\Sigma(f,\, \Delta)$ を $S(f,\, \Delta)$ と書き，$\sigma(f,\, \Delta)$ を $s(f,\, \Delta)$ と書く人も多い．$\Sigma(f,\, \Delta), \sigma(f,\, \Delta)$ の値は有限の値として定まり，$\Sigma(f,\, \Delta) \geqq \sigma(f,\, \Delta)$ である．

(3) $f(x)$ は I 上で定義された有界な関数とする．

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup_{\Delta \in \mathfrak{D}(I)} \Sigma(f,\, \Delta)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf_{\Delta \in \mathfrak{D}(I)} \sigma(f,\, \Delta)$$

と定義し，前者を I 上での $f(x)$ の**上積分**, 後者を $I = [a,\, b]$ 上での $f(x)$ の**下積分**という．もし，$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$ が成立するとき，その値を

$$\int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

と書き，この値を $[a,\, b]$ 上での $f(x)$ 上での**定積分**という．また，$f(x)$ は I 上で**積分可能**であるといい，

(4) $a > b$ とし，$f(x)$ は $[b,\, a]$ 上で積分可能な関数とする．このとき，

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx$$

と約束する．

(5) $I = [a,\, +\infty)$ で，$f(x)$ は I 上で定義された関数で，任意の $b \in I$ に対して $f(x)$ は $[a,\, b]$ 上で積分可能とする．このとき，

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

と定義し，$[a,\, +\infty)$ での $f(x)$ の**広義積分**という．ただし，上式の右辺の極限値が $\pm\infty$ まで許しても定まらない場合には，この広義積分は定義できない．

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx := \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

についても同様である．

(6) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数で，任意の $a < b \in \mathbb{R}$ に対して $f(x)$ は $[a,\,b]$ 上で積分可能とする．

$$\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx\right)$$

が成り立つならば，この値を $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ と書き，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で**広義積分可能**という．

(7) I は区間とし，$f(x)$ は I 上で定義された関数で，任意の $a < b \in I$ に対して $f(x)$ は $[a,\,b]$ 上で積分可能とする．定数 $a_0 \in I$ と，実数の定数 C を固定する．$x \in I$ に対し

$$\int f(x)\,dx := \int_{a_0}^{x} f(t)\,dt + C$$

と定義し，これを $f(x)$ の**不定積分**という．他方，$F(x)$ が I 上で定義された関数で，任意の $a < b \in \mathbb{R}$ に対して $F(x)$ は $(a,\,b)$ 上で微分可能であり，$F'(x) = f(x)$ を満たすとき，$F(x)$ は $f(x)$ の**原始関数**であるという．

次の定理は，理論上非常に重要である．ただし，$f(x)$ の原始関数が具体的に知られた関数で書けることを意味するわけではない．

定理 5.2. $I = [a,\,b]$ は閉区間，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．すると $f(x)$ は I 上で積分可能である．

証明. 定理 3.7 より I 上で $f(x)$ は最大値と最小値を持つから有界である．また，定理 3.8 より $f(x)$ は I 上で一様連続である．

$$\Sigma(f,\Delta) \geqq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sigma(f,\Delta)$$

であるが，$\varepsilon := \dfrac{1}{2}\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right) \neq 0$ であると仮定して矛盾を導く．

$f(x)$ は I 上で一様連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して，$x_1,\,x_2 \in I,\, |x_1 - x_2| < \delta$ ならば $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ が成り立つ．$\delta(\Delta) < \delta$ となるような任意の $\Delta \in \mathfrak{D}(I)$ を取る．$\Delta_n = \{x_j\}_{j=0}^{m}$, $I_j := [x_{j-1},\,x_j]$ とするとき，

$$\Sigma(f,\Delta)-\sigma(f,\Delta)=\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_{j-1})\left(\sup_{x\in I_j} f(x) - \inf_{x\in I_j} f(x)\right) \leqq \sum_{j=1}^{m}(x_j-x_{j-1})\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon$$

となる．よって，

$$2\varepsilon = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq \Sigma(f,\Delta)-\sigma(f,\Delta) \leqq \varepsilon$$

となり，$\varepsilon > 0$ と矛盾する．よって，$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ で，$f(x)$ は I 上で積分可能である． □

命題 5.3. I は区間で，$f(x), g(x)$ は I 上で積分可能とする．すると，$a, b, c \in I$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し，以下が成り立つ． □

(1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b \beta g(x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

証明. 簡単なので省略.

定理 5.4. (微分積分学の基本定理) $I = [a,\,b]$ は閉区間，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．$x \in I$ に対し，

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

と定める．すると，$F(x)$ は (a, b) 上で微分可能で，$F'(x) = f(x)$ が成り立つ．

定義 5.5. I は閉区間，$f(x)$ は I 上の連続関数とする．$a, b \in I$ に対し，

$$\big[f(x)\big]_a^b := f(b) - f(a)$$

と書く．$f(x)$ の式の中に x 以外の文字変数が現れる場合には，$\big[f(x)\big]_a^b$ を $\big[f(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ と書き，どの変数についての差を取っているか明示することが多い．

命題 5.6. $I = [a, b]$ は閉区間，$f(x)$ と $g(x)$ は I 上の連続関数とする．また，$F(x)$ と $g(x)$ は I を含む開区間で微分可能で，$F'(x) = f(x)$ であるとする．すると，以下が成り立つ．

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^b$$

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

証明. (1) $G(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ とおく．$G(0) = 0$ なので，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ である．前定理より $G'(x) = f(x) = F'(x)$ である．よって，$F(x) - G(x) = F(0) - G(0) = F(0)$ で，(1) が成立する．

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\big)\,dx = \int_a^b \big(F(x)g(x)\big)'\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b$ である． □

★ 平均値の定理とロピタルの定理.

定理 5.7.(ロルの定理) I は開区間，$f(x)$ は I 上で微分可能な関数で，$a,\ b \in I,\ a < b$ であって $f(a) = 0,\ f(b) = 0$ であるとする．すると $f'(c) = 0,\ a < c < b$ を満たす実数 c が存在する．

証明. 閉区間 $[a, b]$ 上で $f(x)$ は連続なので，$f(c) = \displaystyle\sup_{a \leqq x \leqq b} f(x),\ a < c < b$ を満たす実数 c が存在する．h が十分 0 に近い正の実数のとき，$\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqq 0,\ \dfrac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geqq 0$ なので，$f'(c) \leqq 0$ かつ $f'(c) \geqq 0$ となり，$f'(c) = 0$ である． □

定理 5.8.(コーシーの平均値の定理) $f(x)$ と $g(x)$ は $[a, b]$ 上で連続で (a, b) 上で微分可能な関数で，$g(a) \neq g(b)$ とする．すると，ある $c \in (a, b)$ が存在して，以下の等式を満たす．

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

証明. $K := \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},\ F(x) := f(x) - f(a) - K\big(g(x) - g(a)\big)$ とおく．閉区間 $[a,\ b]$ 上で $F(x)$ は連続で $F(a) = 0 = F(b)$ なので，前定理より $F'(c) = 0$ を満たす $c \in (a,\ b)$ が存在する．$F'x(x) = f'(x) - Kg'(x)$ なので，

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

となる． □

定理 5.9.(平均値の定理) I は開区間，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で連続で (a, b) 上で微分可能な関数とする．すると

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす実数 c が存在する．

証明. コーシーの平均値の定理を $g(x) = x$ として用いればよい． □

定理 5.10.(ロピタルの定理) (1) $a < b$ は実数で $f(x)$ と $g(x)$ は (a, b) 上で微分可能とする．さらに，

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0 \text{ または } \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty$$

で $\displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し，

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

(上の $x \to a+0$ を全部 $x \to b-0$ と書き換えた定理も成立する.)

(2) $f(x)$ と $g(x)$ は $(a, +\infty)$ 上で微分可能とする．さらに，

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0 \text{ または } \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = \infty$$

で $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば，$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ も存在し，

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ．

上の $(a, +\infty)$, $x \to +\infty$ を $(-\infty, a)$, $x \to -\infty$ と書き換えた定理も成立する．

証明. (1) $\displaystyle\lim_{t\to a+0} f(t) = \lim_{t\to a+0} g(t) = 0$ の場合を考える．$a < x < b$ とする．$f(a) := 0$, $g(a) := 0$ と定義すると $f(t)$, $g(t)$ は $[a, x]$ で連続で，(a, x) で微分可能である．コーシーの平均値の定理より，ある $c \in (a, x)$ が存在して，

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) - f(x)}{g(a) - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす．$x \to a+0$ とすれば $c \to a+0$ となり，求める等式を得る．

$\displaystyle\lim_{t\to a+0} f(t) = \lim_{t\to a+0} g(t) = \infty$ の場合は，$f_1(x) := 1/g(x)$, $g_1(x) := 1/f(x)$ とおいて，上の結果を適用すればよい．

(2) は $f_2(x) := f(1/x)$, $g_2(x) := g(1/x)$ に対して (1) を適用すればよい． □

6. 巾級数

定義 6.1. I は区間とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ は I 上の関数とする．このとき，$\{f_n(x)\}$ を I 上の**関数列**という．今 $f_\infty(x)$ も I 上の関数とする．任意の正の実数 ε に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in I$ に対して $\bigl|f_n(x) - f_\infty(x)\bigr| < \varepsilon$ が成り立つとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f_\infty(x)$ に**一様収束**するという．この定義において $n(\varepsilon)$ が x に依存しないことが大切である．

任意の $x \in I$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ が成り立つとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f_\infty(x)$ に**各点収束**するという．

定義から，$\{f_n(x)\}$ が $f_\infty(x)$ に一様収束すれば $\{f_n(x)\}$ は $f_\infty(x)$ に各点収束するが，その逆は正しくない．

今，$S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ とおく．関数列 $\{S_n(x)\}$ が I 上で一様収束するとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で**一様収束**するという．

定理 6.2. I は区間，$\{f_n(x)\}$ は I 上の関数列，$S_n(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$，$\{a_n\}$ は数列とする．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\sup_{x\in I}\bigl|f_n(x)\bigr| \leqq a_n$ で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で一様収束する．

証明. $b_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, $b_\infty := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とおくと $\{b_n\}$ は収束するから，任意の正の実数 ε に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|b_\infty - b_n| < \varepsilon$ が成り立つ．任意の $x \in I$ に対して，

$$|S_n(x) - S_\infty(x)| \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = b_\infty - b_n < \varepsilon$$

なので，$\{S_n(x)\}$ は I 上で一様収束する． □

定理 6.3. I は区間，$\{f_n(x)\}$ は I 上の関数列ですべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n(x)$ は I 上で連続であるとする．また，$S(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は I 上で一様収束すると仮定する．このとき以下が成り立つ．

(1) $S(x)$ は I 上で連続である．

(2) $a, b \in I$ のとき，以下が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

(3) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x)$ が I 上で C^1 級で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ も I 上で一様収束するならば，$S(x)$ も I 上で C^1 級で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x)$$

が成り立つ．

証明. $S_n(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ とおく．

(1) $\{S_n(x)\}$ は $S(x)$ に一様収束するから，任意の正の実数 ε に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in I$ に対して $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon/3$ が成り立つ．$x \in I$ を固定したとき，$S_n(x)$ は I 上で連続だから，ある $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ を取れば，$|y - x| < \delta$ を満たす任意の $y \in I$ に対して，$|S_n(y) - S_n(x)| < \varepsilon/3$ が成り立つ．$|S_n(y) - S(y)| < \varepsilon/3$ も成り立っているから，

$$|S(y) - S(x)| \leqq |S(y) - S_n(y)| + |S_n(y) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

となり，$S(x)$ が連続であることがわかる．

(2) $a < b$ と仮定して証明すればよい．(1) $\{S_n(x)\}$ は $S(x)$ に一様収束するから，任意の正の実数 ε に対し，ある $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geqq n(\varepsilon)$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $x \in I$ に対して $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$ が成り立つ．よって，

$$\left| \int_a^b S(x)\,dx - \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(S(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) \right) dx \right|$$
$$= \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leqq \int_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx \leqq \varepsilon$$

が成り立つ．これより (2) が得られる．

(3) $T_n(x) := \displaystyle\sum_{i=1}^n f_i'(x)$, $T_n(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n'(x)$ とおく．上の結果から $\{T_n(x)\}$ は $T(x)$ に一様収束し，$T(x)$ は I 上で連続である．$x \in I$ に対し $x_0 \leqq x$ となる $x_0 \in I$ を取る．(2) より，

$$S(x) - S(x_0) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) - \sum_{n=1}^\infty f_n(x_0) = \sum_{n=1}^\infty (f_n(x) - f_n(x_0))$$
$$= \sum_{n=1}^\infty \int_{x_0}^x f_n'(x)\,dx = \int_{x_0}^x T(x)\,dx$$

となるので，$S'(x) = T(x)$ が得られる． □

定理 6.4. 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ に対し $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が 0 に収束する場合は $r := +\infty$ とし，$+\infty$ に発散する場合は $r := 0$ とし，0 でない有限の値に収束する場合は，

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

を満たすように実数 $r > 0$ を定める．このとき，以下が成り立つ．

(1) $|x| > r$ ならば $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ は収束しない．(x は複素数でもよい.)

(2) $0 < \varepsilon < r$ を満たす任意の実数 ε に対し，閉区間 $[-r+\varepsilon, r-\varepsilon]$ 上で $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty |a_n x^n|$ は一様収束する．

これを，$\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ は $(-r, r)$ 上で**広義一様絶対収束**するという．(x は複素数でもよい.)

(3) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ である．

(4) $|x| < r$ のとき，以下が成り立つ．

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$$

上の r を**巾級数** (べききゅうすう) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ の**収束半径**という．なお，a_n, x は複素数でもよい．

証明. (1) $x \neq 0$ のとき，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{r}$ である．$|x| > r$ ならば，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，ある $m \geqq n$ が存在して $\sqrt[n]{|a_m x^m|} > 1$ となるから，$\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ は収束しない．

(2) $|x| < r - \varepsilon$ ならば，$|a_n x^n| < 1 - \varepsilon/r$ である．よって，

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n x^n| \leqq \sum_{n=0}^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n = \frac{r}{\varepsilon}$$

なので $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$ は収束する．また，

$$\sum_{i=n}^{\infty}|a_ix^i| \leqq \frac{r}{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{r}\right)^n$$

なので，この収束は一様収束である．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (簡単なので証明してみよ) において $x=\log_e n$ とおくと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_e n=0$ であり，これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ である．これより，結論を得る．

(4) 前定理 (3) よりわかる．∎

定理 6.5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は r_1 で，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ の収束半径は r_2 とする．また，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ でも可) とする．

(1) $|x|<\min\{r_1,\,r_2\}$ のとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

が成り立ち，左辺は収束する．

(2) $|x|<\min\{r_1,\,r_2\}$ のとき，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n$$

が成り立ち，右辺は収束する．

証明. (1) は定理 2.3 よりすぐわかる．

(2) $r_1\leqq r_2$ と仮定しても一般性を失わない．まず，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}|a_kb_{n-k}|}\leqq\frac{1}{r_1}$ を証明する．十分小さい正の実数 $\varepsilon>0$ を取り，$r:=r_1(1-\varepsilon)>0$ とする．$a'_n:=a_nr^n$, $b'_n:=b_nr^n$ とおけば，ある $n_1:=n_1(\varepsilon)$ が存在して任意の整数 $n\geqq n_1$ に対し，$|a'_n|<1+\varepsilon$, $|b'_n|<1+\varepsilon$ が成り立つ．$A:=\sup\bigl\{|a'_n|\bigm| n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\bigr\}$, $B:=\sup\bigl\{|b'_n|\bigm| n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\bigr\}$ とおけば，$n>2n_1$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}| &\leqq \sum_{k=0}^{n_1-1}|a'_kb'_{n-k}|+\sum_{k=n_1}^{n-n_1}|a'_kb'_{n-k}|+\sum_{k=n-n_1+1}^{n_1}|a'_kb'_{n-k}|\\ &\leqq n_1A(1+\varepsilon)^{n-n_1}+(n-2n_1)(1+\varepsilon)^n+n_1B(1+\varepsilon)^{n-n_1}\end{aligned}$$

なので $C:=\max\bigl\{A,\,B,\,(1+\varepsilon)^{n_1}\bigr\}$ とおけば，C は n に依存しない定数で，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}|\leqq nC(1+\varepsilon)^n$ である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{nC}\leqq 1$ なので，$n_2:=n_2(\varepsilon)>n_1$ が存在して任意の整数 $n\geqq n_2$ に対し，$nC\leqq(1+\varepsilon)^n$ が成り立つ．よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}|\leqq(1+\varepsilon)^{2n}$ である．したがって，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}|}\leqq(1+\varepsilon)^2$ である．$\varepsilon\to+0$ とすれば，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}|}\leqq 1$ が得られる．よって，

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}|a_kb_{n-k}|}=\frac{1}{r}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}|a'_kb'_{n-k}|}\leqq\frac{1}{r_1(1-\varepsilon)}$$

である．$\varepsilon \to +0$ とすれば，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}|} \leqq \frac{1}{r_1}$ を得る．あとは，定理 2.5 より (2) が成り立つ． $\square$

7. テーラー展開 (1)

定理 7.1.(マクローリンの定理・テーラーの定理) $n \in \mathbb{N}$，I は開区間とし，$f(x)$ は I 上で n 回微分可能な関数とする．また，$a \in I$ とする．$x \in I$ を取り，固定する．すると，$a < c < x$ または $a > c > x$ を満たすある実数 $c = c(a, x)$ (c は a と x に依存する) が存在し，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 \\ &\qquad + \cdots + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$x = a$ でも上の表示では $(x-a)^0 = 1$ と約束しておく．$\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$ を**剰余項**と呼ぶ．

証明. C は後で定める定数とする．x を定数，$t \in I$ を変数として，

$$g(t) := f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(t)}{r!}(x-t)^r - C(x-t)^n \qquad ①$$

とおく．$t = x$ とおくと $(x-t)^0 = 1$ なので $\sum$ 記号の中は $r = 0$ の項 $f(t) = f(x)$ のみが 0 でない．よって，$g(x) = f(x) - f(x) = 0$ である．今，定数 C は $g(a) = 0$ となるように定める．すなわち，$C := \dfrac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(t)}{r!}(x-a)^r\right)$ とおく．$g(t)$ は微分可能で，

$$\begin{aligned} g'(t) = \frac{d}{dt}g(t) &= -\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{f^{(r+1)}(t)}{r!}(x-t)^r - \frac{f^{(r)}(t)}{r!}\cdot r(x-t)^{r-1}\right) + nC(x-t)^{n-1} \\ &= -\sum_{r=1}^{n} \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!}(x-t)^{r-1} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f^{(r)}(t)}{(r-1)!}(x-t)^{r-1} + nC(x-t)^{n-1} \\ &= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + nC(x-t)^{n-1} = n\left(C - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\right)(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

である．$g(x) = g(a) = 0$ であったので，中間値の定理より $a < c < x$ または $a > c > x$ を満たすある実数 c が存在して $g'(c) = 0$ となる．$(x-c)^{n-1} \neq 0$ なので，$\left(C - \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}\right) = 0$ で，

$$C = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

となる．この C を ① に代入し，$t = x$ とおいて $g(a) = 0$ を用いると，

$$0 = g(a) = f(x) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-t)^n$$

となり，求める等式を得る． □

上の定理と定理 6.4 より，次の定理が得られる．

定理 7.2. I は開区間，$a \in I$, $f(x)$ は I 上で無限回微分可能な関数とする．R は正の実数か $+\infty$ で，$|c-a| < R$, $c \in I$ を満たす任意の実数 c に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(c)\right|}{n!}} = 0$$

が成り立つと仮定する．すると，$|x-a|<R$ を満たす任意の $x \in I$ に対して，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成立する．上式を $x=a$ (の回り) での $f(x)$ の**テーラー展開**とか**マクローリン展開**とか**巾級数展開**という．(うるさく言うと，$a=0$ のときがマクローリン展開で，一般の a のときがテーラー展開である，と区別することもあるが，細かい発見者論争なので気にしなくてよい．人名を避けたいなら巾級数展開と言えばよい.)

★ e^x, $\sin x$, $\cos x$ の巾級数展開

(1) $f(x)=e^x$ については $f^{(n)}(x)=e^x$ で，c を固定すれば，n が十分大きいとき $|c| \ll n$ なので，$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=0$ である．よって，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

が成立する．特に $a=0$ とすれば，

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

が成り立つ．

(2) $f(x)=\cos x$ については $a=0$ の時，簡明な公式になる．0 以上の整数 n に対して，$|f^{(n)}(c)| \leqq 1$ なので，(1) の場合と同様に，$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=0$ である．また，$f^{(2n)}(0)=(-1)^n$, $f^{(2n+1)}(0)=0$ である．よって，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

が成り立つ．

(3) $f(x)=\sin x$ については上と同様に，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots$$

が成り立つ．

★ オイラーの公式

細かいことは複素関数論で学習するが，オイラーの公式のみ説明しておく．習慣上，複素数の変数は x の代わりに z を用いることが多いので，それに従う．z が虚数 (複素数) のとき，e^z, $\cos z$, $\sin z$ は上の結果を尊重して，

$$e^z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\sin z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

として定義する．定理 6.4 は複素数でも成立するので，上の 3 つの定義式の右辺の巾級数はすべての複素数 z に対して収束して，有限の複素数の値が定まる．

定理 7.3. (オイラーの公式) $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．任意の複素数 z に対して，以下の等式が成立する．

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

証明. 定理 2.3 より，

$$\begin{aligned} \cos z + i \sin z &= \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \cdots\right) \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - i\frac{z^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + i\frac{z^9}{9!} - \cdots \\ &= 1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \frac{(iz)^7}{7!} + \frac{(iz)^8}{8!} + \frac{(iz)^9}{9!} + \cdots \\ &= e^{iz} \end{aligned}$$

である．また，

$$\begin{aligned} \cos(-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(-z)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \cos z \\ \sin(-z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-z)^{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = -\sin z \end{aligned}$$

なので，

$$e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

である．これと $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ より，$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ を得る． □

補題 7.4. 複素数 z, w に対して以下が成り立つ．

(1) $e^{z+w} = e^z e^w$

(2) $\sin(-z) = -\sin z$

(3) $\cos(-z) = \cos z$

(4) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

(5) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

証明. (1) 定理 6.5 より，

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w} \end{aligned}$$

(2), (3) は前定理の中で証明してある．

(4) オイラーの公式より，

$$\begin{aligned} &\sin z \cos w + \cos z \sin w \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz+iw} + e^{iz-iw} - e^{-iz+iw} - e^{-iz-iw}}{4i} + \frac{e^{iz+iw} - e^{iz-iw} + e^{-iz+iw} - e^{-iz-iw}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w) \end{aligned}$$

(5) オイラーの公式より,

$$\begin{aligned}
&\cos z\cos w - \sin z\sin w \\
&= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4} + \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4} \\
&= \frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z+w)
\end{aligned}$$

□

複素数 z に対する e^z, $\cos z$, $\sin z$ の近似値を，実数しか扱えない電卓で計算するための公式を与えておく．まず,

$$\cosh z := \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

と定義し，それぞれ**コサインハイパボリック**, **サインハイパボリック**と読み，これらを総称して**双曲線関数**という．オイラーの公式より，複素数 z に対し，以下が成り立つ．

$$\cos z = \cosh iz, \quad \cosh z = \cos iz, \quad \sin z = -i\sinh iz, \quad \sinh z = i\sin iz$$

定理 7.5. 複素数 $z = x+iy$ $(x,\, y\in\mathbb{R})$ に対し，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \\
&\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x - i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x \\
&\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x
\end{aligned}$$

証明. (1) $e^{x+iy} = e^xe^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

(2) $\cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$.

(3) $\sin(x+iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$. □

8. テーラー展開 (2)

定義 8.1. I は開区間，$f(x)$ は I 上で無限回微分可能な関数，$a \in I$ とする．もし，ある正の実数 $R > 0$ が存在して $|x-a| < R$ を満たすすべての実数 x に対して，等式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{①}$$

が成立するとき，$f(x)$ は $x = a$ で**正則**であるとか**実解析的**であるという．また，任意の $a \in I$ で $f(x)$ が正則なとき，$f(x)$ は I 上で正則であるとか実解析的であるという．

①が $|x-a| < R$ を満たすすべての実数 x に対して成立するとき，$|x-a| < R$ を満たすすべての複素数 x に対しても ① の右辺の級数は収束するので，その値を $f(x)$ であるとして $f(x)$ の定義域を $|x-a| < R$ を満たす複素数 x まで拡張することができる．

定理 8.2. (一致の原理) r は (小さい) 正の実数で，$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ がともに $|x| < r$ のとき収束すると仮定する．また，$|x| < r$ のとき $f(x) = g(x)$ が成立すると仮定する．すると，任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $a_n = b_n$ である．

証明. $f(x)$, $g(x)$ は定理 6.4 より無限回微分可能で，$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!} = b_n$ である． □

物理学等自然現象に登場する時刻 t を変数とする関数 $f(t)$ が解析的 (正則) であれば，短い時間のインターバル $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ における $f(t)$ を正確に観測すれば，すべての $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $f^{(n)}(t_0)$ を求められるので，上の一致の原理から遠い先の時刻 $t > t_0 + \varepsilon$ においても $f(t)$ の値を予測することができる．こういうことが古典的な「物理法則」である (量子力学は別)．しかし，$f(t)$ が無限回微分可能でも正則でないと，現在の観測値から未来のことは予測できない．

例 8.3. $x \leqq 0$ のとき $f(x) = 0$, $x \geqq 1$ のとき $f(x) = 1$ となるような $\mathbb{R}$ 全体で無限回微分可能で単調増加な関数 $f(x)$ の例を以下に構成する．$\mathbb{R}$ 上で定義された関数

$$h(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える．漸化式 $h_0(x) := 1$, $h_n(x) := x^2 h'_{n-1}(x) - ((2n-2)x + 1)h_{n-1}(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ によって $h_n(x)$ を定めれば，$h_n(x)$ は多項式で，$x > 0$ のとき，

$$h^{(n)}(x) = \frac{h_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$$

となることが n に関する帰納法で証明できる．よって，$h(x)$ は $x = 0$ でも無限回微分可能で，任意の自然数 n に対して $h^{(n)}(0) = 0$ である．$x \neq 0$ のとき無限回微分可能なのは明らかなので，$h(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能である．また $x > 0$ では狭義単調増加である．

$g(x) := \displaystyle\int_0^x h(t)h(1-t)\,dt$ とおく．$g(x)$ も $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能である．$t \leqq 0$ または $t \geqq 1$ のとき $h(t)h(1-t) = 0$ なので，$x < 0$ のとき $g(x) = 0$, $x > 0$ のとき $g(x) = g(1)$ である．$C_0 := g(1)$ とおき，$f(x) := \dfrac{1}{C_0} g(x)$ とおく．$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で無限回微分可能であるが，$0 \leqq x \leqq 1$ では正則でない．また，$x < 0$ のとき $f(x) = 0$, $0 \leqq x \leqq 1$ のとき狭義単調増加，$x > 1$ のとき $f(x) = 1$ である．

この関数 $f(t)$ は $t < 0$ で $f(t) = 0$ となることを観測しても，$t > 1$ のとき $f(t) = 1$ となることは予測できない．

命題 8.4. (巾級数の項別積分) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $|x| < r$ のとき収束すると仮定する．$F(x)$ は $|x| < r$ のとき微分可能で $F'(x) = f(x)$ であるとする．すると，$|x| < r$ のとき以下が成り立つ．

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

証明. $G(x) := F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ とおく．定理 6.4 より，$G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ である．$F'(x) = f(x)$, $F(0) = G(0)$ より，$|x| < r$ のとき $G(x) = F(x)$ が成り立つ． □

命題 8.5. $|x| < 1$ のとき，以下が成り立つ．

(1) $\log_e(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^n$

(2) $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

証明. (1) $|t| < 1$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ である．ただし，$t^0 = 1$ とおく．よって，$|x| < 1$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ である．$\bigl(\log_e(1+x)\bigr)' = 1/(1+x)$ なので，前定理より (1) が成り立つ．

(2) $\bigl(\tan^{-1} x\bigr)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ を用いれば，(1) と同様にして証明できる． □

応用例 8.6. (マチンの公式)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{4}{5^{2n+1}} - \frac{1}{239^{2n+1}} \right)$$

証明. $c = \tan^{-1}(1/5)$ とおく．加法定理から，

$$\begin{aligned}
\tan 2c &= \frac{2\tan c}{1 - \tan^2 c} = \frac{2/5}{24/25} = \frac{5}{12} \\
\tan 4c &= \frac{2\tan 2c}{1 - \tan^2 2c} = \frac{10/12}{119/144} = \frac{120}{119} \\
\tan\left(\frac{\pi}{4} - 4c\right) &= \frac{1 - 120/119}{1 + 120/119} = -\frac{1}{239}
\end{aligned}$$

である．よって，$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} - 4c = -\arctan\frac{1}{239}$ である． □

定義 8.7. 自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
(2n)!! &:= 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n) \\
(2n-1)!! &:= 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1)
\end{aligned}$$

と定める．ただし， $0!! := 1$, $(-1)!! := 1$ と約束する．

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, \quad (2n)!! \cdot (2n-1)!! = (2n)!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

である．

命題 8.8. z が複素数，r が非負整数のとき，$\binom{z}{r} = \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-r+1)}{r!}$ と定義し，これを**二項係数**という．

(1) t が (自然数とは限らない) 実数のとき，$|x| < 1$ を満たす任意の複素数 x に対して

$$(x+1)^t = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{t}{r} x^r$$

が成立する．

(2) $|x|<1$ を満たす任意の実数 x に対して以下が成立する．

(2-1) $$\sqrt{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^n}{2n-1}$$

(2-2) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$$

(2-3) $$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

証明. (1) $f(x)=(x+1)^t$ の r 次導関数は，$f^{(r)}(x)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1)(x+1)^{t-r}$ なので，$f^{(r)}(0)=t(t-1)(t-2)\cdots(t-r+1)$ である．また，$|x|<1$ のとき，また，t を固定したとき，$\lim_{r\to\infty}\left|\binom{t}{r}\right|\leqq(\lceil t\rceil)!$ で，r に依存しない定数で押さえられる．したがって，少なくとも $-1<x<0$ においては，マクリーロン展開の剰余項は 0 に収束する．これより，

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{f^{(r)}(0)}{r!}\binom{t}{r}x^r \qquad ①$$

が少なくとも $-1<x<0$ においては成立する．ところが，① の右辺は $|x|<1$ において収束し，① の両辺はともに解析的なので，$|x|<1$ において ① が成立する．

(2-1) (1) において，$t=1/2$ とおけば，

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\right)=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!\cdot(2n-1)}{2^n\cdot(2n-1)}$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n-1}$$

(2-2) (1) において，$t=-1/2$ とおけば，

$$\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\right)=\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

(2-3) $(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．(2-2) の x に $-x^2$ を代入すると，

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$$

となる．これを積分して，$\sin^{-1}0=0$ に注意すると，$\sin^{-1}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. □

定理 8.9. (アーベルの定理) $f(x):=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径は r で，$0<r<+\infty$ であるとする．今，$|x_0|=r$ であるような複素数の定数 x_0 に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$ が収束したと仮定する．すると以下が成り立つ．

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$$

証明. $z := x/x_0$, $b_n := a_n x_0^n$, $g(z) := f(x_0 z)$ とおけば，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{z \to 1} g(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

であるので，$\displaystyle\lim_{z \to 1} g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ を証明すれば，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が得られる．

$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle s_{n,m} := \sum_{i=n}^{n+m} b_i$ とおく．任意の実数 $\varepsilon > 0$ を取る．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するから，ある $n(\varepsilon)$ が存在して，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，$\left|s_{n(\varepsilon),m}\right| < \varepsilon$ が成り立つ．$0 \leqq z \leqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=n}^{n+m} b_i z^i\right| &= \left|\sum_{j=0}^{m-1} s_{n(\varepsilon),j}\left(z^{n+j} - z^{n+j+1}\right) + s_{n(\varepsilon),m} z^{n+m}\right| \\ &\leqq \left|\sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon\left(z^{n+j} - z^{n+j+1}\right) + \varepsilon z^{n+m}\right| \leqq \varepsilon |z|^m \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\displaystyle g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ は $0 \leqq z \leqq 1$ で一様収束する．定理 6.3 より $g(z)$ は $0 \leqq z \leqq 1$ で連続である．よって，$\displaystyle\lim_{z \to 1} g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が成り立つ． □

応用例 8.10.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log_e 2$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

証明. (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ が収束することは，以下のように証明できる．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k)} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \leqq 1 + \int_1^n \frac{1}{(2x-1)^2} dx = 1 + \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{2x-1}\right]_1^n \leqq 2\end{aligned}$$

あとは，$\displaystyle\log_e(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ と前定理より結論を得る．

(2) $\displaystyle\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ を用いれば，(1) と同様にして証明できる． □

9. テーラー展開 (3)

★ 割り算

巾級数展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ はすべての項の係数 a_n が決定できなくても，最初の数項 a_0, a_1, a_2,... を求めただけで役に立つ場合も多い．まず，以下の巾級数の割り算の計算方法をマスターしておこう．多項式の割り算は降巾の順に項を並べて計算するが，巾級数の割り算は昇巾の順に項を並べて計算するところが違う．

例 9.1. $f(x) = \dfrac{1+3x+x^3}{1+x+x^2}$ を $x=0$ の回りでテーラー展開したい．そこで，以下のように割り算をしてみる．

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 1+2x-3x^2+2x^3+x^4+\cdots \\ \cline{2-2}
1+x+x^2 \big) & 1+3x+x^3 \\
 & 1+x+x^2 \\ \cline{2-2}
 & 2x-x^2+x^3 \\
 & 2x+2x^2+2x^3 \\ \cline{2-2}
 & -3x^2-x^3 \\
 & -3x^2-3x^3-3x^4 \\ \cline{2-2}
 & 2x^3+3x^4 \\
 & 2x^3+2x^4+2x^5 \\ \cline{2-2}
 & x^4-2x^5
\end{array}
$$

この場合は，ラッキーなことに，1, 2, −3, 2 という係数が周期 4 で巡回するので，

$$
\frac{1+3x+x^3}{1+x+x^2} = 1+2x-3x^2+2x^3+x^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{4n}+2x^{4n+1}-3x^{4n+2}+2x^{4n+3})
$$

というテーラ展開が得られる．

例 9.2. $f(x) = \dfrac{1}{\cos}$ を $x=0$ の回りでテーラー展開し，x^6 の係数まで求めたい．この場合，$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{6!}x^6 + \cdots$ において，x^7 以降の項は $f(x)$ の x^6 までの項の計算には影響しない．割り算を実行すると以下のようになる．

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots \\ \cline{2-2}
1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{720}x^6+\cdots \big) & 1 \\
 & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\cdots \\
 & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{48}x^6+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \phantom{1-\frac{1}{2}x^2-}\frac{5}{24}x^4-\frac{14}{720}x^6+\cdots \\
 & \phantom{1-\frac{1}{2}x^2-}\frac{5}{24}x^4-\frac{5}{48}x^6+\cdots \\ \cline{2-2}
 & \phantom{1-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4-}\frac{61}{720}x^6+\cdots
\end{array}
$$

なお，$E_0 := 1$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して，漸化式

$$E_n := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} E_k$$

によって**オイラー数**と呼ばれる定数 E_n を定義すると，

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}$$

が成り立つ．証明は，$\cos x \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1$ と，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} E_k}{(2k)!(2n-2k)!}\right) x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} E_k\right) x^{2n} = 1\end{aligned}$$

を比較すればよい．

★ テーラー展開の応用

極限の計算において，テーラー展開を利用したほうがよい場面は非常に多い．試しに，高校時代の数学 III の問題集を見返して，下記のような手法が適用できないか考えてみよ．

例 9.3.(極限の計算)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots\right) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots\right) - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \cdots}{x^2} = 1$$

定義 9.4.(母関数) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し，関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を $\{a_n\}$ の**母関数**とか**生成関数**という

例 9.5. 漸化式 $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n \geqq 1)$ で定まる数列を**フィボナッチ数列**という．$|x|$ が十分小さいとき．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

が成り立つことは，以下の計算から確認できる．収束半径については後で説明する．

$$\begin{aligned}(1 - x - x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ &= a_1 x + a_2 x^2 - a_1 x^2 + \sum_{n=3} (a_n - a_{n-1} - a_{n-2}) x^n = x\end{aligned}$$

参考 9.6.(収束半径) 以下の話は複素関数論の範囲なのでここでは証明できないが，事実だけは知っておくとよい．h が任意の複素数値を取りながら 0 に近づくとき極限 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在するとき，$f(z)$ は $z = a$ で**正則**であるという．h が実数のみでなく，複素数を動かないといけないので，実関数の微分可能よりずっと強い条件である．すると，$f(z)$ は $z = a$ において無限回微分可能で，ある正の実数 R が存在し，$|z - a| < R$ を満たす任意の複素数 z に対し

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \qquad ①$$

が成り立つ．今，$f(z)$ が正則にならないような $z=a$ から最も近い点が z_0 であるとする．すると，① の右辺の収束半径は $r=|z_0-a|$ である．

例えば，上の例の $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$ の場合，$1-x-x^2=0$ の解 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ が $x=0$ から最も近い非正則点なので，上の例の巾級数の収束半径は $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ である．

例 9.7. 巾級数ではないが，母関数を利用した場合の数の計算方法を理解しておこう．自然数 $i=1,2,3,\ldots,n$ に対し，数 i が書かれたカードが k_i 枚ある場合に，これらのカードの中から r 枚選ぶ順列の個数は以下の方法で求められる．

$$g_i(x):=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{k_i}}{k_i!}\quad(1\leqq i\leqq n)$$

とし，$g(x):=g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$ とおく．このとき，求める場合の数は $g(x)$ の x^r の係数の $r!$ 倍に等しい．

例 9.8. n 種類のものから r 個を選ぶ重複組合せの場合の数を

$${}_nH_r={}_{(n+r-1)}C_r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}$$

とすると，母関数は

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}_nH_rx^r=\frac{1}{(1-x)^n},\quad \sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^r=(1+x)^n$$

である．上の左の等式は，上の例で $g_i(x)=1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots$ とした場合からもわかる．

定理 9.9.(ベルヌーイ多項式・ベルヌーイ数) x,t は任意の実数とする．

$$\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{n!}x^n \qquad ①$$

を満たす関数 $\varphi_n(t)$ を**ベルヌーイ多項式**という．また，$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し

$$B_n:=(-1)^{n+1}\varphi_{2n}(0)$$

と定め，B_n を**ベルヌーイ数**という．このとき以下が成り立つ．

(1) n が 3 以上の奇数の時 $\varphi_n(0)=0$ である．特に，

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nB_n}{(2n)!}x^{2n}$$

(2) $n\in\mathbb{N}$ のとき，$\varphi_n(t+1)-\varphi_n(t)=nt^{n-1}$.

(3) $\varphi_n'(t)=n\varphi_{n-1}(t)$. 特に，$\varphi_n(t)$ は t の n 次多項式で，$\varphi_0(t)=1,\varphi_1(t)=t-\dfrac{1}{2},\varphi_2(t)=t^2-t+\dfrac{1}{6}$ である．

(4) $\varphi_n(1-t)=-\varphi_n(t)$.

(5) $n\geqq 2$ のとき

$$\varphi_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+\binom{n}{2}B_1x^{n-2}-\binom{n}{4}B_2x^{n-4}+\cdots+(-1)^{k+1}\binom{n}{2k}B_kx^{n-2k}+\cdots$$

.

(6) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}i^n=\frac{1}{n+1}(\varphi_{n+1}(k)-\varphi_{n+1}(0))+k^n$.

(7) $\displaystyle\tan x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}$.

(8) $\displaystyle\frac{x}{\sin x}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2^{2n-1}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n}$.

証明. (1) $(*)$ において $t=0$ を代入すると，$\dfrac{x}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)}{n!}x^n$．ここで $\dfrac{x}{2}\left(\coth\dfrac{x}{2}-1\right)=\dfrac{x}{e^x-1}$ であることと $\varphi_0(0)=1$, $\varphi_1(0)=-\dfrac{1}{2}$ であることを用いると，$\dfrac{x}{2}\left(\coth\dfrac{x}{2}-1\right)=1-\dfrac{x}{2}+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)}{n!}x^n$ を得る．ゆえに，$\dfrac{x}{2}\coth\dfrac{x}{2}-1=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi_n(0)}{n!}x^n$ となり，この上の等式の左辺は偶関数であるから，n が 3 以上の奇数のとき $\varphi_n(0)=0$ である．

(2) $\dfrac{xe^{(t+1)x}}{e^x-1}-\dfrac{xe^{tx}}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t+1)-\varphi_n(t)}{n!}x^n$ であり，また，

$$\frac{xe^{(t+1)x}}{e^x-1}-\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\frac{xe^{tx}}{e^x-1}(e^x-1)=xe^{tx}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}x^{n+1}$$

である．z^n の係数を比較して，$\varphi_n(t+1)-\varphi_n(t)=nt^{n-1}$ が得られる．

(3) ① の両辺を t で微分すると，

$$\frac{x^2e^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n'(t)}{n!}x^n \qquad ②$$

となる．② の左辺は，

$$x\cdot\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{n!}x^{n+1} \qquad ③$$

である．②，③ の x^n の係数を比較すると $\varphi_n'(t)=n\varphi_{n-1}(t)$ が得られる．

これより，$\varphi_n''(t)=n\varphi_{n-1}'(t)=n(n-1)\varphi_{n-2}(t)$, $\varphi_n^{(n)}(t)=n!\varphi_0(t)=n!$ (定数) を得る．ゆえに $\varphi_n(t)$ は t の n 次多項式である．

(4) $\dfrac{xe^{(1-t)x}}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(1-t)}{n!}x^n$, $\dfrac{-xe^{-xt}}{e^{-x}-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{n!}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\varphi_n(t)}{n!}x^n$．また，

$$\frac{xe^{(1-t)x}}{e^x-1}=e^x\cdot\frac{xe^{-tx}}{e^x-1}=\frac{xe^{-tx}}{1-e^{-x}}=\frac{-xe^{-tx}}{e^{-x}-1}$$

の x^n の係数を比較することにより，$\varphi_n(1-t)=(-1)^n\varphi_n(t)$ がわかる．ゆえに n が奇数のとき，$\varphi_n(1-t)=-\varphi_n(t)$.

(5) $b_1=-\dfrac{1}{2}$ 以外の奇数項は $b_{2n+1}=0$ である．これより，$\dfrac{x}{e^x-1}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$ と表せ，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(t)}{n!}x^n=\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\frac{x}{e^x-1}\cdot e^{tx}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}\right)$$

となる．これより，$\varphi_n(t)=b_0t^n+\dbinom{n}{1}b_1t^{n-1}+\dbinom{n}{2}b_2t^{n-2}+\cdots+b_n$．よって，$n\geqq 2$ のとき $b_1=-\dfrac{1}{2}$ に注意して，ベルヌーイ数 B_n を用いると，

$$\varphi_n(x)=x^n-\frac{n}{2}x^{n-1}+\binom{n}{2}B_1x^{n-2}-\binom{n}{4}B_2x^{n-4}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{n}{2k}B_kx^{n-2k}+\cdots$$

(6) $\varphi_n(t+1)-\varphi_n(t)=nt^{n-1}$ の n を $n+1$ に置き換えて $\varphi_{n+1}(t+1)-\varphi_{n+1}(t)=(n+1)t^n$．これを $t=0,1,2,\ldots,k-1$ について加えると $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}i^n=\frac{1}{n+1}\left(\varphi_{n+1}(k)-\varphi_{n+1}(0)\right)+k^n$ を得る．

(7) $\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}$ より，この式で x を $2xi$ ($i=\sqrt{-1}$) でおきかえると，$\dfrac{2xi}{2}\cdot\dfrac{e^{2xi}+1}{e^{2xi}-1}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}(2xi)^{2n}$ となる．ゆえに，$x\cot x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n}$ である．また，

$\tan x = \cot x - 2\cot 2x = \dfrac{1}{x}(x\cot x - 2x\cot 2x)$ より,

$$\tan x = \frac{1}{x}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}(2x)^{2n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}.$$

(8) $\dfrac{1}{\sin x} = \cot\dfrac{x}{2} - \cot x$ を使えば，(7) と同様な計算で証明できる． □

10. 陰関数と多価関数

定義 10.1. $(x,\,y)$-平面上で $f(x,\,y)=0$ で定まる曲線 C を考える．C 上の点 P の近くでは C がある関数 $y=g(x)$ のグラフになっているとき，$f(x,y)=0$ は $y=g(x)$ を定める**陰関数**という．また，$x\in\mathbb{R}$ に対し $f(x,y)=0$ を満たす y 達が何個かの関数 $y=g_n(x)$ で与えられるとき，$g_n(x)$ 達を $f(x,\,y)=0$ で定まる**多価関数**という．

例えば $(x,\,y)$-平面上で $x-\cos y=0$ で定まる曲線 C を考える．整数 $n\in\mathbb{Z}$ に対し，C の中の $n\pi\leqq y\leqq(n+1)\pi$ の部分を C_n とする．$n=2m$ が偶数ならば C_n は関数 $y=2m\pi+\cos^{-1}x$ のグラフであり，$n=2m-1$ が奇数ならば C_n は関数 $y=2m\pi-\cos^{-1}x$ のグラフである．$x-\cos y=0$ あるいは $x=\cos y$ は $y=2m\pi\pm\cos^{-1}x$ を定める陰関数であり，$y=2m\pi\pm\cos^{-1}$ は $x=\cos y$ から定まる多価関数と考えることができる．また，各 C_n を陰関数 $x-\cos y=0$ の**分枝** (ぶんし) という．

このような多価関数は写像の意味での関数ではないが，重要な関数の逆関数の多くは多価関数と理解したほうが便利なことが多い．

$y=\cos x$ の定義域を $[0,\,\pi]$ に制限した関数の逆関数 $\cos^{-1}x$ を $y=\cos x$ の逆関数の**主値**ともいい，$2m\pi\pm\cos^{-1}x$ を多価関数としての $y=\cos x$ の逆関数ともいう．

$y=\sin x$ の多価関数としての逆関数は，$y=2m\pi\pm\sin^{-1}x\ (m\in\mathbb{Z})$ である．また，$y=\tan x$ の多価関数としての逆関数は，$y=m\pi+\tan^{-1}x\ (m\in\mathbb{Z})$ であり，$y=\cot x$ の多価関数としての逆関数は，$y=m\pi+\cot^{-1}x\ (m\in\mathbb{Z})$ である．

高校の数学 III で学習した陰関数微分の考え方を，偏導関数の概念を用いて公式化しておく．

定義 10.2.(偏微分・編導関数) 2 変数関数 $f(x,\,y)$ が点 $(x_0,\,y_0)$ の回りで定義されているとき，

$$f_x(x_0,y_0):=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\quad f_y(x_0,y_0):=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

の値が有限の値として確定すれは，その極限値 $f_x(x_0,\,y_0)$ を x による $f(x,\,y)$ の**偏微分係数**, $f_y(x_0,\,y_0)$ を y による $f(x,\,y)$ の**偏微分係数**という．$x_0,\,y_0$ を変数として動かして関数 $f_x(x,\,y),\,f_y(x,\,y)$ と考えたものを**偏導関数**という．$f_x(x,\,y)$ は $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,\,y)$, $f_y(x,\,y)$ は $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,\,y)$ などとも書く．

定理 10.3.(陰関数微分) $(x,\,y)$-平面上で $f(x,\,y)=0$ で定まる曲線 C があり，$P=(x_0,\,y_0)\in C$ の近くでは C がある関数 $y=g(x)$ のグラフになっているとする．もし，$f_x(x_0,\,y_0)$ と $f_y(x_0,\,y_0)$ の値が確定して $f_y(x_0,\,y_0)\neq0$ であるならば，次の等式が成り立つ．

$$g'(x_0)=-\frac{f_x(x_0,\,y_0)}{f_y(x_0,\,y_0)}$$

証明. $g'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ なので，$\varepsilon(x,h):=\big(g(x+h)-g(x)\big)-hg'(x)$ とおくと，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(x,h)}{h}=0$ が成り立つ．

さて，$|x-x_0|$ が小さいとき $f(x,\,g(x))=0$ が成り立つ．この両辺を x で微分する．$x=x_0$ において，

$$\begin{aligned}0=\frac{d}{dx}f(x,\,g(x))&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,\,g(x+h))-f(x,\,g(x))}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x+h,\,g(x+h))-f(x,\,g(x+h))}{h}+\frac{f(x,\,g(x+h))-f(x,\,g(x))}{h}\right)\\&=\lim_{h\to0}f_x(x,\,g(x+h))+\lim_{h\to0}\frac{hg'(x)+\varepsilon(x,h)}{h}\cdot\frac{f(x,\,g(x)+hg'(x)+\varepsilon(x,h))-f(x,\,g(x))}{hg'(x)+\varepsilon(x,h)}\end{aligned}$$

である．ここで，$h\to0$ のとき $hg'(x)+\varepsilon(x,h)\to0$ なので，$\delta:=hg'(x)+\varepsilon(x,h)$ とおくと，

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x,\,g(x)+hg'(x)+\varepsilon(x,h))-f(x,\,g(x))}{hg'(x)+\varepsilon(x,h)}=\lim_{\delta\to0}\frac{f(x,\,g(x)+\delta)-f(x,\,g(x))}{\delta}=f_y(x,\,g(x))$$

である．よって，

$$0=\frac{d}{dx}f(x,\,g(x))=f_x(x,\,g(x))+g'(x)f_y(x,\,g(x))$$

が得られる．これより結論を得る． □

★ 曲線の接線

考察 10.4. 高校では，以下の 2 種類の接線の求め方が登場した．

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a,\, f(a))$ における接線の方程式は
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$
である．

(2) $g(x,\, y)$ は多項式とし，$g(x,\, y) = 0$ で定まる曲線を C とする．C 上の点 $P = (a,\, b)$ を取る．点 P を通る直線の方程式 $y = b + p(x - a)$ を $g(x,\, y) = 0$ に代入して得られる x の多項式 $g(x,\, b + p(x - a))$ が $x = a$ を重解にもてば，$y = b + p(x - a)$ は $g(x,\, y) = 0$ の接線である．

どちらもよく使われる接線の定義であるが，残念ながら，(1) と (2) の接線の定義は同値ではない．高等数学では，1 つの用語に対し，同値でない複数の定義が存在する例は多くあるので，そういう概念を使うときは，定義を述べてから使う．

例 10.5. $y^3 - x^4 = 0$ で定まる曲線 C の原点における接線を考える．まず，(2) の方法で接線を求めてみよう．$y = px$ を $y^3 - x^4 = 0$ に代入して整理すると，$x^3(p^3 - x) = 0$ となる．この 4 次方程式は任意の実数 p に対して $x = 0$ を重解に持つ．よって，原点を通る任意の直線は C の接線である．この議論は正しい議論で，結果も正しい．ただし，原点は後で説明する意味で，C の特異点になっている．

他方，$y^3 - x^4 = 0$ のグラフは関数 $y = x^{4/3} = \sqrt[3]{x^4}$ のグラフでもある．(1) の方法で，原点における $y = x^{4/3}$ の接線を求めると $y = 0$ である．なお，$f(x) = x^{4/3}$ は $x \neq 0$ で無限回微分可能で正則でもあるが，$x = 0$ でのみ回しか微分できず，正則でない．

ただ，$y = x^{4/3}$ の $x < 0$ のときの定義は微妙で，$\sqrt[3]{x^4} = x^{4/3} = x^{8/6} = \sqrt[6]{x^8}$ が $x < 0$ では成立しない．

この例は，(1) と (2) の定義が同値でないことの例証である．後で説明するように，C 上の特異点における接線については，上のような現象が起きる．

当面，上の話は深刻に考えないで，曲線の接線の別の求め方を考えてみる．

定理 10.6.(接線の方程式) C は $f(x,\, y) = 0$ で定まる曲線とし，$P = (x_0,\, y_0)$ は C 上の点とする．もし，$f_x(x_0,\, y_0) = 0$ かつ $f_y(x_0,\, y_0) = 0$ であるとき，点 P は C の**特異点**であるという．特異点でない C 上の点は**非特異点**とか**滑らかな点**とか**正則点**なとどいう．点 P が C の非特異点ならば，考察 10.4(1) の意味での点 P における C の接線の方程式は以下の式で与えられる．
$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \qquad ①$$
(特異点では上の式は $0 = 0$ という方程式になってしまい，直線を定めない.)

証明. $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ の場合を考える．$P = (x_0,\, y_0) \in C$ の近くでは C がある関数 $y = g(x)$ のグラフになっているとする．$g(x_0) = y_0$ である．また，陰関数微分の公式から，$g'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0,\, y_0)}{f_y(x_0,\, y_0)}$ である．これを $y = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$ に代入して整理すれば結論を得る．

$f_x(x_0, y_0) \neq 0$ の場合は，x と y を入れ替えて考えれば上と同様である． □

前の例 $f(x,\, y) = y^3 - x^4$ の場合，$P = (0,\, 0)$ では，$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ なので P は特異点である．非特異点では，考察考察 10.4 の (1) と (2) の 2 種類の接線の定義は一致する．

定理 10.7. $f(x,\, y)$ が多項式で，$f(x,\, y) = 0$ で定まる曲線 C があり，$P = (x_0,\, y_0)$ は C 上の点で特異点でないとする．$h(x) := f(x,\, y_0 + p(x - x_0))$ とおく．$y = y_0 + p(x - x_0)$ が前定理の意味での接線であるここと，$h(x) = 0$ が $x = x_0$ を重解に持つことは同値である．

証明. $h(x_0) = 0$ である．また，陰関数微分の公式と同じ計算で，
$$h'(x) = f_x(x,\, y_0 + p(x - x_0)) + p f_y(x,\, y_0 + p(x - x_0)) \qquad ①$$
となる．

もし，$y = y_0 + p(x - x_0)$ が前定理の意味での接線ならば，

$$h'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + pf_y(x_0, y_0) = 0$$

なので，$x = x_0$ は $h(x) = 0$ の重解である．

逆に，$x = x_0$ が $h(x) = 0$ の重解ならば，$h'(x) = 0$ なので，①で定まる p が接線の傾きを与える．

□

曲線の特異点における接線の定義は，接線を考える目的に依存するので，1 年生の微積分の範囲では深く考えないことにする．例えば，多角形の頂点における接線とは何か，とか，1 点の接線は何か，を考えるのに似たところがあり，目的に応じて同値でない何種類かの定義があり得る．

★ $y = e^x$ の複素関数としての逆関数

z は複素数とし，$x = z/i = -iz$ とおく．また n は任意の整数とする．オイラーの公式 $e^z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ $(i = \sqrt{-1})$ と，$\cos(x + 2n\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$ より，

$$e^{z+2n\pi i} = e^z$$

が成り立つ．いま，$w = e^z$ の逆関数を $\log_e z$ であると定義すると，e^z の z の範囲を制限しないで複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ で考えると，逆三角関数の場合と同様に，$\log_e z$ は多価関数になる．一般に 0 でない複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し，

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

を満たす実数 (角度) θ が存在する．この θ を $\theta = \arg z$ と書き，z の**偏角**という．θ は角度なので，2π の整数倍の不定性がある．例えば，$\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ (n は任意の整数) である．この意味で，$\arg z$ は多価関数である．

定理 10.8. z が 0 でない複素数のとき，

$$\log_e z = \log_e |z| + i \arg z$$

である．

証明. $z = e^w$ の逆関数が $w = \log_e z$ である．$w = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と実部と虚部に分けて考えると，$e^w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ である．よって，$|z| = |e^w| = e^x$, $\arg z = \arg e^w = y$ である．$|z| = e^x$ より $x = \log_e |z|$ である．よって，$\log_e z = w = x + iy = \log_e |z| + i \arg z$ となる．□

11. 積分の計算方法

これから説明する初等関数の原始関数を求める計算等は，現代では Mathematica 等の数式処理ソフトが瞬時に計算してくれる (導関数の計算も同様) なので，あまり細かい計算のテクニックまで覚えても意味がないかもしれない．ただ，多くの教科書が扱っているテーマなので一応説明しておく．

★ 有理関数の原始関数

$f(x)$, $g(x)$ を実数係数多項式として，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ という形の関数を**有理関数**とか**有理式**という．実数係数多項式 $f(x)$ は，$f(x) = f_1(x)^{m_1} \cdots f_r(x)^{m_r}$ ($m_i \in \mathbb{N}$ で，各 $f_i(x)$ は 1 次または 2 次の実数係数多項式) という形に因数分解できる，という定理がある．ただし，係数は近似値でしか求められない場合も多い．$f_1(x), \ldots, f_r(x)$ が互いに素であるとすれば，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ を部分分数展開することによって，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ は何個かの以下のいずれかの形の有理式の和で表すことができる．

$$\frac{b_j}{(x+a_j)^{m_j}}, \quad \frac{c_k}{\left((x+a_k)^2 + b_k^2\right)^{m_k}}$$

ここで，$m_j, m_k \in \mathbb{N}$ で，$a_j, b_j, a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}$ である．これらの原始関数は，以下の公式と置換積分を用いて求められる．ただし，以下で $m \geqq 2$ とし，C は積分定数とする．

$$\int \frac{1}{x+a}\,dx = \log_e |x+a| + C$$
$$\int \frac{1}{(x+a)^m}\,dx = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{(x+a)^{m-1}} + C$$
$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x+a}{b} + C$$
$$\int \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx = \frac{1}{2} \log_e \left((x+a)^2+b^2\right) + C$$
$$\int \frac{x+a}{\left((x+a)^2+b^2\right)^m}\,dx = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{\left((x+a)^2+b^2\right)^{m-1}} + C$$

最後に，$I_m := \displaystyle\int \frac{1}{\left((x+a)^2+b^2\right)^m}\,dx$ はすこし面倒で，以下の漸化式を用いて計算する．$h(x) := (x+a)^2 + b^2$ とおく．部分積分すると，

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{1}{h(x)^m} dx = \frac{x+a}{h(x)^m} + 2m \int \frac{(x+a)^2}{h(x)^{m+1}} dx \\ &= \frac{x+a}{h(x)^m} + 2m \int \frac{1}{h(x)^m} dx - 2mb^2 \int \frac{1}{h(x)^{m+1}} dx = \frac{x*a}{h(x)^m} + 2mI_m - 2, b^2 I_{m+1} \end{aligned}$$

となる．$n = m+1$ とおくと，

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)b^2} I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)^2 b^2} \cdot \frac{x+a}{\left((x+a)^2+b^2\right)^{n-1}}$$

が得られる．

なお，複素積分の知識があれば，$\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1+ix} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-ix}$ のような部分分数展開を利用してもよいが,

$$\tan^{-1} x = \frac{i}{2} \log_e \frac{1-ix}{1+ix}$$
$$\cos^{-1} x = -i \log_e \left(x - \sqrt{1-x^2}\right.$$

のような関係式をマスターしておく必要がある．なお，後者は $(e^{ix})^2 - 2(\cos x)(e^{ix}) + 1 = 0$ から得られる．

★ $\sin x$, $\cos x$ の有理関数の積分

ケースバイケースであるが，原理的には，$t := \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となるので，有理関数の積分に帰着される．

例 11.1.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \log_e|t| + C = \log_e\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

公式 11.2. m, n が 0 以上の整数のとき，以下が成り立つ．

(1) $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots4\cdot2}{n(n-2)(n-4)\cdots5\cdot3} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots3\cdot1}{n(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

(2) $$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (m,\, n \text{ がともに偶数のとき}) \\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

証明. (1) $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$ とおく．

$$(\sin^{n-1} x\cos x)' = (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x - \sin^n x = (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) - \sin^n x.$$

よって $(\sin^{n-1} x\cos x)' = (n-1)\sin^{n-2} x - n\sin^n x$. この両辺を $\int_0^{\pi/2}\cdots dx$ すると, $0 = (n-1)I_{n-2} - nI_n$.
ゆえに $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ である．また，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = 1$, $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ より，

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots4\cdot2}{n(n-2)(n-4)\cdots5\cdot3}I_1 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{(n-1)(n-3)(n-5)\cdots3\cdot1}{n(n-2)(n-4)\cdots4\cdot2}I_0 = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

(2) 求める積分を $I(m,n)$ とする．$\left(\dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right)' = \sin^m x\cos x$ を積分，$\cos^{n-1} x$ を微分する方向に部分積分を行うと，

$$I(m,n) = \left[\frac{\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\pi/2}\sin^{m+2} x\cos^{n-2} x\,dx = \frac{n-1}{m+1}I(m+2,n-2)$$

が得られる．よって，

$$\begin{aligned} I(m,n) &= \frac{n-1}{m+1}I(m+2,n-2) = \frac{(n-1)(n-3)}{(m+1)(m+3)}I(m+4,n-4) \\ &= \frac{(n-1)(n-3)\cdot(n-2k+1)}{(m+1)(m+3)\cdots(m+2k-1)}I(m+2k,n-2k) \end{aligned}$$

である．これを, $n-2k$ が 0 または 1 になるまで続けると，
n が偶数のときは

$$I(m,n) = \frac{(n-1)!!}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-1)!!}I(m+n,0) = \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n-1)!!}I(m+n,0),$$

n が奇数のときは

$$I(m,n) = \frac{(n-1)!!}{(m+1)(m+3)\cdots(m+n-2)!!}I(m+n-1,1) = \frac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n-2)!!}I(m+n-1,0)$$

となる．また，(4) より，

$$I(m+n,0)=\begin{cases}\dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2} & (m\text{ が偶数のとき})\\ \dfrac{(m+n-1)!!}{(m+n)!!} & (m\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

である．また $I(m+n-1,1)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{m+n-1}x\cos x\,dx=\left[\frac{\sin^{m+n}x}{m+n}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{m+n}$ である．これらより

$$I(m,n)=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (m,\,n\text{ がともに偶数のとき})\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & (m,\,n\text{ の少なくとも一方が奇数のとき})\end{cases}$$

★ その他の不定積分のテクニック

(1) $\sqrt{x^2+ax+b}$ を含む積分は $t:=\sqrt{x^2+ax+b}+x$ と置換積分してみる．

(2) $\sqrt{-x^2+ax+b}$ $(a^2+4c>0)$ を含む積分は，$x^2-ax-b=0$ の 2 根を α,β として，$t:=\sqrt{\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}}$ と置換積分してみる．

(3) e^x の有理式は $t:=e^x$ と置換積分してみる．

(4) $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ を含む積分は，$t:=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置換積分してみる．

(5) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ は 3 つの考え方がある．第 1 の方法は，素朴に 2 回部分積分を繰り返す方法である．第 2 の方法は，

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす角度 θ を計算して求め，

$$\frac{d}{dx}e^{ax}\sin(bx+x_0)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+x_0+\theta)$$

という微分の結果を逆に用いて，

$$\int e^{ax}\sin(bx+x_0)dx=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(bx+x_0-\theta)+C$$

とする方法である．第 3 の方法は，オイラーの公式を用いで，$\sin x,\cos x$ を e^{ix},e^{-ix} で書き直して，指数関数のみの式に直してしまう用法である．

★ 定積分の数値計算

与えられた連続関数 $f(x)$ の原始関数が計算できない場合，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値を求めるには，次の**シンプソンの公式**が有用である．

定理 11.3. (Simpson の公式) $f(x)$ は閉区間 $[a,\,b]$ 上の連続関数で開区間 $(a,\,b)$ 上で C^4 級とする．$n\in\mathbb{N}$ を取り，閉区間 $[a,\,b]$ を $2n$ 等分する点を，$x_k:=\dfrac{(2n-k)a+kb}{2n}$ $(k=0,\,1,\ldots,\,2n)$ ととおく．さらに，

$$I:=\int_a^b f(x)\,dx,\quad M:=\sup_{a\leqq x\leqq b}\left|f^{iv}(x)\right|,\quad \delta:=\frac{b-a}{2n}$$

$$S:=\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1})\right)$$

とおく．ここで $f^{iv}(x)$ は $f(x)$ の 4 階導関数である．すると，$|I-S|\leqq\dfrac{(b-a)M\delta^4}{180}$ が成り立つ．

証明. 一般に $f(x)$ は $[-r, r]$ で連続で $(-r, r)$ で C^4 級であるとする．$h \in [-r, r]$ に対して，

$$g(h) := \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\bigl(f(h) + f(-h) + 4f(0)\bigr)$$

とおく．$g(0) = 0$ である．また，

$$\begin{aligned} g'(h) &= \bigl(f(h) + f(-h)\bigr) - \frac{h}{3}\bigl(f'(f) - f'(-h)\bigr) - \frac{1}{3}\bigl(f(h) + f(-h) + 4f(0)\bigr) \\ &= \frac{2}{3}\bigl(f(h) + f(-h)\bigr) - \frac{4}{3}f(0) - \frac{h}{3}\bigl(f'(f) - f'(-h)\bigr) \end{aligned}$$

なので，$g'(0) = 0$ である．

$$g''(h) = \frac{1}{3}\bigl(f'(h) - f'(-h)\bigr) - \frac{h}{3}\bigl(f''(h) + f''(-h)\bigr)$$

より，$g''(0) = 0$ である．また，

$$g'''(h) = -\frac{h}{3}\bigl(f'''(h) - f'''(-h)\bigr)$$

となる．平均値の定理より，$\dfrac{f'''(h) - f'''(-h)}{2h} = f^{iv}(\zeta_1)$ を満たす $-h < \zeta_1 < h$ が存在する．よって，$g'''(h) = -\dfrac{2h^2}{3} f^{iv}(\zeta_1)$ である．この ζ_1 を $\zeta_1(h)$ と書くことにする．

$$\begin{aligned} \int_0^h g'''(x)(h-x)^2 dx &= \bigl[g''(x)(h-x)^2\bigr]_{x=0}^{x=h} + 2\int_0^h g''(x)(x-h)dx \\ &= (0-0) + 2\left[g'(x)(h-x)\right]_{x=0}^{x=h} + 2\int_0^h g'(x)dx \\ &= 2(0-0) + 2\left[g(x)\right]_0^h = 2g(h) \end{aligned}$$

であるので，

$$g(h) = \frac{1}{2}\int_0^h g'''(x)(h-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^h \frac{g'''(x)}{x^2} x^2 (h-x)^2 dx$$

である．$\displaystyle\int_0^h x^2(h-x)^2 dx > 0$ なので，ある $0 < \zeta_2 < h$ を選べば，

$$g(h) = \frac{g'''(\zeta_2)}{2\zeta_2^2}\int_0^h x^2(h-x)^2 dx$$

が成り立つ．$\zeta_3 := \zeta_1(\zeta_2)$ とおけば，

$$g(h) = -\frac{f^{iv}(\zeta_3)}{3}\int_0^h x^2(h-x)^2 dx = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\zeta_3)$$

である．x を $x - x_{2k-1}$ に置換して $h = \dfrac{b-a}{2n}$ とおけば，

$$g_k := \int_{x_{2k-2}}^{x_{2K}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\bigl(f(x_{2k}) + f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1})\bigr)$$

とおくとき，$|g_k| \leqq \dfrac{(b-a)^5}{(2n)^5 \times 90} M$ である．

$$\begin{aligned} |I - S| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{2k-2}}^{x_{2K}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\bigl(f(x_{2k}) + f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1})\bigr) \right| \\ &\leqq \sum_{k=1}^{n} |g_k| \ \leqq n \cdot \frac{(b-a)^5}{(2n)^5 \times 90} M = \frac{(b-a)M\delta^4}{180} \end{aligned}$$

となる． □

12. パラメータ表示された曲線

平面上の点の運動，空間内の点の運動の 2 種類が大切であるが，考え方はどちらも大体同じなので，記述が簡単な平面の場合に説明する．I は区間とし，時刻 $t \in I$ における点 P の座標を $P(t) = \bigl(f(t),\, g(t)\bigr)$ としよう．多くの文献では $P(t) = \bigl(x(t),\, y(t)\bigr)$ という書き方がよく使われるが，変数の x, y と関数の $x(t), y(t)$ が混乱しがちなので，慣れるまでは $x = f(t), y = g(t)$ と書いて，$x = x(t), y = y(t)$ という書き方は避けることにする．

定義 12.1. 上の記号のもとで，

$$C := \bigl\{\bigl(f(t),\, g(t)\bigr) \in \mathbb{R}^2 \bigm| t \in I\bigr\} \qquad ①$$

とおく．

(1) $f(t)$ と $g(t)$ がともに I 上の連続関数であるとき，C は**連続曲線**であるという．
(2) C は連続曲線で，$I = [a,\, b]$ であって $P(a) = P(b)$ であるとき，C は**連続閉曲線**であるという．
(3) C は連続閉曲線で，$I = [a,\, b]$ であるとする．$t_1 \neq t_2, \{t_1,\, t_2\} \neq \{a,\, b\}$ を満たすある $t_1, t_2 \in I$ に対して $P(t_1) = P(t_2)$ となるとき，この点 $P(t_1) = P(t_2)$ は C の**重複点**であるという．重複点を持たない曲線を**単純曲線**という．
(4) $f(t), g(t)$ が C^1 級であるとき，ベクトル $\bigl(f'(t),\, g'(t)\bigr)$ を時刻 t における**速度ベクトル**という．また，$\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$ を**速さ**とか**速度**という．
(5) $f(t), g(t)$ が C^2 級であるとき，ベクトル $\bigl(f''(t),\, g''(t)\bigr)$ を時刻 t における**加速度ベクトル**という．また，$\sqrt{(f''(t))^2 + (g''(t))^2}$ を**加速度**という．
(6) $r \in \mathbb{N}$ とし $f(t), g(t)$ は C^r 級であるとする．また，$I = (a,\, b)$ (開区間) とする．任意の $a < t < b$ に対して $\bigl(f'(t),\, g'(t)\bigr) \neq (0,\, 0)$ が成り立つならば，C は C^r **級曲線**であるという．任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して C が C^r 級曲線であるとき，C は C^∞ **級曲線**であるとか**滑らかな曲線**であるという．次に，$I = [a,\, b]$ で $P(a) \neq P(b)$ の場合には，C が連続曲線で，I を $(a,\, b)$ に制限して考えたとき C^r 級，または，C^∞ 級であれば，C は C^r 級，あるいは，C^∞ 級であると言う．最後に，$I = [a,\, b]$ で $P(a) = P(b)$ の場合には，$p := b - a$ とおいて $n \in \mathbb{Z}$ に対し $f(t + np) := f(t), g(t + np) := g(t)$ として $f(t)$ と $g(t)$ を周期 $p = b - a$ の周期関数と考え，上の定義の I を $\mathbb{R}$ と書き換えて C^r 級曲線や C^∞ 級曲線を定義する．
(7) $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない部分集合とする．A 内の任意の 2 点 P, Q に対し，① のようにして $I = [a,\, b]$ から定まる連続曲線 C で，$P(a) = P$．$P(b) = Q$ かつ $C \subset A$ となるようなものが存在するとき A は**弧状連結**であるという．(もう少し弱い「連結」という概念のあるが位相の知識が必要なので割愛する.)
(8) $A \subset \mathbb{R}^2$ は空でない部分集合とする．A が十分大きい半径の円内に含まれるとき，A は**有界**であるという．

ところで，陰関数 $f(x,\, y) = 0$ で定まる曲線，という概念もあるが，陰関数 $f(x,\, y) = 0$ で定まる集合は上の定義の意味での曲線になるとは限らない．双曲線 $xy = 0$ は上の意味では 2 本の曲線の和集合である．また，連続曲線にはペアノ曲線のように，正方形内のすべての点を通るような曲線もあって，日常感覚的には曲線として受入れ難いものも多い．C^1 級曲線くらいの条件を付ければ，そういう変な曲線は排除される．このあたりは，難しい話題なので，深入りしないことにする．

定理 12.2. (ジョルダンの閉曲線定理) C は $\mathbb{R}$ 内の単純連続閉曲線とする．このとき，C の $\mathbb{R}$ における補集合は以下の性質を満たす 2 つの集合 A, B の合併集合になる．
(1) A も B の弧状連結である．
(2) A は有界であるが，B は有界でない．
このとき，A を曲線 C で囲まれる**内部**といい，B を**外部**という．

上の定理は直感的には「あたりまえ」に見えるが，証明には位相空間論からの多くの準備が必要で，非常に難しいので，割愛する．

★ 曲線の長さ
本当は曲線の長さの定義から始めるべきであるが，それは次の証明の中で述べることにし，大切な公式を書いておく．

定理 12.3. $I = [a, b]$ とし，C は定義 12.1 内の ① で定義される曲線で，C^1 級曲線であると仮定する．さらに，C の重複点は有限個であるとする．すると C の長さ $\ell(C)$ は以下の積分で計算できる．

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

物理的意味としては，速度の積分が道のり (曲線の長さ) である．

証明. I の分割 $\Delta := \{t_k\}_{k=0}^n$ $(a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b)$ を取る．$0 \leqq k \leqq n$ に対し $P_k := \big(f(t_k),\, g(t_k)\big)$ とおく．線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを $|P_{k-1}P_k|$ と書くことにする．$P_0, P_1, \ldots, P_n$ を結ぶ折れ線の長さを

$$L(\Delta) := \sum_{k=1}^n |P_{k-1}P_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{\big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)^2 + \big(g(t_k) - g(t_{k-1})\big)^2}$$

$$S(\Delta) := \sum_{k=1}^n \sqrt{\big(f'(t_k)\big)^2 + \big(g(t_k)'\big)^2} \cdot (t_k - t_{k-1})$$

とおく．次に，$\{\Delta_l\}_{l=1}^\infty$ はどんどん細かくなる I の分割の細分列であるとする．もし，$\lim\limits_{l\to\infty} L(\Delta_l)$ が収束するならば，それを C の長さ $\ell(C)$ と定義することにする．定積分の場合と同様に，この極限値はどんどん細かくなる I の分割の細分列の選び方に依存しないで定まることが証明できる．

そこで，$t_k := \dfrac{(n-k)a + kb}{n}$ としたときの分割を $\Delta_n := \{t_k\}_{k=0}^n$ とすれば，$\ell(C) = \lim\limits_{n\to\infty} L(\Delta_n)$ である．いま，$\lim\limits_{t_{k-1}\to t_k} \dfrac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = f'(t_k)$ であって，I はコンパクトなので，任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geqq n_0$ と任意の $1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$\left| \frac{\sqrt{\big(f(t_k) - f(t_{k-1})\big)^2 + \big(g(t_k) - g(t_{k-1})\big)^2}}{t_k - t_{k-1}} - f'(t_k) \right| \leqq \varepsilon$$

が成り立つ．すると，

$$\big|L(\Delta_n) - S(\Delta_n)\big| \leqq \sum_{k=1}^n \sqrt{2}\varepsilon(t_k - t_{k-1}) = \sqrt{2}\varepsilon(b-a)$$

となる．これより

$$\ell(C) = \lim_{n\to\infty} L(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(\Delta_n) \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

である．なお「C の重複点は有限個」という仮定がないと，C の同じ区間を複数回通ることがあって，C の長さの定義自体が不適切になる．もっとも，長さではなく，動点 $P(t)$ が移動した道のりと解釈すれば，この仮定はなくてもよい． $\square$

★ 線積分

$I = [a, b]$ とし，C は定義 12.1 内の ① で定義される曲線で，C^1 級曲線であると仮定する．また，関数 $h(x, y)$ は曲線 C 上の点 (x, y) に対して定義されているとする．線積分の定義は，どんどん細かくなる I の分割の細分列を利用した定義が本来のものであるが，結果的に，以下の積分を定義として採用しても同じことになる．線積分の意味は，物理の勉強をしているうちに分かってくると思う．

定義 12.4. C 上での $f(x, y)$ の 3 種類の**線積分**を以下の式で定義する．

$$\int_C h\, ds := \int_a^b h\big(f(t), g(t)\big)\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\, dt$$

$$\int_C h\, dx := \int_a^b h\big(f(t), g(t)\big) f'(t)\, dt$$

$$\int_C h\, dy := \int_a^b h\big(f(t), g(t)\big) g'(t)\, dt$$

なお，

$$ds = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

という書き方がよく登場する．厳密にはこれは「微分形式」の等式である．dx, dy, dt 等は単体では微分形式として意味があるが，微分形式の定義 (dx 等が属する集合の構成) には抽象代数が必要なので割愛する．

$C = [a, b]$ の場合には，$\displaystyle\int_C h\,ds = \int_C h\,dx = \int_a^b h(x)\,dx,\quad \int_C h\,dy = 0$ である．(理由は $f(t) = t$, $g(t) = 0$ が選べるから.)

★ 曲率

$I = [a, b]$ とし，C は定義 12.1 内の ① で定義される曲線で，C^1 級曲線であると仮定する．また，$t_0 \in I$ に対し，時刻 $t = a$ から $t = t_0$ までに動点 $P(t)$ が動いた道のりを

$$l(t_0) := \int_a^{t_0} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,dt$$

とおく．仮定から，$(f'(t), g'(t)) \neq (0, 0)$ なので，動点 $P(t)$ は停止することなく常に動いているので，$s = l(t)$ の逆関数 $t = l^{-1}(s)$ が定義できる．$s^{-1}(0) = a$, $s^{-1}(\ell(C)) = b$ である．また，$f_0(s) = f(l^{-1}(s))$, $g_0(s) = g(l^{-1}(s))$, $J = [0, \ell(C)]$ とおくと，

$$C := \left\{ \big(f_0(s), g_0(s)\big) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; s \in J \right\} \qquad ②$$

と，時刻変数 t の代わりに，道のり変数 s のほうを使って C を表すこともできる．

$$\sqrt{(f_0'(s))^2 + (g_0'(s))^2} = 1$$

であることに注意する (s を時刻とみなせば，常に速度は 1 である)．C の単位接線ベクトルを $\mathbf{t}(s) := \big(f_0'(s), g_0'(s)\big)$ とし，$\mathbf{n}(s) := \big(f_0''(s), g_0''(s)\big)$ とおく．$\big|\mathbf{t}(s)\big| = 1$ なので，動点 P の進行方向の偏角 θ によって，$\mathbf{t}(s) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と書ける．すると，$\mathbf{n}(s) = \dfrac{d\theta}{ds}(-\sin\theta, \cos\theta)$ となる．特に，$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0$ (内積) である．$f_0'(s) = \cos\theta$, $f_0''(s) = -\dfrac{d\theta}{ds}\sin\theta = -\dfrac{d\theta}{ds} g_0'(s)$ 等より，

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{f_0''(s)}{g_0'(s)} = \frac{g_0''(s)}{f_0'(s)}$$

を得る．

定義 12.5. 上記の記号で，

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{f_0''(s)}{g_0'(s)} = \frac{g_0''(s)}{f_0'(s)}$$

の値 $\dfrac{1}{R}$ を**曲率**という (絶対値を取ったものを曲率という流儀もある)．曲率が正のとき P は左に曲がり，負のときは右に曲がる．また $1/R \neq 0$ のとき $|R|$ を点 P における曲線 C の**曲率半径**という．

$$|R| = \frac{1}{|\mathbf{n}(s)|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2}}$$

である．また，位置ベクトルで $P + \mathbf{n}(s)$ で表せる点を中心とする半径 $|R|$ の円を点 P における C の**曲率円**という．

命題 12.6. 上の記号で以下が成り立つ．

$$\frac{1}{R} = \frac{f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t)}{\left(\sqrt{(f''(t))^2 + (g''(t))^2}\right)^3}$$

証明. 動点 P の速度と加速度を

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}, \quad a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \sqrt{(f''(t))^2 + (g''(t))^2}$$

とおく．

$$\begin{aligned} f'(t)g''(t) - f''(t)g'(t) &= \big(f_0'(s)v(t)\big)\big(g_0''(s)v(t)^2 + g_0'(s)a(t)\big) - \big(f_0''(s)v(t)^2 + f_0'(s)a(t)\big)\big(g_0'(s)v(t)\big) \\ &= v(t)^3\big(f_0'(s)g_0''(s) - f_0''(s)g_0'(s)\big) \\ &= v(t)^3\left(f_0'(s)\frac{1}{R}f_0'(s) + \frac{1}{R}g_0'(s)g_0'(s)\right) = \frac{1}{R}v(t)^3 \end{aligned}$$

となるので，結論を得る． □

13. 特殊関数

★ ガンマ関数

定義 13.1. 正の実数 x に対し，

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

で定まる関数を**ガンマ関数**という．

定理 13.2. ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は以下を満たす．
(1) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. ここで x は任意の実数．
(2) $\Gamma(n) = (n-1)!$. ここで n は自然数．

証明. (1) 部分積分すると，

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{r\to+\infty}\int_0^r t^x e^{-t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^{t=r} + \lim_{r\to+\infty}\int_0^r xt^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= (0-0) + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\end{aligned}$$

(2) $\Gamma(1)\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ である．あとは (1) を用いて n に関する帰納法で証明できる． □

★ ルジャンドル多項式

化学を勉強すると，1 つの原子核の回りの電子軌道を記述するシュレジンガー方程式という偏微分方程式が登場する．その解き方はまだ説明できないが，その方程式の解 (電子軌道) を記述するのに，ルジャンドル多項式，ルジャンドル陪関数，ラゲール陪多項式が登場する．これらをすべて説明しておく．

定義 13.3. n を非負整数として，

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

で定まる多項式 $P_n(x)$ を n 次の**ルジャンドル多項式** (Legendre polynomial) という．

定理 13.2. ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は以下を満たす．

(1) $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{(2n-2k-1)!!}{k!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

(2) $$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

(3) $$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases}\dfrac{2}{2n+1} & (m=n\text{ の場合}) \\ 0 & (m\neq n\text{ の場合})\end{cases}$$

(4) $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

(5) $$(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0$$

証明. (1) $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k\binom{n}{k}x^{2n-2k}$. $\sum$ 記号の中を n 回微分すれば x の指数 $2n-2k$

が $n-1$ 以下の項は消え, $k \leqq [n/2]$ である項だけが残って,

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{(2n-2k)!}{2^{n-k}\cdot(n-k)!}\frac{1}{k!(n-2k)!}x^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k}{2^k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)}{k!(n-2k)!}x^{n-2k}
\end{aligned}$$

となる.

(2) $u=(x^2-1)^n$ とおけば, $u'=n(x^2-1)^{n-1}\cdot 2x$ である. 両辺に (x^2-1) を掛けると $(x^2-1)u'=2nxu$ となる. これを $(n+1)$ 回微分するとライプニッツの公式によって,

$$(x^2-1)u^{(n+2)}+2(n+1)xu^{(n+1)}+n(n+1)u^{(n)}=2nxu^{(n+1)}+2n(n+1)u^{(n)}$$

となる. ゆえに, $(x^2-1)u^{(n+2)}+2xu^{(n+1)}-n(n+1)u^{(n)}=0$ である. $u^{(n)}=2^n\cdot n!y$ であるから, $(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$ を得る.

(3) $F_n(x)=\dfrac{1}{2^n\cdot n!}(x^2-1)^n$ とおく. $k<n$ のとき $F^{(k)}(x)$ は (x^2-1) と適当な多項式の積だから, $F_n^{(k)}(-1)=F_n^{(k)}(1)=0$ であることに注意する. $P_n(x)=F^{(n)}(x)$ であった. $m \leqq n$ のとき, 部分積分を繰り返すと

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\int_{-1}^{1}P_m(x)F_n^{(n)}(x)\,dx=\Big[P_m(x)F_n^{(n-1)}(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_m'(x)F_n^{(n-1)}(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{1}P_m'(x)F_n^{(n-1)}(x)\,dx=\int_{-1}^{1}P_m''(x)F_n^{(n-2)}(x)\,dx=-\int_{-1}^{1}P_m'''(x)F_n^{(n-3)}(x)\,dx=\cdots \\
&= (-1)^m\int_{-1}^{1}P_m^{(m)}(x)F_n^{(n-m)}(x)\,dx
\end{aligned}$$

である. $P_m(x)$ は m 次多項式だから $P_m^{(m+1)}(x)=0$ である. したがって $m<n$ ならば, この式にさらに部分積分を行って,

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^m\int_{-1}^{1}P_m^{(m)}(x)F_n^{(n-m)}(x)\,dx \\
&= \Big[P_m(x)^{(m)}F_n^{(n-m-1)}(x)\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}P_m^{(m+1)}(x)F_n^{(n-m-1)}(x)\,dx=0
\end{aligned}$$

が得られる.

$m=n$ のときを考える. $P_n(x)$ は n 次式で, 最高次の係数は $\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$ であったから, $P_n^{(n)}=(2n-1)!!$ である. したがって

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}P_n(x)P_n(x)\,dx=(-1)^n\int_{-1}^{1}P_n^{(n)}(x)F_n(x)\,dx \\
&= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx=2\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx
\end{aligned}$$

となる. $2^n\cdot n!=(2n)!!$ に注意しよう. ここで $x=\sin t$ とおく,

$$I=2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\cdot\sin t\,dt=2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{2n+1}$$

が得られる.

(4) (1) より, $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)$ は $(n-1)$ 次以下の多項式である. よって, ある実数 α と, ある $(n-2)$ 次以下の多項式 $Q(x)$ によって,

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)=\alpha P_{n-1}(x)+Q(x) \qquad ①$$

と書ける．(3) より，$\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)^2dx = 0$ なので $Q(x) = 0$ である．$x = 1$ とおくと ① は $(n+1)-(2n+1) = \alpha$ となるので $\alpha = -n$ である．

(5) (4) と同様に $(1-x^2)P_n'(x) + nxP_n(x) = \alpha P_{n-1}(x) + Q(x)$ とおいて，$Q(x) = 0$ と $\alpha = n$ を導く． □

$P_n(x)$ のいくつかは，

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2},\quad P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2},\quad P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8},$$
$$P_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8},\quad P_6(x) = \frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16},$$
$$P_7(x) = \frac{429x^7-693x^5+315x^3-35x}{16}$$

である．

ここから先は 1 年生の通常の講義内容を超えるので勉強しなくてよい．結果だけ要約しておくので，2 年生以降で必要になったら読み返してほしい．

★ ルジャンドル陪関数

$P_n(x)$ は n 次のルジャンドル多項式，m は $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数として，

$$P_n^{(m)}(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$
$$P_n^{(-m)}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^{(m)}$$

$(P_n^{(0)}(x) = P_n(x))$ で定まる関数 $P_n^{(m)}$ を**ルジャンドル陪関数**という．ただし，符号 $(-1)^m$ をつけないで定義している文献も多いので注意すること．

m が正の偶数のときには $P_n^{(m)}$ は n 次多項式であり，m が正の奇数のときには $P_n^{(m)}$ は $(n-1)$ 次多項式と $\sqrt{1-x^2}$ の積である．最初のいくつかは，

$$\begin{aligned}
&P_1^{(1)}(x) = -\sqrt{1-x^2}, && P_2^{(1)}(x) = -3x\sqrt{1-x^2},\\
&P_2^{(2)}(x) = 3(1-x^2), && P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(1-5x^2)\sqrt{1-x^2},\\
&P_3^{(2)}(x) = 15x(1-x^2), && P_3^{(3)}(x) = -15(1-x^2)^{3/2},\\
&P_4^{(1)}(x) = \frac{5}{2}(3x-7x^3)\sqrt{1-x^2}, && P_4^{(2)}(x) = \frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2),\\
&P_4^{(3)}(x) = -105x(1-x^2)^{3/2}, && P_4^{(4)}(x) = 105(1-x^2)^2
\end{aligned}$$

である．ルジャンドル陪関数は，以下の性質を満たす．

$$(x^2-1)\left(P_n^{(m)}(x)\right)'' + 2x\left(P_n^{(m)}(x)\right)' + \left(\frac{m^2}{1-x^2} - n(n+1)\right)P_n^{(m)}(x) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_k^{(m)}(x)P_l^{(m)}(x)\,dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)!(l-m)!}\delta_{k,l} \qquad (m \geqq 0)$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(l)}(x)P_n^{(m)}(x)}{1-x^2}\,dx = \frac{(l+n)!}{l(n-l)!}\delta_{l,m} \qquad (l \geqq 1, m \geqq 1)$$

$$(n-m+1)P_{n+1}^{(m)}(x) - (2n+1)xP_n^{(m)}(x) + (m+n)P_{n-1}^{(m)}(x) = 0$$

$$P_{n+1}^{(m)}(x) + (2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^{(m)}(x) - P_{n-1}^{(m)}(x) = 0$$

$$\sqrt{1-x^2}P_n^{(m+1)}(x) = (n-m)xP_n^{(m)}(x) - (n+m)P_{n-1}^{(m)}(x)$$

$$(x^2-1)\left(P_n^{(m)}(x)\right)' = nxP_n^{(m)}(x) - (n+m)P_{n-1}^{(m)}(x)$$

(ただし，$k=l$ のとき $\delta_{k,l}=1$, $k \neq l$ のとき $\delta_{k,l}=0$.)

★ ラゲール多項式

非負整数 n に対し，

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

で定まる関数 $L_n(x)$ は n 次多項式になり，これを n 次**ラゲール多項式** (Laguerre polynomial) という．最初の何個かは,

$$L_0(x)=1,\quad L_1(x)=-x+1,\quad L_2(x)=\frac{x^2-4x+2}{2},$$
$$L_3(x)=\frac{-x^3+9x^2-18x+6}{6},\quad L_4(x)=\frac{x^4-16x^3+72x^2-96x+24}{24}$$

である．ラゲール多項式は，以下の性質を満たす.

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(k!)^2(n-k)!}x^k$$
$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$$
$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \delta_{m,n}$$
$$(n+1)L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+nL_{n-1}(x)=0$$

★ ラゲール陪多項式

非負整数 n と実数 α に対し，

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$$

で定まる関数 $L_n^{(\alpha)}(x)$ は n 次多項式になり，これを n 次**ラゲール陪多項式** (associated Laguerre polynomial) という.

ラゲール陪多項式は，以下の性質を満たす.

$$L_n^{(0)}(x) = L_n(x)$$
$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha+n}{n-k}\cdot\frac{x^k}{k!}$$
$$x\left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)'' + (\alpha+1-x)\left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)' + nL_n^{(\alpha)}(x)=0$$
$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{m,n}$$
$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)-(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x)+(n+\alpha)L_{n-1}(x)=0$$
$$\frac{d^k}{dx^k}L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^k L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)$$

★ エルミート多項式

非負整数 n に対し，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$

で定まる関数 $H_n(x)$ は n 次多項式になり，これを n 次**エルミート多項式** (Hermite polynomial) という．ただし，確率論では，$2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2})$ をエルミート多項式とよぶことが多い．最初の何個かは，

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2,\quad H_3(x)=8x^3-12x,$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12,\quad H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$

である．エルミート多項式は，以下の性質を満たす．

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}\delta_{m,n}$$
$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$$
$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0$$
$$\exp(2xt-t^2)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad \text{(母関数)}$$
$$H_{2n}(x)=(-4)^n n!L_n^{(-1/2)}(x^2)$$
$$H_{2n+1}(x)=2(-4)^n n!L_n^{(1/2)}(x^2)$$

★ ベッセル関数

直線 (弦や棒) 上の波は $\sin x$, $\cos x$ を利用して表せるが，円板上の波や球体内の波を記述するのにはベッセル関数が必要になる．

ν を実数の定数とする．非負実数 x に対し

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

で定まる関数 $J_\nu(x)$ を (狭義の) ν 次**ベッセル関数**とか，**第 1 種円柱関数**とか，**第 1 種円筒関数**という．

この関数 $y=J_\nu(x)$ は**ベッセル方程式**とよばれる以下の微分方程式を満たす．

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

ただし**ノイマン関数**

$$N_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\right)$$

もベッセル方程式の解であり，ベッセル方程式の一般解は

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$$

である．

3 次元の波動や熱伝導では，次の常微分方程式が登場する．

$$x^2y''+2xy'+\big(x^2-n(n+1)\big)y=0 \qquad ①$$

(ただし，n は非負整数) この方程式の一般解は，以下のように書ける．

$$y=C_1j_n(x)+C_2n_n(x) \qquad (C_1,\ C_2\ \text{は任意定数})$$
$$j_n(x):=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}(x) \qquad \text{(第 1 種球ベッセル関数)}$$
$$n_n(x):=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \qquad \text{(球ノイマン関数)}$$

ベッセル関数は以下の関係式を満たす．

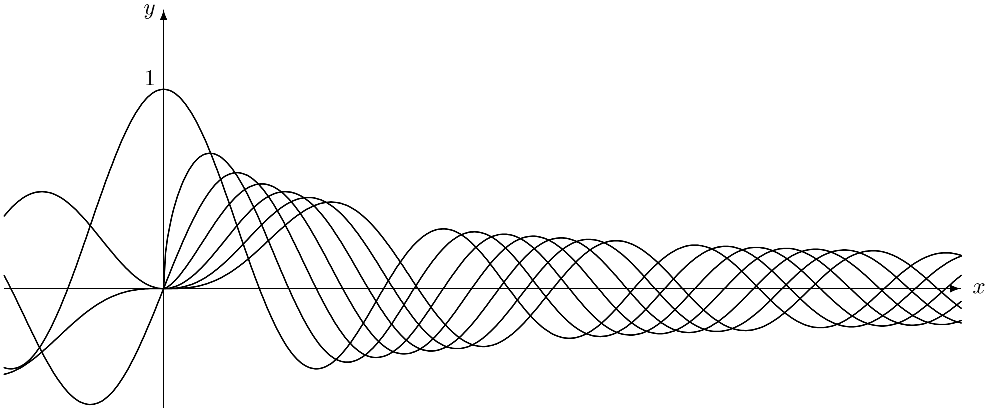
$$\frac{d}{dx}J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$
$$J_{\nu+1}(x)-\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)+J_{\nu-1}(x)=0$$

ν が整数 $\nu = n$ のときは，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \\
&J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta && \text{(Hansen-Bessel の公式)} \\
&J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ix\cos t)\exp\left(in\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)dt \\
&\exp\left(\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \\
&\exp(ix\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\exp(in\theta) \\
&\exp(ix\cos\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(x)\exp(in\theta) \\
&\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(J_n(x)+J_{-n}(x)\big)\cos n\theta \\
&\sin(x\sin\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(J_n(x)-J_{-n}(x)\big)\sin n\theta
\end{aligned}
$$

半整数 $\nu = n + \dfrac{1}{2}$ に対しては，$J_\nu(x)$ は以下のように三角関数で表せる (ただし，n は非負整数)．

$$
\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \\
J_{n+\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2x)^{2k}}\right. \\
&\qquad \left.+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2x)^{2k+1}}\right\} \\
J_{-n-\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k(n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2x)^{2k}}\right. \\
&\qquad \left.-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\frac{(-1)^k(n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2x)^{2k+1}}\right\}
\end{aligned}
$$



山が高いほうから順に

$J_0(x),\ J_{\frac{1}{2}}(x),\ J_1(x),\ J_{\frac{3}{2}}(x),\ J_2(x),\ J_{\frac{5}{2}}(x),\ J_3(x)$

14. 常微分方程式の初歩

微分方程式の詳細は 2 年生の選択科目で学習するが，選択しない学生も多いので，初歩的な微分方程式の解法を，微分可能性とか解の一意性に関する厳密な証明抜きで説明しておく．

例 14.1. (1 階線形常微分方程式 1) $p(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で微分可能な与えられた関数とし，

$$y' + p(x)y = 0$$

を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよう．変形すると，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p(x)}$$

なので，両辺を $\displaystyle\int dx$ すると，

$$\log_e |y| = -\int \frac{1}{p(x)}\,dx$$

が得られる．そこで，$\dfrac{1}{p(x)}$ の原始関数のひとつを $h(x)$ とすれば，$|y| = Ce^{-h(x)}$ (C は積分定数) となる．$\pm C$ を改めて C と書き直すと，

$$y = Ce^{-h(x)} = \pm\exp\left(-\int \frac{1}{p(x)}\,dx\right)$$

(または $y = 0$) が求める解である．ここで，$\exp x := e^x$ である．この後，e^x をしばしば $\exp x$ と書く．

例 14.2. (1 階線形常微分方程式 2) $p(x)$, $q(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で微分可能な与えられた関数とし，

$$y' + p(x)y = q(x)$$

を満たす関数 $y = f(x)$ を求めよう．

前の例のように $\dfrac{1}{p(x)}$ の原始関数のひとつを $h(x)$ とする．$C(x) := e^{h(x)}y$ と置いてみる．

$$y' = \left(C(x)e^{-h(x)}\right) = C'(x)e^{-h(x)} - C(x)h'(x)x^{-h(x)} = C'(x)e^{-h(x)} - \frac{C(x)}{p(x)}x^{-h(x)}$$

なので，$q(x) = y' + p(x)y = C'(x)e^{-h(x)}$ となる．これより，

$$C(x) = \int q(x)e^{h(x)}\,dx$$

となる．したがって，

$$y = e^{-h(x)}\int q(x)e^{h(x)}\,dx = \exp\left(-\int \frac{1}{p(x)}\,dx\right)\int q(x)\exp\left(\int \frac{1}{p(x)}\,dx\right)dx$$

が求める解である．

例 14.3. (2 階定数係数線形常微分方程式 1) a, b を定数として，

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad ①$$

を満たす $y = f(x)$ を求めよう．t についての 2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ の解 α, β がポイントになる．

$$t^2 + at = b = (t-\alpha)(t-\beta)$$

α, β は虚数かもしれないが，細かいことは気にしないで先に進めて，後で再検討することにする．$z := y' - \alpha y$ とおく．α が虚数の場合には z は変数は実数で，終域 (値域) は複素数であるような関数と解釈しておく．

$$z' - \beta z = (y' - \alpha y)' - \beta(y' - \alpha y) = y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta = y'' - ay' + b = 0$$

である．例 14.1 より $z = C_1e^{\beta x}$ (C_1 は積分定数）となる．$y' - \alpha y = z = C_1e^{\beta x}$ なので，例 14.2 より，

$$y = e^{\alpha x}\int C_1e^{\beta x}e^{-\alpha x}\,dx = e^{\alpha x}\int C_1e^{(\beta-\alpha)x}\,dx \qquad ②$$

となる．

(1) $\alpha \neq \beta$ の場合．②を変形して，

$$y = e^{\alpha x}\left(\frac{C_1}{\beta-\alpha}e^{(\beta-\alpha)x} + C_2\right) = C_2 e^{\alpha x} + \frac{C_1}{\beta-\alpha}e^{\beta x}$$

となる．ここで，C_2 は新たな積分定数である．今，積分定数を $A := C_2$, $B := \dfrac{C_1}{\beta-\alpha}$ と書き直せば，①の解は

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \qquad ③$$

となる．

α, β が実数ならこれでよいが，虚数だとまずい．α, β が虚数のときは，これらは $t^2 + at + b = 0$ の解だから，

$$\alpha = \frac{-a}{2} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}, \quad \beta = \frac{-a}{2} - \sqrt{-1}\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

である．そこで，$p := -\dfrac{a}{2}$, $q := \dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$, $i := \sqrt{-1}$ とおいて，$\alpha = p + iq$, $\beta = p - iq$ とする．

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} = Ae^{px+iqx} + Be^{px-iqx} \\ &= e^{px}\big((A+B)\cos qx + i(A-B)\sin qx\big) \end{aligned}$$

である．そこで改めて，積分定数 $A+B$ を A, $i(A-B)$ を B と書き直せば，

$$y = e^{px}(A\cos qy + B\sin qx) \qquad \left(p := -\frac{a}{2}, \quad q := \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}\right) \qquad ④$$

が①の解である．A, B を実数に限定すれば，④に虚数は現れない．

(2) $\alpha = \beta$ の場合．②は

$$y = e^{\alpha x}\int C_1\,dx = e^{\alpha x}(C_1 x + C_2)dx$$

となる．以上を定理の形にまとめておく．

定理 14.3. (2 階定数係数線形常微分方程式) a, b を定数として，

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad ①$$

を満たす $y = f(x)$ は t の 2 次方程式 $t^2 + at + b = 0$ の解に応じて以下のようになる．以下で C_1, C_2 は任意定数である．

(1) $t^2 + at + b = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β を持てば，

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

(2) $t^2 + at + b = 0$ が実数 α を重解に持てば，

$$y = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x}$$

(3) $t^2 + at + b = 0$ が 2 つの虚数解 $p \pm iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) を持てば，

$$y = e^{px}(C_1\cos qx + C_2\sin qx)$$

なお，三角関数の合成公式から，

$$C_1\cos qx + C_2\sin qx = C\sin q(x-x_0) = C\cos q(x-x_1)$$

($C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, x_0, $x_1 = x_0 + \pi/2q$ は任意定数) という形に書くこともできる．特に $a = 0$ の場合には，

$$y = C_1\cos\sqrt{-b}x + C_2\sin\sqrt{-b}x$$

である．

力学等では $y'' + ay' + by = 0$ の形の微分方程式が時刻 t を変数として頻出するが，エネルギー保存の法則が成り立っている場合は上の (3) の単振動 $y = C_1\cos q(t-t_0)$ が解になるのが普通である．エネルギーが摩擦や熱に変わって逃げていく場合には，減衰振動 $y = C_1 e^{pt}\cos q(t-t_0)$ ($p < 0$) が解になるのが普通である．$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ はエネルギーの諸法則から，物理で解として登場するのは希である．コンデンサーの放電などは $y' + ay = 0$ ($a > 0$) の形の微分方程式で，指数関数的減衰 $y = y(0)e^{-at}$ が解になる．指数関数的増加が解になる現象は，いずれ破綻するはずである．

これ以外の微分方程式については，2 年生の選択科目を履修して勉強してほしい．

15. フーリエ級数の初歩

フーリエ級数の詳細は 2 年生の選択科目「フーリエ解析」で学習するが，選択しない学生も多いので，必要最小限の事項を，厳密な証明抜きで説明しておく．

定義 15.1. (周期関数) $p > 0$ を定数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された関数 $f(x)$ が任意 $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$f(x+p) = f(x)$$

を満たすとき，$f(x)$ は周期 p の**周期関数**であるという．p が $f(x)$ の周期であれば，$2p, 3p, \ldots$ も $f(x)$ の周期であるが，周期の中で最小の正の実数が存在すれば，それを $f(x)$ の**基本周期**という．

今，$f(x)$ は周期 p の周期関数で，有界であり，$0 \leqq x \leqq p$ の範囲で $f(x)$ が不連続になる x は有限個しかなく，かつ，$f(x)$ が極値をとる x も有限個しか存在しないと仮定する．この条件が満たされるとき，$f(x)$ は**ディリクレの条件**を満たすという．

定理 15.2. 下記の $f(x)$ を定める右辺の $\sum$ は任意の $x \in \mathbb{R}$ で一様収束すると仮定する．

$$f(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big)$$

すると，以下の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad (n \geqq 1) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \end{aligned}$$

証明. k, n が正の整数のとき，

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & (k \neq n \text{ の場合}) \\ \pi & (k = n \text{ の場合}) \end{cases} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & (k \neq n \text{ の場合}) \\ \pi & (k = n \text{ の場合}) \end{cases} \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \sin nx\, dx = 0 \\ &\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0 \end{aligned}$$

であることと，定理 6.3(2) よりわかる． □

周期関数 $f(x)$ の周期を 2π でなく一般の $p > 0$ にした場合は，次の定義の中の等式を参照してほしい．

定義 15.3. p は正の実数とし，$f(x)$ は p を周期とする周期関数であるとする．また，c は勝手な実数とする．いま，

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{p} \int_{c}^{c+p} f(x)\, dx \\ a_n &:= \frac{2}{p} \int_{c}^{c+p} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{p}\, dx \qquad (n \geqq 1) \\ b_n &:= \frac{2}{p} \int_{c}^{c+p} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{p}\, dx \\ F(x) &:= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nx}{p} + b_n \sin \frac{2\pi nx}{p} \right) \qquad ① \end{aligned}$$

と定義する．$F(x)$ の定義式 ① の右辺の $\sum$ が $0 \leqq x \leqq p$ の範囲内で有限個の x を除いて収束するとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**フーリエ級数**という．また，$F(x)$ を計算することを，$f(x)$ を**フーリエ展開**するという．

定理 15.4. (フーリエの基本定理) p は正の実数とし，$f(x)$ は p を周期とする周期関数であるとする．また，$f(x)$ はディリクレの条件を満たすと仮定する．このとき，$x = x_0$ で $f(x)$ が連続であれば，

$$F(x_0) = f(x_0)$$

が成り立つ．また，$x = x_0$ で $f(x)$ が不連続である場合には，

$$F(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0+0} f(x) + \lim_{x \to x_0-0} f(x)\right) \qquad ②$$

が成り立つ．

上の定理のうち $F(x_0) = f(x_0)$ が成り立つ部分の証明は難しくて，フーリエ自身は証明することができず，後にディリクレが証明した．この部分の証明は長くて難しいので割愛する．② の証明は，上の結果を認めれば難しくないが，準備が必要なので，いろいろな例を紹介した後で証明する．

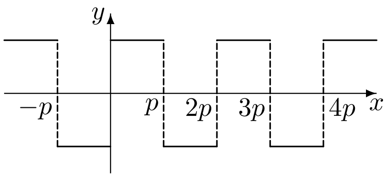
★ 典型的な周期関数のフーリエ展開

例 15.5. 以下のように定まる周期 $2p$ の矩形波 $f(x)$ を考える (下のグラフ参照).

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (2np < x < (2n+1)p \text{ のとき}) \\ -1 & ((2n+1)p < x < (2n+2)p \text{ のとき}) \end{cases}$$

(n はすべての整数を動く) この関数はディリクレの条件を満たすので，フーリエ展開と一致し，

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{p}$$



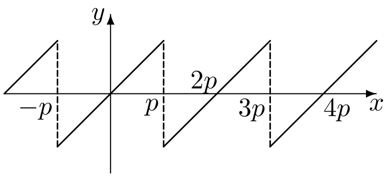
上の例では，項別微分の公式

$$f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\left(\sin\frac{(2n-1)\pi x}{p}\right)' = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{p}$$

は成立しないことに注意しよう．右辺は収束しない．

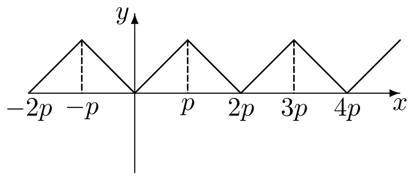
例 15.6. $-p < x < p$ において $f(x) = x$ を満たす周期 $2p$ のノコギリ波関数 $f(x)$ のフーリエ展開は，

$$f(x) = \frac{2p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{n\pi x}{p}$$



例 15.7. $-p \leqq x \leqq p$ において $f(x) = |x|$ を満たす周期 $2p$ のギザギザ波関数 $f(x)$ のフーリエ展開は，

$$f(x) = \frac{p}{2} - \frac{4p}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{p} \qquad ③$$



なお，③で $x=0$ とおくと，$0=\dfrac{p}{2}-\dfrac{4p}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ となり，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

が得られる．これより，$S:=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ とおくと，

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{S}{4}$$

なので，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

である．

定理 15.4 の②の証明. 例 15.6 の $h(x):=\dfrac{2p}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{p}$ においては，$\displaystyle\lim_{x\to p-0}h(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to p+0}h(x)=-1$ で $h(p)=0$ である．

$f(x)$ は p を周期とする周期関数でディリクレの条件を満たすとし，$x=x_0$ で $f(x)$ が不連続であると仮定する．$a:=\displaystyle\lim_{x\to x_0-0}f(x)$, $b:=\displaystyle\lim_{x\to x_0+0}f(x)$ とし，$x\neq x_0+mp$ $(m\in\mathbb{Z})$ のとき，

$$g(x):=f(x)+\frac{a-b}{2}h(2x-2x_0+p)$$

とおき，$g(x_0+mp)=\dfrac{a+b}{2}$ とおく．$g(x)$ は p を周期とする周期関数でディリクレの条件を満たす．また，

$$\lim_{x\to x_0-0}g(x)=\frac{a+b}{2}=\lim_{x\to x_0+0}g(x)$$

なので，$g(x)$ は $x=x_0+mp$ で連続である．よって，$g(x)$ のフーリエ級数を $G(x)$ とすれば，定理 15.4 の前半から $G(x_0)=g(x_0)$ が成り立つ．他方，$G(x)$ は $f(x)+\dfrac{a-b}{2}h(2x-2x_0+p)$ のフーリエ展開だから，

$$G(x)=F(x)+\frac{a-b}{2}\cdot\frac{2p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi(2x-2x_0+p)}{p}$$

$\sin\dfrac{n\pi(2x_0-2x_0+p)}{p}=\sin n\pi=0$ なので，$G(x_0)=F(x_0)$ が成り立つ．よって，

$$F(x_0)=\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+0}f(x)+\lim_{x\to x_0-0}f(x)\right)$$

である． □