代数曲線・代数曲面入門 (初版・新装版用) 正誤表＋第２版との差分

(2022 年 12 月 5 日版)

注意！ (1) 以下は**初版**および**新装版**用です．第２版用の正誤表は，別に用意されています．

(2) 以下は単なる正誤表ではなく，第２版との差分が列挙されています．すなわち，初版，あるいは新装版に以下の修正を行って頂くと，ほぼ第２版の内容と同じになります．ただし，数学的に本質的でない軽微な表現の変更は省略しました．(第 2 版第 1 刷からの変更も含まれています)

(3) 初版第 3 刷は初版第 2 刷と同じですので，初版第 2 刷の修正箇所をお読み下さい．

● p.4, 下から 12 行目

誤: 最も弱い位相

正: 最も強い (細かい) 位相

● p.5, 4 行目

誤: $\mathbb{C}^n$ やその部分集合は

正: $\mathbb{C}^n$ やその部分空間は

● p.9, 12 行目

誤: $L = \left\{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^3 \,\middle|\, aX + bY + cZ = 0\right\}$

正: $L = \left\{(X:Y:Z) \in \mathbb{P}^2 \,\middle|\, aX + bY + cZ = 0\right\}$

● p.10, 5 行目

誤: で定まる写像を $\psi\colon \overline{C} \to \mathbb{P}^1$ とおくと，

正: で定まる写像を $\psi\colon \overline{C} \to \mathbb{P}^1$ とおく (ただし $\psi(-1:0:1) = (0:1)$ とする) と，

● p.12, 1 行目 (グラフの直後の行)

誤: ある複素数 t のよって

正: ある複素数 t によって

● p.12, 最下行

誤: $t = y/x$
正: $t = x/y$

● p.13, 1 行目
誤: $x = t^2, \quad y = t^3$
正: $x = t^3, \quad y = t^2$

● p.13, 17 行目
誤: $y = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^2}$
正: $y = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

● p.15, 5 行目
誤: $(2:1$ にならないのは零点と極のみで，そこでは $1:1$ である).
正: $(2:1$ にならないのは $2z \in L$ を満たす z のみである).

● p.17, 下から 2 行目
誤: 一般に，S が環で I が S のイデアルのとき，
正: 一般に，R が環で I が R のイデアルのとき，

● p.19 下から 8 行目 〜 p.20 3 行目
定理 1.2.4 の証明を，以下の原稿と差し替えて下さい．

証明.* 厳密な証明には，後で説明する定理 2.2.20 が必要であるが，話の都合上，それを利用して説明する．

$\mathfrak{m}$ が極大イデアルのとき，$K = \mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{m}$ は体である．$\psi\colon \mathbb{C}[X, Y] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X, Y]/\mathfrak{m} = K$ を自然な全射とする．$\psi(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ と同型な K の部分体なので，$\psi(\mathbb{C})$ と $\mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{C} \subset K$ と考える．

K は $\mathbb{C}$ 上 $\psi(X)$ と $\psi(Y)$ で生成される有限生成な整域である．$K = R$ として定理 2.2.20 を使うと，K は体なので $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(R) = \mathrm{Krull\,dim}\, R = 0$，つまり，$K$ は $\mathbb{C}$ 上代数的であることがわかる．$\mathbb{C}$ の代数拡大体は $\mathbb{C}$ 以外にないから，$K = \mathbb{C}$ である．そこで，$a = \psi(X), b = \psi(Y) \in K = \mathbb{C}$ とおけば，$\psi(X-a) = \psi(Y-b) = 0$ だから，$(X-a, Y-b) \subset \mathrm{Ker}\,\psi = \mathfrak{m}$ である．$(X-a, Y-b)$ は $\mathbb{C}[X, Y]$ の極大イデアルだから，$(X-a, Y-b) = \mathfrak{m}$ である． □

第 2 章

● p.28 下から 7 〜 6 行目

誤: $I = (f_1, \ldots, f_r)$ とか $Rf_1 + \cdots + Rf_r$ とか $\sum_{i=1}^{r} Rf_i$ とか $\sum_{i=1}^{r} f_i R$ と書き,

正: $I = (f_1, \ldots, f_r)$ とか $Sf_1 + \cdots + Sf_r$ とか $\sum_{i=1}^{r} Sf_i$ とか $\sum_{i=1}^{r} f_i S$ と書き,

● p.28 下から 2 行目

誤: 座標環 S/I が整域であるとき,

正: 座標環 R が整域であるとき,

● p.30 定理 2.1.4 の証明の 3 行目

誤: $N_{i+1} = N_i + Rx_i$ とおく.

正: $N_{i+1} = N_i + Rx_{i+1}$ とおく.

● p.30 下から 4 行目

誤: $N_i = N$

正: $N_i = N_n$

● p.31 5 行目

誤: $\varphi\colon M \twoheadrightarrow M_1$ を自然な全射とする.

正: $\varphi\colon M \twoheadrightarrow M_2$ を自然な全射とする.

● p.32 定理 2.1.7 に関連する変更

定理 2.1.7 の証明を追加します. まず, 定理 2.1.7 の直前の導入の段落を以下のように変更し, 定理 2.1.7 の直後に証明を追加して下さい.

[差し替える原稿 (定理 2.1.7 の直前)]

旧: 次の定理は定理 1.2.4, 定理 1.2.5 の一般化であるが, 証明はこれらの定理の証明とほとんど同じなので割愛する.

新: 次の定理は定理 1.2.4, 定理 1.2.5 の一般化である. 厳密な証明は意外に面倒で, 後で証明する可換環論に関する定理 2.2.20 が必要になる. ただ, 定理 2.1.7 の説明を後回しにすると代数多様体の説明が始められないので, 後方引用になるが, 先に説明する.

[追加する原稿 (定理 2.1.7 の直後)]

(1) $\mathfrak{m}$ は $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルとし，$\psi\colon S \twoheadrightarrow S/\mathfrak{m} = K$ を自然な全射とする．

K は $\mathbb{C}$ 上 $\psi(X_1), \ldots, \psi(X_n)$ で生成される有限生成な整域である．$K = R$ として定理 2.2.20 を使うと，K は体なので $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(R) = \operatorname{Krull\,dim} R = 0$，つまり，$K$ は $\mathbb{C}$ 上代数的であることがわかる．$\mathbb{C}$ は代数閉体だから，$K = \mathbb{C}$ である．

そこで，$a_i = \psi(X_i)$ とおき $\mathfrak{M} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ とおく．$\psi(X_i - a_i) = 0$ だから，$\mathfrak{M} \subset \operatorname{Ker}\psi = \mathfrak{m}$ である．$\mathfrak{M}$ は S の極大イデアルだから，$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}$ である．

(2) の証明は，定理 1.2.5 の証明と同様である． □

● p.33 3 〜 5 行目 定理 2.1.8

定理 2.1.8.(ヒルベルトの零点定理) を，以下の少し一般的な形に変更します．

[差し替え原稿]

定理 2.1.8a. (ヒルベルトの零点定理) V は $\mathbb{C}^n$ 内の代数的集合で，$S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ においてイデアル $I \subset S$ によって定義されているとする．さらに，V の座標環 S/I は 0 以外の巾零元 (何乗かすると 0 になる元) を持たないと仮定する．このとき，もし，$f(X_1, \ldots, X_n) \in S$ が任意の $(a_1, \ldots, a_n) \in V$ に対し $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ を満たせば，$f \in I$ である．

● p.33. 定理 2.1.8 の証明の最後の行

上の変更にともなって，証明がほんの少し変わります．

旧: ところで，I は素イデアルであったから，$f \in I$ である． □

新: ところで，S/I は 0 以外の巾零元を持たなかったから，$f \in I$ である． □

● p.34. 定義 2.1.9 の直前

以下の原稿を，定義 2.1.9 の直前に追加して下さい．

[追加原稿]

ヒルベルトの零点定理より，当然成り立つべき次の命題が成立する．

命題 2.1.8b. V は R を座標環とするアフィン代数多様体，$f \in R$ は任意の点 $P \in V$ に対し $f(P) = 0$ を満たすとする．すると，R の元として $f = 0$ である．

例 2.1.8c. $\mathbb{C}^2$ の座標系を (x, y) とし $y^2 = 0$ で定まる $\mathbb{C}^2$ 内の 2 重直線 V の座標環を $R = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2)$ とする．Y の R における同値類を $\overline{Y}$ とし，V 上の正則関数 $f = \overline{Y} \in R$ を考える．V 上の点 $P = (a, 0) \in \mathbb{C}^2$ に対応する R の極大イデア

ルは $\mathfrak{m}_P = (X-a, \overline{Y}) \subset R$ で，$R/\mathfrak{m}_P \cong \mathbb{C}$ における f の像は 0 である．よって，$f(P)=0$ である．f は V 上のすべての点 P で $f(P)=0$ を満たすが $f \neq 0 \in R$ である．

● p.37. 命題 2.1.13 の 2 行上

「と書く.」の後に，次の文を追加して下さい．

[追加する文]

V を明示する場合には，$D(J), V(J)$ を $D_V(J), V_V(J)$ とも書く．

● p.38. 定義 2.1.14 の 8 行目と 10 行目

$D=$ 　は不要なので削除 (そのままでも問題はないが)

● p.39. 定義 2.1.15 と定義 2.1.16 の間

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

注意 2.1.15b. 　後の定理 2.2.28a で説明するが，アフィン代数多様体の間の正則写像 $\varphi\colon V \to W$ に対し，$\varphi(V)$ はアフィン代数多様体になるとは限らないし，後の定義 2.4.1 で説明する代数多様体になるとも限らない．

● p.40. 系 2.1.20

以下の証明を追加して下さい．簡単ですが．

[追加原稿]

証明. φ が解析的位相について連続であることは，前定理からわかる．ザリスキー位相について連続であることを示す．R_V, R_W を V, W の座標環とする．W の勝手なザリスキー開集合 U をとる．$D_W(g) \subset U$ となるアフィン開集合 $D_W(g)$ $(g \in R_W)$ が存在する．$f = \varphi^*(g) \in R_V$ とおく．勝手な点 $P \in D_V(f)$ をとると，$f(P) \neq 0$ である．$Q = \varphi(P)$ とおくとき，$g(Q) = g(\varphi(P)) = f(P) \neq 0$ なので，$Q \in D_W(g)$ である．よって，$\varphi(D_V(f)) \subset D_W(g) \subset U$ であり，φ はザリスキー位相について連続である．　□

● p.40. 定理 2.1.22(本文) の最後の目

誤: アフィン代数多様体と同型である．

正: アフィン代数多様体と同一視できる．

● p.41 定理 2.1.22 の証明の最後の行

誤: よって，$\tilde{I}$ は $\tilde{R}$ の素イデアルであり，$\tilde{U}$ はアフィン代数多様体である．　□

正: よって，$\tilde{I}$ は $\tilde{S}$ の素イデアルであり，$U \cong \tilde{U}$ はアフィン代数多様体とみなせる．　□

● p.40 下から 3 行目〜下から 2 行目
誤: $\varphi\colon S \twoheadrightarrow R = S/I$ を自然な全射とし，$\varphi(F) = f$ となる $F \in S$ をとる．
正: $\pi\colon S \twoheadrightarrow R = S/I$ を自然な全射とし，$\pi(F) = f$ となる $F \in S$ をとる．

● p.41 下から 9 行目
誤: $U \cong \tilde{U}$
正: $\tilde{U}$

● 新装版 p.41, 下から 13 行目
誤: $f_r \in R$ ならば，
正: $f_r \in R - \{0\}$ ならば，

● 新装版 p.41, 下から 10 行目
誤: 代数多様体と同型である．
正: 代数多様体と同一視できる．
● p.41 10 行目 〜 p.42 最下行

● 初版 p.41 〜 p.42
まず，定義 2.1.23 と命題 2.1.24 を以下の原稿と差し替えて下さい．
[差し替え原稿]
注意 2.1.23.　上の定理の証明の中で述べたように，

$$R[1/f] \cong R[X]/(X \cdot f - 1)$$

である．

命題 2.1.24. (1) V が R を座標環とするアフィン代数多様体で，$f_1,\ldots, f_r \in R-\{0\}$ ならば，

$$D(f_1) \cap D(f_2) \cap \cdots \cap D(f_r) = D(f_1 f_2 \cdots f_r)$$

が成り立ち，これは $R[1/(f_1 \cdots f_r)] = R[1/f_1] \cdots R[1/f_r]$ を座標環とするアフィン代数多様体と同一視できる．

(2) 上の仮定のもと，もし $D(f_1) \cup D(f_2) = V$ ならば，

$$R[1/(f_1 f_2)] = R[1/f_1] + R[1/f_2]$$

が成り立つ．

証明. (1) は r に関する帰納法ですぐ示せる．

(2) $R[1/(f_1 f_2)] \supset R[1/f_i]$ だから，$R[1/(f_1 f_2)] \supset R[1/f_1] + R[1/f_2]$ である．

逆に $D(f_1) \cup D(f_2) = V$ だから，$V(f_1^n) \cap V(f_2^n) = V(f_1) \cap V(f_2) = \phi$ であり，R のイデアルとして (f_1^n, f_2^n) を含む極大イデアル ($f_1^n = f_2^n = 0$ で定まる集合に含まれる点に対応するイデアル) は存在せず，$(f_1^n, f_2^n) = R$ である．従って，$f_1^n h_1 + f_2^n h_2 = 1$ を満たす $h_1, h_2 \in R$ が存在する．すると，

$$\frac{1}{f_1^n f_2^n} = \frac{h_2}{f_1^n} + \frac{h_1}{f_2^n} \in R[1/f_1] + R[1/f_2]$$

なので，$R[1/(f_1 f_2)] \subset R[1/f_1] + R[1/f_2]$ が成り立つ． □

しかし，$D(f) \cup D(g)$ はアフィン代数多様体になるとは限らない．このような形の開集合を考察する．

● p.42, 命題 2.1.25 と定義 2.1.26

命題 2.1.25 の記述を，以下の原稿のように増加することにより，ザリスキー開集合の座標環の極大イデアルについての説明を追加することにします．それにあわせて，定義 2.1.26 を以下のように書き直します．これで，アフィン開集合の定義が，かなり理解しやすくなると思います．

[差し替え原稿]

命題 2.1.25a. V はアフィン代数多様体，R はその座標環とする．このとき，V の空でない任意のザリスキー開集合 U に対し，ある有限個の $f_1, f_2, \ldots, f_r \in R$ が存在し，

$$U = D(f_1) \cup D(f_2) \cup \cdots \cup D(f_r)$$

と書ける．そこで，

$$R_U = R[1/f_1] \cap R[1/f_2] \cap \cdots \cap R[1/f_r] \subset Q(R)$$

とおく．任意の点 $P \in U$ をとり，P に対応する R の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．このとき，$\mathfrak{m}R_U$ は R_U の極大イデアルである．ただし，R_U の極大イデアル $\mathfrak{n}$ をとるとき，R の極大イデアル $\mathfrak{n} \cap R$ に対応する点 Q が $Q \in U$ を満たすとは限らない．

証明. ザリスキー位相の定義から，U が開集合ならば，あるイデアル $J \subset R$ が存在して，$U = D(J)$ と書ける．ヒルベルトの基底定理により，

$$J = (f_1, \ldots, f_r) = (f_1) + (f_2) + \cdots + (f_r)$$

と書ける．すると，$D(J) = D(f_1) \cup D(f_2) \cup \cdots \cup D(f_r)$ となる．後半を示す．$P \in D(f_1) \cap \cdots \cap D(f_k)$ で $k < i \leqq r$ に対して $P \notin D(f_i)$ であると仮定しても一般性を失わない．$1 \leqq j \leqq k$ に対し $\mathfrak{m}R[1/f_j]$ は $R[1/f_j]$ の極大イデアルである．$\mathfrak{m}_j = R_U \cap \mathfrak{m}R[1/f_j]$ とおく．$\mathbb{C} \cong R[1/f_j]/\mathfrak{m}R[1/f_j] \cong R_U/\mathfrak{m}_j$ だから，$\mathfrak{m}_j$ は R_U の極大イデアルである．任意の $g \in \mathfrak{m}_j$ は $g(P) = 0$ を満たすから，$1 \leqq i < j \leqq k$ のとき，任意の $h \in \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j$ も $h(P) = 0$ をみたす．よって，$\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}_i + \mathfrak{m}_j \subsetneqq R_U$ なので，$\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_j$ がわかる．これより，$\mathfrak{m}R_U = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_k \cap R[1/f_{k+1}] \cap \cdots \cap R[1/f_r] = \mathfrak{m}_1$ である．□

上の命題で登場する R_U が $f_1, f_2, \ldots, f_r \in R$ の選び方に依存しないで U に対して一意的に定まることは，後の定理 2.2.5 から，すぐに証明できる．それを認めて，先に進む．

定義 2.1.26a.　命題 2.1.25a のように，V のザリスキー開集合 $U = D(f_1) \cup D(f_2) \cup \cdots \cup D(f_r)$ に対して，$R_U = R[1/f_1] \cap R[1/f_2] \cap \cdots \cap R[1/f_r]$ とおく．R_U が $\mathbb{C}$ 上有限生成で，R_U の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathfrak{m} \cap R$ に対応する点が U 内に存在するとき，U は V の**アフィン開集合**であるという．例えば，$D(f)$ は V のアフィン開集合である．後の定理 2.1.29 より，アフィン開集合 U は，R_U を座標環とするアフィン代数多様体とみなすことができる．R_U の元を U 上の**正則関数**という．

● p.43. 命題 2.1.28.

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 2.1.28a. U, W がアフィン代数多様体 V のアフィン開集合ならば，$U \cap W$ も V のアフィン開集合である．また，$R_U, R_W, R_{U \cap W}$ を $U, W, U \cap W$ の座標環とするとき，$\mathrm{Rat}(V)$ 内で

$$R_{U \cap W} = R_U \cdot R_W \subset \mathrm{Rat}(V)$$

が成り立つ．

証明. V の座標環を R とする．ある $f_1,\dots, f_r;\ g_1,\dots, g_s \in R$ により，$U = D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_r)$, $W = D(g_1)\cup\cdots\cup D(g_s)$ と書ける．$U\cap W = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r}\bigcup_{j=1}^{s} D(f_i g_j)$ である．$R[1/f_i]\cdot R[1/g_j] = R[1/f_i g_j]$ なので，$\mathrm{Rat}(V) = Q(R)$ の部分環として，

$$R_U\cdot R_W = \left(\bigcap_{i=1}^{r} R\left[\frac{1}{f_i}\right]\right)\cdot\left(\bigcap_{j=1}^{s} R\left[\frac{1}{g_j}\right]\right) \subset \bigcap_{i=1}^{r}\bigcap_{j=1}^{s} R\left[\frac{1}{f_i g_j}\right] = R_{U\cap W}$$

が成り立つ．逆に，$S_i := \displaystyle\bigcap_{j=1}^{s} R[1/f_i g_j]$ の元は，$x = h_1/f_i^n g_1^{m_1} = \cdots = h_s/f_i^n g_s^{m_s}$ と書けるので，ある $y_i \in \displaystyle\bigcap_{j=1}^{s} R[1/g_j] =: T$ により，$x = y_i/f_i^n$ と書ける．よって，$R[1/f_i]\cdot T \supset S_i$ である．

$R_U\cdot R_W = R_{U\cap W}$ だから，$R_{U\cap W}$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域である．

$R_{U\cap W}$ の勝手な極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとる．もし，$\mathfrak{m}\cap R_U = R_U$ ならば $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}\cap R_U)\cdot R_{U\cap W} = R_{U\cap W}$ となり矛盾するから，$0 \neq R_U/(\mathfrak{m}\cap R_U) \subset R_{U\cap W}/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ となり，$\mathfrak{m}\cap R_U$ は R_U の極大イデアルである．したがって，$\mathfrak{m}$ に対応する点 P が U 内にあり，同様な議論で $P\in W$ だから $P \in U\cap W$ である．

逆に，$U\cap W$ の点 P に対し，対応する R の極大イデアルを $\mathfrak{n}$ とすると，$\mathfrak{n}R[1/f_i]$ は $R[1/f_i]$ の極大イデアル，$\mathfrak{n}R[1/g_j]$ は $R[1/g_j]$ の極大イデアルだから，$\mathfrak{n}R_{U\cap W}$ は $R_{U\cap W}$ の極大イデアルになる．したがって，$U\cap W$ は $R_{U\cap W} = R_U\cdot R_W$ を座標環とするアフィン代数多様体である． □

● 初版 p.44, 命題 2.1.31(3)(補足)
修正前: (3)　$V(I) = V(\sqrt{I})$, $D(I) = D(\sqrt{I})$ である．
修正後: (3)　R が座標環で整域のとき，$V(I) = V(\sqrt{I})$, $D(I) = D(\sqrt{I})$ である．

● 初版 p.45, 1 〜 2 行目 例 2.1.33. (新装版は修正済み)
以下の原稿と差し替えて下さい．
[差し替え原稿]

例 2.1.33. $\mathfrak{m}$ が R の極大イデアルのとき，$\sqrt{(\mathfrak{m}^n)} = \mathfrak{m}$ で，$\mathfrak{m}^n$ は準素イデアルである．しかし，$\mathfrak{p}$ が R の素イデアルのときには $\sqrt{(\mathfrak{p}^n)} = \mathfrak{p}$ は成り立つが，$\mathfrak{p}^n$ が準素イデアルになるとは限らない．ただし，$\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}}\cap R$ は準素イデアルになる．例えば, $R = \mathbb{C}[X, Y, Z]/(X^2 - YZ)$ において，$\mathfrak{p} = (X, Y)$ は R の素イデアルであるが，$\mathfrak{p}^2$ は準素イデアルにならない．

また，$S=\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ において，$f\in S$ が $f=f_1^{e_1}\cdots f_r^{e_r}$ と素因数分解できるとき，S のイデアルとして，$(f)=(f_1)^{e_1}\cap\cdots\cap(f_r)^{e_r}$ が成り立ち，各 $(f_i)^{e_i}$ は準素イデアルである．この一般化が次の準素イデアル分解である．

● p.46 定理 2.1.34 の証明の最後の 3 行 (補足説明)

$$\mathfrak{p}_i\supset\sqrt{I}=\sqrt{\mathfrak{q}'_1}\cap\cdots\cap\sqrt{\mathfrak{q}'_m}=\mathfrak{p}'_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}'_s$$

より，ある j が存在し，$\mathfrak{p}_i\supset\mathfrak{p}'_j$ となる．

という部分の証明を補足します.

もし，任意の j に対して $\mathfrak{p}_i$ に含まれない $x_j\in\mathfrak{p}'_j$ が存在すれば，$x_1\cdots x_s\in\mathfrak{p}'_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}'_s\subset\mathfrak{p}_i$ であるが，$\mathfrak{p}_i$ は素イデアルなので，ある j に対して $x_j\in\mathfrak{p}_i$ となり矛盾する．よって，$\mathfrak{p}'_j$ は $\mathfrak{p}_i$ に含まれる．

● p.46. 注意 2.1.35 の直前の 4 行

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

I の極小素因子が 1 個しか存在しないとき，代数的集合 $V(I)$ は**既約**であるという.

R/I が 0 以外の巾零元を持たないとき，$V(I)$ は**被約** (reduced) であるという．これは，I の準素イデアル分解 $I=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ において，すべての $\mathfrak{q}_i$ が素イデアルであるように選べることと同値である.

● p.47. 注意 2.1.35.

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

注意 2.1.35. 上の準素イデアル分解は一意的とは限らない．素因子の一意性については，定理 5.3.1d で議論する.

● p.47. 2,1,12 項の (2.3) 式の次の行

誤: がを考える.

正: を考える.

● p.49 定理 2.2.3(4)

誤: このとき,

正: このとき，J が素イデアルならば,

また，p.50 ～ 51 の証明で，(10) の証明を (3) と (4) の間に配置して下さい．(10) を (4) と (8) の証明で用いています．

● p.50 定理 2.2.3(2) の証明

下記の原稿と差し替えます．(もとの証明がきたないので)

[差し替え原稿]

(2) $S = R - \mathfrak{p}$ とし，$x \in R_\mathfrak{p} - \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ とする．ある $r, s \in S$ により $x = r/s$ と書ける．すると，$s/r \in R_\mathfrak{p}$ であり，$(r/s)(s/r) = 1$ となる．よって，x は $R_\mathfrak{p}$ の可逆元である．

さて，もし，$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \subsetneqq I \subsetneqq R_\mathfrak{p}$ を満たす $R_\mathfrak{p}$ にイデアル I が存在すれば，上の考察から I は $R_\mathfrak{p}$ の可逆元を 1 個以上含む．すると，$I = R_\mathfrak{p}$ となり矛盾する．よって，$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ の極大イデアルである．

また，$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 以外の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在したと仮定すると，同様に，$\mathfrak{m}$ は $R_\mathfrak{p}$ の可逆元を 1 個以上含み，$\mathfrak{m} = R_\mathfrak{p}$ となり矛盾する．

● p.50 定理 2.2.3(9) の証明

下記の原稿と差し替えます．(もとの証明が不親切なので)

[差し替え原稿]

(9)　上の議論から，$J \subset \mathfrak{p}$ であるような R の素イデアルと，$R_\mathfrak{p}$ の素イデアル I が，$I = JR_\mathfrak{p}, J = I \cap R$ という対応で 1 対 1 に対応している．このことと，クルル次元，高さの定義からすぐわかる． □

● p.51 定理 2.2.3 の証明の直後．(説明追加)

定理 2.2.3 の直後，定義 2.2.4 の直前に以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

定理 2.2.3 の $JR_\mathfrak{p}$ の定義において，$f, g \in R, f \notin \mathfrak{p}, g/f \in JR_\mathfrak{p}$ であっても，$g \in J$ とは限らないことに注意しよう．また，R が整域でない可換環の場合でも，$\eta\colon R \to R_\mathfrak{p}$ を $\eta(f) = f/1$ で定め，$I \cap R$ を $\eta^{-1}(I)$ と読み替えれば，上の定理はすべて成立する．

● 初版 p.53, 新装版 p.52．命題 2.2.6(2) の証明．

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

(2) R は S-多元環として有限生成なので, $R \cong S[X_1,\ldots, X_n]/I$ と書ける．このとき，$R_{\mathfrak{m}} \cong S_{\mathfrak{n}}[X_1,\ldots, X_n]/IS_{\mathfrak{n}}[X_1,\ldots, X_n]$ なので，$R_{\mathfrak{m}}$ は $S_{\mathfrak{n}}$-多元環として有限生成である．

● p.53. 命題 2.2.6 の直後の行

誤: V が W の部分多様体のとき，

正: V が W の閉部分多様体のとき，

● p.53. 定理 2.2.7 への補足説明

定理 2.2.7 の証明中で次の事実を用いています．ほとんどの読者の皆様はご存知と思いますが．

命題 2.2.6b. $(R, \mathfrak{m})$ は局所環とする．このとき，$\mathfrak{m}$ に属さない R の元 x は可逆元である．つまり，R 内に x の逆元 $1/x$ が存在する．

証明. x が R 内に逆元を持たなければ，単項イデアル (x) は R とは一致しない．(x) を含む極大イデアルが存在するが，それは $\mathfrak{m}$ しかなく，$x \in \mathfrak{m}$ となる． □

● p.53. 定理 2.2.7 の証明の最後から 4 〜 2 行目

証明が理解しにくいようなので，説明を追加します．

旧: $a = \det(I_n - A)$ とおけば，$a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．他方，$a_{ij} \in \mathfrak{m}$ なので，ある $m \in \mathfrak{m}$ が存在して，$a = \det(I_n - A) = 1 + m$ と書ける．これは，$a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と矛盾する．

新: $(I_n - A)$ の余因子行列を B とし $a = \det(I_n - A)$ とおけば，$a\mathbf{x} = B(I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．他方，$a_{ij} \in \mathfrak{m}$ なので，ある $m \in \mathfrak{m}$ が存在して，$a = \det(I_n - A) = 1 + m \notin \mathfrak{m}$ である．$\mathfrak{m}$ に属さない元は可逆だから，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ となり矛盾する．

● p.53 系 2.2.8 の証明への補足説明

証明の最後から 2 行目の $\mathfrak{m}M = M$ の $\mathfrak{m}M \supset M$ の部分の証明は必ずしも自明ではありません．Artin-Rees の補題 ([永田] p.74 定理 3.0.6, [松村] p.71 定理 8.5 等参照) を使うか，ちょっとした議論が必要です．

それを証明の中に書き込むと以下のようになります．

証明. I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ を取る．$I \subset \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ なので，最初から $(R, \mathfrak{m})$ を局所整域と仮定して，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$ を示せばよい．$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n$ とする．$\mathfrak{m}M = M$ を示す．$\mathfrak{m}M \subset M$ は自明．

$\mathfrak{m}M \supset M$ を示そう．$\mathfrak{m} = (a_1,\ldots, a_s)$ と書ける．多項式環 $S = R[X_1,\ldots, X_s]$ を考え，自然な準同型写像 $\varphi\colon S \to R$ を $\varphi(X_i) = a_i$ で定める．

$$S_n = \{f \in S \mid f \text{ は } n \text{ 次斉次多項式}\} \cup \{0\},$$
$$J_n := \{f \in S_n \mid \varphi(f) \in \mathfrak{m}^n \cap M\}$$

とし，$J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ とおく．J は S のイデアルなので，$J = (f_1,\ldots, f_s)$ と書ける．$d_i = \deg f_i$, $n_0 = \max\{d_1,\ldots, d_s\}$ とする．$\varphi(S_n) = \mathfrak{m}^n$ に注意する．

勝手な $b \in M$ を取る．$n = n_0 + 1$ とすると，$b \in \mathfrak{m}^n$ なので，$\varphi(g) = b$ となる $g \in S_n$ が存在する．$g = h_1f_1 + \cdots + h_sf_s$ ($h_i \in S$ はある $(n - d_i)$ 次斉次式) と書ける．

$$b = \varphi(g) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(h_i)\varphi(f_i) \in \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{m}^{n-d_i} M \subset \mathfrak{m}^{n-n_0} M = \mathfrak{m}M$$

となる．よって，$\mathfrak{m}M = M$ である．

そこで，$N = 0$ として中山の補題を使うと，$M = 0$ が得られる． □

R が座標環の場合は，多項式環から剰余環と局所化の操作だけで作られるので，中山の補題を使わずに直接証明することもできます．証明の 1 例を書いておきます．

系 2.2.8'. R がアフィン代数多様体 V の座標環，$I \neq R$ がそのイデアルのとき，$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = 0$ である．

証明. I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ を取る．$J := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n$ とし，$J = 0$ を示せばよい．$0 \neq \exists f \in J$ と仮定する．f は V 上の有理関数なので，$\mathfrak{m}$ に対応する点 P における零点の位数は有限である．よって，ある $e \in \mathbb{N}$ が存在して $f \notin \mathfrak{m}^e$ となる．すると $J \not\subset \mathfrak{m}^e$ となり矛盾する． □

● p.54 定義 2.2.9 の 4 行目

誤: $z \in R$ ならば x は R 上

正: $z \in R$ ならば z は R 上

● p.54 定義 2.2.9 の 7 行目の末尾

定義 2.2.9 の 7 行目の末尾に，以下の説明を追加して下さい．

[追加する説明]

R 上整な元 z に対し，(2.5) を満たす R 上のモニック多項式のうち，2 つの 1 次以上の R 上のモニック多項式の積に表せない多項式を z の R 上の**最小多項式**と呼ぶことにする．例えば，R が UFD(素元分解整域) であれば z の最小多項式は一意的に定まるが，一般の整域 R では z の最小多項式は必ずしも一意的でないことに注意する．

● p.54 定義 2.2.9 の最後から 3 行目
誤: $x_1,\ldots, x_n \in S$ に対し，$R[X_1,\ldots, X_n] \cong R[x_1,\ldots, x_n]$
正: $x_1,\ldots, x_n \in S$ に対し，R-多元環として $R[X_1,\ldots, X_n] \cong R[x_1,\ldots, x_n]$

● p.54 補題 2.2.10 の 2 行目
誤: 逆に，$S \subset L$ が有限生成 R-加群
正: 逆に，R-多元環 $S \subset L$ が有限生成 R-加群

● p.55 系 2.2.11 (補足説明)
次の主張 (5) を追加すると，後が理解しやすくなります．系 2.2.11 の (4) の後に次の (5) の命題を追加し，証明の最後に以下の証明を追加して下さい．

[追加する命題]

(5) 整域 S が体 R 上整ならば S は体である．

[追加する証明]

証明. (5) $x \in S$ が (3) の証明のように表せるとき，

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{a_0}(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x + a_1) \in S$$

なので，S は体である．

● p.51 例 2.2.12 の 2 行目
誤: $z^2 + (x^2 + y^2 - 1) = 0$
正: $z^2 + (X^2 + Y^2 - 1) = 0$

● p.55 命題 2.2.13 の 2 行目
誤: $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ は S の素イデアルである．
正: $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ は R の素イデアルである．

● p.56 定理 2.2.14 の証明を，次の原稿と差し替えて下さい．

証明.* まず，$\mathfrak{p}$ が R の極大イデアルの場合を考える．$\mathfrak{p}S \neq S$ であることを示す．もし $\mathfrak{p}S = S$ ならば，$1 = p_1s_1 + \cdots + p_ks_k$ ($p_i \in \mathfrak{p}$, $s_i \in S$) と書ける．$S' = R[s_1,\ldots,$

$s_k]$ は有限生成 R-加群で，$S' = Rx_1 + \cdots + Rx_n$ $(x_1 = 1)$ と表せば，$S' = \mathfrak{p}S'$ より，$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(a_{ij} \in \mathfrak{p})$ と表せる．a_{ij} を (i, j)-成分とする n 次正方行列を A とし，I を単位行列として，$b = \det(I - A) \in 1 + \mathfrak{p}$ とすれば，$bx_i = 0$ より $b = 0$ となり矛盾する．したがって，$\mathfrak{p}S \neq S$ である．

S における $\mathfrak{p}S$ の準素イデアル分解 $\mathfrak{p}S = J_1 \cap \cdots \cap J_m$ をとる．$I = \sqrt{J_1} \cap R$ とおけば，I は R の素イデアルで，$I \supset \mathfrak{p}$ である．$\mathfrak{p}$ は極大イデアルだから，$I = \mathfrak{p}$ である．そこで，$\mathfrak{q} = \sqrt{J_1}$ とおく．$S/\mathfrak{q}$ は $R/\mathfrak{p}$ 上整なので体であり，$\mathfrak{q}$ は極大イデアルである．そして，$\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ を満たす．

$\mathfrak{p}$ が R の素イデアルの場合は，$S_{\mathfrak{p}} = \{\, x/y \in Q(S) \mid x \in S, y \in R - \mathfrak{p}\}$ とおくと，$S_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の整拡大である．$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ は $R_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルなので，上の議論から $S_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアル $\tilde{\mathfrak{q}}$ で $\tilde{\mathfrak{q}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ を満たすものが存在する．そこで，$\mathfrak{q} = \tilde{\mathfrak{q}} \cap S$ とおけば，$\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$ である．

さて，R の素イデアル列 $\mathfrak{p}_0 \supsetneqq \mathfrak{p}_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{p}_r$ に対し，S の素イデアル列 $\mathfrak{q}_1 \supsetneqq \mathfrak{q}_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{q}_r$ で $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ を満たすものが存在することを帰納法の仮定として，$\mathfrak{q}_0$ の存在を証明する．$\overline{S} = S/\mathfrak{q}_1$ は $\overline{R} = R/\mathfrak{p}_1$ の整拡大である．上の議論から，$\overline{S}$ の素イデアル $\overline{\mathfrak{q}}$ で，$\overline{\mathfrak{q}} \cap \overline{R} = \mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}_1$ を満たすものが存在する．そこで，自然な全射 $S \to \overline{S}$ による $\overline{\mathfrak{q}}$ の原像を $\mathfrak{q}_0 \subset S$ とすれば，$\mathfrak{q}_0 \cap R = \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0 \supsetneqq \mathfrak{q}_1$ となる．これより，$\operatorname{Krull\,dim} R \leqq \operatorname{Krull\,dim} S$ がわかる．

また，$\mathfrak{q}_0 \supsetneqq \mathfrak{q}_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathfrak{q}_r$ が S の素イデアル列のとき，$\mathfrak{q}_0 \cap R \supset \mathfrak{q}_1 \cap R \supset \cdots \supset \mathfrak{q}_r \cap R$ は R の素イデアル列であり，上の議論から，もし $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{q}_{i+1} \cap R$ ならば $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_{i+1}$ である．よって，$\operatorname{Krull\,dim} S \leqq \operatorname{Krull\,dim} R$ である． □

● p.59 定理 2.2.20 の証明

初版と新装版で修正箇所が異なりますが，最終的に以下の原稿になります．

[差し替え原稿]

証明. $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(R) = d$ を d に関する帰納法で証明する．$d = 0$ のとき，(0) が極大イデアルだから R は体で，$R = Q(R)$ は $\mathbb{C}$ の代数拡大で，$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(R) = 0$ である．

$d \geqq 1$ とする．前の系と定理 2.2.16 より，$\mathbb{C}$ 上代数的独立な $x_1, \ldots, x_m \in R$ を選んで，R が $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ 上整かつ，$\mathfrak{p}_1 \cap S = Sx_1$ となるようにできる．

$S' = S/(\mathfrak{p}_1 \cap S) \cong \mathbb{C}[x_2, x_3, \ldots, x_m]$ とおく．準同型定理より，$S' = S/(\mathfrak{p}_1 \cap S) \subset R/\mathfrak{p}_1$ とみなせ，$R/\mathfrak{p}_1$ は S' 上整である．

$R/\mathfrak{p}_1$ と S' に対して帰納法の仮定を適用して，$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}Q(S') = d-1$ を得る．これより，$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}Q(R) = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}Q(S) = 1 + \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}Q(S') = d$ を得る．

長さ d の素イデアル列が存在するから，$\mathrm{Krull}\dim R \geqq d$ であるが，もし，$\mathrm{Krull}\dim R > d$ とすると，長さ $d+1$ 以上の素イデアル列が存在し，上の結果から，$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}}Q(R) \geqq d+1$ となって矛盾する．したがって，$\mathrm{Krull}\dim R = d$ である．

上の構成法では，適当に $a_{i,1},\ldots, a_{i,i-1} \in \mathbb{C}$ を選べば $f_i := x_i + a_{i,i-1}x_{i-1} + \cdots + a_{i,1}x_1 \in \mathfrak{p}_i$ となるようにできる．このとき，$f_1,\ldots, f_d$ は $\mathbb{C}$ 上代数的独立である． □

● 新装版の p.59 下から 5 行目 (初版にはこのゴミはありません)

誤: $(0) = \mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_b$, はゴミなので削除

● p.59 〜 60 命題 2.2.24

命題 2.2.24 を以下の原稿と差し替えて下さい．

命題 2.2.24. (Krull の標高定理)　R は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域またはその局所化，$I = (g_1,\ldots, g_r)$ は R のイデアル, $\mathfrak{p}$ は I の極小素因子とする．すると，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \leqq r$ が成り立つ．

証明. $r = 1$ のときは多項式環に帰着できるので簡単．$r \geqq 2$ とする．$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ は $IR_{\mathfrak{p}}$ の極小素因子である．$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p} - 1$ なる素イデアル $\mathfrak{q} \subset R_{\mathfrak{p}}$ を取る．$g_r \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} - \mathfrak{q}$ と仮定してよい．$\sqrt{g_rR_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{q}} = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ なので，ある $m \in \mathbb{N}$ を取ると，任意の $1 \leqq i < r$ に対して，$g_i^m \in g_rR_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{q}$ である．$g_i^m = g_i' + a_ig_r$ ($g_i' \in \mathfrak{q}$, $a_i \in R_{\mathfrak{p}}$) と表せる．$J := g_1'R_{\mathfrak{p}} + \cdots g_{r-1}'R_{\mathfrak{p}}$ とし，極小素因子 $J \subset \mathfrak{r} \subset \mathfrak{q} \subset R_{\mathfrak{p}}$ を取る．$\mathfrak{r} + g_rR_{\mathfrak{p}} \ni g_i^m$ だから $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ は $g_rR_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}}$ の極小素因子で，$r = 1$ の場合の結果から高さ 1 であり，$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}$ となる．帰納法の仮定から，$\mathrm{ht}\,\mathfrak{q} \leqq r-1$ である． □

● 新装版の p.61 定理 2.2.28

アフィン代数多様体の正則写像による像について，重要な事実の説明が欠落していました．定理 2.2.28 の部分を次の原稿と差し替えて下さい．もとの定理 2.2.28 の主張は，一般化された形で (3) に含まれています．

[差し替え原稿]

一般には，アフィン代数多様体 $\varphi: V \to W$ による V の像 $\varphi(V)$ はアフィン代数多様体にはならない．例えば，$V = W = \mathbb{C}^2$, $\varphi: V \to W$ を多項式写像 $\varphi(x, y) = (x, xy)$ で定まる正則写像とする．このとき，$\varphi(V) = D_W(x) \cup \{(0, 0)\}$ で，$\varphi(V)$ はアフィン代数多様体ではないし，W の開集合でもない．

定理 2.2.28a. V, W はアフィン代数多様体，$\varphi\colon V \to W$ は正則写像とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\varphi(V)$ を含む W の最小のザリスキー閉集合が W である (このとき, $\varphi\colon V \to W$ は**支配的**であるという) と仮定する．すると，自然な単射 $\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(W) \to \mathrm{Rat}(V)$ が存在する．

(2) $\dim V = \dim W$ で $\varphi\colon V \to W$ は支配的であると仮定する．すると，あるアフィン開集合 $D_V(f) \subset V$, $D_W(g) \subset W$ を選んで，$\varphi\colon D_V(f) \longrightarrow D_W(g)$ が有限写像になるようにできる．

(3) 支配的正則写像 $\varphi\colon V \to W$ が V のあるザリスキー開集合上で単射ならば，$\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(W) \to \mathrm{Rat}(V)$ は同型写像である．

(4) $\varphi\colon V \to W$ が支配的ならば，W のある空でないアフィン開集合 $U \subset W$ で，$U \subset \varphi(V)$ となるものが存在する．

(5) W のある閉部分多様体 $Z_1,\ldots, Z_r$ と，各 Z_i のあるアフィン開集合 U_i が存在して，

$$\varphi(V) = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$$

と表すことができる．ここで，$2 \leqq i \leqq r$ に対し $\dim U_i < \dim U_1$ である．

証明. R_V, R_W を V, W の座標環とする．

(1) $\varphi^*\colon R_W \to R_V$ が単射であることを示す．$f \in R_W$ が $\varphi^*(f) = 0$ を満たすとする．$f = 0$ で定まる W のザリスキー閉集合 $V(f)$ は $\varphi(V)$ を含むから，$V(f) = W$ であり，$f = 0$ である．$\varphi^*\colon R_W \to R_V$ が単射だから，単射 $\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(W) \to \mathrm{Rat}(V)$ が存在する．

(2) φ^* を通して $\mathrm{Rat}(W) \subset \mathrm{Rat}(V)$ と看做す．$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} \mathrm{Rat}(W) = \dim W = \dim V = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} \mathrm{Rat}(V)$ で，$\mathrm{Rat}(V)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な体なので，$\mathrm{Rat}(V)$ は $\mathrm{Rat}(W)$ の有限次代数拡大である．

Step 1. X はアフィン代数多様体，$\tilde{\varphi}\colon X \to W$ は有限写像で，V は $V = D_X(f)$ という形の X の開集合，$\varphi = \tilde{\varphi}|_V$ であると仮定し，この場合に (2) を示す．

X の座標環 R_X は R_W の整拡大である．$f \in R_X$ の R_W 上の最小多項式を，$F = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_i \in R_W)$ とする．このとき，$D_V(a_0) \subset D_X(f) = V$ で，$\varphi\colon D_V(a_0) \to D_W(a_0)$ は有限写像である．よって，(2) が成立する．

さて，一般の V, W について，$[\mathrm{Rat}(V) : \mathrm{Rat}(W)]$ に関する帰納法で，(2) を証明する．

Step 2. $\mathrm{Rat}(V) = \mathrm{Rat}(W)$ の場合に (2) を示す．

R_V は $\mathbb{C}$ 上有限生成だから R_W 上有限生成であり，ある $f_i, g_i \in R_W$ を選んで，$R_V = R_W[g_1/f_1, \ldots, g_r/f_r]$ と書ける．$f = f_1 \cdots f_r$ とおくと，$R_V[1/f] = R_W[1/f]$ であるので，$D_V(f) \cong D_W(f)$ である．よって，(2) が成り立つ．

Step 3. $\mathrm{Rat}(V) \supsetneqq \mathrm{Rat}(W)$ の場合に (2) を示す．

$f \in R_V - \mathrm{Rat}(W)$ が存在する．$f \in R_V$ の $\mathrm{Rat}(W)$ 上の最小多項式を，$F = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_i \in \mathrm{Rat}(W))$ とする．$a_0, \ldots, a_{n-1}$ を R_W の元の分数で表し，その分母の積を b とする．$W' = D_W(b), V' = D_V(b)$ とすると，これらは $R_{W'} = R_W[1/b], R_{V'} = R_V[1/b]$ を座標環とするアフィン開集合である．$a_i \in R_{W'}$ である．

$$R = R_{W'}[T]/(F) = R_{W'}[T]/(T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0)$$

は $R_{W'}$ の整拡大で，R を座標環とするアフィン代数多様体 Z をとると，有限写像 $\pi: Z \to W'$ が存在する．また，$R \subset R_{V'}$ だから，この包含写像より $\psi: V' \to Z$ が定まり，$\varphi = \pi \circ \psi$ を満たす．

帰納法の仮定から，あるアフィン開集合 $D_{V'}(f') \subset V', D_Z(h') \subset Z$ を選んで，$\psi: D_{V'}(f') \longrightarrow D_Z(h')$ が有限写像になるようにできる．Step 1 の結果から，あるアフィン開集合 $D_W(g) \subset W' \subset W, D_Z(h) \subset D_Z(h')$ を選んで，$\pi: D_Z(h) \to D_W(g)$ が有限写像になるようにできる．$\psi^{-1}(D_Z(h)) = D_{D'_V(f')}(\psi^*(h)) = D_V(bf'\psi^*(h)) =: U_V$ とおけば，$\varphi: U_V \to D_W(g)$ は有限写像である．

(3)　上の結果から容易にわかる．

(4)　$\dim V - \dim W$ に関する帰納法で証明する．$\dim V = \dim W$ のときは (2) で証明した．$\dim V > \dim W$ とする．V はある $\mathbb{C}^N$ 内のアフィン代数多様体である．$\mathbb{C}^N$ 内で，ある 1 次多項式の零点として定義されるザリスキー閉集合を $\mathbb{C}^N$ の**超平面**という．それは，$\mathbb{C}^{N-1}$ と同型である．適当な超平面 $H \subset \mathbb{C}^N$ をとり，$H \cap V$ の適当な既約成分 V' をとる (実際には，第 4 章で紹介するベルティニの定理により，ほとんどの超平面 H に対し，$H \cap V$ は既約である) と，$\varphi|_{V'}: V' \to W$ が支配的になるようにできる (簡単なので証明してみよ)．V' は H 内のアフィン代数多様体で，$\dim V' = \dim V - 1$ である．帰納法の仮定から，$U \subset \varphi(V') \subset \varphi(V)$ となるような W のアフィン開集合 U が存在する．

(5)　$\dim W$ に関する帰納法で証明する．$\dim W = 0$ のとき，つまり W が 1 点のときは，結論は自明である．$\dim W \geqq 1$ とする．$\varphi(V)$ の W におけるザリスキー閉包を Z_1 とする．(4) より，Z_1 のあるアフィン開集合 U_1 で，$\phi \neq U_1 \subset \varphi(V)$ となるものが存在する．$V - \varphi^{-1}(U_1)$ は有限個の $(\dim V - 1)$ 次元以下の V の閉部分多様体 $V_1, \ldots, V_k$ の和集合である．$V - \varphi^{-1}(U_1) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ で，$\varphi(V) - U_1 \subset \varphi(V_1) \cup \cdots \cup \varphi(V_k)$

である．W における $\varphi(V_i)$ のザリスキー閉包を W_i とすると，W_i は W の閉部分多様体で，$\dim W_i < \dim W$ である．帰納法の仮定から，$\varphi\colon V_i \to W_i$ に対しては (5) の結論が成立するので，あとは簡単に証明が完結する．□

● p.62．2.3.1 項の最後から 3 行目

誤: ここで,「$\lambda,\, \mu \in \Lambda,\, \lambda \neq \mu$ ならば $M_\lambda \cap M_\mu = \{0\}$」が成り立つとき,

正: ここで,「各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $M_\lambda \cap \displaystyle\sum_{\mu \neq \lambda} M_\mu = \{0\}$」が成り立つとき,

● p.63 例 2.3.2 の直前の行

誤: $Q(S)$ の d 次斉次元全体の集合と $\{0\}$ の合併集合を $Q(R)_d$ と書く．

正: $Q(S)$ の d 次斉次元全体の集合と $\{0\}$ の合併集合を $Q(S)_d$ と書く．

● p.63 例 2.3.2 の 2 行目

誤: $S_d = \bigl\{ f(X, Y, Z) \in S \bigm| f(X,\, Y,\, Z)$ は d 次斉次多項式$\bigr\} \cup \{0\}$

正: $S_d = \bigl\{ f(X_0, \ldots, X_n) \in S \bigm| f(X_0, \ldots, X_n)$ は d 次斉次多項式$\bigr\} \cup \{0\}$

● p.63 定理 2.3.3 の証明の 3 行目

誤: ある $f_{i,d} \in S_d$ により,

正: ある $f_{i,d} \in I \cap S_d$ により,

● p.63 ～ 64 命題 2.3.4 の証明の 4 行目

誤: $d \neq e$ のとき $R_d \cap R_e = \{0\}$ である．

正: $R_d \cap \displaystyle\sum_{e \neq d} R_e = \{0\}$ である．

● p.65 ～ 66 定義 2.3.6 から第 2.3.3 項の最後まで

定義 2.3.6 から注意 2.3.7 までの説明の中で，自明のように書かれている命題の証明は，かなり難しかったようです．定義 2.3.6 から第 2.3.3 項の材後までを，下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 2.3.6a. 射影代数多様体 V の座標環を R とする．R は整域であるので,

$$Q(R)_0 = \left\{ \frac{G}{F} \in Q(R) \;\middle|\; \text{ある } d \in \mathbb{N} \text{ があり } F,\, G \in R_d \right\}$$

は体になるが，これを $\mathrm{Rat}(V)$ などと書き，V の**有理関数体**とか，**関数体**という．$\mathrm{Rat}(V)$ の元を V 上の**有理関数**という．

また，$\dim V = \mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} \mathrm{Rat}(V)$ で V の**次元** を定義する．

$S = \mathbb{C}[X_0,\ldots, X_n]$, I は S の斉次イデアルで，$R = S/I$ であるとする．$G \in R_d - \{0\}$ $(d > 0)$ はある $\tilde{G} \in S_d$ の I を法とする同値類として表せる．$(a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in V \subset \mathbb{P}^n$ のとき，$\tilde{G}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ の値は $\tilde{G}$ の選び方に依存しないので，$G(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \tilde{G}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ と定義できる．そして，

$$D_+(G) = \left\{(a_0 : \cdots : a_n) \in V \subset \mathbb{P}^n \;\middle|\; \tilde{G}(a_0, \ldots, a_n) \neq 0\right\}$$
$$R_U = \left(R\left[\frac{1}{G}\right]\right)_0 = \left\{\frac{F}{G^k} \in Q(R)_0 \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\, F \in S_{kd}\right\}$$

と定める．ここで，$U = D_+(G)$ である．

命題 2.3.6b. (1) $D_+(G)$ は R_U を座標環とするアフィン代数多様体とみなすことができる．

(2) $\phi \neq U = D_+(G)$ に対し，$\mathrm{Rat}(V) = \mathrm{Rat}(U)$ である．特に，

$$\dim U = \mathrm{Krull}\dim R_U = \mathrm{tr.deg}\,\mathrm{Rat}(V) = \dim V$$

である．

証明.* (1) $\mathfrak{I} = \left\{(i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \;\middle|\; i_0 + \cdots + i_n = d,\, i_0 \geqq 0,\ldots, i_n \geqq 0\right\}$ とし，$\mathfrak{I}$ の元を適当に $\mathfrak{I} = \{\mathbf{i}_1,\ldots, \mathbf{i}_m\}$ と並べておく．$X_j \in S$ の R における同値類を x_j とし，$\mathbf{i}_k = (i_0,\ldots, i_n)$ のとき，$\varphi(Y_k) = \dfrac{x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}}{G}$ によって $\varphi\colon \mathbb{C}[Y_1,\ldots, Y_m] \longrightarrow R_U$ を定め，$J = \mathrm{Ker}\,\varphi$, $A = \mathbb{C}[Y_1,\ldots, Y_m]/J$ とおく．φ は全射なので $A \cong R_U$ である．また $V(J) \subset \mathbb{C}^m$ の点と $D_+(G)$ の点は，以下のように，自然に 1 対 1 に対応する．

$\mathbf{a} = (a_0 : \cdots : a_n) \in D_+(G)$ に対し，$b_k = \dfrac{a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n}}{G(a_0, \ldots, a_n)}$ とし，$\mathbf{a}$ に $\mathbf{b} = (b_1,\ldots, b_m) \in V(J)$ を対応させる．

この逆対応は以下のようになる．$\mathbf{b} = (b_1,\ldots, b_m) \in V(J)$ をとる．$\mathbf{i} \in \mathfrak{I}$ の中から，$\mathbf{j}_0 = (d, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{j}_1 = (d-1, 1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{j}_2 = (d-1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{j}_n = (d-1, 0, \ldots, 0, 1)$ を抜き出し，それが順に $Y_{j_0}, Y_{j_1},\ldots, Y_{j_n}$ に対応するとする．このとき，$(b_{j_0}; b_{j_1} : \cdots : b_{j_n}) \in \mathbb{P}^n$ が最初の $\mathbf{a}$ と一致する．このように，$V(J)$ と $D_+(G)$ の間に自然な全単射があり，$A \cong R_U$ であるので $V(J) = D_+(G)$ とみなして，$D_+(G)$ をアフィン代数多様体とみなすことができる．

(2) $\mathrm{Rat}(U) = Q(R_U)$ の元 x は $x = \dfrac{F/G^k}{H/G^l}$ の形に書けるが，G の巾を F か H に適当にかけて $k = l$ と仮定してよい．$F, H \in S_{kd}$ であるので，$x \in Q(R_U)$ に

$F/H \in Q(R)_0 = \mathrm{Rat}(V)$ を対応させる．逆に，$\mathrm{Rat}(V)$ の元 y は $y = F/H \in \mathrm{Rat}(V)$ $(F, H \in R_m)$ という形に書ける．$m{+}r = qd$ を満たす非負整数 r, q をとり，$y \in \mathrm{Rat}(V)$ に $\dfrac{x_0^r F/G^q}{x_0^r H/G^q} \in Q(R_U)$ を対応させると，$\mathrm{Rat}(V) = Q(R_U)$ がわかる． □

$D_+(G)$ を $G \neq 0$ で定まる V の**アフィン開集合**という．また

$$V_+(G) = V - D_+(G)$$

と書き，これを $G = 0$ で定まる V の**代数的集合**という．もっと一般に，V の座標環 R の斉次イデアル J に対して，$J_d = J \cap R_d$ $(d \in \mathbb{Z})$ として，

$$V_+(J) = \bigcap_{d\in\mathbb{Z}} \bigcap_{G\in J_d} V_+(G), \quad D_+(J) = \bigcup_{d\in\mathbb{Z}} \bigcup_{G\in J_d} D_+(G)$$

と定義する．

$D_+(G)$ 上のザリスキー位相から V に自然に位相が定まる．つまり，V の部分集合 W が開集合であるとは，任意の斉次元 $G \in R$ に対し $W \cap D_+(G)$ がアフィン多様体 $D_+(G)$ のザリスキー開集合であること，として V の開集合系を定義する．この位相を V の**ザリスキー位相**という．

命題 2.3.6c. U が V のザリスキー開集合であれば，R のある斉次イデアル J により $U = D_+(J)$ と書ける．また，F が V のザリスキー閉集合であれば，R のある斉次イデアル J により $F = V_+(J)$ と書ける．

証明.* $V \subset \mathbb{P}^n$ とし，$X_i \in S = \mathbb{C}[X_0,\ldots, X_n]$ の R での像を x_i とする．$U_i = D_+(x_i)$ とおく．

例えば, U_0 上で考えよう．$y_i = x_i/x_0 \in R_{U_0} = \mathbb{C}[y_1,\ldots, y_n]$ とする．V のザリスキー位相の定義から，U が V のザリスキー開集合であれば，$U \cap U_0$ は U_0 において，ある $f_1,\ldots, f_r \in R_{U_0}$ により，$U \cap U_0 = D_{U_0}\big((f_1, \ldots, f_r)\big)$ と書ける．$f_i \in R_{U_0}$ の斉次化 $F_i \in R$ を $V_+(F_i) \supset V - U$ となるように選び，$J_0 = (F_1,\ldots, F_r) \subset R$ とおく．$U \cap U_0 = D_+(J_0) \cap U_0$, $U \supset D_+(J_0)$ が成り立つことは容易に確認できる．

同様な方法で，各 U_i 上で斉次イデアル $J_i \subset R$ を定め，$J = J_0 + \cdots + J_n$ とすれば，$U = D_+(J)$ となる． □

注意 2.3.7. $(s : t) \in \mathbb{P}^1$ に対し $(x : y : z) = (s^2 : st : t^2) \in \mathbb{P}^2$ を対応させる写像を $f{:}\, \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ とすると，$C = f(\mathbb{P}^1)$ は $xz - y^2 = 0$ で定まる $\mathbb{P}^2$ 内の 2 次曲線になり，$f{:}\, \mathbb{P}^1 \to C$ は同型写像 (定義 2.4.16 参照) である．このとき，C の座標環

は，$R' = \mathbb{C}[S^2, ST, T^2] \cong \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XZ - Y^2)$ になる．これは $\mathbb{P}^1$ の座標環 $R = \mathbb{C}[S, T]$ と同型ではない．したがって，2 つの射影多様体が同型であっても，その座標環が同型であるとは限らない．

$V \subset \mathbb{P}^n$ は射影代数多様体，$R = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]/I$ はその座標環，$x_i \in R$ は X_i の I を法とする同値類とする．R の斉次素イデアルと V の部分射影多様体の対応は，アフィン代数多様体の場合とほぼ同じであるが，以下の点においてアフィン代数多様体と少しだけ異なる．R の斉次極大イデアルは $(x_0, \ldots, x_n)$ のみであり，この極大イデアルは V の閉部分多様体と対応しない．これを**無縁イデアル**という．V の点 $(a_0 : \cdots : a_n)$ は $(a_0x_1 - a_1x_0, a_0x_2 - a_2x_0, \ldots, a_0x_n - a_nx_0)$ (これは $a_0 \neq 0$ の場合) などの形をした $\mathrm{coht} = 1$ の素イデアルと対応する．

X, Y は射影代数多様体，R_X, R_Y はその座標環とする．もし，次数を保つ環準同型写像 $\psi\colon R_Y \to R_X$ が存在すれば，アフィン代数多様体の場合と同様に，座標環の $\mathrm{coht} = 1$ の素イデアルの対応から，写像 $\varphi\colon X \to Y$ が誘導される．しかし，注意 2.3.7 は，後の定義 2.4.16 で説明する意味での正則写像 $\varphi\colon X \to Y$ に対して，対応する座標環の間の準同型写像 $\varphi^*\colon R_Y \to R_X$ が存在するとは限らない，という例にもなっている．そういうわけで，射影代数多様体の正則写像は，次節の「代数多様体」で一般論として説明する．

一般に，射影代数多様体の座標環は，アフィン代数多様体の座標環より使いにくい．斉次極大イデアルをただ 1 つだけ持つ次数付き環を局所次数付き環というが，射影多様体の座標環は無縁イデアルを唯一の斉次極大イデアルとする局所次数付き環である．コホモロジーについては，局所環の理論と局所次数付き環の理論は並行して進む．しかし，座標環の性質と射影多様体の性質の関係が微妙で，厄介な点が多い．興味のある方は，[安藤]p.290 〜 331 をお読み頂きたい．

なお，2 次元以上のアフィン代数多様体の射影化については，曲線の場合と異なり，$\mathbb{C}^n$ への埋入方法に依存して，一意性がない．詳細は，後の第 5.2 節を読んで頂くと，理解できると思う．

● p.66 命題 2.3.8 の証明の 2 〜 3 行目

誤: F を F_1 の素因数分解に現れる素因数とすると，$(F) \subset I$ であり，(F) は素イデアルである．

正: F_1 のある素因数 F で $F \in I$ となるものが存在する．$(F) \subset I$ であり，(F) は素イデアルである．

● 初版 p.67 〜 68. 命題 2.4.3 (新装版では修正済み)

命題 2.4.3 を以下の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

命題 2.4.3.　代数多様体の定義 2.4.1 において，$\{1, 2, \ldots, m\}$ の任意の空でない部分集合 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ に対し，

$$U_I = U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \cdots \cap U_{i_r}$$
$$R_I = R_{i_1} \cdot R_{i_2} \cdots R_{i_r} \subset K$$

とする．このとき，次が成り立つ．

(1) U_I は R_I を座標環とするアフィン代数多様体である．

(2) $\phi \neq I \subset J$ のとき，U_J は U_I のアフィン開集合である．

証明.　(1)　$i = i_1$, $W_k = U_i \cap U_{i_k}$, $R'_k = R_i \cdot R_{i_k}$ とする．代数多様体の定義の条件 (3) より，W_k は R'_k を座標環とする U_i のアフィン開集合である．$U_I = W_2 \cap W_3 \cap \cdots \cap W_r$ なので，命題 2.1.28a より，U_I は U_i のアフィン開集合であり，U_I の座標環は $R'_2 \cdots R'_r$ である．$R_I = R'_2 \cdots R'_r$ なので，R_I が U_I の座標環である．

(2)　$i \in I$ とすると，U_I, U_J はアフィン代数多様体 U_i のアフィン開集合で，$U_J \subset U_I$ なので，U_J は U_I のアフィン開集合である．　□

● 初版 p.68. 定義 2.4.4 (新装版では修正済み)

定義 2.4.4 を以下の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

定義 2.4.4.　X は代数多様体とし，記号は定義 2.4.1，命題 2.4.3 の通りとする．$P \in X$ に対し，P を含むアフィン開集合 U_I とその座標環 R_I をとる．$P \in U_I$ に対応する R_I の極大イデアルを $\mathfrak{m}_I$ とし，

$$\mathcal{O}_{X,P} = (R_I)_{\mathfrak{m}_I} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathrm{Rat}(X) \;\middle|\; f \in R_I,\, g \in R_I - \mathfrak{m}_I \right\}$$
$$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}_I (R_I)_{\mathfrak{m}_I} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathrm{Rat}(X) \;\middle|\; f \in \mathfrak{m}_I,\, g \in R_I - \mathfrak{m}_I \right\}$$

とおく．$(\mathcal{O}_{X,P}, \mathfrak{m}_P)$ は局所環である．

$\phi \neq I \subset J$ のとき，U_J は U_I のアフィン開集合だから，命題 2.1.28 の証明で説明したように，$(R_I)_{\mathfrak{m}_I} = (R_J)_{\mathfrak{m}_J}$ であり，$\mathcal{O}_{X,P}$ は P を含む U_I の選び方に依存せずに定まる．

$\mathcal{O}_{X,P}$ を X の点 P における**局所環**とか**ストーク** (stoke) という．また，$f \in \mathrm{Rat}(X)$ が $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ を満たすとき，有理関数 f は点 P で**正則**であるという．U が X の開

集合で，f が U の任意の点で正則であるとき，f は U で正則であるとか，U 上の正則関数であるという．これは，$f \in \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ と同値である．

● p.69, 注意 2.4.6 の直前の 2 行

旧: ただし，代数曲線の特異点や，$\dim X \geqq 2$ の場合は，$f(P)$ の値を定められない点 $P \in X$ も存在する．このような点を f の**不確定点**という．

新: ただし，代数曲線の特異点や，$\dim X \geqq 2$ の場合は，P に収束する点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ の選び方によって $\lim_{n \to \infty} f(P_n) \in \mathbb{P}^1$ の値が変わってしまい，$f(P)$ の値を定められない点 $P \in X$ も存在する．このような点を f の**不確定点**という．

● p.69, 定義 2.4.7 の 1 行目

旧: X が代数多様体で，U はそのザリスキー開集合，

新: X は代数多様体で，U はそのザリスキー開集合，

● p.70, 命題 2.4.9

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 2.4.9. X は代数多様体，U, W は X の空でないアフィン開集合で，その座標環を R_U, R_W とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $U \cap W$ は $R_U \cdot R_W$ を座標環とする X の空でないアフィン開集合である．

(2) X の任意のザリスキー開集合 V は，ある有限個のアフィン開集合 $V_1, \ldots, V_m$ により，$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ と表せる．

(3) もし，$V = U \cup W$ もアフィン開集合で，R_V を V の座標環とするとき，ある $f, g \in R_V$ が存在して $U = D(f)$, $W = D(g)$ と書けると仮定すると，

$$R_{U \cap W} = R_U \cdot R_W = R_U + R_W$$

が成り立つ．

証明. (1) R_W は $\mathbb{C}$ 上有限生成な環なので，$R_W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_r]$ $(f_i \in \mathrm{Rat}(X))$ と書ける．よって，$R := R_U \cdot R_W = R_U[f_1, \ldots, f_r]$ も $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域だから，R はあるアフィン代数多様体 V の座標環になっている．包含写像 $R_U \subset R$ から定まる正則写像を $\varphi_U \colon V \to U$ とおく．点 $P \in U$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m}_P \subset R_U$ をとる．f_i は W 上で正則なので，もし $P \in U \cap W$ ならば $f_i(P) \in \mathbb{C}$ であり，

$$\frac{R}{\mathfrak{m}_P R} = \frac{R_U[f_1, \ldots, f_r]}{\mathfrak{m}_P R_U[f_1, \ldots, f_r]} = \frac{R_U}{\mathfrak{m}_P}[f_1(P), \ldots, f_r(P)] \cong \mathbb{C}$$

である．つまり，$\mathfrak{m}_P R$ は R の極大イデアルである．他方，$P \notin W$ の場合には，任意の $Q \in W$ に対して $\mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,Q} = \mathcal{O}_{X,Q}$ なので，$R_W \subset \mathfrak{m}_P R_W$ である．これより，$R \supset \mathfrak{m}_P R = R_U \cdot \mathfrak{m}_P R_W \supset R_U \cdot R_W = R$ なので，$\mathfrak{m}_P R = R$ である．以上のことは，φ_U が単射であることを意味する．同様に，包含写像 $R_W \subset R$ から定まる正則写像 $\varphi_W\colon V \to W$ も単射である．上の考察から，$P \in V$ に対して $\varphi_U(P) = \varphi_W(P) \in X$ であるから，φ_U, φ_W は，同じ単射 $\varphi\colon V \longrightarrow (U \cap W)$ を定め，環準同型 $\varphi^*\colon R_{U\cap W} \to R$ を引きおこす．

$U \cap W$ はアフィン代数多様体 U のザリスキー開集合だから，点 $P \in U \cap W$ をとるとき，P に対応する $R_{U\cap W}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．$R \subset \displaystyle\bigcap_{P \in U\cap W} \mathcal{O}_{X,P} = R_{U\cap W}$ だから，R の極大イデアル $\mathfrak{m} \cap R$ に対応する V の点 Q がある．$\psi(P) = Q$ によって，写像 $\psi\colon (U \cap W) \longrightarrow V$ が定義できる．$\varphi \circ \psi\colon (U \cap W) \longrightarrow (U \cap W)$ は恒等写像で，$\psi^* \circ \varphi^*\colon R_{U\cap W} \to R \to R_{U\cap W}$ は恒等写像である．よって，$U \cap W \cong V$, $R_{U\cap W} = R$ である．

(2)　U_i のあるアフィン開集合 $V_{i,1}, \ldots, V_{i,m_i}$ により $V \cap U_i = V_{i,1} \cup \cdots \cup V_{i,m_i}$ と表せる．$V_{i,j}$ は X のアフィン開集合でもあるので，(2) が成立する．

(3) は命題 2.1.24(2) から得られる．□

● p.71. 命題 2.4.11 の証明の 2 〜 3 行目

誤: Y は X の部分多様体なので，

正: Y は X の閉部分多様体なので，

● p.72, 命題 2.4.13

命題 2.4.13 とその証明を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 2.4.13a. X は代数多様体で，$U_1, \ldots, U_r$ は X のアフィン開集合とする．このとき，

(1) $U_1 \cap \cdots \cap U_r$ は $\mathcal{O}_X(U_1) \cdots \mathcal{O}_X(U_r) \subset \mathrm{Rat}(X)$ を座標環とする X のアフィン開集合である．

(2) $\mathcal{O}_X(U_1 \cup \cdots \cup U_r) = \mathcal{O}_X(U_1) \cap \cdots \cap \mathcal{O}_X(U_r)$.

(3) U は X のアフィン開集合，U_1, U_2 は U のアフィン開集合で，$U = U_1 \cup U_2$ かつ，U 内で $U_1 = D(f_1), U_2 = D(f_2)$ という形に書けるとき，

$$\mathcal{O}_X(U_1 \cap U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) + \mathcal{O}_X(U_2).$$

証明. (1) は明らか．(2) も定義より明らか．(3) は命題 2.4.9 よりわかる． □

● p.72, 定義 2.4.14 の最後の 3 行

旧原稿:

このとき命題 2.4.9 より，X のある閉部分集合 Y で，X の各アフィン開集合 U に対し，$\mathfrak{O}_X(U)/\mathfrak{I}(U)$ が $Y \cap U$ の座標環となるようなものが存在する．この Y を，$\mathfrak{I}$ を**定義イデアル** とする X 内の**代数的集合**という．

上の証明はやや難しいようなので，証明を追加することにし，以下の原稿と差し替えます．

[差し替え原稿]

命題 2.4.14b. $\mathfrak{I}$ が $\mathfrak{O}_X$ のイデアルのとき，X のある閉部分集合 Y で，X の各アフィン開集合 U に対し，$\mathfrak{O}_X(U)/\mathfrak{I}(U)$ が $Y \cap U$ の座標環となるようなものが存在する．この Y を，$\mathfrak{I}$ を**定義イデアル** とする X 内の**代数的集合**という．

証明. X の各アフィン開集合 U に対し，U の座標環 $\mathfrak{O}_X(U)$ のイデアル $\mathfrak{I}(U)$ が定める U の代数的集合を Y_U とする．$Y_U \subset U \subset X$ である．まず，U のアフィン開集合 $W = D(f)$ に対し $Y_W = W \cap Y_U$ が成り立つことは，$f' = (f \bmod \mathfrak{I}(U))$ とおくとき，イデアル層の定義より，$\mathfrak{O}_X(W)/\mathfrak{I}(W) = \big(\mathfrak{O}_X(U)/\mathfrak{I}(U)\big)[1/f']$ であることからわかる．これより，U の任意のアフィン開集合 W に対しても，$Y_W = W \cap Y_U$ が成り立つ．

さて，X のアフィン開被覆 $U_1, \ldots, U_r$ をとり，$Y = Y_{U_1} \cup \cdots \cup Y_{U_r}$ とおく．Y がアフィン開被覆の選び方に依存しないことは，前半の考察からわかる． □

● p.72, 命題 2.4.15

命題 2.4.15 を以下の原稿と差し替えて下さい．証明はもとのままです．

[差し替え原稿]

命題 2.4.15a. V は X のアフィン開集合，U_1, U_2 は V のアフィン開集合で，$V = U_1 \cup U_2$ かつ，V 内で $U_1 = D(f_1), U_2 = D(f_2)$ という形に書けるとき，

● p.74, 定理 2.4.18 の証明

定理 2.4.18 の証明を，以下の原稿と差し替えて下さい．

証明. (1) は，$Q(\mathfrak{O}_{Y,\varphi(P)}) = \mathrm{Rat}(Y)$, $Q(\mathfrak{O}_{X,P}) = \mathrm{Rat}(X)$ よりすぐわかる．

(2) φ は全射とする．任意の点 $Q \in Y$ に対し $\varphi(P) = Q$ を満たす点 $P \in X$ が存在する．$f \in \mathfrak{O}_{Y,Q}$ が $f \circ \varphi = 0 \in \mathfrak{O}_{X,P}$ を満たせば，P のある近傍の各点 P' で

$(f\circ\varphi)(P')=0$ である．よって，Q のあるアフィン開近傍 U の各点 Q' で $f(Q')=0$ である．ヒルベルトの零点定理より，$f=0\in\mathcal{O}_X(U)\subset\mathrm{Rat}(X)$ であり，φ_P^* は単射である．

(3) $\psi=\varphi^{-1}\colon Y\to X$ が正則写像であることを示す．任意の点 $Q\in Y$ をとり $P=\psi(Q)$ とおく．任意のザリスキー開集合 $P\in W\subset X$ と，十分小さいアフィン開集合 $Q\in U\subset Y$ をとる．$U'=\psi(U)=\varphi^{-1}(U)$ は X のザリスキー開集合であるが，$\mathcal{O}_Y(U')\cong\mathcal{O}_X(U)$ の極大イデアルと U' の点が 1 対 1 に対応するので，U' は X のアフィン開集合である．$U'\cap W\ni P$ は U' のザリスキー開集合なので，アフィン多様体の同型写像 $\varphi|_{U'}\colon U'\to U$ を通して，$U\cap\psi^{-1}(W)\ni Q$ は U のザリスキー開集合であることがわかる．よって，ψ は連続写像である．

$g\in\mathcal{O}_X(W)\subset\mathrm{Rat}(X)$ に対し，$\varphi^*(f)=f\circ\varphi=g$ を満たす $f\in\mathrm{Rat}(Y)$ が存在し，十分小さい U を取れば $f\in\mathcal{O}_Y(U)$ を満たす．$g\circ\psi=f$ だから，ψ は正則写像で，φ は同型写像である．　$\square$

● p.74 〜 75, 注意 2.4.19 の 6 〜 7 行目

誤: $\varphi^*(R)=\mathbb{C}[T^2,T^3]\subset\mathbb{C}[T]=R_V$ であり，$\varphi^*\colon R_W\to W_V$ は全射でない．

正: $\varphi^*(R_W)=\mathbb{C}[T^2,T^3]\subset\mathbb{C}[T]=R_V$ であり，$\varphi^*\colon R_W\to R_V$ は全射でない．

● p.75. 注意 2.4.19 の直後

重要事項の説明が欠落していました．注意 2.4.19 の後に次の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

定義 2.4.20. X は代数多様体，$Y\subset X$ はザリスキー閉集合とする．Y が**可約**であるとは，X の空でないザリスキー閉集合 Z_1, Z_2 で，$Z_1\cup Z_2=Y$, $Z_1\neq Y$, $Z_2\neq Y$ を満たすものが存在することをいう．Y が可約でないとき Y は**既約**であるという．

Y が $\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $\mathcal{I}$ を定義イデアルとする代数的集合のとき，X の各アフィン開集合 U に対して $\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U)$ が 0 以外の巾零元を持たないとき，Y は**被約**であるという．

この既約の定義が定理 2.1.34 の直後で与えた定義と本質的に一致することが次の定理からわかる．

命題 2.4.21. X は n 次元代数多様体，$\phi\neq W\subsetneq X$ はザリスキー開集合とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $X-W$ は有限個の $n-1$ 次元以下の X の閉部分多様体の和集合である．

(2) Y は W の閉部分集合とする．このとき，ザリスキー位相に関する X 内での Y の閉包 $\overline{Y}$ は，解析的位相に関する X 内での Y の閉包 Y' と一致する．また，$\overline{Y}\cap W = Y$ である．また，Y が W の閉部分多様体ならば $\overline{Y}$ は X の閉部分多様体で，$\dim \overline{Y} = \dim Y$ である．

証明. (1)　X のアフィン開被覆 $U_1,\ldots, U_m$ をとる．各 $(X-W)\cap U_i$ が U_i の $n-1$ 次元以下の閉部分多様体の和集合であることを証明すればよいので，最初から X はアフィン代数多様体であると仮定してよい．$X - W \subsetneqq X$ は X のザリスキー閉集合だから，それは有限個の $n-1$ 次元以下の閉部分多様体の和集合である．

(2)　Y が既約かつ被約で W の閉部分多様体である場合に証明すればよい．X のアフィン開被覆 $U_1,\ldots, U_m$ をとる．U_i における $Y\cap U_i$ のザリスキー閉包を Y_i とし，U_i における $Y\cap U_i$ の解析的閉包を Y_i' とするとき，$\overline{Y} = Y_1\cup\cdots\cup Y_m$, $Y' = Y_1'\cup\cdots\cup Y_m'$ である．そこで，最初から X はアフィン代数多様体であると仮定してよい．すると，$W = D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_r)$ と書けるので，$W = D(f_i)$ の場合に定理は帰着さる．ザリスキー閉集合は解析的閉集合だから，$\overline{Y}\supset Y'$ である．逆に，任意の点 $P\in\overline{Y}$ は $D(f_i)\cap Y$ 内の点列の解析的位相に関する極限として表せるので，$\overline{Y} = Y'$ である．$\overline{Y}\cap D(f_i) = Y\cap D(f_i)$ より $\overline{Y}\cap W = Y$ である．

また，Y が $W = D(f_i)$ 内の閉部分多様体のとき，$R_W = \mathcal{O}_X(W)$ における Y の定義イデアルを I_Y' とおき，$R_X = \mathcal{O}_X(X)$, $I_Y = I_Y'\cap R_X$ とおく．I_Y' は R_W の素イデアルだから，I_Y は R_X の素イデアルで，I_Y は R_X における $\overline{Y}$ の定義イデアルである．よって，$\overline{Y}$ は X の閉部分多様体で，$I_Y' = I_Y R_W$ だから，$\dim\overline{Y} = \dim Y$ である．□

定理 2.4.22.　X は代数多様体とする．

(1) $Z\subset X$ が既約なザリスキー閉集合ならば，Z は代数多様体の構造を持つ．

(2) X が射影代数多様体で，$Z\subset X$ が既約なザリスキー閉集合ならば，Z は射影代数多様体の構造を持つ．

(3) X は射影代数多様体，Y は代数多様体，$\varphi\colon X\to Y$ は正則写像とする．このとき，$\varphi(X)$ は Y の既約なザリスキー閉集合である．

証明. (1)　まず，一般に Z は X の (既約とは限らない) ザリスキー閉集合とする．$U\subset X$ を勝手なアフィン開集合とする．$Z\cap U$ はアフィン代数多様体 U のザリスキー閉集合だから，U の相異なる部分代数多様体 $V_1,\ldots, V_r$ を選んで $Z\cap U = V_1\cup\cdots\cup V_r$ と書ける．素イデアル $\mathfrak{p}_i\subset\mathcal{O}_X(U)$ を V_i の定義イデアルとし，$I_U = \mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_r$ とおく．この右辺は I_U の準素イデアル分解であることに注意

する．$Z \cap U = V_U(I_U) = U - D_U(I_U)$ と書ける．$\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $\mathcal{I}$ を $\mathcal{I}(U) = I_U$ によって定義する．アフィン開集合 $W \subset U$ に対し $I_W = I_U \cdot \mathcal{O}_X(W)$ が成り立つことは，容易に確認できる．この $\mathcal{I}$ を Z の**被約構造を定める定義イデアル**という．

さて，Z が既約な場合には，$Z \cap U$ も既約なので，$r \leqq 1$ である．したがって，I_U は素イデアルになる．このとき $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_X$ の**素イデアル**であるという．

$X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ とアフィン開被覆で覆われているとき，$U_i' = Z \cap U_i$, $R_i' = \mathcal{O}_X(U_i)/\mathcal{I}(U_i)$ と定める．ただし，$U_i' = \phi$ となる i は取り除いておく．これにより自然に $Z = U_1' \cup \cdots \cup U_r'$ に代数多様体の構造が定まる．

(2)　X の座標環 R はある多項式環 $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ とその斉次素イデアル I_X を選んで $R = S/I_X$ と書ける．

$$I_Z = \{F \in R \mid \text{任意の点 } P \in Z \text{ に対し } F(P) = 0\}$$

とおくと，Z が既約のとき I_Z が R の斉次素イデアルになることは容易に証明できる．自然な全射 $\pi: S \to R$ による I_Z の逆像を $J = \pi^{-1}(I_Z)$ とおけば，J は S の斉次素イデアルで，$R/I_Z \cong S/J$ なので，Z は射影代数多様体の構造を持つ．

(3)　$\varphi(X)$ の Y におけるザリスキー位相に関する閉包を Z とする．定理 2.2.28(4) より，Z の空でないアフィン開集合 U で $U \subset \varphi(X)$ となるものが存在する．Z における U の閉包は，ザリスキー位相で考えても解析的位相で考えても Z に一致する．ところで，X は解析的位相に関してコンパクトであるから $\varphi(X)$ も解析的位相に関してコンパクトで，Z の解析的閉集合である．上の考察から $\varphi(X) = Z$ である．　□

命題 2.4.23.　X は代数多様体，Y は X の部分代数多様体とする．

(1) Y が X の解析的開集合であることと，Y が X のザリスキー開集合であることは同値である．

(2) Y が X の解析的閉集合であることと，Y が X のザリスキー閉集合であることは同値である．

証明. Y が X の部分多様体なので，X のあるザリスキー開集合 U が存在して，Y は U のザリスキー閉集合である．

(1)　X のザリスキー開集合は解析的開集合なので，Y が X の解析的開集合の場合を考える．すると，Y は U の解析的開集合でもある．Y は U の解析的閉集合でもあり，U は連結なので $Y = U$ となり，Y ザリスキー開集合である．

(2)　命題 2.4.21(2) より，Y の X における解析的閉包とザリスキー閉包は一致し，それは Y に等しい．　□

一般に，位相空間 X, Y と連続写像 $\varphi\colon X \to Y$ について，X の任意の開集合 U に対し $\varphi(U)$ が Y の開集合になるとき φ は**開写像**であるといい，X の任意の閉集合 Z に対し $\varphi(Z)$ が Y の閉集合になるとき φ は**閉写像**というのであった．

命題 2.4.24. X, Y は代数多様体，$\varphi\colon X \to Y$ は正則写像とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) X, Y がアフィン代数多様体で，$W = \varphi(X)$ が Y のザリスキー開集合ならば，$\varphi\colon X \to W$ はザリスキー位相についても，解析的位相についても，開かつ閉写像である．

(2) $\varphi\colon X \to Y$ がザリスキー位相に関して開写像であることと，解析的位相に関して開写像であることは同値である．

(3) $\varphi\colon X \to Y$ がザリスキー位相に関して閉写像であることと，解析的位相に関して閉写像であることは同値である．

証明. (1) $R_X = \mathcal{O}_X(X), R_Y = \mathcal{O}_Y(Y)$ とする．定理 2.2.28a(1) より，$\varphi^*\colon R_Y \to R_X$ は単射である．勝手なイデアル $I \subsetneqq R_X$ をとる．$J = (\varphi^*)^{-1}(I) \subsetneqq R_Y$ は R_Y のイデアルである．容易にわかるように，$\varphi(V_X(I)) = V_Y(J) \cap W, \varphi(D_X(I)) = D_Y(J) \cap W$ である．よって，$\varphi\colon X \to W$ はザリスキー位相に関して開かつ閉写像である．

定理 2.1.29 より，X, Y を適当なアフィン空間 $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$ のアフィン代数多様体として表すと，φ は多項式写像 $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ から得られる．ここで，φ を定義するどの多項式 $Y_i = F_i(X_1, \ldots, X_n)$ も定数多項式でないと仮定してよい．$(a_1, \ldots, a_n) \in X$ をとり，$b_i = F_i(a_1, \ldots, a_n)$ とおく．複素正則関数の性質から，$\mathbb{C}^n$ の開集合の F_i による像は $\mathbb{C}$ の開集合である ($n = 1$ の場合は，例えば，アールフォルス「複素解析」現代数学社，p.141 の系 1 参照．$n \geqq 2$ の場合は帰納法ですぐ証明できる)．このことから，φ は解析的開写像であることがわかる．

φ が解析的閉写像であることを示すには，X の解析的有界閉集合 Z に対し $\varphi(Z)$ が W の閉集合であることを示せばよい．Z は解析的コンパクト集合で，φ は解析的連続写像なので，$\varphi(Z)$ も解析的コンパクトであり，$\varphi(Z)$ は解析的閉集合である．

(2) φ がザリスキー開写像の場合を考える．X, Y の適当なアフィン開被覆をとって考えれば，(1) の設定に帰着される．$\varphi(X)$ はアフィン多様体 Y のザリスキー開集合なので，(1) より φ は解析的開写像である．

次に，φ が解析的開写像の場合を考える．$\varphi(X)$ は Y の解析的開集合であるが，命題 2.4.23 より $\varphi(X)$ は Y のザリスキー開集合である．すると，(1) に帰着される．

(3) φ がザリスキー閉写像の場合も解析的閉写像の場合も，命題 2.4.23 より $\varphi(X)$

は Y のザリスキー閉集合である．Y のかわりに $\varphi(X)$ を考えることにより，φ は全射であると仮定してよい．すると，議論は (1) の場合に帰着され，結論を得る．□

● p.75, 命題 2.5.1 の証明

命題 2.5.1 の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. 命題 2.2.24 よりすぐわかる．□

● p.75, 定理 2.5.3 の 2 行目

誤: $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}} R_{\tilde{\mathfrak{m}}}$,

正: $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}} \tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$,

● p.75, 定理 2.5.3(1) の証明の 1 行目

誤: $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \tilde{R}$ を，

正: $x_1, x_2, \ldots, x_d \in R$ を，

● p.75, 命題 2.5.1(2) の証明

定理 2.5.3(2) の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

(2)　$\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ であるので，$\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ は $x_1, \ldots, x_d$ の r 次単項式全体で生成される．あと，$x_1, \ldots, x_d$ が $\mathbb{C}$ 上代数的独立であることを示せばよい．

$d = 1$ のときは自明である．$d \geqq 2$ とする．素イデアル列 $(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ を $(x_1, \ldots, x_i) \subset \mathfrak{p}_i$ となるように取れる ($(x_1, \ldots, x_i)R_{\mathfrak{p}_{i+1}}$ の極小素因子と R の共通部分を $\mathfrak{p}_i$ とおけばよい)．$R/\mathfrak{p}_1$ は $(x_2, \ldots, x_d)$ を極大イデアルとする正則局所環なので，帰納法の仮定から $x_2, \ldots, x_d$ は代数的独立である．$f \in \mathfrak{p}_d - \mathfrak{p}_{d-1}$ を，その像が $R/\mathfrak{p}_{d-1}$ 上超越的な元であるように選ぶ．$\sqrt{fR + \mathfrak{p}_{d-1}} = \mathfrak{p}_d$ なので，ある $m \in \mathbb{N}$ と $0 \neq a \in R - \mathfrak{p}_d$ により $x_d^m - af \in \mathfrak{p}_{d-1}$ と書ける．$f, x_2, \ldots, x_n$ は代数的独立なので，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ も数的独立である．□

● p.77, 定理 2.5.5 の証明

定理 2.5.5 の証明は，このままだと理解が難しいようなので，もっと丁寧に書くことにします．以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明.* $P=(a_1,\dots, a_n)\in\mathbb{C}^n$, $\tilde{R}=S/I$ とし，$\pi\colon S\twoheadrightarrow\tilde{R}$ を自然な全射とする．また，$\mathfrak{M}=(X_1-a_1,\dots, X_n-a_n)\subset S$, $\tilde{\mathfrak{m}}=\pi(\mathfrak{M})$ とする．$X_i'=X_i-a_i$ を X_i の代わりに考えることにより，$a_1=\cdots=a_n=0$ であると仮定してよい．$R=\tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$, $\mathfrak{m}=\tilde{\mathfrak{m}}\tilde{R}_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ とおくと，$\mathcal{O}_{X,P}=R$ でその極大イデアルは $\mathfrak{m}$ である．

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)+\operatorname{rank}J(P)=n$$

を証明する．そうすれば，定理が証明される．

$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\cong\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2$ を示す．包含写像 $\tilde{\mathfrak{m}}\subset\mathfrak{m}$ と自然な全射を合成して，$\rho\colon\tilde{\mathfrak{m}}\to\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を作る．$\tilde{\mathfrak{m}}$ は準素イデアルなので定理 2.2.3(10) より．$\operatorname{Ker}\rho=\mathfrak{m}^2\cap\tilde{\mathfrak{m}}=\left(\tilde{\mathfrak{m}}^2R\cap\tilde{R}\right)\cap\tilde{\mathfrak{m}}=\tilde{\mathfrak{m}}^2\cap\tilde{\mathfrak{m}}=\tilde{\mathfrak{m}}^2$ である．よって，準同型定理により，$\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2\cong\operatorname{Im}\rho$ である．他方，R-加群として $\mathfrak{m}$ は $\tilde{\mathfrak{m}}$ で生成されるので，$R/\mathfrak{m}\cong\mathbb{C}$-加群として $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は $\tilde{\mathfrak{m}}$ の像で生成される．よって，ρ は全射で，$\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2\cong\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ である．さらに，π に準同型定理を適用して，

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\cong\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2\cong\mathfrak{M}/(I+\mathfrak{M}^2)$$

が得られる．

$g\in S$ に対し，

$$\tilde{\varphi}(g)=\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}(P),\dots,\frac{\partial g}{\partial X_n}(P)\right)\in\mathbb{C}^n$$

として準同型写像 $\tilde{\varphi}\colon S\to\mathbb{C}^n$ を定義する．g の定数項を $g_0\in\mathbb{C}$ とし，g の 1 次の項を $g_1=c_1X_1+\cdots+c_nX_n\in\mathfrak{M}$, g の 2 次以上の項を $g_2\in\mathfrak{M}^2$ とする．$g=g_0+g_1+g_2$ である．P は原点としておいたので，$\dfrac{\partial g}{\partial X_i}(P)=c_i$ で，$\tilde{\varphi}(g)=(c_1,\dots, c_n)$ である．また，$g\in\mathfrak{M}^2$ のとき $\tilde{\varphi}(g)=0$ なので，$\tilde{\varphi}$ から写像 $\varphi\colon\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2\to\mathbb{C}^n$ が誘導される．$\varphi(X_1),\dots, \varphi(X_n)$ は $\mathbb{C}^n$ の基本ベクトル (標準基底) になるので，φ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間の同型写像である．

$\tilde{\varphi}(f_1),\dots, \tilde{\varphi}(f_r)$ で生成される $\mathbb{C}^n$ の部分 $\mathbb{C}$-ベクトル空間を W とすると，$\dim_{\mathbb{C}}W=\operatorname{rank}J(P)$ である．したがって，$f_1,\dots, f_r$ の $\mathfrak{M}^2$ を法とする同値類で生成される $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2$ の部分 $\mathbb{C}$-ベクトル空間を V とすると，$V\cong W$ で，$\dim_{\mathbb{C}}V=\operatorname{rank}J(P)$ である．

自然な全射 $\psi\colon(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)\twoheadrightarrow(\mathfrak{M}/(I+\mathfrak{M}^2))$ を考えると，$I=(f_1,\dots, f_r)$ なので $V=\operatorname{Ker}\psi$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}J(P)&=\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ker}\psi)=\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2)-\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{M}/(I+\mathfrak{M}^2))\\&=n-\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)\end{aligned}$$

である． □

● p.78, 定理 2.5.7 の証明の 4 行目

追加: 「$V = \mathrm{Ker}\,\psi$ の，標準内積に関する直交補空間になっている.」という文章の後に，次の 1 文を追加して下さい.

「ここで，$\mathbf{a} = (a_1,\ldots, a_n)$ と $\mathbf{b} = (b_1,\ldots, b_n)$ の標準内積とは，エルミート内積ではなくて $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ を指す.」

● p.80 〜 81, 定理 2.5.12

定理 2.5.12 を以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定理 2.5.12a.　X は代数多様体，$P \in X$ は非特異点，$(f_1,\ldots,f_d)$ は $\mathcal{O}_{X,P}$ の正則パラメータ系とする．このとき，以下が成り立つ.

(1) P のあるアフィン開近傍 U で，$(f_1,\ldots,f_d)$ が U 上の広義局所座標系になるようなものが存在する．このような U を P の**座標開近傍**とよぶ.

(2) P のある解析的開近傍 U で，$(f_1,\ldots,f_d)$ が U 上の狭義局所座標系になるようなものが存在する.

証明. (1)　P のアフィン開近傍を $U_0 \subset X - \mathrm{Sing}\,X$ となるようにとる．$f_i \in \mathrm{Rat}(X)$ と考え，f_i が正則になるようなアフィン開集合 U_i をとる．$V = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_d$ とする．ある n をとり，V を $\mathbb{C}^n$ 内のアフィン代数多様体と考える．$S = \mathbb{C}[X_1,\ldots, X_n]$ における V の定義イデアルを $(G_1,\ldots, G_r)$ とする．また，f_i を $F_i \in S$ の同値類とする．$Q \in V$ に対し，$\dfrac{\partial F_i}{\partial X_j}(Q)$ (ただし $1 \leqq j \leqq d$) を $(i,\, j)$-成分とする d 次正方行列を $A(Q)$ とする．また，$\dfrac{\partial G_i}{\partial X_j}(Q)$ (ただし $1 \leqq i \leqq n-d,\ d+1 \leqq j \leqq n$) を $(i,\, j-d)$-成分とする $n-d$ 次正方行列を $J(Q)$ とする．定理 2.2.5 の証明より，必要なら G_i, X_j の添え字を適当につけかえて，$\det A(P) \neq 0$, $\det J(P) \neq 0$ と仮定してよい．すると，$\det A(Q) \neq 0$ かつ $\det J(Q) \neq 0$ を満たす点 $Q \in V$ 全体のなすアフィン開集合 U 上で，$(f_1,\ldots, f_d)$ は U の広義局所座標系になる.

(2) は多変数関数論における陰関数定理からわかる. □

定理 2.5.12b.　X は非特異代数多様体，$Y \subset X$ は非特異な閉部分代数多様体，$P \in Y$ で $n = \dim X$, $r = \dim Y$ とする．すると，X における P の座標開近傍 U と，U 上の広義局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ で，以下の条件 (1), (2) を満たすものが存在する.

(1) U における $Y \cap U$ の定義方程式は $x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$ である.

(2) 正則関数 $x_i: U \to \mathbb{C}$ の定義域を $Y \cap U$ に制限したものを y_i とすれば，$(y_1,\ldots, y_r)$ は $Y \cap U$ における広義局所座標系になる．

証明. $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ を $\mathcal{O}_{X,P}$, $\mathcal{O}_{Y,P}$ の極大イデアル，$\varphi: \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,P}$ を自然な全射とする．$I := \operatorname{Ker}\varphi \subset \mathfrak{m}$ は P のある近傍での Y の定義イデアルである．φ から誘導される $\overline{\varphi}_k: \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1} \longrightarrow \mathfrak{n}^k/\mathfrak{n}^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ は全射である．$\mathcal{O}_{Y,P}$ の正則パラメータ系 $(y_1,\ldots, y_r)$ を取り，$\varphi(x_i) = y_i$ となるような $x_1,\ldots, x_r \in \mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{X,P}$ を取る．$\operatorname{Ker}\overline{\varphi}_1 = I/(I \cap \mathfrak{m}^2)$ なので，$x_{r+1},\ldots, x_n \in I$ を適当に取ると，$\mathfrak{m}^2$ を法とする同値類 $\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n$ は $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の基底になる．$J := (x_{r+1},\ldots, x_n) \subset I$ とおく．$\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ は $x_1,\ldots, x_n$ の k 次単項式の像で生成されるので，$\operatorname{Ker}\overline{\varphi}_k = (I \cap \mathfrak{m}^k)/(I \cap \mathfrak{m}^{k+1}) = \mathfrak{m}^{k-1}J/(\mathfrak{m}^{k-1}J \cap \mathfrak{m}^k)$ である．よって，$I = J + (I \cap \mathfrak{m}^2)$, $I \cap \mathfrak{m}^k = \mathfrak{m}^{k-1}J + (I \cap \mathfrak{m}^{k+1})$ $(k \in \mathbb{N})$ である．これより，$I = J + \mathfrak{m}I$ がわかり，中山の補題より $I = J$ である．前定理 (1) より，P のアフィン開近傍 $U \subset X$ を十分小さく選べば，この U と $(x_1,\ldots, x_n)$ が題意を満たす． □

定理 2.5.12c. X が代数多様体ならば，X には非特異点が存在する．よって，X の非特異点全体の集合は X の空でないザリスキー開集合であり，$\dim(\operatorname{Sing} X) < \dim X$ である．

証明. X がアフィン多様体の場合に証明すれば十分である．$n = \dim X$, R は X の座標環とすると，$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{C}} Q(R) = n$ なので，R 内に $\mathbb{C}$ 上代数的独立な元 $f_1,\ldots, f_n$ が存在する．十分小さい X の解析的開集合 U を選べば，$P \in U$ に対して $(f_1(P),\ldots, f_n(P)) \in \mathbb{C}^n$ を対応させる写像 $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ は単射になる．よって，$(f_1,\ldots, f_n)$ は U の狭義局所座標系である．このとき，U 上の任意の点は X の非特異点である． □

● p.82, 定理 2.5.15 の証明の最後から 5 〜 7 行目

$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ は同型写像である．これより，

$$\mathcal{O}_{X,P} = \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_{X,P} + \varphi^*\mathcal{O}_{Y,Q}$$

である．

という部分で,「これより,」以下の部分を，以下の原稿に差し替えて下さい．

よって $\mathfrak{m}_P = \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_{X,P} + \mathfrak{m}_P^2$ である．中山の補題より，$\varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P$ が得られる．$\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P \cong \mathbb{C}$ なので，$\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P + \mathbb{C}$ である．ここで，$\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_{X,P}$ は定数関数全体の集合と同一視される．$\mathbb{C} \subset \varphi^*\mathcal{O}_{Y,Q}$ なので，$\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P + \mathbb{C} \subset \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_{X,P} + \varphi^*\mathcal{O}_{Y,Q}$ であり，

$$\mathcal{O}_{X,P} = \varphi^*(\mathfrak{m}_Q)\mathcal{O}_{X,P} + \varphi^*\mathcal{O}_{Y,Q}$$

が得られる．

● p.83, 定理 2.5.17 の証明の 3 〜 6 行目

以下と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

C_2 はコンパクトだから $\{f(P_i)\}$ はある点 $Q \in C_2$ に収束する部分列を含むが，$C_1 - U$, $C_2 - W$ は有限集合で，$\mathbb{C}$ 内の単位開円板と同相な P, Q の解析的開近傍が存在するので，この点 Q は P に収束する点列 $\{P_i\}$ の選び方に依存しない．

● 初版 p.83 定理 2.5.18 の証明の最後から 6 行目〜 5 行目.

誤: R は $\mathbb{C}$ 上有限生成な環なので，命題 2.4.9 より，ある $g \in R_U$ により $R = R_U[1/g]$ と書ける．このとき，R は $U_0 = D(g) \subset U$ の座標環である．

正: R は $\mathbb{C}$ 上有限生成な環なので，U のあるアフィン開集合 U_0 の座標環になる．

● p.84 〜 85. 第 2.6.1 項全部と 2.6.2 項の冒頭

定義 2.6.1 の中で I が素イデアルになることを，うっかりしていました．その証明を命題 2.6.2b(2) に追加して，下記の原稿と差し替えます．一般には整域同士のテンソル積は整域になるとが限らないのですが，この場合はヒルベルトの零点定理があるので大丈夫でした．

2.6.1. 直積多様体

一般の代数多様体の直積の定義は，ちょっと面倒なので，アフィン代数多様体の直積から始める．

定義 2.6.1. (2 つのアフィン代数多様体の直積) V は $\mathbb{C}^n$ 内のアフィン代数多様体で，W は $\mathbb{C}^m$ 内のアフィン代数多様体とする．$\mathbb{C}^n$ の座標系を $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)$, $\mathbb{C}^m$ の座標系を $\mathbf{y} = (y_1,\dots, y_m)$ とし，V, W の定義イデアルを

$$I_V = (f_1, \dots, f_r), \quad I_W = (g_1, \dots, g_s)$$

とし，座標環を

$$R_V = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/I_V, \quad R_W = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]/I_W$$

とする．直積集合

$$V \times W = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \;\middle|\; \mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in W\right\}$$

を考える．$(m+n)$ 変数多項式環 $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$ を考える．$f_1,\dots, f_r$, $g_1,\dots, g_s \in S$ とみなせる．$V \times W$ は $\mathbb{C}^{n+m}$ 内で $f_1 = \cdots = f_r = g_1 = \cdots = g_s = 0$

で定まる代数的集合である．$I = (f_1,\ldots, f_r, g_1,\ldots, g_s) \subset S$ とする．次の命題 2.6.2b(2) より I は素イデアルであるので，$R := S/I$ を座標環とするアフィン代数多様体 $V \times W$ を V と W の**直積**と言う．

包含写像 $R_V \subset R$, $R_W \subset R$ が正射影 $V \times W \to V$, $V \times W \to W$ に付随する座標環の準同型写像である．

命題 2.6.2b. (1) $V \times W$ は既約な代数的集合である．

(2) I は S の素イデアルである．

(3) V, W が非特異ならば，$V \times W$ は非特異である．

証明. (1) $V \times W$ のあるザリスキー閉集合 $Z_1, Z_2 \neq V \times W$ により，$V \times W = Z_1 \cup Z_2$ と書けたとする．$V_i = \{x \in V \mid x \times W \subset Z_i\}$ とおくと，$V = V_1 \cup V_2$ である．V は既約だから，$V = V_1$ または $V = V_2$ が成り立つ．しかし，$V = V_i$ とすると，$V \times W = Z_i$ となり矛盾する．したがって，$V \times W$ は既約である．

(2) S のイデアル $I_V^S = (f_1, \ldots, f_r)$, $I_W^S = (g_1, \ldots, g_s)$ を考える．$I_V^S + I_W^S = I$ である．また，$J := \{h \in S \mid$ 任意の $P \in V, Q \in W$ に対して $h(P,Q) = 0\}$ とおく．$V \times W$ が既約で $\sqrt{J} = J$ なので J は S の素イデアルで，$I \subset J$ である．

$J \subset I$ を示す．勝手な $\psi \in J$ を取る．一般に $\varphi \in S$ に対し，I_V^S を法とした同値類を $\overline{\varphi} \in S/I_V^S$ と書くことにする．$X = (X_1,\ldots, X_n)$, $Y = (Y_1,\ldots, Y_m)$ と略記すると，$S/I_V^S = R_V[Y]$ なので，ある $h_1,\ldots, h_t \in \mathbb{C}[Y] \subset S$ と，$a_1,\ldots, a_s, b_1,\ldots, b_t \in \mathbb{C}[X] \subset S$ を取り，$\overline{\psi} = \overline{a_1}g_1 + \cdots + \overline{a_s}g_s + \overline{b_1}h_1 + \cdots + \overline{b_t}h_t$ と書ける．ここで，$g_1,\ldots, g_s, h_1,\ldots, h_t$ は $\mathbb{C}$ 上線形独立であるように選べる．$\psi \in J$, $g_i \in I_W$ だから，任意の $P \in V, Q \in W$ に対し，

$$\begin{aligned}0 &= \overline{\psi}(P,Q) = \overline{a_1}(P)g_1(Q) + \cdots + \overline{a_s}(P)g_s(Q) + \overline{b_1}(P)h_1(Q) + \cdots + \overline{b_t}(P)h_t(Q)\\ &= b_1(P)h_1(Q) + \cdots + b_t(P)h_t(Q)\end{aligned}$$

である．$P \in V$ を固定したとき，ヒルベルトの零点定理から，$b_1(P)h_1(Y) + \cdots + b_t(P)h_t(Y) \in I_W$ である．$g_1(Y),\ldots, g_s(Y), h_1(Y),\ldots, h_t(Y)$ は $\mathbb{C}$ 上線形独立であるから $b_1(P) = \cdots = b_s(P) = 0$ である．$P \in V$ を動かすと $\overline{b_1} = \cdots = \overline{b_s} = 0$ で，$\overline{\psi} = \overline{a_1}g_1 + \cdots + \overline{a_s}g_s$ である．$\psi_2 = a_1g_1 + \cdots + a_sg_s \in I_W^S$ とする．$\overline{\psi} - \overline{\psi_2} = 0 \in S/I_V^S$ だから，$\psi_1 := \psi - \psi_2 \in I_V^S$ である．よって，$\psi = \psi_1 + \psi_2 \in I_V^S + I_W^S = I$ となる．したがって，$J \subset I$ で $I = J$ となる．

(3) $P \in V, Q \in W$ に対し，$\mathcal{O}_{V,P}$ の正則パラメータ系を $(x_1,\ldots, x_d)$ とし，$\mathcal{O}_{W,Q}$ の正則パラメータ系を $(y_1,\ldots, y_e)$ とする ($d = \dim V$, $e = \dim W$)．$P \times Q \in V \times W$ が非特異点であることを示す．

$P \times Q \in V \times W$ に対応する R の極大イデアルは $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P R + \mathfrak{m}_Q R$ ($\mathfrak{m} \subset R_V$, $\mathfrak{m}_P \subset R_W$ は点 P, Q に対応する極大イデアル) と書ける．そこで，x_i, $y_j \in \mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ とみなせる．$\mathfrak{m}_P R \subset (x_1,\ldots, x_d)R + \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{m}_Q R \subset (y_1,\ldots, y_e)R + \mathfrak{m}^2$ であるから，$(x_1,\ldots, x_d, y_1,\ldots, y_e)$ は $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を生成し，$\dim(V \times W) = d + e$ であるから，これは $\mathcal{O}_{V\times W,(P,Q)}$ の正則パラメータ系である． □

参考 2.6.3. テンソル積で表せば，

$$S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_m]$$
$$S/I = (\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I_V) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_m]/I_W)$$

である．

注意 2.6.4. $V \times W$ のザリスキー位相は，$V \times W \subset \mathbb{C}^{m+n}$ によって，$\mathbb{C}^{m+n}$ のザリスキー位相から定まる位相である．この位相は，V のザリスキー位相と W のザリスキー位相の直積位相とは一致しない．

2.6.2. 射影多様体の直積

X, Y は代数多様体で，$\{U_1,\ldots, U_p\}$ は X のアフィン開被覆，$\{W_1,\ldots, W_q\}$ は Y のアフィン開被覆とする．集合として $U_i \times W_j \subset X \times Y$ で，

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{j=1}^{q} U_i \times W_j$$

である．ここで，各 $U_i \times W_j$ はアフィン代数多様体の構造を持っている．$\{U_i \times W_j \mid 1 \leqq i \leqq p, 1 \leqq j \leqq q\}$ を $X \times Y$ のアフィン開被覆として，集合 $X \times Y$ に代数多様体の構造を定めることができる．

定義 2.6.5. (ここからは，もとの本のまま)

● p.85, 定義 2.6.5 の 6 行目
誤: これは多項式写像なので，射影多様体の正則写像であり，
正: これは多項式写像なので，代数多様体の正則写像であり，

● p.86, 定理 2.6.7 の証明の 3 〜 4 行目
誤: $X_0^2 = 0$ と $X_0^2 + X_1^2 = 0$ は既約な代数的集合ではなく，
正: $X_0^2 = 0$ と $X_0^2 + X_1^2 = 0$ の左辺は既約ではなく，

● p.86, 定理 2.6.7 の証明の最後から 3 行目

誤: $Z_0 = X_0 + \sqrt{-1}X_2$, $Z_3 = X_0 - \sqrt{-1}X_2$, $Z_1 = X_2 + \sqrt{-1}X_3$, $Z_4 = -X_2 + \sqrt{-1}X_3$
正: $Z_0 = X_0 + \sqrt{-1}X_1$, $Z_1 = X_2 + \sqrt{-1}X_3$, $Z_2 = -X_2 + \sqrt{-1}X_3$, $Z_3 = X_0 - \sqrt{-1}X_1$

● p.86, 定義 2.6.8 の 2 行目
誤: Y は $\mathbb{P}^n$ 内の射影代数多様体とする．
正: Y は $\mathbb{P}^m$ 内の射影代数多様体とする．

● p.86, 定義 2.6.8 の 5 〜 6 行目
修正前: アフィン代数多様体の場合と同様に証明できる．
修正誤: アフィン代数多様体の場合の結果 (命題 2.6.2) からわかる．

● 初版 p.86 (新装版では修正済み)
第 2 章の演習問題 2 の直前 (第 2 章本文の最後) に，次の原稿を追加して下さい．
[追加原稿]

2.6.3.　次元定理

命題 2.6.9. V は非特異代数多様体，X, Y は V の閉部分多様体で，Z は $X \cap Y$ の既約成分であると仮定すると，

$$\dim Z \geqq \dim X + \dim Y - \dim V$$

が成り立つ．($X \cap Y = \phi$ の場合もあるので注意すること.)

証明. Step 1. $V = \mathbb{C}^n, \dim X = m$ で X が $V = \mathbb{C}^n$ 内で $n-m$ 個の多項式の連立方程式 $f_1 = \cdots = f_{n-m} = 0$ で定まるアフィン多様体の場合を考える．R_Y を Y の座標環とすると，Z はイデアル $(\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_{n-m}}) \subset R_Y$ の極小素因子 $\mathfrak{p}$ に対応する．命題 2.2.24 より，$\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leqq n-m$ である．したがって，

$$\dim Z = \dim Y - \operatorname{ht}\mathfrak{p} \geqq \dim Y - (\dim V - \dim X)$$

が成り立つ．

Step 2. $V = \mathbb{C}^n$ で，X, Y が一般の場合を考える．
$\Delta = \{(x, x) \in V \times V \mid x \in V\}$ とする．対角写像 $\varphi: V \longrightarrow \Delta$ $(\varphi(x) = (x, x))$ は同型写像で，$X \cap Y \xrightarrow{\varphi} ((X \times Y) \cap \Delta)$ も同型写像である．Step 1 の結果から，

$$\dim \varphi(Z) \geqq \dim(X \times Y) + \dim \Delta - \dim(V \times V) = \dim X + \dim Y + n - 2n$$

なので結論を得る．

Step 3. V が一般の非特異代数多様体の場合を考える．

点 $P \in Z$ をとり，P を含む V の座標開集合 $P \in U \subset V$ をとり，$(x_1, \ldots, x_n)$ $(n = \dim V)$ をその広義局所座標系とする．正則関数の組 $(x_1, \ldots, x_n)$ により，正則写像 $\varphi: U \to \mathbb{C}^n$ が定まる．$(x_1, \ldots, x_n)$ が狭義局所座標系になるような適当な解析的開集合 $P \in W \subset U$ に制限すれば，$\varphi|_W: W \to \varphi(W)$ は同型写像である．したがって，Step 2 の場合に問題が帰着される．□

注意 2.6.10. V の特異点集合上で X と Y が交わる場合には上の定理は成立しない．例えば，

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid xw = yz\}$$
$$X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid x = y = 0\}$$
$$Y = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid z = w = 0\}$$

とすると，$X \subset V, Y \subset V$ で $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$ (原点 1 点のみからなる集合) である．

$$\dim(X \cap Y) = 0, \quad \dim X = \dim Y = 2, \quad \dim V = 3$$

なので，$\dim(X \cap Y) < \dim X + \dim Y - \dim V$ となる．

● 初版 p.88, 新装版 p.90.

第 2 章の演習問題 2 の最後に，次の問題を追加して下さい．

[追加問題]

2.10. (1) R は整域とは限らない可換環，S は R の部分集合で，(i)「$s, t \in S \Longrightarrow st \in S$」と (ii)「$0 \notin S$」を満たすとする．このとき，$S$ は R の**積閉集合**であるという．いま，$a \in R$ と $s \in S$ を用いて 分数 a/s の形で表される元全体の集合を $S^{-1}R$ と書く．ところで，$s \in S$ と $0 \neq a \in R$ に対して $as = 0$ となる可能性はあることに注意する．したがって，2 つの分数が等しいことの定義を，

$$\frac{a_1}{s_1} = \frac{a_2}{s_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ある } t \in S \text{ に対して } t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$$

$(a_1,\ a_2 \in R;\ s_1,\ s_2 \in S)$ と変更しないといけない．このように定義すると，$a_1/s_1 = a_2/s_2$ かつ $a_2/s_2 = a_3/s_3$ ならば $a_1/s_1 = a_3/s_3$ が成り立ち，和と積が自然に矛盾なく定義できて $S^{-1}R$ は可換環になることを示せ．

(2) $\mathfrak{p}$ が R の素イデアルのとき，$S_{\mathfrak{p}} = R - \mathfrak{p}$ は積閉集合である．このとき，$S_{\mathfrak{p}}^{-1}R$ を $R_{\mathfrak{p}}$ と書く．R が整域の場合，この定義は定義 2.2.4 と同値である．さて，X は $\mathbb{C}^n$ 内の代数的集合，Y は X の既約成分で，R_X, R_Y はそれらの座標環とする．いま，R_X は巾零元を持たないと仮定する．このとき，R_Y は整域である．さらに，点 $P \in Y$ は Y 以外の X の既約成分には含まれないと仮定する．点 P に対応する R_X, R_Y の極大イデアルをそれぞれ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ とする．このとき，自然な全射 $R_X \to R_Y$ か

ら写像 $\varphi\colon (R_X)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (R_Y)_{\mathfrak{n}}$ が誘導され，φ は同型写像になることを証明せよ．また，X の被約性を仮定しない場合はどうなるか．

(3) S_1 を R の非零因子全体の集合とすると，S_1 は積閉集合である．この $S_1^{-1}R$ を $Q(R)$ と書き，R の**全商環**という．いま，

$$S_2 = \left\{ s \in R \;\middle|\; \begin{array}{l} R \text{ の任意の極大イデアル } \mathfrak{m} \text{ に対し，} \\ s \text{ の } R_{\mathfrak{m}} \text{ における像は非零因子} \end{array} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ s \in R \;\middle|\; \begin{array}{l} R \text{ の任意の素イデアル } \mathfrak{p} \text{ に対し，} \\ s \text{ の } R_{\mathfrak{p}} \text{ における像は非零因子} \end{array} \right\}$$

とおく．S_2, S_3 も積閉集合である．まず，$Q(R), S_2^{-1}R, S_3^{-1}R, R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{m}}$ の間の関係を調べよ．それをもとに，R が $\mathbb{C}^n$ 内の代数的集合の座標環の場合には，$S_2^{-1}R$ が $\mathrm{Rat}(X)$ の代用品として最も適切であることを確かめよ．

第3章

● 初版 p.89, 新装版 p.91, 下から 8 行目

誤: このとき,

正: f が U 上で正則なとき,

● 初版 p.92, 新装版 p.94, 命題 3.1.3

命題 3.1.3 の主張

$1/f \in R$ となるための必要十分条件は，$a_0 \neq 0$ である．

を以下と差し替えて下さい．

$f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ について，$1/f \in \mathbb{C}[[x]]$ となるための必要十分条件は，$a_0 \neq 0$ である．

さらに，証明の最後から 4 〜 3 行目の次の文を削除して下さい．

削除: $1/f \in Q(R)$ で，$(1/f(P)) \neq 0$ だから，$1/f$ は点 P で正則で，$1/f \in R$ である．

(解説) 「$1/f \in R \Longleftrightarrow a_0 \neq 0$」は $f(0) = a_0$ なので自明で，証明不要です．証明で示されていることは，上の差し替え後の命題です．

● 初版 p.94, 新装版 p.96, 定義 3.1.7

定義 3.1.7 を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 3.1.7a. C は非特異代数曲線で，$0 \neq \omega \in \Omega_{\mathrm{Rat}(C)}$ は有理微分形式とする．点 $P \in C$ の座標近傍 U における広義座標系を x とし，U 上で，$\omega = f\,dx$ と表す．ここで，$f \in \mathrm{Rat}(C)$ である．このとき，$\mathrm{ord}_P\,\omega = \mathrm{ord}_P\,f$ と定義する．W が広義座標系 y をもつ P の座標近傍で，W 上で $\omega = g\,dy$ と表せるとする．$U \cap W$ 上で，x, y は正則関数なので，$\dfrac{dx}{dy}$, $\dfrac{dy}{dx}$ も正則で，$\dfrac{dx}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ だから，$\dfrac{dx}{dy}$ は $U \cap W$ 上で極も零点も持たない．$g = f \cdot \dfrac{dx}{dy}$ だから，$\mathrm{ord}_P\,g = \mathrm{ord}_P\,f$ であり，$\mathrm{ord}_P\,\omega$ の値は (U, x) の選び方に依存せずに定まる．

$m = \mathrm{ord}_P\,\omega > 0$ のとき，ω は P で m 位の**零点**を持つといい，$m < 0$ のとき，ω は P で $(-m)$ 位の**極**を持つという．

● 初版 p.98, 新装版 p.100, **3.2.2 標準因子**

見出し「**3.2.2 標準因子**」の次の行から**命題 3.2.5** の直前までの 9 行を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

C は非特異代数曲線とする．C 上の有理微分形式 $\omega \neq 0$ に対して，

$$\operatorname{div}(\omega) = \sum_{P \in C} (\operatorname{ord}_P \omega) \cdot P$$

と定義する．$\operatorname{ord}_P \omega \neq 0$ となる点 P は有限個しか存在しないので，上の和は有限和である．

● 初版 p.99, 新装版 p.101, 例 3.2.7 の 2 行目

誤: $P = (0:1) \in \mathbb{P}^2$ とし，

正: $P = (0:1) \in \mathbb{P}^1$ とし，

● 初版 p.99 例 3.2.7 の 3 行目 (新装版では修正済み)

誤: 部分形式

正: 微分形式

● 初版 p.99, 新装版 p.101, 定義 3.2.8 の 5 行目の後

5 行目の後に次の文を追加してください．

また，$\boldsymbol{L}(D)$, $\Omega(D)$ は複素ベクトル空間であることに注意する．

● 定義 3.2.8. (補足説明)

$\boldsymbol{L}(D)$ と $\Omega(D)$ が $\mathbb{C}$-ベクトル空間になることの証明を補足します．

$D = \sum_{i=1}^{r} m_i P_i$ ($P_1, \ldots, P_r$ は相異なる点) とする．$f, g \in \boldsymbol{L}(D)$ のとき $f+g \in \boldsymbol{L}(D)$ を示す．$D + \operatorname{div}(f) \geq 0$ より $m_i + \operatorname{ord}_{P_i} f \geq 0$ である．

$$\operatorname{ord}_{P_i}(f+g) \geq \min\left\{\operatorname{ord}_{P_i} f,\ \operatorname{ord}_{P_i} g\right\} \geqq -m_i$$

なので，$D + \operatorname{div}(f+g) \geq 0$ である．よって，$f+g \in \boldsymbol{L}(D)$ である．$c \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対して，$\operatorname{div}(cf) = \operatorname{div}(f)$ なので $cf \in \boldsymbol{L}(D)$ で，$\boldsymbol{L}(D)$ は $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．$\Omega(D)$ が $\mathbb{C}$-ベクトル空間であることの証明も同様である．

● 初版 p.99, 新装版 p.101, 命題 3.2.9(4)

誤: (4) $f \in \boldsymbol{L}(D)$ に対し，$f \in \boldsymbol{L}(D)$ に対し $D + \operatorname{div}(f) \in |D|$ を対応させる写像から，全単射 $\psi\colon \boldsymbol{L}(D)/\mathbb{C}^{\times} \longrightarrow |D|$ が得られる．

正: (4) C が非特異射影曲線のとき，$f \in \boldsymbol{L}(D)$ に対し，$f \in \boldsymbol{L}(D)$ に対し $D+\mathrm{div}(f) \in |D|$ を対応させる写像から，全単射 $\psi\colon \bigl(\boldsymbol{L}(D) - \{0\}\bigr)/\mathbb{C}^\times \longrightarrow |D|$ が得られる．

● 初版 p.100, 新装版 p.102. 定理 3.2.10 の直前の説明の冒頭

誤: n 次元複素ベクトル V に対し，

正: C は非特異射影曲線とする．n 次元複素ベクトル空間 V に対し，

● 初版 p.100, 新装版 p.102. 定理 3.2.10 の 1 行目

誤: D, D' は C 上の因子とすると，

正: D は C 上の因子とすると，

● 初版 p.101, 新装版 p.103. 補題 3.2.13 の 6 行目.

誤: $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \dim M_i = 0$

正: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}(-1)^i \dim M_i = 0$

● 初版 p.102, 新装版 p.104. 命題 3.2.14 の最後 4 行.

修正前: $f(t) = \displaystyle\sum_{k=-n-r}^{\infty} a_k t^k$, $g(t) = \displaystyle\sum_{k=-n-r}^{\infty} b_k t^k \in \boldsymbol{L}(D+nP)$ が，$\varphi(f) = \varphi(g)$ を満たすと仮定すると，f と g の t についての $(-r-1)$ 次以下の項は一致するので，$f(t)-g(t) = \displaystyle\sum_{k=-r}^{\infty}(a_k - b_k)t^k \in \boldsymbol{L}(D)$ となる．よって，$0 \longrightarrow \boldsymbol{L}(D) \xrightarrow{\subset} \boldsymbol{L}(D+nP) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$ は完全である． □

修正後: 逆に，$\varphi(f) = 0$ ならば $a_{-n-r} = a_{-n-r+1} = \cdots = a_{-r-1} = 0$ であるので，$f \in \boldsymbol{L}(D)$ となる．よって，$0 \longrightarrow \boldsymbol{L}(D) \xrightarrow{\subset} \boldsymbol{L}(D+nP) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^n$ は完全である． □

● 初版 p.102, 新装版 p.104. 系 3.2.15 の証明.

以下の原稿ように証明を追加します (自明だと思いますが).

系 3.2.15. C が非特異射影曲線で，n が自然数のとき，

$$\dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}(D+nP) \leqq n + \dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}(D)$$

である．

証明. 完全系列 $0 \to \boldsymbol{L}(D) \to \boldsymbol{L}(D+nP) \to \operatorname{Im}\varphi \to 0$ と，$\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{C}^n$ よりわかる． □

● 初版 p.102 〜 103, 新装版 p.104 〜 105. 系 3.2.16 の証明.

誤植というほどではありませんが，$\dim \boldsymbol{L}(D)$, $\dim \boldsymbol{L}(D')$ と印刷されているところを $\dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}(D)$, $\dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}(D')$ に統一しておいて下さい．全部で 4 ケ所あります．

● 初版 p.103 〜 105, 新装版 p.105 〜 107.

定義 3.3.1 の冒頭から命題 3.3.2 の直前までの約 2 ページにわたる部分を，以下の原稿と差し替えて下さい．かなり，大幅な変更になります．

[差し替え原稿]

定義 3.3.1a. X は代数多様体，$\mathfrak{M}$ は $\mathrm{Rat}(X)$-加群とする．X の各アフィン開集合 U に対し，$\mathfrak{M}$ の部分 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathfrak{F}(U)$ を対応させる規則 $\mathfrak{F}$ が与えられていて，以下の条件 (1), (2) を満たすとする．

(1) $\mathfrak{F}(U)$ は $\mathfrak{O}_X(U)$-加群であって，$a \in \mathfrak{O}_X(U)$, $f \in \mathfrak{F}(U)$ に対して $af \in \mathfrak{F}(U)$ は，$a \in \mathrm{Rat}(X)$, $f \in \mathfrak{M}$ と考えたときの af と一致する．また，$\mathfrak{F}(\phi) = \{0\}$ である．

(2) $U_1, \ldots, U_r$ がアフィン開集合で，$U_1 \cup \cdots \cup U_r$ もアフィン開集合ならば，

$$\mathfrak{F}(U_1 \cup \cdots \cup U_r) = \mathfrak{F}(U_1) \cap \cdots \cap \mathfrak{F}(U_r).$$

このとき，$\mathfrak{F}$ は X 上の **$\mathfrak{O}_X$-加群の準簡易層**であるという．さらに，$\mathfrak{F}$ が次の条件 (3) を満たすとする．

(3) U, W がアフィン開集合で，$U \cup W$ もアフィン開集合であり，$U \cup W$ の座標環 $R_{U \cup W}$ に属するある元 f, g により，$U = D(f)$, $W = D(g)$ と書けるとき，

$$\mathfrak{F}(U \cap W) = \mathfrak{F}(U) + \mathfrak{F}(W) \subset \mathfrak{M}$$

が成り立つ．

このとき，$\mathfrak{F}$ は X 上の **$\mathfrak{O}_X$-加群の簡易層**であるという．これは，$\mathfrak{F}$ は **$\mathfrak{O}_X$-加群** (**層**) ($\mathfrak{O}_X$-module) とも呼ばれるものの一種であり，誤解の恐れのない場合，$\mathfrak{O}_X$-加群と呼ぶことがある．

命題 2.4.13 で示したように，構造層 $\mathfrak{O}_X$ は $\mathfrak{M} = \mathrm{Rat}(X)$ として考えれば簡易層であり，命題 2.4.15 で示したように，$\mathfrak{O}_X$ のイデアル層 $\mathfrak{I}$ も簡易層である．

上の $\mathfrak{O}_X$-加群の簡易層の定義において，$\mathfrak{M}$ を任意のアーベル群とし，条件 (1) のかわりに，

(1') $\mathfrak{F}(U) \subset \mathfrak{M}$ はアーベル群である．ただし，$\mathfrak{F}(\phi)$ は単位元のみからなる群である．

を考え，(1'), (2), (3) を満たす $\mathfrak{F}$ を**アーベル群の簡易層**という．特に，群の演算が加法 $+$ の場合には，**加群の簡易層**ともいう．

例えば，アーベル群 G を 1 つ固定し，$\mathfrak{M} = G$ で，X の任意の空でない開集合 U に対し，$\mathfrak{F}(U) = G$ と定めると，$\mathfrak{F}$ はアーベル群の簡易層になる．この $\mathfrak{F}$ を G と書き，**定数層** G という．

$\mathfrak{O}_X$-加群の簡易層，アーベル群の簡易層を総称して，単に**簡易層**という．

$\mathfrak{F}$ を X 上の (準) 簡易層とする．X の空でないザリスキー開集合 U に対し，何個かのアフィン開集合 $U_1, U_2,\ldots, U_m$ を選んで，$U = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_m$ と表すことができる．そこで，

$$\mathfrak{F}(U) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{F}(U_i) \subset \mathfrak{M}$$

として，$\mathfrak{F}(U)$ を定義する．この $\mathfrak{F}(U)$ が $\{U_1,\ldots, U_m\}$ の取り方に依存しないことは，(準) 簡易層の条件 (2) を使って簡単に証明できる．このとき，次が成立する．

(2') U, W がザリスキー開集合ならば $\mathfrak{F}(U \cup W) = \mathfrak{F}(U) \cap \mathfrak{F}(W)$.

この性質があるので，準簡易層を定義するには，任意のアフィン開集合 U に対して $\mathfrak{F}(U) \subset \mathfrak{M}$ を定めなくても，$\mathfrak{U} = \left\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\right\}$ が X のザリスキー位相に関する開集合系の基底になっているような $\mathfrak{U}$ をとり，各 $U_\lambda \in \mathfrak{U}$ に対して $\mathfrak{F}(U_\lambda) \in \mathfrak{M}$ を (1)(または (1')) と (2) が成り立つように定めれば，準簡易層 $\mathfrak{F}$ を定めることができる．

r は自然数とする．$\mathfrak{O}_X$-加群の簡易層 $\mathfrak{F}$ がさらに条件

(4) X の任意の点 P に対し，P を含むあるアフィン開集合 U が存在し，$\mathfrak{F}(U)$ はランク r の自由 $\mathfrak{O}_X(U)$-加群である，つまり，

$$\mathfrak{F}(U) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_X(U) \cdot \mathbf{e}_i$$

を満たすとき，$\mathfrak{F}$ を階数 (ランク) r の**局所自由** $\mathfrak{O}_X$-**加群**とか，**局所自由層** (locally free sheaf) と呼ぶ．また，

$$\operatorname{rank} \mathfrak{F} = r$$

と書く．特に，階数 1 の局所自由層を**可逆層** (invertible sheaf) という．

命題 3.3.1b. (I)　$\mathfrak{O}_X$-加群の準簡易層 $\mathfrak{F}$ が下の条件 (3') を満たせは，$\mathfrak{F}$ は簡易層である．

(3') U は X は任意のアフィン開集合，W は $W = D_X(h) \subset U$ $(h \in \mathcal{O}_X(U))$ という形の任意のアフィン開集合とする．このとき，任意の $f \in \mathcal{F}(W)$ に対し，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して $h^n f \in \mathcal{F}(U)$ を満たす．

(II) X がアフィン代数多様体で，$\mathcal{F}$ が (3') を満たす $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層ならば，X のザリスキー開集合 U に対し，

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{O}_X(U)\mathcal{F}(X)$$

が成り立つ．

証明. (I) U は X のアフィン開集合で $W = D_X(h) \subset U$ とする．条件 (3') より $\mathcal{O}_X(W)\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(W)$ が容易に導かれる．さて，$W_i = D(h_i) \subset U$ $(i = 1, 2)$ はアフィン開集合で，$U = W_1 \cup W_2$ であるとすると，命題 2.1.24(2) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(W_1 \cap W_2) &= \mathcal{O}(W_1 \cap W_2)\mathcal{F}(U) = \big(\mathcal{O}(W_1) + \mathcal{O}(W_2)\big)\mathcal{F}(U) \\ &= \mathcal{O}(W_1)\mathcal{F}(U) + \mathcal{O}(W_2)\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(W_1) + \mathcal{F}(W_2) \subset \mathcal{M}\end{aligned}$$

であり，簡易層の定義 (3) が成立する．

(II) U は X のザリスキー開集合とする．ある $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}_X(X)$ により，$U = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$ と表すことができる．条件 (3') より，$\mathcal{F}(D(f_i)) = \mathcal{O}_X(D(f_i))\mathcal{F}(X)$ である．これより，

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U) &= \mathcal{F}(D(f_1)) \cap \cdots \cap \mathcal{F}(D(f_r)) \\ &= \big(\mathcal{O}_X(D(f_1)) \cap \cdots \cap \mathcal{O}_X(D(f_r))\big)\mathcal{F}(X) = \mathcal{O}_X(U)\mathcal{F}(X)\end{aligned}$$

である． □

$\mathcal{O}_X$-加群の簡易層 $\mathcal{F}$ が上の命題の条件 (3') を満たすとき，$\mathcal{F}$ は**準連接**であるという．$\mathcal{F}$ が準連接で，さらに，X の各アフィン開集合 U に対して $\mathcal{F}(U)$ が有限生成 $\mathcal{O}_X(U)$-加群であるとき，$\mathcal{F}$ は**連接**であるという．

ところで，簡易層の定義の条件 (3) は，奇妙な条件に見えるかもしれないが，第 4.1 節で証明するように，X の任意のアフィン開集合 U と任意の $i \geqq 1$ に対して，$H^i(U, \mathcal{F}) = 0$ が成り立つことと同値な条件である．

なお，[向井] の簡易層の定義 7.75 は，本書の準連接 $\mathcal{O}_X$-加群の定義と本質的に一致する．[向井] の定義の考え方は，以下の通りである．

各点 $P \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,P}$-加群 $\mathcal{F}_P \subset \mathcal{M}$ が与えられていて，$a \in \mathcal{O}_{X,P}$ と $f \in \mathcal{F}_P$ に対して af は，$a \in \mathrm{Rat}(X)$, $f \in \mathcal{M}$ と考えたときの af と一致すると仮定する．このとき，X の勝手なザリスキー開集合 U に対して，

$$\mathcal{F}(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{F}_P \subset \mathcal{M}$$

と定めると，$\mathcal{F}$ は本書の意味で準連接な $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層になる．

逆に，$\mathcal{F}$ が本書の意味での準連接な $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層の場合には，命題 3.3.1b より，P のアフィン開近傍 U の選び方に依存せずに，

$$\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_{X,P}\mathcal{F}(U)$$

が定まることが証明できる．また，

$$\mathcal{F}(U) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{F}_P \subset \mathcal{M}$$

が成り立つ．つまり，[向井] の定義 7.75 と実質的に同じになる．なお，$\mathcal{F}_P$ を点 P における $\mathcal{F}$ の**ストーク**という．

簡易層では，いくつかの定理の証明が簡単になる反面，簡易層の商 $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ が定義できないのが欠点である．そのため，X の部分代数多様体 Y $(\neq X)$ をとるとき，一般の層では Y 上の層は X 上の層にもなるが，Y 上の簡易層は X 上の簡易層にならない．ただし，局所自由層や可逆層は，一般の層を用いた定義と一致する．

命題 3.3.1c. (1) ランクが有限な局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群は連接である．

(2) イデアル層は連接である．

証明. (1) $\mathcal{F}$ はランク r の局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群とする．局所自由の定義より，各点 $P \in X$ に対し，

$$\mathcal{F}_P = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{X,P} \cdot \mathbf{e}_i \subset \mathcal{M}$$

が定義でき，$\mathcal{F}(U) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{F}_P$ を満たす．すると，上の説明のように，$\mathcal{F}$ は連接であることがわかる．

(2) は定義から，すぐわかる． □

● 初版 p.105, 新装版 p.107．注意 3.3.4 の 3 行目

誤: $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間と同一視できる．

正: $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層は $\mathbb{C}$-ベクトル空間と同一視できる．

● 初版 p.106, 新装版 p.108．補題 3.3.5 の証明．

補題 3.3.5 の証明の最後の 3 行を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$P = Q_i$ の場合を考える．座標開集合 $U' \subset C$ と Q_i を原点とする広義局所座標系 x をとる．上と同様な議論で，$Q_i \in U \subset U' - \{Q_1,\ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1},\ldots, Q_r\}$ をみた

すアフィン開集合 U が存在することがわかる．必要なら U を小さく選びなおして，$Q \in U$ かつ $x(Q) = 0$ を満たす点 Q は $Q = Q_i$ 以外に存在しないと仮定してよい．そこで，$f = x^{a_i}$ とおけば，$D|_U = \mathrm{div}(f)|_U$ となる． □

● 初版 p.106, 新装版 p.108. 定義 3.3.6 の直前の行.

誤: $D = \mathrm{div}(f)$ と書ける

正: $D|_U = \mathrm{div}(f)|_U$ と書ける

● 初版 p.106, 新装版 p.108. 命題 3.3.7

命題 3.3.7 とその証明を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 3.3.7a. $\mathcal{O}_C(D)$ は $\mathcal{O}_C$-加群の簡易層である．

証明. U は X のアフィン開集合, W は $W = D(h) \subset U$ $(h \in \mathcal{O}_X(U))$ という形のアフィン開集合とする．$f \in \boldsymbol{L}_W(D)$ をとる．十分大きい $n \in \mathbb{N}$ をとれば，$h^n f \in \boldsymbol{L}_U(D)$ となることは，$\boldsymbol{L}_U(D)$ の定義からすぐわかる．命題 3.3.1b より，$\mathcal{O}_C(D)$ は $\mathcal{O}_C$-加群の簡易層である． □

● 初版 p.109, 新装版 p.110. 定義 3.3.9 の直後

定義 3.3.9 と参考 3.3.10 の間に以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 3.3.9b. C は非特異代数曲線，K_C は C の標準因子, D は C 上の因子とする．このとき，次の同型が成り立つ．

$$\Omega^1_C(D) \cong \mathcal{O}_C(D + K_C)$$

証明. 定理 3.2.10 からすぐわかる． □

● 初版 p.108, 新装版 p.110. 3.3.3 の 12 行目

修正前: $r < 0$ または $r > \#I$ であれば $\mathfrak{I}_r = \phi$ である．

修正後: $r < 0$ または $r \geqq \#I$ のときは $\mathfrak{I}_r = \phi$ とする．

● 初版 p.108, 新装版 p.110. 下から 6 行目

修正前: ただし，$r < 0$ または $r > \#I$ のときは,

修正後: ただし，$r < 0$ または $r \geqq \#I$ のときは,

● 初版 p.109. 定理 4.3.11 の証明の 13 行目 (新装版では修正済み)

誤: $(f_3 - f_2) - (f_2 - f_1) + (f_2 - f_1) = 0$

正: $(f_3 - f_2) - (f_3 - f_1) + (f_2 - f_1) = 0$

● 初版 p.110, 新装版 p.112. 定義 3.3.12 の最後の行

修正前: 定義から，$r < 0$ または $r > \#I$ ならば

修正後: 定義から，$r < 0$ または $r \geqq \#I$ ならば

● 初版 p.110, 新装版 p.112. 例 3.3.13 の 3 行目

誤: $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \dfrac{Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})}{B^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})} = \dfrac{C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})}{d^0(C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}))} = \dfrac{\mathfrak{F}(U_1 \cap U_2)}{\mathfrak{F}(U_1) + \mathfrak{F}(U_2)}$

正: $H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \dfrac{Z^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})}{B^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})} = \dfrac{C^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})}{d^0(C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}))} = \dfrac{\mathfrak{F}(U_1 \cap U_2)}{\mathfrak{F}(U_1) + \mathfrak{F}(U_2)}$

● 初版 p.111, 新装版 p.113. 定理 3.3.14 の証明の直後から 3.3.3 校の最後まで以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

上の定理から，$H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ は X の開被覆 $\mathfrak{U}$ の選び方に依存しないことがわかる．そこで，

$$H^0(X, \mathfrak{F}) = H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}(X)$$

と書くことにする．

命題 3.3.14b. (1) X は射影多様体とする．このとき，

$$H^0(X, \mathfrak{O}_X) = \mathbb{C}$$

である．

(2) C は非特異代数曲線で，D は C 上の因子とする．すると，

$$H^0(C, \mathfrak{O}_C(D)) = (\mathfrak{O}_C(D))(C) = \boldsymbol{L}(D)$$
$$H^0(C, \Omega^1_C(D)) = (\Omega^1_C(D))(C) = \varOmega(D)$$

である．

証明. (1) $f \in H^0(X, \mathfrak{O}_X) = \mathfrak{O}_X(X)$ は正則写像 $f\colon X \to \mathbb{C}$ を定める．$f(X)$ は解析的位相に関してコンパクトかつ連結な $\mathbb{C}$ の代数的集合だから 1 点である．つまり，f は定数関数である．

(2) はすぐわかる． □

$r \geqq 1$ のとき，$H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ が X のアフィン開被覆 $\mathfrak{U}$ の選び方に依存しないことの一般的証明は 4.1 節で与えるが，ここでは，X が曲線の場合に，少し特殊な形で，$H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ がアフィン開被覆の選び方によらずに定まることを証明しておく．

● 初版 p.111, 新装版 p.113. 定理 3.3.15 の証明の 7 〜 8 行目

誤: 点 $P \in U_2$ における U_2 の接線が H と平行にならないような P 全体の集合を U_2' とする．U_2' はアフィン開集合で，$t = f - f(P)$ は点 P での正則パラメータになる．したがって，U_2' が求める座標開集合である． □

正: 点 $Q \in U_2$ における C の接線が H と平行になるような点全体の集合を $\{Q_1,\ldots, Q_s\}$ とし，点 Q_j を通り H と平行な $\mathbb{C}^n$ の超平面を H_j とおく．必要なら H の傾きを少し変更することにより，H_j がどの P_i も通らないようにすることができる．$U_2' = U_2 - (H_1 \cup \cdots \cup H_s)$ とおく．U_2' はアフィン開集合で，$t = f - f(P)$ は U_2' の任意の点 P において正則パラメータになる．したがって，U_2' が求める座標開集合である． □

● 初版 p.112, 新装版 p.114. 定理 3.3.16 の証明の 5 行目

削除: , $I = \{0, 1\}$, $J = \{0, 1, 2, 3\}$

特に修正しなくても問題はありませんが，後で I, J は使わないので．

● 初版 p.114, 新装版 p.116. 定理 3.4.1 の証明の 1 行目

誤: 不確定点を持たない $0 \neq h \in \mathrm{Rat}(U)$ をとり，

正: 不確定点を持たない $h \in \mathrm{Rat}(C) - \mathbb{C}$ をとり，

● 初版 p.115, 新装版 p.117. 定理 3.4.1 の証明の 7 行目

に選んでおく．$(R_U[1/h])/R_U$ は f_i/h^k という形の元の同値類達によって生成される $\mathbb{C}$-加群である．

というところで,「に選んでおく.」の後に，次を追加して下さい．

追加: $\dfrac{R_U \cdot \frac{1}{h^k}}{R_U \cdot \frac{1}{h^{k-1}}}$ は $f_1/h^k,\ldots, f_r/h^k$ の同値類で生成される $\mathbb{C}$-加群なので，

● 初版 p.116, 新装版 p.118. 10 行目 (Claim 1: の 2 行後)

誤: $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \varphi \leqq \dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}_U(D)/\boldsymbol{L}_U(D-P) = 1$

正: $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} \varphi \leqq \dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}_U(D)/\boldsymbol{L}_U(D-P) \leqq 1$

● 初版 p117. 新装版 p.119. 定理 3.4.3

定理 3.4.3 の証明に根本的な間違いがありました．$\dfrac{R_{01}}{R_0+R_1}=H^1(C,\mathcal{O}_C)$ で，これは $g(C)$ 次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間なので，$R_{01}=R_0+R_1$ とは限りません．どうやら，$H^1(C,\Omega^1_C)\cong\mathbb{C}$ を単独で証明するのは困難で，後のセールの双対定理と並行して証明するのが簡明なようです．そこで，定理 3.4.3 を以下の補題 3.4.3 と差し替えて下さい．次の定理 3.4.5(セールの双対定理) の証明にはこれで十分で，セールの双対定理をもとに，改めて $H^1(C,\Omega^1_C)\cong\mathbb{C}$ であることがわかります．

[差し替え原稿]

補題 3.4.3a. C は非特異射影曲線，U_0 は狭義局所座標系 x を持つ座標開集合，U_1 はアフィン開集合で，$U_0\cup U_1=C$, $U_1\cap V_{U_0}(x)=\phi$ を満たすと仮定する．このとき，全射準同型写像 $\rho\colon H^1(C,\Omega^1_C)\longrightarrow\mathbb{C}$ で，$\rho\left(\left[\dfrac{dx}{x}\right]\right)\neq 0$ を満たすものが存在する．

証明.* アフィン開被覆 $\mathfrak{U}=\{U_0,U_1\}$ によるチェック・コホモロジーを用いて計算する．$U_{01}=U_0\cap U_1$ とおくと，

$$H^1(C,\Omega^1_C)=\frac{\Omega^1_C(U_{01})}{\Omega^1_C(U_0)+\Omega^1_C(U_1)}$$

である．$\omega_0=\dfrac{dx}{x}\in\Omega^1_C(U_{01})$ とおく．また，$C-U_1=\{P_1,\ldots,P_r\}\subset U_0$ とし，$\omega\in\Omega^1_C(U_{01})$ に対し，$\tilde{\rho}(\omega)=\mathrm{Res}_{P_1}\omega+\cdots+\mathrm{Res}_{P_r}\omega$ と定める．

もし，$\omega\in\Omega^1_C(U_0)$ ならば，ω は P_i で正則なので，$\tilde{\rho}(\omega)=0$ である．また，$\omega\in\Omega^1_C(U_1)$ ならば，留数定理 (定理 3.1.8) より，$-\tilde{\rho}(\omega)$ は U_1 内の点における ω の留数の和に等しいので，$\tilde{\rho}(\omega)=0$ である．よって，$\omega\in\Omega^1_C(U_0)+\Omega^1_C(U_1)$ ならば，$\tilde{\rho}(\omega)=0$ である．したがって，$\tilde{\rho}\colon\Omega^1_C(U_{01})\longrightarrow\mathbb{C}$ から $\rho\colon H^1(C,\Omega^1_C)\longrightarrow\mathbb{C}$ が誘導される．

ところで，$P_1,\ldots,P_r$ の中には $x(P_i)=0$ を満たす点があり，そのような点 P_i では $\mathrm{Res}_{P_i}(\omega_0)=1$ である．よって，$\rho\left(\left[\dfrac{dx}{x}\right]\right)=\tilde{\rho}(\omega_0)\neq 0$ である． □

● 初版 p118 〜 121. 新装版 p.120 〜 123. 定理 3.4.5

定理 3.4.3 を上の補題 3.4.3 と差し替えたことに伴い，定理 3.4.5 を下記の原稿と差し替えて下さい．本質的なアイデアの変更はありませんが，表記と細かい議論があちこち変わります．

[差し替え原稿]

一般に，$\mathbb{C}$-ベクトル空間 V に対して，$V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ と書くことにすると，$\varphi\colon V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ が非退化であることは，$V_1 \cong V_2^\vee$ であることと同値であり．$V_1^\vee \cong V_2$ であることと同値である．

定理 3.4.5. (**セール (Serre) の双対定理**) C が非特異射影曲線で，D が C 上の因子のとき，

$$H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D))^\vee$$

証明.* (I) 双線形写像 $\varphi\colon H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) \times \Omega(-D) \longrightarrow \mathbb{C}$ を構成する．

補題 3.4.3a のような $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$ をとり，(I) の中では $\mathfrak{U}$ によるチェック・コホモロジーで考える．$C^i(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_C(D)) = C^i(D)$ などと略記する．

$f \in C^1(D) = \boldsymbol{L}_{U_{01}}(D)$ とする．ω_0 は $\dfrac{dx}{x}$ で定まる C 上の有理微分形式とし，$K_C = \mathrm{div}(\omega_0)$ とする．$g\omega_0 \in \Omega(-D) \cong \boldsymbol{L}(K_C - D)$ に対し，$fg \in \boldsymbol{L}_{U_{01}}(K_C)$ だから，$fg\omega_0 \in \Omega_C^1(U_{01}) = C^1(\Omega_C^1)$ である．その $B^1(\Omega_C^1)$ を法とする同値類を $[fg]\omega_0 \in H^1(\Omega_C^1)$ とする．

もし，$f \in B^1(D) = \boldsymbol{L}_{U_0}(D) + \boldsymbol{L}_{U_1}(D)$ ならば，$fg\omega_0 \in B^1(\Omega_C^1)$ であるので，$f \in C^1(D) = \boldsymbol{L}_{U_{01}}(D)$ の同値類 $[f]_D \in H^1(D)$ に対し，矛盾なく $[fg]\omega_0 \in H^1(\Omega_C^1)$ が定義できる．そこで，$\rho\colon H^1(C, \Omega_C^1) \longrightarrow \mathbb{C}$ は補題 3.4.3a の通りとし，$\varphi([f]_D, g\omega_0) = \rho([fg]\omega_0)$ によって，双線形写像

$$\varphi\colon H^1(D) \times \Omega(-D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を定義する．ρ は U_1 の選び方に依存していたから，φ は U_1 と D に依存することに注意する．

そこで，以下の (II) と (III) では，D の成分に現れるいずれの点も U_0 に含まれないように，U_0, U_1 を選んでおく．つまり，$C - U_0 = \{P_1, \ldots, P_r\}$ とするとき，$D = a_1P_1 + \cdots + a_rP_r$ と書ける．

(II) $0 \neq \omega \in \Omega(-D)$ ならば，$\varphi([f]_D, \omega) \neq 0$ を満たす $[f]_D \in H^1(D)$ が存在することを証明する．

U_0 の選び方から，ω は U_0 上では極を持たない．U_0 上で $\omega = g\,dx$ と表す．$g \in \mathcal{O}_U(U_0)$ である．U_0 上で $x(Q) = 0$ を満たす点 Q 全体を $Q_1, \ldots, Q_s$ とする．U_{01} 上で可逆な正則関数 h を適当に選んで，$0 \neq \displaystyle\sum_{i=1}^{s} (gh)(Q_i) \in \mathbb{C}$ となるようにできる．

$f=\dfrac{h}{x}$ とおくと，$f\in\mathfrak{O}_C(U_{01})$ であり，$f\in\boldsymbol{L}_{U_{01}}(D)=C^1(D)=Z^1(D)$ である．$[f]_D=(f \bmod B^1(D))\in H^1(D)$ とする．

$$\varphi([f]_D,\,\omega)=\rho\left(\left[\frac{gh}{x}dx\right]\right)=\sum_{i=1}^{r}\mathrm{Res}_{P_i}\,\frac{gh}{x}dx$$
$$=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{Res}_{Q_i}\,\frac{gh}{x}dx=\sum_{i=1}^{s}(gh)(Q_i)\neq 0$$

である．

(III) $0\neq[f]_D\in H^1(D)$ ならば，$\varphi([f]_D,\omega)\neq 0$ を満たす $\omega\in\Omega_{\mathrm{Rat}(C)}$ が存在することを証明する．

$P=P_1$, n は自然数，$r=r(n)=h^0(\Omega_C^1(-D+nP))=h^0(K_X-D+nP)$ とおく．$n>\deg D$ のとき $h^0(D-nP)=0$ なのでリーマン・ロッホの定理から，

$$r(n)=h^0(K_X-D+nP)\geqq n+\deg(K_C-D)+1-g(C)$$
$$h^1(D-nP)=n+h^0(D-nP)-\deg D-1+g(C)=n-\deg D-1+g(C)$$

である．定理 3.4.2 の証明の中で示したように，適当な $0\neq g_0\in\boldsymbol{L}(nP)$ をとれば，$[h]_{D-nP}\in H^1(D-nP)$ に対し $[g_0h]_D\in H^1(D)$ を対応させる写像 $\pi\colon H^1(D-nP)\longrightarrow H^1(D)$ は全射になる．$V_1=\pi^{-1}([f]_D)$ とおく．V_1 は $H^1(D-nP)$ 内のアフィン部分空間で，適当な自然数 c_1 をとれば，$n\gg 0$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}}V_1=n+c_1$ である．

$D-nP$ に対して (II) を適用すれば，ベクトル空間の一般論から，$\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\Omega(-D+nP)$ の基底 $\omega_1,\dots,\omega_r$ に対し，$[f_1]_{D-nP},\dots,[f_r]_{D-nP}\in H^1(D-nP)$ を，$\varphi_n([f_i]_{D-nP},\omega_j)=\delta_{ij}$ を満たすようにとれる．ただし，$[f]_{D-nP}=(f \bmod B^1(D-nP))$ とする．また，$\varphi_n\colon H^1(D-nP)\times\Omega(-D+nP)\longrightarrow\mathbb{C}$ は (I) のように構成される双線形写像である．$[f_1]_{D-nP},\dots,[f_r]_{D-nP}$ で生成される $H^1(D-nP)$ の部分ベクトル空間を V_2 とおく．$n\gg 0$ のとき，$\dim_{\mathbb{C}}V_1+\dim_{\mathbb{C}}V_2-\dim_{\mathbb{C}}H^1(D-nP)=n+c_2$ (c_2 は定数) であるから，$n\gg 0$ のとき $V_1\cap V_2\neq 0$ である．そこで，$0\neq[f_0]_{D-nP}\in V_1\cap V_2$ をとる．$[f_0]_{D-nP}\in V_1$ だから $[f]_D=[g_0f_0]_D\in H^1(D)$ を満たす $g_0\in\boldsymbol{L}(nP)$ が存在する．また，$[f_0]_{D-nP}\in V_2$ だから，$\varphi_n([f_0]_{D-nP},\omega_0)=1$ となる $\omega_0\in\Omega(-D+nP)$ が存在する．

有理微分形式 $\omega=\dfrac{\omega_0}{g_0}$ を考えると，φ, φ_n の構成法から，

$$\varphi([f]_D,\,\omega)=\varphi([g_0f_0]_D,\,\omega_0/g_0)=\varphi_n([f_0]_{D-nP},\,\omega_0)=1$$

であり，(III) の主張が証明された．

(IV) 上の (III) で構成した ω が，$\omega\in\Omega(-D)$ を満たすことを証明する．f, ω_0, g_0, n, P は (III) の通りとする．

$\mathrm{div}(g_0)$ の正の部分 (g_0 の零点で定まる因子) と nP の和を D' とすれば，$\omega \in \Omega(-D+D')$ である．$\omega \notin \Omega(-D)$ と仮定すると，D の成分として現れるある点 Q が存在し，$D = mQ + \sum_i m_i P_i$ $(P_i \neq Q)$ で m を定めるとき，$\mathrm{ord}_Q\, \omega \leqq m-1$ を満たす.

今度は，Q の座標開近傍 U を，U が Q 以外の ω の零点や極，D や D' の成分として現れる点を含まないようにとる．また，W を $Q \notin W$ かつ $U \cup W = C$ となるようにとる．x は $x(Q) = 0$ を満たす U の広義局所座標系とする．(IV) では，アフィン開被覆 $\mathfrak{U}' = \{U, W\}$ によるチェック・コホモロジーで計算する．

U 上で，$\omega = h\,dx$ $(\mathrm{ord}_x\, h \leqq m-1)$ と書ける．$g = \dfrac{1}{xh}$ とする．$\mathrm{ord}_Q\, g \geqq -m$ だから，$g \in \boldsymbol{L}_U(D) \subset B^1(D)$ である．したがって，$[g]_D = 0 \in H^1(D)$ となる．この W, x を使って (I) のように構成される双線形写像を，

$$\varphi'_{D-D'}\colon H^1(D-D') \times \Omega(-D+D') \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\varphi'_D\colon H^1(D) \times \Omega(-D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

とする．$g \in \boldsymbol{L}_{U\cap W}(D-D')$ だから，$[g]_{D-D'} \in H^1(D-D')$ である (ただし，$[g]_{D-D'} = (g \bmod B^1(D-D'))$)．このとき，

$$[g\omega] = \left[\frac{dx}{x}\right] \in H^1(\Omega^1_C)$$

である．よって，$\varphi'_{D-D'}([g]_{D-D'}, \omega) \neq 0$ である．しかし，上で述べたように，

$$0 \neq \varphi'_{D-D'}([g]_{D-D'}, \omega) = \varphi'_D([g]_D, \omega) = 0$$

となり，矛盾する．したがって，$\omega \in \Omega(-D)$ である．

以上より，φ は非退化である． □

● 初版 p121, 新装版 p.123. 定理 3.4.9 の証明の 2 行目

誤: C 上の正則微分形式 ω が定まる．

正: C 上の有理微分形式 ω が定まる．

● 初版 p121, 新装版 p.123. 定理 3.4.9 の証明の 7 行目

誤: dx/f_y, dt/s_g は正則であることに

正: dx/f_y, dt/g_s は正則であることに

● 初版 p122, 新装版 p.124. 定理 3.4.9 の証明の最後から 4 行目

初版旧: $t = 0$ で定まる C 上の因子を D とするとは，$\deg(D) = d$ である

新装版旧: $t = 0$ で定まる C 上の因子を D とすると，$\deg(D) = d$ である

新: $t=0$ で定まる C 上の因子を D とすると，$K_C=(d-3)D$ で $\deg(D)=d$ である

● 初版 p122, 新装版 p.124. 「3.5.1 フルビッツの定理」の次の行から数えて 6 〜 8 行目

旧: P, Q のアフィン開近傍 V, W を，$\varphi^{-1}(W)=V$ で，V は広義座標系 x を持ち，W は広義座標系 y を持つようにとる．さらに，P で $x=0, Q$ で $y=0$ となるとしておく．

新: P, Q のアフィン開近傍 V, W を，$\varphi^{-1}(W)\supset V$ で，V は広義座標系 x を持ち，W は広義座標系 y を持つようにとる．さらに，V 内で $x=0$ となる点は P のみしかなく, W 内で $y=0$ となる点は Q しかないように，V, W を小さく選んでおく．

● 初版 p122, 新装版 p.124. 「3.5.1 フルビッツの定理」の次の行から数えて 12 〜 14 行目

旧: 今，$f(y)\in \mathrm{Rat}(Y)$ で定まる W 上の因子 $D_W=\mathrm{div}(f)|_W$ に対し，$f(h(x))\in \mathrm{Rat}(X)$ が定める V 上の因子を，$\varphi^*D_W=\mathrm{div}(f(h(x)))|_V$ と書く．これにより，Y 上の因子 D に対し，X 上の因子 φ^*D が，$(\varphi^*D)|_V=\varphi^*D_W$ を満たすように定まる．φ^*D を φ による因子 D の**引き戻し**という．

新: 今，Y 上の因子 D をとる．W が十分小さい Q の開近傍であれば，ある $f_Q(y)\in \mathrm{Rat}(Y)$ が存在して $D|_W=\mathrm{div}(f_Q)|_W$ を満たす．このとき，X 上の因子 D_X で，各点 $P\in X$ に対して $D_X|_V=\mathrm{div}(f_Q(h(x)))|_V$ を満たすようなものが一意的に存在する．そこで，$\varphi^*D=D_X$ と定め， φ^*D を φ による因子 D の**引き戻し** という．

● 初版 p123, 新装版 p.125. 命題 3.5.1 の証明の最後から 7 行目

誤: $R_\varphi=\displaystyle\sum_{P\in C}(e(P)-1)P$

正: $R_\varphi=\displaystyle\sum_{P\in X}(e(P)-1)P$

● 初版 p123, 新装版 p.125. 命題 3.5.1 の証明の最後から 9 行目

誤: R_φ は C 上の因子になる．

正: R_φ は X 上の因子になる．

● 初版 p124, 新装版 p.126. 定理 3.5.3 の主張の 3 行目

誤: $\varphi^{-1}(Q)=\{P_1,\ldots, P_r\}$ とすと，

正: $\varphi^{-1}(Q) = \{P_1,\ldots, P_r\}$ とすると，

● 初版 p124, 新装版 p.126. 定理 3.5.3 の証明の 15 行目

誤: $\mathrm{Rat}(Y) = (\mathrm{Rat}(X))[T]/(F(T))$ である．

正: $\mathrm{Rat}(X) = (\mathrm{Rat}(Y))[T]/(F(T))$ である．

● 初版 p.125. 系 3.5.4 の 1 行目 (新装版では修正済み)

誤: X, Y を非特異代数曲線，$\varphi\colon X \to Y$ を全射正則写像とすると，

正: X, Y を非特異射影曲線，$\varphi\colon X \to Y$ を全射正則写像とすると，

● 初版 p.126. 新装版 p.128. 系 3.5.5 の証明の 1 行目

誤: $g(X) = g(Y)$ の場合，

正: $g(X) = g(Y) = 1$ の場合，

● 初版 p126 〜 127, 新装版 p.128 〜 129. 系 3.5.8 の証明

このままでも問題はありませんが，次の証明と差し替えたいと思います．

[差し替え原稿]

証明. $g(C) = 0$ とする．P を C 上の点とすると，リーマン・ロッホの定理より，

$$\dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}(P) \geqq \deg P + 1 - g(C) = 2$$

となる．前の系より，$C \cong \mathbb{P}^1$ である．

逆に，$C \cong \mathbb{P}^1$ ならば，例 3.2.7 より，$2g(C) - 2 = \deg K_C = \deg K_{\mathbb{P}^1} = -2$ だから，$g(C) = 0$ である． □

● 初版 p127, 新装版 p.129. 系 3.5.9 の証明

このままでも問題はありませんが，次の証明と差し替えたいと思います．

[差し替え原稿]

証明. もし，$P \sim Q$ で，$P \neq Q$ ならば，$Q = P + \mathrm{div}(f)$ と書け，この $f \in \mathrm{Rat}(C)$ が定理 3.5.6 の条件と満たす．よって，$C \cong \mathbb{P}^1$ となり矛盾する． □

● 初版 p127, 新装版 p.129. 定理 3.5.12 の証明

次の原稿と差し替えて下さい．少し，証明を丁寧にしました．

[差し替え原稿]

証明. $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ とする．$\mathbb{P}^n$ の斉次座標系を $(X_0 : \cdots : X_n)$ とし，$X_i = 0$ で定義される $\mathbb{P}^n$ の超平面を H_i とする．$i \geqq 1$ のとき，$\varphi^*(X_i/X_0) = 0$ で定まる $\mathbb{C}^n$ 内の超曲面の射影化が $\varphi(H_i)$ であるが，この超曲面の次数を d_i とする．もし，$d_i \geqq 2$ と

なるような i が存在すれば，必要なら H_j 達を少し移動すると，$\varphi(H_1)\cap\cdots\cap\varphi(H_n)$ が 2 点以上の点を含むようにできる．他方 $H_1\cap\cdots\cap H_n$ は 1 点からなるから，φ が全単射であることに矛盾する．よって，$d_i=1$ である．

超平面 $\varphi^{-1}(H_0)$ の定義方程式を $a_{00}X_0+a_{01}X_1+\cdots+a_{0n}X_n=0$ として a_{00}, a_{01},..., $a_{0n}\in\mathbb{C}$ を定める．$1\leqq i\leqq n$ については，

$$\varphi^*\left(\frac{X_i}{X_0}\right)\cdot\left(a_{00}+a_{01}\frac{X_1}{X_0}+\cdots+a_{0n}\frac{X_n}{X_0}\right)=\sum_{j=0}^{n}a_{ij}\frac{X_j}{X_0}$$

を満たす $a_{ij}\in\mathbb{C}$ が存在するので，$A=(a_{ij})$ とすれば，φ は A が定める射影変換と一致する．φ^{-1} が存在するから，$\det A\neq 0$ である．

また，$n+1$ 次正則行列 A, B が同じ射影変換を定めるための必要十分条件は，$A=\lambda B$ $(\exists\lambda\in\mathbb{C}^\times)$ であるから，結論を得る． □

● 初版 p128, 新装版 p.130. 定義 3.5.13 の末尾

定義 3.5.13 の末尾に次の 1 文を追加して下さい．定理 3.2.10 の直前に書いてあるのですが，このあたりを読むころには忘れてしまうようです．

末尾に追加: なお，$\mathbb{P}(V)=(V-\{0\})/\mathbb{C}^\times$ であった．

● 初版 p128 ～ 139, 新装版 p.130 ～ 132. 第 3.5.3 項

第 3.5.3 項全体を，以下の原稿と差し替えます．

[差し替え原稿]

3.5.3. 因子による埋めこみ

C は非特異射影曲線，D は C 上の因子で，$l=h^0(D)\geqq 2$ とし，f_1,..., f_l を $\boldsymbol{L}(D)$ の $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての基底とする．必要なら $D'\in|D|$ を D の代わりにとることにより，$D\geqq 0$ と仮定してよい．すると，$1\in\boldsymbol{L}(D)$ だから，$f_l=1$ と選んでおく．$D=\sum_{i=1}^{r}m_iP_i$ (P_i は C 上の点，$m_i\in\mathbb{N}$) と表しておく．集合

$$\operatorname{Supp}D=\{P_1,\,P_2,\ldots,\,P_r\}$$

を D の**サポート** (support) とか**台**という．$U=C-(\operatorname{Supp}D)$ とおく．$P\in U$ に対し

$$(f_1(P):f_2(P):\cdots:f_l(P))=(f_1(P):f_2(P):\cdots:f_{l-1}(P):1)\in\mathbb{P}^{l-1}$$

を対応させる正則写像を $\varphi\colon U\to\mathbb{P}^{l-1}$ とする．

$l\geqq 2$ だから f_1,..., f_l の中には定数関数でない関数が存在するので，$\varphi(U)$ は 1 点ではない．そこで，$\mathbb{P}^{l-1}$ における $\varphi(U)$ の閉包を Γ とおくと，Γ は射影曲線になる．

また，$P \in C - U$ の場合は，いずれかの i に対し $f_i(P) = \infty$ となるが，$\operatorname{ord}_P f_i$ が最大になる i を 1 つとり，$h_j = f_j/f_i$ とおくと，$h_1,\dots, h_l$ は点 P の近傍で正則になるので，$\varphi(P) = (h_1(P) : \cdots : h_l(P))$ と定めると，$\varphi: U \to \mathbb{P}^{l-1}$ は C 上の正則写像 $\varphi: C \to \mathbb{P}^{l-1}$ に拡張できる．$\varphi(C)$ は $\mathbb{P}^{l-1}$ の閉集合だから，$\varphi: C \to \mathit{\Gamma}$ は全射である．後の系 5.3.8 で証明するが，$\varphi: C \to \mathit{\Gamma}$ は有限写像である．

$g_1,\dots, g_l$ が $\boldsymbol{L}(D)$ の別の基底のとき，φ と同じように，$\varphi'(P) = (g_1(P) : g_2(P) : \cdots : g_l(P))$ から $\varphi': C \to \mathbb{P}^{l-1}$ が定まる．

$\psi(f_i) = g_i$ となるような同型写像 $\psi: \boldsymbol{L}(D) \to \boldsymbol{L}(D)$ を表現する l 次正方行列を A とし，A によって定まる $\mathbb{P}^{l-1}$ の射影変換を $\mathit{\Psi}$ とすると，$\varphi' = \mathit{\Psi} \circ \varphi$ となる．したがって，$\mathbb{P}^{l-1}$ の射影変換を無視すれば，$\boldsymbol{L}(D)$ の基底の選び方に依存せずに，φ は D から一意的に定まる．この写像 $\varphi: C \to \mathbb{P}^{l-1}$ を Φ_D とか $\Phi_{|D|}$ などと書き，D **が定める正則写像**という．

$\mathbb{P}^{l-1}$ を $\mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D)^\vee)$ と書くこともある．つまり，$\mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D)) = \big(\boldsymbol{L}(D) - \{0\}\big)/\mathbb{C}^\times = |D|$ と同一視でき，$|D| = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D))$ 内の点 $(a_1 : \cdots : a_l)$ には $\mathbb{P}^{l-1}$ 内の超平面 $a_1X_1 + \cdots + a_lX_l = 0$ が対応するので，Φ_D の終域 $\mathbb{P}^{l-1}$ は $\mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D))$ の双対空間で，$\mathbb{P}^{l-1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D))^\vee = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D)^\vee) = |D|^\vee$ である．

命題 3.5.14. $\mathbb{P}^{l-1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D)^\vee)$ の超平面 H で，$\Phi_D(C) \subset H$ を満たすものは存在しない．

証明. $\mathbb{P}^{l-1}$ の斉次座標系を $(X_1 : X_2 : \cdots : X_l)$ とし，$a_1X_1 + \cdots + a_lX_l = 0$ で定まる超平面 H が $\mathit{\Gamma} = \Phi_D(C)$ を含んだとすると，任意の $P \in C$ に対し，$a_1f_1(P) + \cdots + a_lf_l(P) = 0$ が成り立つ．これは，$f_1,\dots, f_l \in \boldsymbol{L}(D)$ が 1 次独立であることに反する． $\square$

定義 3.5.15a. $D = \sum_{i=1}^{r} m_iP_i$ (P_i は C 上の点，$m_i \in \mathbb{N}$) とする．D が次の条件 (1), (2) を満たすとき，D は**非常にアンプル** (very ample) であるという．

(1) $\Phi_D: C \to \mathbb{P}^{l-1}$ は中への同型写像である．つまり $\Phi_D: C \to \mathit{\Gamma}$ は同型写像である．

(2) 任意の $P_i \in \operatorname{Supp} D$ に対し，ある $f \in \boldsymbol{L}(D)$ が存在して，$\operatorname{ord}_{P_i} f = -m_i$ となる．

D は C 上の因子で，$D \geqq 0$ と仮定する．今までと同じ記号を使う．$\mathbb{P}^{l-1}$ の斉次座標系を $(X_1 : \cdots : X_l)$ とし，$X_i \neq 0$ で定まる $\mathbb{P}^{l-1}$ のアフィン開集合を $U_i \cong \mathbb{C}^{l-1}$

とし，$W_i=\varphi^{-1}(U_i)$ する．$W_1,\ldots,W_l$ は C の開被覆である (後で証明するが，じつはアフィン開被覆である)．$a_1X_1+\cdots+a_lX_l=0$ で定まる $\mathbb{P}^{l-1}$ の超平面 H をとる．$h_i=(a_1X_1+\cdots+a_lX_l)/X_i$ は U_i 上の正則関数で，$\Phi_D^*h_i$ は W_i 上の正則関数である．各 W_i 上で $D'|_{W_i}=\operatorname{div}(\Phi_D^*h_i)$ となるような C 上の因子 D' が存在する．この D' を Φ^*H とか $\Phi^*(H|_\Gamma)$ と書く．

命題 3.5.15b. 今までと同じ記号を使う．D が非常にアンプルなとき，$|D|$ の任意の元 D' は，$\mathbb{P}^{l-1}$ のある超平面 H により，$D'=\Phi^*H$ と書ける．逆に，$\mathbb{P}^{l-1}$ の任意の超平面 H に対し，$\Phi^*H\in|D|$ である．さらに，$d=\deg D$ とするとき，$\Gamma=\Phi_D(C)$ は $\mathbb{P}^{l-1}$ 内の d 次曲線である．

証明. $X_l=0$ で定まる超平面を H_0 とする．$\Phi_D(P)\in H_0$ であれば，ある $1\leqq i\leqq l-1$ に対して $f_i(P)=\infty$ でなければならないので，$P\in\operatorname{Supp}D$ である．

$P_j\in\operatorname{Supp}D$ に対し $\operatorname{ord}_P f_j=-m_j$ を満たす $g_j\in\boldsymbol{L}(D)$ をとる．$Q_j=\Phi_D(P_j)$ とし，例えば，$Q_j\in U_1$ であると仮定しておく．$h_i=f_i/g_j$ とするとき，P_j の近傍で $\Phi_D=(h_1,\ldots,h_l)$ である．$\Gamma\cap U_1$ 上で考えて，$h_l=1/g_j$ は点 Q_j で m_j 位の零点を持つから，X_l/X_1 は点 Q_j で m_j 位の零点を持つ．よって，$\Phi_D^*H_0=D$ であることがわかる．

次に，$\mathbb{P}^{l-1}$ の勝手な超平面 $H:a_1X_1+\cdots+a_lX_l=0$ をとる．$h=(a_1X_1+\cdots+a_lX_l)/X_l$ とおくとき，$\Phi_D^*H=\Phi_D^*H_0+\operatorname{div}(h\circ\Phi_D)$ であるので，$\Phi_D^*H\sim\Phi_D^*H_0=D$ で，$\Phi_D^*H\in|D|$ である．

逆に，D' を $|D|$ の勝手な元とする．$D'=D+\operatorname{div}(h)$ を満たす $h\in\boldsymbol{L}(D)$ が存在する．$\boldsymbol{L}(D)$ の基底 $f_1,\ldots,f_l$ を $f_l=1$ となるように選んでおくと，

$$h=a_1f_1+\cdots+a_lf_l=\Phi_D^*\left(\frac{a_1X_1+\cdots+a_lX_l}{X_l}\right) \tag{3.4}$$

となる．よって，$a_1X_1+\cdots+a_lX_l=0$ で定まる超平面を H とすれば，$D'=\Phi_D^*H$ である．

今，$\mathbb{P}^{l-1}$ 内の超平面 H を，どの点 $\Gamma\cap H$ でも Γ と H が横断的に交わる (接しない) ように選んでおく．交点の個数を $d=\#(\Gamma\cap H)$ とするとき，d が曲線 Γ の次数である．$\Phi_D\colon C\to\Gamma$ は同型写像であるから，$\Phi_D^*H=P_1'+\cdots+P_d'$ という形になり，$\deg D=\deg\Phi_D^*H=d$ である． □

定理 3.5.16a. C は非特異射影曲線，D は C 上の因子とする．このとき，D が非常にアンプルであるための必要十分条件は，次の条件 $(*)$ が成り立つことである．

(∗) C 上の任意の 2 点 P, Q ($P=Q$ の場合も含む) に対し，$h^0(D-P-Q)=h^0(D)-2$ が成り立つ.

証明.* (∗) が成り立つとき，$P_1 \neq P_2 \in C$ に対し，$\boldsymbol{L}(D-P_1-P_2) \subsetneqq \boldsymbol{L}(D-P_1) \subsetneqq \boldsymbol{L}(D)$ である．特に，$P_1 \in \operatorname{Supp} D$ の場合を考えれば，$f \in \boldsymbol{L}(D)-\boldsymbol{L}(D-P_1)$ が定義 3.5.15 の条件 (2) を満たす.

$f \in \boldsymbol{L}(D-P_1)-\boldsymbol{L}(D-P_1-P_2)$ をとれば，$f(P_1)/f(P_2)=0$ となる．したがって，$\Phi_D(P_1) \neq \Phi_D(P_2)$ であり，$\Phi_D\colon C \to \mathbb{P}^{l-1}$ は単射である.

Φ_D の終域を $\mathit{\Gamma}=\Phi_D(C)$ に制限した写像を，$\varphi\colon C \to \mathit{\Gamma}$ とする．今，$P \in C$ をとり，$Q=\varphi(P) \in \mathit{\Gamma}$ とおく.

環の準同型写像 $\varphi_P^*\colon \mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ を考える．φ は全単射だから，$f, g \in \mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ に対し $f\circ\varphi = g\circ\varphi$ ならば $f=g$ であり，φ_P^* は単射である.

$\mathfrak{m}_P, \mathfrak{m}_Q$ を局所環 $\mathcal{O}_{C,P}, \mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ の極大イデアルとする.

C は非特異だから，$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong \mathbb{C}$ である．$g_1 \in \boldsymbol{L}(D)-\boldsymbol{L}(D-P)$, $g_2 \in \boldsymbol{L}(D-P)-\boldsymbol{L}(D-2P)$ をとり，$g=g_2/g_1$ とおくと，$g \in \mathfrak{m}_P-\mathfrak{m}_P^2$ となる．したがって，g の同値類は $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ の基底になる．$\mathfrak{m}_P = g\cdot\mathcal{O}_{C,P}+\mathfrak{m}_P^2$ だから，中山の補題により，$\mathfrak{m}_P=(g)=g\cdot\mathcal{O}_{C,P}$ となる.

ところで，$g_i \in \boldsymbol{L}(D)$ は (3.4) のように表せるから，ある $h \in \operatorname{Rat}(\mathit{\Gamma})$ により $g=h\circ\varphi=\varphi^*(h)$ と書ける．$h(Q)=h(\varphi(P))=g(P)=0$ であり，$h \in \mathfrak{m}_Q \subset \mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ となる．φ_P^* により，$\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q} \subset \mathcal{O}_{C,P}$ と考えることにすると，$\mathfrak{m}_P=(\varphi^*(h)) \subset \varphi^*\mathfrak{m}_Q = \mathfrak{m}_Q\mathcal{O}_{C,P}$ である．定理 2.5.15 の証明で述べたように，$\mathcal{O}_{C,P}$ は有限 $\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$-加群である．また，$\mathcal{O}_{C,P}=\mathfrak{m}_P+\mathbb{C} \subset \mathfrak{m}_Q\mathcal{O}_{C,P}+\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ なので，$\mathcal{O}_{C,P}=\mathfrak{m}_Q\mathcal{O}_{C,P}+\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ である．両辺を $\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$-加群と考えて中山の補題を使うと，$\mathcal{O}_{C,P}=\varphi_P^*\mathcal{O}_{\mathit{\Gamma},Q}$ が得られる．したがって，φ^* は同型写像であり，φ は同型写像となる.

逆に，D は非常にアンプルであると仮定する．今までと同じ設定で考える．すると，$\Phi_D\colon C \to \mathit{\Gamma}(\subset \mathbb{P}^{l-1})$ は同型写像である.

$\Phi_D(P)$ を通らない $\mathbb{P}^{l-1}$ の超平面を 1 つ選び，その定義方程式を h_1 とする．前命題の証明からわかるように，$\Phi_D^*(h_1/X_l) \in \boldsymbol{L}(D)-\boldsymbol{L}(D-P)$ である.

$P \neq Q$ の場合は，$\Phi_D(P)$ を通り $\Phi_D(Q)$ を通らない $\mathbb{P}^{l-1}$ の超平面を 1 つ選び，その定義方程式を h_2 とする．$P=Q$ の場合は，h_2 を $\Phi_D(P)$ を通るが，点 $\Phi_D(P)$ で Γ に接しない平面の方程式として選ぶ．いずれの場合も，$\Phi_D^*(h_2/X_l) \in \boldsymbol{L}(D-P)-\boldsymbol{L}(D-P-Q)$ である．よって，$h^0(D-P-Q) \leqq h^0(D)-2$ である．$h^0(D-P-Q) \geqq h^0(D-P)-1 \geqq h^0(D)-2$ だから，$h^0(D-P-Q)=h^0(D)-2$ である. $\square$

系 3.5.17. C は非特異射影曲線，D は C 上の因子とする．もし，$\deg D \geqq 2g(C)+1$ ならば，D は非常にアンプルである．

証明. $g = g(C)$ とする．$D' = D$ または $D' = D - P$ または $D' = D - P - Q$ のとき，$\deg(K_C - D') \leqq (2g-2) - (2g-1) < 0$ なので，$\boldsymbol{L}(K_C - D') = 0$ である．リーマン・ロッホの定理より，$h^0(D') = \deg D' + 1 - g(C)$ であるので，前定理の条件 $(*)$ が成り立ち D は非常にアンプルである． □

例えば，C が $g(C) = 0$ の非特異射影曲線で $P \in C$ のとき，上の系から因子 $D = P$ は非常にアンプルである．$h^0(P) = 2$ に注意すると，Φ_P の終域は $\mathbb{P}^1$ で，$\Phi_P\colon C \to \mathbb{P}^1$ は同型写像になる．$D = 2P$ も非常にアンプルであり，$h^0(2P) = 3$ だから，Φ_{2P} の終域は $\mathbb{P}^2$ で，$\Phi_{2P}\colon C \to \mathbb{P}^2$ は中への同型写像になる．$\deg 2P = 2$ だから，命題 3.5.15b より $\Phi_{2P}(C)$ は $\mathbb{P}^2$ 内の 2 次曲線である．参考までに，$\Phi_{3P}(C)\colon C \to \mathbb{P}^3$ の像は，**ねじれ** 3 **次曲線**と呼ばれる．

● 初版 p131, 新装版 p.133. 定義 3.6.1 の直後

以下の命題を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 3.6.1b. 非特異射影曲線 C が楕円曲線であるための必要十分条件は，$K_C \sim 0$ となることである．

証明. C が楕円曲線のとき，セールの双対定理より，$\dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \mathcal{O}_C(K_C)) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C) = g(C) = 1$ である．よって，$0 \neq f \in \boldsymbol{L}(K_C)$ が存在し，$D = K_C + \mathrm{div}(f) \geqq 0$ となる．$\deg D = \deg K_C = 2g(C) - 2 = 0$ なので $D = 0$ であり，$K_C \sim D = 0$ となる．

逆に，$K_C \sim 0$ ならば，$2g(C) - 2 = \deg K_C = 0$ なので，C は楕円曲線である． □

● 初版 p131, 新装版 p.133. 定理 3.6.2 の証明の最後から 2 行目

別に間違いではありませんが，美観の問題として．

旧: $1, f, g$ は $\boldsymbol{L}(3P)$ の基底なので，

新: $f, g, 1$ は $\boldsymbol{L}(3P)$ の基底なので，

● 初版 p132, 新装版 p.134. 2 行目

誤: $y^2 + a_2xy + a_4y = \left(y + \dfrac{a_2}{2}x + \dfrac{a_4}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}x^2 - \dfrac{a_2a_4}{2}x - \dfrac{a_4^2}{4}$

正: $y^2+a_2xy+a_4y=\left(y+\frac{a_2}{2}x+\frac{a_4}{2}\right)^2-\frac{a_2^2}{4}x^2-\frac{a_2a_4}{2}x-\frac{a_4^2}{4}$

● 初版 p132, 新装版 p.134. 6 行目

誤: $x_1^3+b_1x_1^2+b_2x_q+b_3=(x_1-\alpha_1)(x_1-\alpha_2)(x_1-\alpha_3)$

正: $x_1^3+b_1x_1^2+b_2x_1+b_3=(x_1-\alpha_1)(x_1-\alpha_2)(x_1-\alpha_3)$

● 初版 p132, 新装版 p.134. 下から 3 行目

誤: $\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ は,

正: $\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ を,

● 初版 p132, 新装版 p.134. 下から 5 行目 (補題 3.6.3 の 4 行目)

誤: $\frac{\lambda}{1-\lambda}$,

正: $\frac{\lambda}{\lambda-1}$,

● 初版 p.133, 新装版 p.135. 6 〜 7 行目

誤: $\varphi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ によって $(1:x)$ を変換すると，(3.8) は,

正: $\varphi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ によって $(1:x)$ を変換し，y 適当に変換すると，(3.8) は,

● 初版 p133, 新装版 p.135. 補題 3.6.4 の証明の最初の 5 行

証明を分かり易くするため，以下のように書き換えます.

証明. $\psi\colon E_\lambda \longrightarrow E_{\lambda'}$ を同型写像，$P=(0:1:0)\in E_\lambda\subset\mathbb{P}^2$, $Q=\psi(P)\in E_{\lambda'}$ とする．ある $x'\in \boldsymbol{L}(2Q)-\mathbb{C}$ と $y'\in \boldsymbol{L}(3Q)-\boldsymbol{L}(2Q)$ により，$E_{\lambda'}$ は

$$y'^2=x'(x'-1)(x'-\lambda') \tag{3.11}$$

の射影化として表すことができる．$\psi^*y'\in \boldsymbol{L}(3P)-\boldsymbol{L}(2P)$, $\psi^*x'\in \boldsymbol{L}(2P)-\mathbb{C}$ だから,

● 初版 p134, 新装版 p.136. 定理 3.6.6 の後の (3.13) 式

別に，間違いでも何でもありませんが，美的センスの問題として.

旧: $g_3=\frac{1}{27}(\lambda+1)(2\lambda^2-5\lambda+2)$

新: $g_3=\frac{1}{27}(\lambda+1)(\lambda-2)(2\lambda-1)$

● 初版 p134, 新装版 p.136. (3.14) 式の 2 〜 3 行後

以下の文を削除して下さい.

削除: 逆に，$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ を満たす複素数の組 g_2, g_3 に対し，(3.14) を満たす $\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ が存在する．

(解説) g_2 と g_3 の間には，

$$108g_3^2 = \left(\sqrt[3]{2}g_2 - 2\right)^2 \left(2\sqrt[3]{2}g_2 - 1\right)$$

という関係式があります．この関係式を満たし，$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ を満たす複素数の組 g_2, g_3 に対し，(3.14) を満たす $\tau \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ が存在する，というのは正しいのですが，上の主張はウソです．証明は結構面倒ですし，後で，どこでも使わないので削除して下さい．

● 初版 p134, 新装版 p.136. 定理 3.6.7 の 2 行前

別に，間違いでも何でもありませんが，美的センスの問題として．

旧: $j(\mathbb{C}/L_\tau) = 1728\dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$

新: $j(\mathbb{C}/L_\tau) = 12^3\dfrac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$

● 初版 p135, 新装版 p.137. 命題 3.6.10 の証明の 2 〜 3 行目

旧: τ は代数多様体としての正則写像である．

新: τ は代数多様体としての同型写像である．

● 初版 p136. 定理 3.6.10 の証明の 5 行目 (新装版では修正済み)

誤: 体なので，命題 2.2.24 より，$\dim \varphi(G \times G) \leqq \dim G$ となる．

正: 体なので，命題 2.6.9 より，$\dim \varphi(G \times G) \leqq \dim G$ となる．

● 初版 p.137. 定義 3.6.14 の 1 行目 (新装版では修正済み)

誤: $e_1,\ldots, e_{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ は

正: $e_1,\ldots, e_{2n} \in \mathbb{C}^n$ は

● 初版 p137, 新装版 p.139. 定義 3.6.14 の 3 行目

誤: $L = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2n} \mathbb{Z} \cdot e_i = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} m_i e_i \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\}$

正: $L = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2n} \mathbb{Z} \cdot e_i = \left\{ \sum_{i=1}^{2n} m_i e_i \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; m_i \in \mathbb{Z} \right\}$

$(a_i \to m_i)$

● 初版 p138, 新装版 p.140. 定理 3.6.15 の証明の最後から 4 〜 3 行目

旧: $0 \in \mathbb{C}^n$ を含む解析的開集合 U を十分小さく選べば $U \cap L = \{0\}$ だから，

新: $\psi(U) \cap L = \{0\}$ だから，

● 初版 p140, 新装版 p.142. 3.6.4 項の 3 行前と定理 3.6.17 の証明の 1 行目 (2 ケ所)

誤: ワイエルシュトラス標準系

正: ワイエルシュトラス標準型

● 初版 p140, 新装版 p.142. 定理 3.6.17 の証明の 7 行目

旧: 因子として，

新: 因子として $f^*Q = P_1 + P_2$ なので，命題 3.5.1(2) より，

● 初版 p141, 新装版 p.143. 定理 3.6.17 の証明の 13 〜 17 行目

少し，証明がわかりにくいようなので,「定義から，$f \circ \sigma = \tau \circ f$ であり,」から「$0 \to H \to G \xrightarrow{\varphi} G_0 \to 0$ が存在する.」までの説明を，以下のように書き換えます.

[差し替え原稿]

この τ を $\varphi(\sigma)$ と書く．定義から，$f \circ \sigma = \varphi(\sigma) \circ f$ であり，$\sigma(O) = O$ より，$\varphi(\sigma) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1, \infty)$ である．

$\iota\colon C \to C$ は $\iota(x, y) = (x, -y)$ で定まる正則写像 (ι をインボリューションという) とし，$H = \{\mathrm{id}_C, \iota\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H \subset G$) とする．もし，$\varphi(\sigma) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$ ならば $\sigma \in H$ である．したがって，$G_0 = \varphi(G) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1, \infty)$ とすると，群の完全系列 $0 \to H \to G \xrightarrow{\varphi} G_0 \to 0$ が存在する．

● 初版 p141, 新装版 p.143. 定理 3.6.17 の証明の最後の行

旧: (3) $j(C) \neq 0$, 1728 のときは，$G_0 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}\}$ で，$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

新: (3) $j(C) \neq 0$, 1728 のときは，補題 3.6.3 の後の注意より，$G_0 = \{\mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}\}$ で，$G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．

● 初版 p142, 新装版 p.144. ゴチック体の「ロンスキアン」がある直前の行

「簡単な計算で確認できる.」の後に，次の 1 文を追加して下さい.

[追加する文]

また，複素解析を使えば容易に証明できるように，$f_1, \ldots, f_g$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立なので，A の g 個の列ベクトルは $\mathrm{Rat}(C)$ 上一次独立である (この性質は，$\mathbb{C}$ の代わりに正標数の体を使うとウソになる).

● 初版 p142, 新装版 p.144. 命題 3.7.3 の 8 行前

誤: $\omega_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\omega_j$

正: $\omega_i' = \sum_{j=1}^{g} c_{ij}\omega_j$

● 初版 p145, 新装版 p.147. 定義 3.7.7

定義 3.7.7 の説明が不親切で分かりにくいようなので，以下のように説明を丁寧に書き直します.

[差し替え原稿]

定義 3.7.7a. C は $g(C) \geqq 2$ を満たす非特異射影曲線とする．全射正則写像 $\varphi: C \to \mathbb{P}^1$ で，$\deg\varphi = 2$ を満たすものが存在するとき，C を**超楕円曲線** (hyper elliptic curve) という.

$\mathbb{P}^1$ から 1 点を除いたアフィン開集合を U とする．$U \cong \mathbb{C}$ であり，U の座標環は $R_U = \mathbb{C}[X]$ と書ける．R_U の $\mathrm{Rat}\, C$ における整閉包を R_W とし，R_W を座標環とする C のアフィン開集合を W とする．容易にわかるように，包含写像 $R_U \subset R_W$ から定まる正則写像 $W \to U$ は φ の W への制限と一致する．定理 3.5.3 の証明で述べたように，ある $y \in R_W$ により $R_W = R_U[y]$ と書け，$\mathrm{Rat}\, C = (\mathrm{Rat}\, \mathbb{P}^1)[y]$ である．$\mathrm{Rat}\, C$ は $\mathrm{Rat}\, \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}(X)$ の 2 次拡大だから，必要なら y を取り替えて，$y^2 \in R_U$ と仮定してよい．$h(X) = y^2 \in R_U = \mathbb{C}[X]$ とおく．すると，$R_W = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - h(X))$ であるから，W は $\mathbb{C}^2$ 内で $Y^2 = h(X)$ で定まる曲線と同一視できる．また，φ は点 $(x, y) \in W \subset \mathbb{C}^2$ に $x \in U = \mathbb{C}$ を対応させる写像である.

$\iota(X, Y) = (X, -Y)$ で定まる正則写像 $\iota: W \to W$ は，極限操作により，正則写像 $\iota: C \to C$ に一意的に延長でき，$\iota \circ \iota = \mathrm{id}_C$ を満たす．また，構成法より，ι は恒等写像でなく，点 $P \neq Q \in C$ に対し「$\iota(P) = Q \iff \varphi(P) = \varphi(Q)$」が成り立つ．この $\iota: C \to C$ を**インボリューション** (involution) という.

● 初版 p147, 新装版 p.149. 定理 3.7.10 の証明の (2)

定義 3.7.7 の書き換えにともない，定理 3.7.10(2) の証明の前半の説明が不要になります.

[差し替え原稿]

(2) W, U の座標環を R_W, $R_U = \mathbb{C}[X]$ とする．定義 3.7.7a で述べたように，$R_W = \mathbb{C}[X, Y]/(Y^2 - h(X))$ と書ける．$\varphi^* Q_i = 2P_i$ だから，分岐点では $-y(P_i) = \iota^* y(P_i) = y(\iota(P_i)) = y(P_i)$ となり，$y(P_i) = 0$, $h(a_i) = 0$ である．したがって，$h(x)$ は $h_0(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_r)$ の倍数である．逆に，$y(P) = 0$ を満たす点 $P \in C$

は $\iota(P) = P$ を満たすので，分岐点以外では $y(P) \neq 0$ であり，$Q \notin \{Q_1, \ldots, Q_r\}$ のとき $h(Q) \neq 0$ である．また, P_i は非特異点なので $h(x)$ は $(x - a_i)^2$ では割り切れない．したがって，$y^2 = ch_0(x)$ $(c \in \mathbb{C})$ であるが，y を $1/\sqrt{c}$ 倍して $c = 1$ と選べるので，

$$R_W = R_U[y] = \mathbb{C}[X, Y]/\bigl(Y^2 - (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_r)\bigr)$$

となり結論を得る．

● 初版 p147, 新装版 p.149. 定理 3.7.10(3) の証明の 4 行目

誤: また，$\varphi^*(1/x^{m+1}) \notin \boldsymbol{L}_C(m\varphi^* Q)$ だから，

正: また，$\varphi^*(1/x^{m+1}) \notin \boldsymbol{L}_C(m\varphi^* Q_1)$ だから，

● 初版 p148, 新装版 p.150. 定理 3.7.10(6) の証明.

証明がやや不親切なので，説明を追加して丁寧に書き直します.

(6) $\Gamma = \Phi_{|K_C|}(C) \subset P^{g-1}$ とおく．上の結果から，$\varphi\colon C \to \mathbb{P}^1$ は $\Phi_{|K_C|}\colon C \to \Gamma$ と同一視できる．いま，$Q_i = \Phi_{|K_C|}(P_i) \in \Gamma$ と考える．点 $Q_1, \ldots, Q_{g-1}$ を通る $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面を H とする．定義 3.5.15 の下の説明より，$K_C \sim \Phi^*_{|K_C|}(H|_\Gamma) = \varphi^*(Q_1 + \cdots + Q_{g-1}) = 2P_1 + \cdots + 2P_{g-1}$ なので，$K_C = 2(P_1 + \cdots + P_{g-1})$ と考える．

さて，同型写像 $f\colon C \to C$ は任意の分岐点 P_i に対し $f(P_i) = P_i$ を満たすとする．$f^* K_C = K_C$ である．したがって，$\Phi_{|K_C|} = \Phi_{|f^* K_C|} = \Phi_{|K_C|} \circ f$ であり，$\varphi(f(P)) = \varphi(P)$ となる．したがって，f は $\mathbb{P}^1 = \varphi(C)$ 上の自己同型写像を引き起こすが，これは $\mathbb{P}^1$ 上の 6 個以上の点 $Q_1, \ldots, Q_{2g+2}$ を動かさないので恒等写像である．したがって，$f^*\colon \mathrm{Rat}(C) \to \mathrm{Rat}(C)$ はガロア群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Rat}(C)/\mathrm{Rat}(\mathbb{P}^1))$ に属し，f は恒等写像 id_C かインボリューション ι である． □

● 初版 p149, 新装版 p.151. 定理 3.7.11 の証明の最後から 2 行目

誤: ある関数 $f\colon \boldsymbol{L}(2P) - \boldsymbol{L}(P)$ が存在する.

正: ある関数 $f \in \boldsymbol{L}(2P) - \boldsymbol{L}(P)$ が存在する.

● 初版 p.149. 参考 3.7.13. (新装版では修正済み)

誤: C が超楕円曲線でないとき，$g(C) = 4$ ならば $\Phi_{|K_C|}(C) \subset \mathbb{P}^3$ はある 2 次曲面と 3 次曲面の共通部分として表せる 6 次曲線に一致し，$g(C) = 5$ ならば $\Phi_{|K_C|}(C) \subset \mathbb{P}^4$ はあるの 3 個の 2 次超曲面の共通部分として表せる 8 次曲線に一致する．しかし，$g(C) \geqq 6$ のときは，$\Phi_{|K_C|}(C) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ を $g - 2$ 個の超曲面の共通部分として表すこ

とができるとは限らない.

正: C が超楕円曲線でないとき，$g(C)=4$ ならば $\Phi_{|K_C|}(C)\subset\mathbb{P}^3$ はある 2 次曲面と 3 次曲面の共通部分として表せる 6 次曲線に一致する．しかし，$g(C)\geqq 5$ のときは，$\Phi_{|K_C|}(C)\subset\mathbb{P}^{g-1}$ を $g-2$ 個の超曲面の共通部分として表すことができるとは限らない.

お詫びと解説: $g(C)=5$ の超楕円曲線 C は, $\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{L}(P+Q+R)=1$ を満たす(必ずしも相異なるとは限らない)3 点 $P, Q, R\in C$ が存在するとき **trigonal** と呼ばれる．相異なる 3 点 P, Q, R について, $\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{L}(P+Q+R)=1$ はこの 3 点が $\mathbb{P}^4$ 内で同一直線上にあることと同値である．正しい命題は「$g(C)=5$ の非特異射影曲線 C は、C が楕円曲線でも trigonal でもなければ、$\Phi_{|K_C|}(C)\subset\mathbb{P}^4$ はあるの 3 個の 2 次超曲面の共通部分として表せる 8 次曲線に一致する」です.

● 初版 p150, 新装版 p.152. 定理 3.7.15 の証明の冒頭

定理 3.7.15 の証明の冒頭に，以下の説明を追加して下さい.

[追加する原稿]

$\varphi(C)$ は 1 点でなく，C は射影曲線なので，$\varphi\colon C\to C$ は全射である．系 3.5.4 より $\deg\varphi=1$ で，定理 2.5.18 より φ は同型写像である.

● 初版 p150, 新装版 p.152. 定理 3.7.15 の証明の 2 行目

誤: $h(Q)=f(Q)-f(\varphi(Q))$

正: $h(Q)=f(Q)-f(\varphi^{-1}(Q))$

● 初版 p151, 新装版 p.153. 参考 3.7.18 の最後 (図の直前) から 2 行目

誤: S_1-D_1 と S_2-D_2 をで

正: S_1-D_1 と S_2-D_2 を

● 初版 p.151. 定理 3.7.19. (新装版では修正済み)

誤: 定理 3.7.19

正: 定義 3.7.19

● 初版 p152, 新装版 p.154. 演習問題 3 の直前.

以下の原稿を追加して下さい.

[追加原稿]

ここから先の完備性の説明は，後日 [Ha] を読む人のための説明なので，初学者はとりあえず読み飛ばしてほしい．[Ha] の完備性の定義と，本書の完備性の定義が同

値であることは，自明ではない．[Ha] では，第 II 章の例 4.6.1 の直前と注意 4.10.1 の直前に「完備」の定義が書かれていて，それは次の定理の条件 $(*)$ と同値である．

定理 3.7.21. X は代数多様体とする．X が完備 (解析的位相でコンパクト) であるための必要十分条件は，以下の条件 $(*)$ が成立することである．

$(*)$ 任意の代数多様体 Y に対し，正射影 $\pi\colon X \times Y \longrightarrow Y$ は閉写像である．

証明. (十分性) X は解析的位相についてコンパクトでないと仮定する．X を含む完備代数多様体 $\tilde{X} \supsetneqq X$ で，X が $\tilde{X}$ の開集合になるようなものが存在することが知られている．もし，X が $\tilde{X}$ の閉集合ならば $X = \tilde{X}$ となってしまうから，X は $\tilde{X}$ の閉集合ではない．$\pi\colon X \times \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ を考える．

$$\varDelta = \left\{(x,x) \in X \times \tilde{X} \;\middle|\; x \in X\right\}$$

とするとき，$\varDelta$ は $X \times \tilde{X}$ の閉集合であるが，$\pi(\varDelta) = X \subset \tilde{X}$ は閉集合でない．よって，π は閉写像でなく，$(*)$ は成立しない．

(必要性) X は解析的位相についてコンパクトであるとする．$F \subset X \times Y$ を勝手なザリスキー閉集合とする．Y の解析的位相についての $\pi(F)$ の閉包は，ザリスキー位相についての閉包と一致するから，$\pi(F)$ が Y の解析的閉集合であることを示せばよい.「解析的閉」という性質は局所的性質だから，距離空間として有界な Y の解析的開集合 W 上で，$\pi(F) \cap W$ が W の閉集合であることを示せばよい．W を十分小さくとっておけば，解析的位相に関する閉包 $\overline{W}$ は解析的コンパクト集合である．$\pi^{-1}(\overline{W}) = X \times \overline{W}$ は解析的コンパクト集合だから，$\pi^{-1}(\overline{W}) \cap F$ も解析的コンパクト集合である．よって，$\pi\bigl(\pi^{-1}(\overline{W}) \cap F\bigr) = F \cap \overline{W}$ も解析的コンパクト集合であり，解析的閉集合である． □

本書では，使わない概念であるが，[Ha] では**固有写像** (proper morphism) という概念も頻出する．スキーム論と複素多様体論の関係は，意外とどこにも書いてないので説明しておく．

定理 3.7.22. X, Y は代数多様体，$f\colon X \to Y$ は正則写像とする．このとき，次の条件 (1), (2) は同値である．

(1) 任意の代数多様体 Z に対して $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ は閉写像である ([Ha] の固有写像の定義).

(2) $f\colon X \to Y$ は閉写像であって，任意の点 $Q \in Y$ に対して $f^{-1}(Q)$ は解析的位相についてコンパクトである (複素多様体の固有写像の定義).

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) の証明は，前定理の十分性の証明と同様である．

(2) $\Longrightarrow$ (1)　[Ha] の第 II 章系 4.8(f) に書いてあるように，Y がアフィン代数多様体の場合に証明すれば十分である．

Y の任意の解析的コンパクト集合 K に対して $f^{-1}(K)$ がコンパクトであることを証明する．それを示せば，あとは，前定理の必要性の証明と同様である．

$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $f^{-1}(K)$ の任意の解析的開被覆とする．任意の $Q \in K$ に対して，$f^{-1}(Q)$ はコンパクトなので，ある有限部分集合 $\Lambda_Q \subset \Lambda$ が存在して，$f^{-1}(Q) \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda_Q} U_\lambda$ となる．$F_Q = X - \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda_Q} U_\lambda$ とおくと，F_Q は X の解析的閉集合である．f は閉写像なので $f(F_Q)$ は Y の解析的閉集合である．$\{Y - f(F_Q) \mid Q \in K\}$ は K の解析的開被覆で，K はコンパクトなので，ある有限個の $Q_1, \ldots, Q_r \in K$ を選んで $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r}(Y - f(F_{Q_i}))$ とできる．すると，$f^{-1}(K) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{\lambda \in Q_i} U_\lambda$ となり，$f^{-1}(K)$ は解析的コンパクトである．□

スキーム論を勉強すると，**分離的**写像 (separated morphism) といううるさい概念を最初に勉強しないといけない．本書の意味の代数多様体では，そういう話は気にしなくてよい，ということだけは述べておく．

X, Y は代数多様体，$f\colon X \to Y$ は正則写像とする．集合

$$X \times_Y X = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

は代数的集合の構造を持つのであるが，詳しい話は第 6.8.8 項で説明する．

定理 3.7.23.　X, Y は代数多様体，$f\colon X \to Y$ は正則写像とする．このとき，$f\colon X \to Y$ は分離的である．つまり，対角写像 $\iota\colon X \longrightarrow X \times_Y X$ は閉埋入写像である．

証明. [Ha] の第 II 章系 4.6(e) に書いてあるように，$Y = \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ の場合に証明すればよい．つまり，対角写像 $\iota\colon X \longrightarrow X \times X$ が閉埋入であることを示せばよい．ところで，ι が解析的位相に関する閉埋入であれば，ザリスキー位相についても閉埋入である．位相空間論でよく知られているように，ι が解析的位相に関する閉埋入であることは，X が解析的位相に関してハウスドルフ空間であることと同値である．X が解析的位相に関してハウスドルフ空間であることは，自明な事実である．□

スキーム論では K 上の (抽象) 代数多様体は「代数閉体 K 上整 (既約・被約) かつ有限型かつ分離的なスキームである」と定義される．この意味での $\mathbb{C}$ 上の抽象

代数多様体 X があるとする．X は $\mathbb{C}$ 上有限型なので，X は有限アフィン開被覆 $\{U_1,\ldots,U_r\}$ を持ち，各 U_i の座標環 $R_i = \mathcal{O}_X(U_i)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な多元環になる．X は $\mathbb{C}$ 上整なので，各 R_i は整域である．分離的の条件から，$U_i \cap U_j$ は U_i のアフィン開集合になる．よって，$\mathbb{C}$ 上の抽象代数多様体は，本書の意味での代数多様体と同一視できる．逆に，本書の意味での代数多様体が $\mathbb{C}$ 上の抽象代数多様体と同一視できることも，今までの説明から容易にわかる．以上のことを念頭におけば，[Ha] の第 II 章でつまずいてしまった人でも，[Ha] の第 III 章以降を拾い読みして理解できる場所も多いと思うので，気を取り直して頑張ってほしい．

第4章

● 初版 p157, 新装版 p.159. 1 〜 3 行目

誤: とおく．置換 $\sigma\colon \{0, 1, \ldots, r\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, r\}$ に対し，σ の符号を $\operatorname{sign}(\sigma)$ で表す．一般に，$i_0, i_1, \ldots, i_r \in I$ に対し，

$$f_{i_{\sigma(0)}, i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}} = \operatorname{sign}(\sigma) f_{i_0, i_1, \ldots, i_r} \in \mathfrak{F}(U_I)$$

正: とおく．$C^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathfrak{F}(U_K)$ であった．置換 $\sigma\colon \{0, 1, \ldots, r\} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, r\}$ に対し，σ の符号を $\operatorname{sign}(\sigma)$ で表す．一般に，$K = (i_0, i_1, \ldots, i_r) \in \mathfrak{I}_r$ に対し，

$$f_{i_{\sigma(0)}, i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}} = \operatorname{sign}(\sigma) f_{i_0, i_1, \ldots, i_r} \in \mathfrak{F}(U_K)$$

● 初版 p158, 新装版 p.160. 定義 4.1.3 の 3 行目

これは，定義 3.3.1(3) の条件を弱めたことに関連する修正です．

誤: (各 W_i は U_0 のアフィン開集合) と分割し，

正: (ただし，各 W_i はアフィン代数多様体 U_0 において $D(f_i)$ という形に書ける U_0 のアフィン開集合) と分割し，

● 初版 p.159. 補題 4.1.4 の証明の 1 〜 3 行目 (新装版では修正済み)

誤: r に関する帰納法で証明する．$r \geqq 3$ とし，$r-1$ まで補題は正しいと仮定する．

X の座標環を $R = \mathfrak{O}_X(X)$ とし，$U_i = D(f_i)$ $(f_i \in R)$ とする．$V(f_1) \cap \cdots \cap V(f_r) = \phi$ より，

正: X の座標環を $R = \mathfrak{O}_X(X)$ とする．$U_i = D(g_1) \cup \cdots \cup D(g_k)$ $(g_j \in R)$ という形に書けるから，はじめから $U_i = D(f_i)$ $(f_i \in R)$ と書ける場合に証明すれば十分である．r に関する帰納法で証明する．$r \geqq 3$ とし，$r-1$ まで補題は正しいと仮定する．

$(f_1, \ldots, f_r) = R$ なので，

新装版のほうは「$(f_1, \ldots, f_r) = R$ なので,」が重複しているので，一方を削除して下さい．

● 初版 p.159. 補題 4.1.4 の証明の 10 〜 11 行目 (新装版では修正済み)

誤: さらに $U_i' = U_i \cap W$ とおけば，

正: さらに $U_i' = U_i \cap W = D(f_i(f_r g_r - 1))$ とおけば，

● 初版 p160, 新装版 p.162. 補題 4.1.6 の証明の 10 行目

誤: $(h_K)_{K \in \mathfrak{L}_{r-1}} \in C^{r-1}(\mathfrak{U})$

正: $(h_K)_{K \in \mathfrak{L}_{r-1}} \in C^{r-1}(\mathcal{W})$

● 初版 p160, 新装版 p.162. 補題 4.1.6 の証明の 15 行目

誤: $h_{1,U'} = h_{0,U'} + h_{U'}$ である．

正: $h_{1,U'} = h_{0,U'} - h_{U'}$ である．

● 初版 p160 〜 p.161, 新装版 p.163. 補題 4.1.6 の証明の 17 〜 20 行目

誤: $K = \{1 < i_2 < \cdots < i_r\} \in \mathfrak{I}_{r-1}$ に対して，

$$g_K = h_{0,U'} + \tilde{h}_{0,U'} = h_{1,U'} + \tilde{h}_{1,U'} \in \mathcal{F}(W_0 \cap U') \cap \mathcal{F}(W_1 \cap U') = \mathcal{F}(U_1 \cap U')$$

と定める．

正: $K = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\} \in \mathfrak{I}_{r-1}$ に対して，$i_1 = 1$ のときは，

$$g_K = h_{0,U'} - \tilde{h}_{0,U'} = h_{1,U'} - \tilde{h}_{1,U'} \in \mathcal{F}(W_0 \cap U') \cap \mathcal{F}(W_1 \cap U') = \mathcal{F}(U_1 \cap U')$$

と定める．また，$i_1 \geqq 2$ のときは $g_K = h_K$ と定める．

● 初版 p161, 新装版 p.163. 補題 4.1.6 の証明の 21 行目の後

次の可換図式を挿入して下さい．証明が読みやすくなると思います．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} \in C^{r-1}(\mathcal{U}) & & C^{r-1}(\mathcal{W}) \ni \mathbf{h} \\ {\scriptstyle d_U^{r-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_W^{r-1}} \\ \mathbf{f} \in Z^r(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\varphi^r} & B^r(\mathcal{W}) \ni \varphi^r(\mathbf{f}) \end{array}$$

$\overline{\varphi^r}$ が単射であることの証明の図式

$$\begin{array}{ccc} & & C^{r-1}(\mathcal{W}) \ni \mathbf{h} \\ & & \downarrow{\scriptstyle d_W^{r-1}} \\ \mathbf{f} \in Z^r(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\varphi^r} & B^r(\mathcal{W}) \ni \mathbf{g} \end{array}$$

$\overline{\varphi^r}$ が全射であることの証明の図式

● 初版 p161, 7 行目．新装版 p.163. 補題 4.1.6 の証明の (I) の直前の 3 〜 2 行目

誤: $C^r(\mathcal{W})$ と $\mathbf{f} = (f_I)_{I \in \mathfrak{I}_r} \in C^r(\mathcal{U})$ をうまく構成して，$\mathbf{g} = d^{r-1}(\mathbf{h}) + \varphi^r(\mathbf{f})$ と

正: $C^{r-1}(\mathcal{W})$ と $\mathbf{f} = (f_I)_{I \in \mathfrak{I}_r} \in Z^r(\mathcal{U})$ をうまく構成して，$\mathbf{g} = d_W^{r-1}(\mathbf{h}) + \varphi^r(\mathbf{f})$ と

● 初版 p161, 新装版 p.163. 補題 4.1.6 の証明の (II) の部分の 8 行目

誤: うまく選んで，$g_L = h_{L_1} - h_{L_0}$ と表せる．

正: うまく選んで，$g_L = h_{L_0} - h_{L_1}$ と表せる．

● 初版 p162, 新装版 p.164. 補題 4.1.6 の証明の (IV) の部分の直前の行

誤: $\mathbf{g} = d^{r-1}(\mathbf{h}) + \varphi^r(\mathbf{f})$

正: $\mathbf{g} = d_W^{r-1}(\mathbf{h}) + \varphi^r(\mathbf{f})$

● 初版 p162, 新装版 p.164. 補題 4.1.6 の証明の最後から 12 〜 11 行目.

誤:

$$h_{M_k} - h_{L_k} = h_{N_{k+1}-\{1\}} - h_{L_{k+1}-\{0\}} = g_{N_{k+1}}$$

が成り立つ．また，$\mathbf{g} \in Z^r(\mathcal{W})$ なので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{r+1} g_{N_k} = 0$ である．

正:

$$h_{L_k} - h_{M_k} = h_{N_{k+1}-\{0\}} - h_{N_{k+1}-\{1\}} = g_{N_{k+1}}$$

が成り立つ．また，$\mathbf{g} \in Z^r(\mathcal{W})$ なので，$\displaystyle\sum_{k=0}^{r+1}(-1)^k g_{N_k} = 0$ である．

● 初版 p162, 新装版 p.164. 補題 4.1.6 の証明の最後から 8 行目.

誤: $\displaystyle = \sum_{k=1}^{r}(-1)^k g_{N_{k+1}}$

正: $\displaystyle = -\sum_{k=1}^{r}(-1)^k g_{N_{k+1}}$

● 初版 p.163. 補題 4.1.9 の証明の 5 行目 (新装版では修正済み)

誤: ものが存在する．$1 \leqq k < l \leqq$ に対し，

正: ものが存在する．$1 \leqq k < l \leqq 4$ に対し，

● 初版 p.163. 新装版 p.165. 定理 4.1.11 の 3 行目

誤: $H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \cong H^r(\mathfrak{U}', \mathfrak{F})$

正: $H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \cong H^r(\mathcal{W}, \mathfrak{F})$

● 初版 p166, 新装版 p.168. 補題 4.1.15 の証明のうち，(3) の証明の 5 行目

誤: この y に対し $\varphi_2(x) = y$ を

正: この y に対し $\varphi_2(x) = g(y)$ を

● 初版 p166, 新装版 p.168. 補題 4.1.15 の証明のうち，(3) の証明の 9 〜 10 行目

誤: $\pi_L(x) = \pi_L(x' + f(x_1)) = \pi_L(x) + \pi_L(f(x_1)) = \pi_L(x')$

正: $\pi_L(x) = \pi_L(x' + f(x_1)) = \pi_L(x') + \pi_L(f(x_1)) = \pi_L(x')$

● 初版 p168, 新装版 p.170. 注意 4.1.18

注意 4.1.18 を次の命題 4.1.18a と差し替えて下さい．注意 4.1.18 で証明抜きで説明していた事項に証明を付けました．

[差し替え原稿]

層の完全系列の定義は，通常 6.2.1 項で述べるような形で与えるが，簡易層については，上の意味で完全系列であることと，6.2.1 項の意味で完全系列であることは同値になる．

命題 4.1.18a. X, Y, $\varphi\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$, $\psi\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ は上と同様とし，$\mathfrak{L}$ と $\mathfrak{M}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群，$\mathfrak{N}$ は連接 $\mathfrak{O}_Y$-加群であるとする．このとき，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{M} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{N} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

が完全系列であるための必要十分条件は，任意の点 $P \in X$ に対し，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L}_P \xrightarrow{\varphi_P} \mathfrak{M}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathfrak{N}_P \longrightarrow 0 \tag{2}$$

が完全系列になることである．ただし，$P \notin Y$ のときは $\mathfrak{N}_P = 0$ とする．

証明. (1) が完全系列ならば (2) が完全系列であることはすぐにわかる．逆を証明する．(2) は完全系列であるとする．

$\mathfrak{L}_P$, $\mathfrak{M}_p$ は有限生成 $\mathfrak{O}_{X,P}$-加群，$\mathfrak{N}_P$ は有限生成 $\mathfrak{O}_{Y,P}$-加群なので，

$$\mathfrak{L}_P = \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{O}_{X,P} \cdot f_i, \quad \mathfrak{M}_P = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_{X,P} \cdot g_i, \quad \mathfrak{N}_P = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{O}_{Y,P} \cdot \overline{h}_i$$

と書ける．例えば，P の十分小さいアフィン開近傍 $U_i \subset X$ をとると $\overline{h}_i \in \mathfrak{N}(U_i \cap Y)$ となる．よって，P の十分小さいアフィン開近傍 $U \subset X$ を選べば，任意の i に対して $f_i \in \mathfrak{L}(U)$, $g_i \in \mathfrak{M}(U)$, $\overline{h}_i \in \mathfrak{N}(U \cap Y)$ となる．すると，

$$\mathfrak{L}(U) = \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{O}_X(U) \cdot f_i, \quad \mathfrak{M}(U) = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{O}_X(U) \cdot g_i,$$
$$\mathfrak{N}(U \cap Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{O}_Y(U \cap Y) \cdot \overline{h}_i$$

となる．このとき，

$$0 \longrightarrow \mathfrak{L}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathfrak{M}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathfrak{N}(U \cap Y) \longrightarrow 0$$

は完全系列になる． □

● 初版 p168, 新装版 p.170. 定理 4.1.19 の証明の 9 行目

誤: $C_A^r = \bigoplus_{K \subset \mathfrak{I}_r} A_K$

正: $C_A^r = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} A_K$

● 初版 p168, 新装版 p.171. 定理 4.1.19 の証明の 12 行目

誤: $K \subset \mathfrak{I}_r$

正: $K \in \mathfrak{I}_r$

● 初版 p.169. 定理 4.1.19 の証明の Step1 の 2 行目 (新装版では修正済み)

誤: どちらも証明も同じだから，$\psi_C^{r+1} \circ d_M^r = d_N^r \circ \psi_C^r$ のほうを証明する．

正: どちらも証明は同じだから，$\psi_C^{r+1} \circ d_M^r = d_N^r \circ \psi_C^r$ のほうを証明する．

● 初版 p.170. 注意 4.1.20 の (2) の直前の 2 行 (新装版では修正済み)

誤: なお，アフィン開集合のかわりに解析的開集合を用いても，同様な議論が展開でき，同様な定理が成立する．

正: なお，アフィン開集合のかわりに解析的開集合を用いても，同様な議論が展開でき，一定条件下に同様な定理が成立する．

● 初版 p171, 新装版 p.173. 定理 4.1.21 の証明の 1 行目

誤: $d = 1$ に関する帰納法で

正: d に関する帰納法で

● 初版 p171, 新装版 p.173. 命題 4.2.1 の証明

命題 4.2.1 の証明を，次の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. R を V の座標環とする．$V \subset \mathbb{C}^N$, $R = S/I$ ($S = \mathbb{C}[X_1,\ldots, X_N]$) と考え，$f$ は $F \in S$ の I を法とする同値類とする．$\mathbb{C}^N$ 内で $F = 0$ で定まる代数的集合を S とすれば，S の既約成分はすべて $N-1$ 次元である．命題 2.6.9 より，$V(f) = V \cap S$ のすべての既約成分は $n-1$ 次元である． □

● 初版 p172, 新装版 p.174. 定義 4.2.2 の最後から 3 〜 2 行目

誤: $D = \sum_{i=1}^{r} a_i W_i$ に対し，

正: $D = \sum_{i=1}^{r} a_i W_i$ $(\forall a_i > 0)$ に対し，

● 初版 p173, 新装版 p.175. 定義 4.2.4 の 3 〜 5 行目

誤: $f \in I^r$ かつ $f \notin I^{r+1}$ を満たす非負整数 r が存在する (ただし，$I^0 = R$ とする)．このとき，$\mathrm{ord}_W f = r$ と定義する．$I = (g)$ と表せる場合には，$\mathrm{ord}_W f = r$ とは，

f が g^r で割り切れ，g^{r+1} では割り切れないことを意味する．

正: $\displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} I^m = 0$ なので，$f \in I^m$ かつ $f \notin I^{m+1}$ を満たす非負整数 m が存在する (ただし，$I^0 = R$ とする)．このとき，$\mathrm{ord}_W f = m$ と定義する．$I = (g)$ と表せる場合には，$\mathrm{ord}_W f = m$ とは，f が g^m で割り切れ，g^{m+1} では割り切れないことを意味する．

● 初版 p173, 新装版 p.175. 定理 4.2.5

アウスランダー・ブックスバウムの定理の証明も，書くことにしました．定理 4.2.5 の下の 2 行を削って，下記の証明と差し替えて下さい．

[差し替え (追加) 原稿]

本書の範囲内でこの定理を証明するのは無理であるが，以下に，ホモロジー代数学に詳しい人向けの証明を書いておく．以下の証明は飛ばして，先に読み進めてほしい．[松村] 定理 20.3，[永田] 定理 7.2.5 にも別の証明がある．

証明. R は正則局所環，$\mathfrak{m}$ は R の極大イデアル，$d = \mathrm{Krull}\dim R$, $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ は正則パラメータ系とする．

Step 1. x_1 は R の素元であることを証明する．

$R_k = R/(x_1, \dots, x_k)$ とし R_k における $\mathfrak{m}$, x_i の像を $\mathfrak{m}_k$, $x_{i,k}$ とおく．$\mathfrak{m}_k$ は $x_{k+1,k}, \dots, x_{n,k}$ で生成される R_k の極大イデアルである．R_k が整域であることを k についての降下帰納法で証明する．R_d は体なので整域である．

$k < d$ として，R_{k+1} は整域であると仮定する．$y := x_{k+1,k} \in R_k$ とおく．$R_k/yR_k \cong R_{k+1}$ だから yR_k は R_k の高さ 1 の素イデアルである．もし R_k が整域でないとすると $(0) \neq \mathfrak{q} \subsetneqq yR_k$ を満たす R_k の高さ 0 の素イデアル $\mathfrak{q}$ が存在する．$\mathfrak{q}$ の勝手な元 $0 \neq ay \in \mathfrak{q}$ $(a \in R_k)$ をとる．$y \notin \mathfrak{q}$ だから $a \in \mathfrak{q}$ である．よって，$\mathfrak{q} \subset y\mathfrak{q}$ である．これを R_k の yR_k による局所化 R'_k で考えれば，中山の補題より $\mathfrak{q}R'_k = (0)$ が得られる．これは $\mathfrak{q} = (0)$ を意味する．よって，R_k は整域である．

特に R_1 は整域なので，x_1R は素イデアルで，x_1 は R の素元である．

Step 2. 任意の有限生成 R-加群 M は長さ d 以下の自由分解を持つことを示す．

$$\left\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \,\middle|\, 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqq d \right\}$$

を基底とする自由 R-加群を K_r とし，$d_r \colon K_r \to K_{r-1}$ を，

$$d_r(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} x_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{j-1}} \wedge e_{i_{j+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$$

と定義する．ただし，$K_0 = R$ とする．(これを Koszul 複体という.)

$$0 \longrightarrow K_d \xrightarrow{d_r} K_{d-1} \xrightarrow{d_{r-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

は $R/\mathfrak{m}$ の長さ d の自由分解である．よって，$i > d$ のとき $\mathrm{Tor}_i^R(M, R/\mathfrak{m}) = 0$ となる．これは，M が長さ d 以下の自由分解を持つことを意味する．(例えば，[安藤] 定理 7.5.16(2) 参照.)

さて，d に関する帰納法で R が UFD であることを証明する．$d = 1$ のときは R の素イデアル (0) と $\mathfrak{m} = (x_1)$ が単項イデアルなので R は PID(単項イデアル整域) であり (命題 4.4.18 参照)，R は UFD である．$d \geqq 2$ とし $d-1$ まで定理は正しいと仮定する．

Step 3. $S := R[1/x_1]$ が UFD であることを証明する．

$\mathfrak{m}S = S$ で S は局所環とは限らないことに注意しよう．$\mathfrak{p}$ は S の勝手な高さ 1 の素イデアルとする．各 $\mathfrak{p}$ が単項イデアルであれば，S は UFD である．$\mathfrak{p} \cap R$ は高さ 1 の R の素イデアルである．Step 2 の結果から $\mathfrak{p} \cap R$ は長さ d 以下の R-自由加群 L_i による射影分解 (自由分解)

$$0 \to L_d \to L_{d-1} \to \cdots \to L_0 \to \mathfrak{p} \cap R \to 0$$

を持つ．$F_i := L_i \otimes_R S$ とおけば，$\mathfrak{p}$ の S-加群としての自由分解

$$0 \xrightarrow{f_{d+1}} F_d \xrightarrow{f_d} F_{d-1} \xrightarrow{f_{d-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} \mathfrak{p} \to 0 \tag{1}$$

が得られる．$\mathfrak{n}$ を S の任意の極大イデアルとし，$\mathfrak{q} := \mathfrak{n} \cap R$ とおく．$\mathfrak{q}$ は R の素イデアルである．$S/\mathfrak{n} \neq R/\mathfrak{m}$ に注意しよう．$x_1 \notin \mathfrak{q}$ なので $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$ である．よって，$\mathrm{Krull}\dim S_\mathfrak{n} = \mathrm{Krull}\dim R_\mathfrak{q} < d$ となる．$S_\mathfrak{n}$ は正則局所環であるから，帰納法の仮定から $S_\mathfrak{n}$ は UFD である．もし $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$ ならば $\mathfrak{p}S_\mathfrak{n}$ は $S_\mathfrak{n}$ の高さ 1 の素イデアルだから単項である．また $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{n}$ ならば，$\mathfrak{p}S_\mathfrak{n} = S_\mathfrak{n}$ である．いずれの場合も $\mathfrak{p}S_\mathfrak{n}$ はランク 1 の $S_\mathfrak{n}$-自由加群である．[安藤] 定理 3.2.9 より $\mathfrak{p}$ はランク 1 の局所自由 S-加群であり，[安藤] 定理 3.2.11 より $\mathfrak{p} = \mathrm{Im}\, f_0$ は射影的 S-加群である．完全系列 $0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_{i+1} \longrightarrow F_i \longrightarrow \mathrm{Im}\, f_i \longrightarrow 0$ を考えると，$\mathrm{Im}\, f_i$ が射影的ならばこれは split するので，i に関する帰納法で，$\mathrm{Ker}\, f_i = \mathrm{Im}\, f_{i+1}$ は射影的で，$F_i \cong \mathrm{Im}\, f_{i+1} \oplus \mathrm{Im}\, f_i$ であることがわかる．これより，$G_i := \bigoplus_{k \geqq 0} F_{i+2k}$ とおくとき，i に関する降下帰納法で $\mathrm{Im}\, d_i \oplus G_{i+1} \cong G_i$ であることが証明できる．特に，$\mathfrak{p} \oplus G_1 \cong G_0$ である．ここで，G_0, G_1 はランクが有限な S-自由加群である．$r = \mathrm{rank}\, G_1$ とおけば，S-加群として

$$S \cong \bigwedge^{r+1} G_0 = \bigwedge^{r+1} (\mathfrak{p} \oplus G_1) \cong \mathfrak{p} \otimes_S \bigwedge^{r} G_1 \cong \mathfrak{p} \otimes_S S \cong \mathfrak{p}$$

となるので，$\mathfrak{p}$ はランク 1 の自由 S-加群である．すなわち，$\mathfrak{p}$ は S の単項イデアルである．

Step 4. R は UFD であることを証明する．

0 でも可逆元でもない $a \in R$ をとる．$S = R[1/x_1] \supset R$ は UFD なので，S において $a = ua_1 \cdots a_m$ と一意的に素元分解できる．ここで，u は S の単元であり，$u = vx_1^l$ ($l \in \mathbb{Z}$ で v は R の単元) と書ける．また，$a_i = b_i/x_1^{k_i}$ ($b_i \in R$ で b_i は素元 x_1 の倍数でない) と書ける．$a_iR[1/x_1]$ は S の素イデアルなので，$b_iR = a_iS \cap R$ は R の素イデアルである．よって，b_i は R の素元である．$k = k_1 + \cdots + k_m$ とおくと R において

$$\begin{cases} a = vx_1^{m-k}b_1 \cdots b_m & (m \geqq k \text{ のとき}) \\ ax_1^{k-m} = vb_1 \cdots b_m & (m < k \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．x_1, b_1,...,b_m が R の相異なる (同伴でない) 素元だから，素元分解の一意性から下の場合は起こらず，上の形に a は素元分解できる．よって R は UFD である． □

● 初版 p173, 新装版 p.175. 系 4.2.6 の証明

系 4.2.6 の証明の最初の 4 行を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$P \in W$ を W の非特異点とし，$R = \mathcal{O}_{U,P}$ とする．R における W の定義イデアルを $I \subset R$ とする．命題 2.1.36, 系 2.2.22 より $\mathrm{ht}\, I = 1$ である．R は UFD だから I は単項イデアルで，$I = (p)$ と書ける．I は素イデアルだから，p は素元であり，既約である．$\tilde{R} = \mathcal{O}_U(U)$ における W の定義イデアルを $\tilde{I}$ とするとき，$I = \tilde{I}R$, $\tilde{I} = I \cap \tilde{R}$ なので，$f \in \tilde{R}$ に対し，$f \in I^m$ であることと $f \in \tilde{I}^m$ であることは同値である．

● 初版 p174, 新装版 p.176. 定理 4.2.8 の 3 行目とその証明の 4 〜 5 行目

$R(U)$, $R(W)$ を書かれているところを，すべて $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_X(W)$ にして下さい．全部で 4 ケ所あります．

● 初版 p174, 新装版 p.177. 定理 4.2.8 の証明の最後から 2 行目

誤: $a_i = a_{i,k}$ とおく．すると，

正: $a_k = a_{i,k}$ とおく．$D = \sum_{k=1}^{r} a_k W_k$ とすると，

● 初版 p175, 新装版 p.177.

定理 4.2.8 と定義 4.2.9 の間に次の命題を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 4.2.8b. X は n 次元非特異代数多様体，$P \in X$ とする．すると，以下が成り立つ．

(1) $n-1$ 次元閉部分多様体 $Y \subset X$ に対し，あるアフィン開集合 $P \in U \subset X$ と $f \in \mathcal{O}_X(U)$ で，$Y \cap U = \mathrm{div}(f)|_U$ を満たすものが存在する．

(2) D が X 上の因子のとき，あるアフィン開集合 $P \in U \subset X$ と $f \in \mathrm{Rat}(X)$ で，$D|_U = \mathrm{div}(f)|_U$ を満たすものが存在する．

証明. (1) $\mathcal{O}_{X,P}$ は UFD なので，$\mathcal{O}_{X,P}$ における Y の定義イデアルは単項イデアルで (f) $(f \in \mathcal{O}_{X,P})$ という形である．f が正則になるようなアフィン開集合 $P \in U \subset X$ をとれば，$Y \cap U = \mathrm{div}(f)|_U$ である．

(2) は (1) よりすぐわかる． □

● 初版 p175, 新装版 p.177.

命題 4.2.11 の逆の証明の部分を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

[差し替え原稿]

逆に，$\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ と仮定する．命題 4.2.8b より，任意の点 $P \in X$ に対し，P のアフィン開近傍 U を十分小さく選べば，ある $f_U,\, g_U \in \mathrm{Rat}(X)$ が存在して，$D_1 = \mathrm{div}(f_U)$, $D_2 = \mathrm{div}(g_U)$ と書ける．$\varphi_U : \mathcal{O}_X|_U \longrightarrow \big(\mathcal{O}_X(D_1 - D_2)|_U$ を f_U/g_U 倍写像とする．X をこのようなアフィン開集合 U_i 達で覆うと，$U_i \cap U_j$ 上では $\varphi_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$ が成り立つから，$\{\varphi_{U_i}\}$ から準同型写像 $\varphi\colon \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(D_1 - D_2)|_U$ が誘導され，各 φ_{U_i} が同型写像だから，φ も同型写像になる．$1 \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ の像を $h = \varphi(1) \in \mathrm{Rat}(X)$ とおけば，$D_1 - D_2 = \mathrm{div}(h)$ なので，$D_1 = \mathrm{div}(h) + D_2$ となる． □

逆に，$\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ と仮定する．

● 初版 p175, 新装版 p.178.

命題 4.2.11 の直後に，次の命題を追加してください．

[追加原稿]

命題 4.2.11b. H は $\mathbb{P}^n$ の超平面とする．

(1) S が $\mathbb{P}^n$ の d 次超曲面ならば，$S \sim dH$ である．

(2) D が $\mathbb{P}^n$ の因子ならば，ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在して，$D \sim mH$ と書ける．

証明. (1) $\mathbb{P}^n$ の座標環 $S = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ における H, S の定義方程式を F, G とする．F は 1 次斉次式，G は d 次斉次式である．$f = G/F^d$ とおくと，$f \in \mathrm{Rat}(\mathbb{P}^n)$ で，$D = dH + \mathrm{div}(f)$ である．

(2) は (1) よりすぐわかる． □

● 初版 p177, 新装版 p.179. 定理 4.2.14 の証明の最後から 6 〜 5 行目

もとのままで問題ありませんが，美的感覚の問題として．

旧: $(h_{ij}^{-1} g_{ij})_{i<j} \in B^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ だから，ある，$(f_i)_{i \in I} \in C^0(C, \mathcal{O}_X^\times)$ が存在して，$g_{ij} = h_{ij} \cdot (f_i/f_j)$ と書ける．

新: $(g_{ij}^{-1} h_{ij})_{i<j} \in B^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ だから，ある，$(f_i)_{i \in I} \in C^0(C, \mathcal{O}_X^\times)$ が存在して，$h_{ij} = g_{ij} \cdot (f_j/f_i)$ と書ける．

● 初版 p178, 新装版 p.180. 定義 4.2.16 の最後から 5 行目

誤: (movable pard) という．

正: (movable part) という．

● 初版 p178, 新装版 p.180. 命題 4.2.17(2) の主張の 3 行目

誤: $g = f/h \in \mathrm{Rat}(X)$

正: $g = fh \in \mathrm{Rat}(X)$

● 初版 p178 〜 179, 新装版 p.180 〜 181. 命題 4.2.17 の直後の説明

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

なお，[Ha] 第 II 章・補題 7.8 の記述は，上の命題と異なって見えるが，これは，本書の $\mathcal{O}_X(D)$ と [Ha] の $\mathfrak{L}$ の定義において，基底の取り方が，上の記号で h 倍だけずれているからである．

● 初版 p179, 新装版 p.181. 命題 4.2.18 の直後

命題 4.2.18 の直後に次の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 4.2.18b. D が X 上の因子で，$\boldsymbol{L}_X(D) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{L}_X(-D) \neq 0$ ならば $D \sim 0$ である．

証明. $\boldsymbol{L}_X(D) \neq 0$, $\boldsymbol{L}_X(-D) \neq 0$ より $D_1 \in |D|$, $D_2 \in |-D|$ が存在する．$D_1 + D_2 \geqq 0$ で $D_1 + D_2 \sim D + (-D) = 0$ なので，$D_1 = D_2 = 0$ である． □

命題 4.2.18c. D が X 上の因子で, $D \not\sim 0$, かつ, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $mD \sim 0$ ならば $\boldsymbol{L}_X(D) = 0$ である．このような因子 D は**トーション**であるという.

証明. もし，$\boldsymbol{L}_X(D) \neq 0$ ならば $D' \in |D|$ が存在する．$mD' \in |mD|$ で $mD \sim 0$ だから $mD' = 0$ である．すると，$D' = 0$ となり，$D \sim D' = 0$ となり矛盾する． □

例 4.2.18d. $\lambda \neq 0, 1$ とし，楕円曲線

$$X = \left\{ (X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbb{P}^2 \;\middle|\; X_2^2 X_0 = X_1(X_1 - X_0)(X_1 - \lambda X_0) \right\}$$

を考える．$P = (1:0:0)$, $Q = (0:0:1) \in X$, $f = X_1/X_0 \in \mathrm{Rat}(X)$ とおくと，$\mathrm{div}(f) = 2P - 2Q$ である．他方，系 3.5.9 より $P \not\sim Q$ である．そこで，$D = P - Q$ とおけば，$D \not\sim 0$, $2D \sim 0$ で，D はトーション因子である.

第 6.8.2 項, 第 6.8.3 項で説明するが，一般に X が楕円曲線のとき次のことが成り立つ．$X \cong \mathbb{C}/L$ として加群の構造を考え，$P_0 \in X$ を加群の単位元を与える点とする．$P \in X$ に対して $P - P_0 \in \mathrm{Pic}(X)$ を対応させる写像 $\varphi\colon \mathbb{C}/L \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ は加群としての単射準同型写像になる．よって，加群の元として $mP = 0$ であることと，$m(P - P_0) \sim 0$ であることは同値である.

● 初版 p180, 新装版 p.182. 命題 4.2.22 の証明の最後から 3 行目

誤: 同様に，$\psi^{-1}\colon \mathrm{Rat}(Y) \to \mathrm{Rat}(X)$ から，

正: 同様に，$\psi^{-1}\colon \mathrm{Rat}(X) \to \mathrm{Rat}(Y)$ から，

● 初版 p180. 新装版 p.182, 命題 4.2.22 の証明の最後から 2 行目

誤: $\varphi(\psi(P)) = P$ が成り立つ.

正: $\varphi(\phi(P)) = P$ が成り立つ.

● 初版 p181. 新装版 p.183, 14 行目〜下から 3 行目

定義 4.2.23 の 14 行目以降を，以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

M が D の可動部分のとき，$\boldsymbol{L}_X(M) = \boldsymbol{L}_X(D)$ より，$\Phi_M = \Phi_D$ である．したがって，Φ_D の定義域は $X - \mathrm{Bs}_0\,|D|$ まで拡張できる．$\Phi_D(X - \mathrm{Bs}_0\,|D|)$ の $\mathbb{P}^{N-1}$ における閉包 (ザリスキー位相でも解析的位相でもよい) を $\Phi_D(X)$ と書く．なお，Φ_D の終域 $\mathbb{P}^{N-1}$ を $\mathbb{P}(\boldsymbol{L}_X(D)^\vee)$ などとも書く.

$g_1,\ldots, g_N$ が $\boldsymbol{L}_X(D)$ の別の基底のとき，$f_1,\ldots, f_N$ から $g_1,\ldots, g_N$ への基底変換を表す N 次正方行列を A とすると，A は $\mathbb{P}^{N-1}$ の射影変換 $\Psi_A\colon \mathbb{P}^{N-1} \to \mathbb{P}^{N-1}$ を定める．また，$\Phi'(P) = (g_1(P) : g_2(P) : \cdots : g_N(P)) \in \mathbb{P}^{N-1}$ で定まる有理写像を

$\Phi' \colon X \cdots \to \mathbb{P}^{N-1}$ とする．このとき，$\Phi' = \Psi_A \circ \Phi_D$ が成り立つ．したがって，Φ_D は $\mathbb{P}^{N-1}$ の射影変換を除いて一意的に定まる．

$\mathbb{P}^n$ 内で $X_N = 0$ で定まる超平面を H_N とするとき，$M = \Phi_D^* H_N$ であることを示す．

任意の点 $P \in \operatorname{Supp} M - \operatorname{Bs}|M|$ をとる．ある $D' = M + \operatorname{div}(f) \in |M|$ をとれば $P \notin \operatorname{Supp} D'$ となる．十分小さい P のアフィン開近傍 $W \subset X$ をとれば，$D'|_W = 0$ とできるので，$M|_W = \operatorname{div}(1/f)|_W$ である．ある $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$ により，$f = a_1 f_1 + \cdots + a_N f_N \in \boldsymbol{L}_X(M)$ と書ける．$\mathbb{P}^{N-1}$ 内で，$a_1 X_1 + \cdots + a_N X_N = 0$ で定まる超平面を H とし，$U = \mathbb{P}^{N-1} - H$ とおく．$G = X_N/(a_1 X_1 + \cdots + a_N X_N) \in \operatorname{Rat}(\mathbb{P}^{N-1})$ とすると，G は U 上の正則関数で，$H_N \cap U$ は U 上で $G = 0$ で定まる．$f_N = 1$ であったので，$\Phi_D^* G = 1/f$ である．このことは，$\Phi_D^* H_N \cap U = \operatorname{div}(1/f)|_U = M|_U$ を意味する．よって，$\operatorname{Bs}|M|$ の外では $\Phi_D^* H_N = M$ である．$\dim \operatorname{Bs}|M| \leqq \dim(\operatorname{Supp} M) - 1$ であるので，閉包をとることにより，$\Phi_D^* H_N = M$ と考えてよい．

次に，任意の $D' \in |M|$ と $\mathbb{P}^{N-1}$ の超平面 H が 1 対 1 に対応して，$D' = \Phi_D^* H$ と書けることを示す．ある $f \in \boldsymbol{L}_X(M)$ により，$D' = M + \operatorname{div}(f)$ と書ける．$f = a_1 f_1 + \cdots + a_N f_N$ と書けるので，上のように，H と G を選べば，$H = H_N + \operatorname{div}(1/G)$ である．よって，$D' = M + \operatorname{div}(f) = \Phi_D^* H_N + \operatorname{div}(\Phi_D^*(1/G)) = \Phi_D^* H$ である．$\Phi_D^* H$ を Φ_D による H の**引き戻し** (pull back) という．以上をまとめて，以下の命題が得られる．

命題 4.2.23b.　X は非特異射影多様体，D は X 上の因子で $l = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geqq 2$ を満たすものとする．また，$M = D - F$ を D の可動部分，$U = X - \operatorname{Bs}_0|D| = X - \operatorname{Bs}|M|$ とする．このとき，有理写像 $\Phi_D \colon X \cdots \to \mathbb{P}^{l-1}$ は U 上で正則で，任意の $D' \in |M|$ は $\mathbb{P}^{l-1}$ のある超平面 H により $D' = \Phi_D^* H$ と書ける．逆に，$\mathbb{P}^{l-1}$ の任意の超平面 H に対して $\Phi_D^* H \in |M|$ である．

命題 4.2.23c.　X は非特異射影多様体，D は X 上の因子で $l = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \geqq 2$ を満たすものとする．このとき，$\mathbb{P}^{l-1} = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(D)^{\vee})$ の超平面 H で，$\Phi_D(X) \subset H$ を満たすものは存在しない．

証明は，命題 3.5.14 の証明とまったく同じである．

● 初版 p182, 新装版 p.184. 命題 4.2.24 の 3 行目
誤: さらに，$\operatorname{Bs}|D_1| = \phi$ ならば，
正: さらに，$\operatorname{Bs}|D_1| = \phi$ かつ $\operatorname{Bs}|D_2| = \phi$ ならば，

● 初版 p182, 新装版 p.184. 命題 4.2.24 の証明の最後から 2 行目

誤: $\psi\colon Y \to Z$ は支配的有理写像である．

正: $\psi\colon X_2 \cdots \to X_1$ は支配的有理写像である．

● 初版 p182, 新装版 p.184. 補題 4.2.27 の 2 行目

誤: D 上の因子とすると，

正: X 上の因子とすると，

● 初版 p.183. 下から 9 行目 (新装版では修正済み)

誤: の同型写像 $\Phi_{|m_1A|}\colon X \to \mathbb{P}^n$ によって，

正: の同型写像 $\Phi_{|A|}\colon X \to \mathbb{P}^n$ によって，

● 初版 p183 〜 184, 新装版 p.186. 定理 4.2.28 の証明

定理 4.2.28 の証明の最後の 2 つの段落 ($\mathbb{P}^n$ における E の定義イデアルを $\cdots$ 以降の部分) を，以下の原稿と差し替えて下さい．証明を変更しました．

[差し替え原稿]

命題 4.2.8b より，X のあるアフィン開集合 $U \ni P$ と，ある $f \in \mathcal{O}_X(U)$ を選べば，$E \cap U = \operatorname{div}(f)$ と書ける．ある $F \in \operatorname{Rat}(\mathbb{P}^n)$ により，$f = F|_U$ と書ける．$\operatorname{div}(F) = D_+ - D_-$ ($D_+ \geqq 0$, $D_- \geqq 0$, $D_+|_U = E \cap U$) と表すことができる．$P \notin \operatorname{Bs}|D_+ - E|$ である．ある $m' \in \mathbb{N}$ により $D_- \sim m'H$ となる．$P \notin \operatorname{Bs}|m'A - E|$ なので，$m \geqq m'$ ならば $P \notin \operatorname{Bs}|m'A - E| \cup \operatorname{Bs}|(m - m')A| \supset \operatorname{Bs}|mA - E|$ である． □

● 初版 p184, 新装版 p.186. 第 4.2.6 節本文 (見出しの次の行から)3 行目

誤: $F = 0$ で定まる $\mathbb{P}^n$ のアフィン開集合を $D_+(F)$ とすると，

正: $F \neq 0$ で定まる $\mathbb{P}^n$ のアフィン開集合を $D_+(F)$ とすると，

● 初版 p186, 新装版 p.188. 定理 4.2.32 の証明の最後から 3 行目

誤: $X_n^e \cdot g_I \in (S_I)_{m+e}$ となる．つまり，

正: $X_n^e \cdot g_I \in S_{m+e} \subset \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ となる．よって，

● 初版 p187, 新装版 p.189. 定義 4.2.33 〜系 5.2.35

定義 4.2.33 〜系 5.2.35 を以下の原稿と差し替えて下さい．イデアル層だけでなく，一般の連接層を扱うことにしました，

[差し替え原稿]

補題 4.2.32b. 整数 m に対して以下が成り立つ．

(1) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \begin{cases} \dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} & (m \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\dim_{\mathbb{C}} H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \cong \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-m-1))$

証明. (1) $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ は，$X_0, X_1, \ldots, X_n$ に関する m 次単項式の個数に等しい．あとは，簡単な組合せの計算で結論を得る．

(2) $H^i_n(m) = H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ とおく．$\mathbb{P}^{n-1}$ を $\mathbb{P}^n$ の超平面と考えて得られる完全系列 $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(m) \to 0$ から，完全系列

$$0 \to H^{n-1}_{n-1}(m) \to H^n_n(m-1) \to H^n_n(m) \to 0 \qquad (*)$$

が得られる．ここで，$H^{n-1}_n(m) = 0,\ H^n_{n-1}(m) = 0$ を用いた．

$\dim_{\mathbb{C}} H^n_n(m) = \dim_{\mathbb{C}} H^0_n(-n-m-1)$ を n に関する帰納法で証明する．

$n = 1$ のときは，定理 3.4.5 で証明されている．

$n \geqq 2$ とする．帰納法の仮定から，$m \geqq -n+1$ のとき $H^{n-1}_{n-1}(m) = 0$ なので，$(*)$ より $H^n_n(m-1) \cong H^n_n(m) \cong H^n_n(m+1) \cong \cdots$ となる．すると，定理 4.2.32 の証明と同様に，$H^n_n(m-1) = 0$ が得られる．

次に，$m \geqq -1$ の場合に，m に関する帰納法で，$\dim_{\mathbb{C}} H^n_n(-n-m-1) = \dim_{\mathbb{C}} H^0_n(m)$ を証明する．$m = -1$ の場合は両辺ともに 0 である．$m \geqq 0$ とする．m, n に関する帰納法の仮定から，

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n_n(-n-m) = \dim_{\mathbb{C}} H^0_n(m-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{n-1}_{n-1}(-n-m) = \dim_{\mathbb{C}} H^0_{n-1}(m) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$$

である，よって，$(*)$ より，

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n_n(-n-m-1) = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!} + \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

が得られる． □

定義 4.2.32c. X は代数多様体，$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ は $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層とする．X の各ザリスキー開集合に対し

$$\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}_1(U) \oplus \mathcal{F}_2(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_r(U)$$

と定めることによって $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層 $\mathcal{G}$ が定まる．この $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_r$ とか $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{F}_i$ と書き，$\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_r$ の**直和**という．また，$\underbrace{\mathcal{F} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}}_{r\text{ 個}}$ を $\mathcal{F}^{\oplus r}$ とも書く．

命題 4.2.32d. X は代数多様体，$\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_r$ は $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層とする．このとき，以下が成り立つ．

$$H^i\big(X, \mathcal{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_r\big) \cong H^i(X, \mathcal{F}_1) \oplus \cdots \oplus H^i(X, \mathcal{F}_r)$$

証明. チェック・コホモロジーの定義からすぐわかる． □

定義 4.2.33a. $X \subset \mathbb{P}^n$ は射影多様体，$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ は X の座標環，$\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層，$m \in \mathbb{Z}$ とする．ただし，R の次数は $\mathbb{P}^n$ の座標環から自然に定める．

ある $d \in \mathbb{N}$ とある $f \in R_d$ により $U = D_+(f)$ と書けるようなアフィン開集合 $U \subset X$ に対し，

$$\mathcal{G}(U) = (R[1/f])_m \cdot \mathcal{F}(U)$$

とおく．$D_+(f)$ という形の X のアフィン開集合全体の集合は X の開集合系の基底であるから，これによって $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層 $\mathcal{G}$ が定まる．この $\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}(m)$ と書く．

もし，$\mathcal{F}$ が連接層ならば $\mathcal{F}(m)$ も連接層である．

補題 4.2.33b. X は射影多様体で，$\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_X$-加群，$R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ は X の座標環，$U = D_+(g) \subset X$ $(g \in S_d)$ はアフィン開集合とする．このとき，$v \in \mathcal{F}(U)$ に対して，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の整数 $m \geqq m_0$ に対して $g^m v \in \big(\mathcal{F}(md)\big)(X)$ となる．

証明. $X - U \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$ $(U_i = D_+(h_i))$ とアフィン開集合で覆う．$h_i \in R_{d_i}$ とするとき，$W_i = U \cap U_i$ は U_i 内では $W_i = D_{U_i}(g^{d_i}/h_i^d)$ と書ける，準連接の定義から，十分大きい $k_i \in \mathbb{N}$ に対して，$(g^{d_i}/h_i^d)^{k_i} v \in \mathcal{F}(U_i)$ となる．よって，$g^{k_i d_i} v \in \big(\mathcal{F}(k_i d_i d)\big)(U \cup U_i)$ である．$m \geqq \max\{k_1 d_1,\ldots, k_r d_r\}$ とすれば，

$$g^m v \in \big(\mathcal{F}(md)\big)(U \cup U_1 \cup \cdots \cup U_r) = \big(\mathcal{F}(md)\big)(X)$$

となる． □

定理 4.2.33c. 上の定義 4.2.32b の記号を使う．$\mathcal{F}$ は準連接 $\mathcal{O}_X$-加群とする．$M_m = \big(\mathcal{F}(m)\big)(X)$ を m 次部分として R-次数付き加群 M を

$$M = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} \big(\mathcal{F}(m)\big)(X)$$

と定める．このとき，X のアフィン開集合 $U = D_+(f)$) に対し，

$$\mathfrak{F}(U) = \big(R[1/f] \cdot M\big)_0$$

が成り立つ．このとき $\mathfrak{F}$ を $\widetilde{M}$ とか $M^\sim$ などと書き，次数付き加群 M から定まる準連接層という．

証明. $v \in \mathfrak{F}(U)$ $(U = D_+(f))$ をとる．前補題より，$m \gg 0$ に対して $f^m v \in \big(\mathfrak{F}(md)\big)(X) = M_{md}$ となる．よって，$v \in \big(R[1/f] \cdot M\big)_0$ である．

逆に，勝手な元 $v \in \big(R[1/f] \cdot M\big)_0$ は，$v = w/f^m$ $(\exists m \in \mathbb{N}, \exists w \in M_{md})$ と書ける．ここで，

$$w \in M_{md} = \big(\mathfrak{F}(md)\big)(X) = R_{md} \cdot \mathfrak{F}(X)$$

である．よって，$v = w/f^m \in \mathfrak{F}(U)$ である． □

補題 4.2.33d. $Y \subset \mathbb{P}^n$ は閉部分多様体，$\mathfrak{F}$ は連接 $\mathcal{O}_Y$-加群の簡易層とする．すると，ある $r \in \mathbb{N}$ とある整数 $d_1,\ldots, d_r$，および，ある連接 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-加群の簡易層 $\mathfrak{K}$ と，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

が存在する．

証明. $S = \mathbb{C}[X_0,\ldots, X_n]$ を $\mathbb{P}^n$ の座標環，S_d を S の d 次部分，$M_m = \big(\mathfrak{F}(m)\big)(Y)$，$M = \displaystyle\bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} M_m$ とする．$U_i = D_+(X_i) \subset \mathbb{P}^n$ を $X_i \neq 0$ で定まるアフィン開集合とする．$\mathfrak{F}(U_i \cap Y)$ は有限生成 $\mathcal{O}_X(U_i \cap Y)$-加群なので，その生成系を B_i とし，$B_0 \cup \cdots \cup B_n = \{v_1,\ldots, v_r\}$ とする．各 v_i に対して，適当な $0 \leqq j \leqq n$ と十分大きい $m_i \in \mathbb{N}$ を選べば $X_j^{m_i} v_i \in M_{m_i}$ となるが，$0 \leqq j \leqq n$ を動かしてこの条件を満たす最小の m_i を選び，固定する．$w_i = X_j^{m_i} v_i \in M_{m_i}$ である．このとき，$w_1,\ldots, w_r$ は R-次数付き加群 M の生成系になる．$X_j^{m_i} \in S_{m_i} \subset S$ に対して $w_i \in M_{m_i}$ を対応させる写像から，簡易層の準同型写像 $\varphi_i\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_i) \longrightarrow \mathfrak{F}$ が定まる．φ_i 達から，$\varphi\colon \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_i) \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$ が定まる．$\mathfrak{K} = \operatorname{Ker} \varphi$ とおけば，求める完全系列が得られる． □

定理 4.2.34a. (**セールの定理**) X は射影代数多様体，$\mathfrak{F}$ は連接 $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層とする．すると，ある整数 m_0 が存在し，$m \geqq m_0$ を満たす任意の整数 m と，任

意の自然数 $r \geqq 1$ に対し，

$$H^r(X, \mathfrak{F}(m)) = 0$$

となる．

証明. $n \in \mathbb{N}$ を固定する．以下の命題 (P_k) を k に関する降下帰納法で証明する．

(P_k) 「$\mathbb{P}^n$ の任意の閉部分多様体 X と連接 $\mathfrak{O}_X$-加群の簡易層 $\mathfrak{F}$ に対し，ある整数 m_0 が存在し，$m \geqq m_0$ を満たす任意の整数 m に対して $H^k(X, \mathfrak{F}(m)) = 0.$」

系 4.1.22 より，$k > \dim X$ ならば $H^k(X, \mathfrak{F}(m)) = 0$ である．いま，命題 (P_{k+1}) を仮定して (P_k) を示す．補題 4.2.33d より，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

が存在する．$\mathfrak{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ とおく．定理 4.2.32, 補題 4.2.32b より，$m \gg 0$, $j \geqq 1$ のとき，$H^j(\mathbb{P}^n, \mathfrak{L}(m)) = 0$ である．完全系列 $0 \to \mathfrak{K} \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{F} \to 0$ から，完全系列 $0 \to \mathfrak{K}(m) \to \mathfrak{L}(m) \to \mathfrak{F}(m) \to 0$ が導かれることに注意する．これから得られるホモロジー完全系列を考えると，$m \gg 0$ のとき，

$$H^k(X, \mathfrak{F}(m)) \cong H^{k+1}(\mathbb{P}^n, \mathfrak{K}(m))$$

となることがわかる．帰納法の仮定 (P_{k+1}) より，$m \gg 0$ のとき $H^{k+1}(\mathbb{P}^n, \mathfrak{K}(m)) = 0$ である．よって，(P_k) が得られる． $\square$

定理 4.2.35a. (セール) X は射影代数多様体，$\mathfrak{F}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とする．すると，ある整数 $m, r \in \mathbb{N}$ とある $f_1, \ldots, f_r \in H^0(X, \mathfrak{F})$ と全射

$$\varphi\colon \mathfrak{O}_X^{\oplus r} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_X \cdot f_i \longrightarrow \mathfrak{F}(m)$$

が存在する．ここで，φ は $f_j \in \mathfrak{O}_X(X) \cdot f_j \subset \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_X \cdot f_i\right)(X)$ に対し，$\varphi(f_j) = f_j \in (\mathfrak{F}(m))(X)$ を対応させる写像である．このとき，$\mathfrak{F}(m)$ は**大域切断** $f_1, \ldots, f_r$ **で生成される**という．

証明.* 点 $P \in X$ をとり，$\mathfrak{m}_P$ を $\mathfrak{O}_X$ における P の定義イデアル (これは連接 $\mathfrak{O}_X$-加群) とする．定理 4.2.34a より，ある $m_0(P) \in \mathbb{N}$ が存在し，$m \geqq m_0(P)$ に対して $H^1(X, \mathfrak{m}_P \otimes_{\mathfrak{O}_X} \mathfrak{F}(m)) = 0$ となる．すると，$H^0(X, \mathfrak{F}(m)) \longrightarrow H^0(P, \mathfrak{F}(m)|_P)$ は全射である．$\mathfrak{F}(m)|_P$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $H^0(P, \mathfrak{F}(m)|_P)$

と同一視することができる．よって，ある $F_m = \{f_1,\dots, f_r\} \subset H^0(X, \mathfrak{F}(m))$ により，$\mathfrak{F}(m)|_P = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{C}\cdot f_i|_P$ と書ける．

$$(\mathfrak{F}(m))_P = \mathfrak{m}_P(\mathfrak{F}(m))_P + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_{X,P}\cdot f_i$$

であるから，中山の補題により，$(\mathfrak{F}(m))_P = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_{X,P}\cdot f_i$ となる．P の十分小さい開近傍 U_m をとれば，$(\mathfrak{F}(m))|_{U_m} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{O}_X|_{U_m}\cdot f_i$ となる．これを，$\mathfrak{F}(m)$ は U_m 上で大域切断 F_m で生成されるということにする．

今の議論を $\mathfrak{F} = \mathfrak{O}_X$ として行った場合の $m_0(P)$ の値を m_1 とする．P のある開近傍 U_0 をとれば，$\mathfrak{O}_X(m_1)$ は U_0 上大域切断 $\exists g_1,\dots, g_l \in \mathfrak{O}_X(X)$ で生成される．また，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し，$\mathfrak{O}_X(km_1)$ は U_0 上大域切断 ($g_1,\dots, g_l$ の k 次単項式たち) で生成される．

$m \geqq m_0$ ならば，$m = m_0 + km_1 + r$ $(0 \leqq r < m_1)$ と表せる．そこで，$U_P = U_0\cap U_{m_0}\cap U_{m_0+1}\cap U_{m_0+2}\cap\cdots\cap U_{m_0+m_1-1}$ とおく．F_{m_0+r} の元と $g_1,\dots, g_l$ の k 次単項式の積全体の集合を G_P^m とすれば，$\mathfrak{F}(m)$ は U_P 上で大域切断 (G_P^m の元たち) で生成される．

X は，有限個の点 $P_1,\dots, P_s \in X$ を選んで，$X = U_{P_1}\cup\cdots\cup U_{P_s}$ と覆うことができる．$m_0(P_1),\dots, m_0(P_s)$ の最大値を n_0 とする．$m \geqq n_0$ に対して，$\mathfrak{F}(m)$ は X 上大域切断 $G_{P_1}^m\cup\cdots\cup G_{P_s}^m$ で生成される． □

● 初版 p188, 新装版 p.190. 定理 4.2.37 の証明の 3 〜 9 行目

定理 4.2.37 の証明が読みにくいようなので，上記の部分を少し詳しく書き直します．

[差し替え原稿]

$x\in S$ をとる．x を通る超平面 H に対し，x が $S\cap H$ の特異点になるとき，H を x にとって悪い超平面と呼ぶことにし，x にとって悪い超平面全体の集合を B_x とする．もし，$H\in B_x$ ならば，$C = S\cap H$ は特異点 x を持つ．x における S, C の接空間を $T_{S,x}$, $T_{C,x}$ とする．$\dim_{\mathbb{C}} T_{S,x} = 2$, $T_{C,x}\subset T_{S,x}$ である．C は H 上の曲線だから，$T_{C,x}\subset H$ である．x は C の特異点だから $\dim T_{C,x} > 1$ なので，$T_{S,x} = T_{C,x}\subset H$ となる．同一直線上にない $T_{S,x}$ 上の 3 点 P_1, P_2, P_3 をとり，固定する．H の定義方程式の係数を考えることにより，$H\in(\mathbb{P}^n)^\vee$ (双対空間) と考え

る．上の議論から，

$$B_x \subset \bigl\{ H \in (\mathbb{P}^n)^\vee \bigm| P_1,\, P_2,\, P_3 \in H \bigr\}$$

である．よって，$\dim B_x \leqq n-3$ である．これより

● 初版 p189, 新装版 p.191. 系 4.2.40 の証明の 1 行目

旧: 証明. 因子として非常にアンプルな

新: 証明. 定理 4.2.28 より，因子として非常にアンプルな

● 初版 p189, 新装版 p.191. 定義 4.2.41 の 3 行目

定義 4.2.41 の 3 行目の最初を，以下のように書き直して下さい．

誤: X のアフィン開被覆 $\{U_i\}$ をとる．

正: 命題 4.2.8b より, X のあるアフィン開被覆 $\{U_i\}$ をとると，

● 初版 p190, 新装版 p.192. 定義 4.2.41 の最後から 7 〜 8 行目

誤: ここで，$H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(D|_Y))$ を単に $H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(D))$ とも書く．

正: ここで，$\mathcal{O}_Y(D|_Y)$ を単に $\mathcal{O}_Y(D)$ とも書く．

● 初版 p190, 新装版 p.192. 定理 4.2.42

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 4.2.42a. (1)　$X,\, Y$ は非特異射影多様体とする．$\varphi\colon Y \to X$ は正則写像，D は X 上の因子とする．さらに，自然な写像

$$\varphi^*\colon H^0(X,\, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(\varphi^*D))$$

は全射で，$\dim_{\mathbb{C}} H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(\varphi^*D)) \geqq 1$ であると仮定する．このとき，

$$\Phi_{|\varphi^*D|}(Y) \cong \Phi_{|D|}\bigl(\varphi(Y)\bigr)$$

が成り立つ．特に，Φ_D が正則写像で $\dim_{\mathbb{C}} H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(\varphi^*D)) = 1$ ならば，$\Phi_D(\varphi(Y))$ は 1 点である．

(2)　X は非特異射影多様体で，$P \in X$ とする．さらに，1 次元以上の非特異閉部分多様体 $P \in Y \subset X$ が存在し，自然な写像

$$H^0(X,\, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(D))$$

は全射であって，$H^0(Y,\, \mathcal{O}_Y(D)) \neq 0$ かつ $\mathrm{Bs}\,\bigl|D|_Y\bigr| = \phi$ であると仮定する．すると，$P \notin \mathrm{Bs}\,|D|$ である．

(3)　X は非特異射影多様体で，$C \subset X$ は射影曲線，$P \in C$ とする．$\pi\colon C' \to C$ を C の正規化とする．自然な写像

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(D))$$

は全射であって，$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) \neq 0$ かつ $\mathrm{Bs}\,|\pi^* D| = \phi$ であると仮定する．すると，$P \notin \mathrm{Bs}\,|D|$ である．

証明.　(1) $\Phi_{|\varphi^* D|}$ は $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(\varphi^* D))$ の基底 $g_1, \ldots, g_m$ により，$\Phi_{|\varphi^* D|}(P) = (g_1(P) : \cdots : g_m(P))$ と定義される．$H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ の基底 $f_1, \ldots, f_n$ を，$1 \leqq i \leqq m$ に対し $\varphi^*(f_i) = g_i$，かつ $m < i \leqq n$ に対し $f_i \in \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ となるように選んでおけば，$Q = \varphi(P)$ に対し，

$$\begin{aligned}\Phi_D(\varphi(P)) &= (f_1(Q) : \cdots : f_n(Q)) \\ &= (g_1(P) : \cdots : g_m(P) : 0 : \cdots : 0)\end{aligned}$$

であるから，$\Phi_{|\varphi^* D|} = \Phi_D \circ \varphi$ とみなすことができる．

(2)　$D = A_1 - A_2$ (A_1, A_2 は超曲面) で $Y \not\subset A_1$, $Y \not\subset A_2$ と表しておく．$P \in \mathrm{Bs}\,|D|$ とし，P のある座標開近傍 U において，$D|_U = \mathrm{div}(h)$ ($h \in \mathrm{Rat}(X)$) であるとする．h の極に Y は含まれないので，$\tilde{h} = \varphi^* h = h \circ \varphi \in \mathrm{Rat}(Y)$ が定義できる．$W = \varphi^{-1}(U)$ とすると，$(\varphi^* D)|_W = \mathrm{div}(\tilde{h})$ である．$\varphi(Q) = P$ を満たす任意の点 P をとる．$\mathrm{Bs}\,|\varphi^* D| = \phi$ だから，命題 4.2.17(2) より，ある $\tilde{f} \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D))$ が存在して $\tilde{g} = \tilde{f}\tilde{h}$ とおくとき $\tilde{g}(Q) \neq 0$ となる．仮定から，$\varphi^*(f) = \tilde{f}$ を満たす $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ が存在する．$g = fh$ とおくとき，$\tilde{g}(P) = (\varphi^* g)(\varphi(P)) = g(Q) \neq 0$ である．よって，命題 4.2.17(2) より，$P \notin \mathrm{Bs}\,|D|$ である．

(3) の証明は (2) と同様である．　□

● 初版 p191. 新装版 p.193. 定理 4.2.43.

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 4.2.43a.　X は射影代数多様体，$\mathcal{F}$ は連接な $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層とする．すると，$H^r(X, \mathcal{F})$ は有限次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間である．

証明.　$n \in \mathbb{N}$ を固定する．r に関する降下帰納法で証明する．系 4.1.22 より，$r > \dim X$ ならば $H^r(X, \mathcal{F}) = 0$ である．

いま，任意の射影代数多様体 Y と任意の連接な $\mathcal{O}_Y$-加群の簡易層 $\mathcal{G}$ に対し，

$\dim_{\mathbb{C}} H^{r+1}(Y, \mathcal{G}) < +\infty$ であると仮定する．補題 4.2.33d より，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が存在する．$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ とおく．定理 4.2.32, 補題 4.2.32b より，$\dim_{\mathbb{C}} H^r(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) < +\infty$ である．コホモロジー完全系列

$$\cdots \to H^r(\mathbb{P}^n, \mathcal{L}) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{r+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}) \to \cdot$$

において，帰納法の仮定から $\dim_{\mathbb{C}} H^{r+1}(\mathbb{P}^n, \mathcal{K}) < +\infty$ であるので，$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathcal{F}) < +\infty$ である． □

● 初版 p192, 新装版 p.194. (4.4) 式

誤: $dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{dy_i}{dx_j} dx_j$

正: $dy_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j$

● 初版 p193 〜 194, 新装版 p.195 〜 196.

$\frac{\partial(y_k, y_l)}{\partial(x_i\, x_j)}$ と $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1\, x_2)}$ を $\frac{\partial(y_k, y_l)}{\partial(x_i, x_j)}$ と $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ に訂正してください．全部で 6 ケ所あります.

● 初版 p193, 新装版 p.195.

(4.5) 式

$$dy_1 \wedge dy_2 = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} dx_1 \wedge dx_2 \tag{4.5}$$

についている式番号 (4.5) をこの場所から削除して，それより 10 行上にある式に，

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} g_j dx_j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_i g_j dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (f_i g_j - f_j g_i) dx_i \wedge dx_j \qquad (4.5)\end{aligned}$$

のように付け直して下さい.

● 初版 p194, 新装版 p.197. 定理 4.3.2 の 2 行目の式の右辺

誤: $dx_{i_i} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$

正: $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$

● 初版 p196, 新装版 p.199. 第 4.3.3 項の 1 行目 (標準因子の説明の最初の行)

誤: $0 \neq \omega \in \Omega^r_{\mathrm{Rat}(X)}$ とする．

正: $0 \neq \omega \in \Omega^n_{\mathrm{Rat}(X)}$ とする．

● 初版 p197, 新装版 p.199. 定理 4.3.7 の直前

定義 4.3.6 と定理 4.3.7 の間に，以下の定理を追加して下さい．

[追加原稿]

定理 4.3.6b. X は n 次元非特異代数曲線，K_X は X の標準因子, D は X 上の因子とする．このとき，次が成り立つ．

$$\Omega^n_X(D) \cong \mathcal{O}_X(D + K_X)$$

証明. 定理 3.2.10, 命題 3.3.9b の証明と同様である． □

● 初版 p198 〜 199, 新装版 p.200 〜 201. 定理 4.3.8 の証明

定理 4.3.8 の証明を下記原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. $P \in X$ を任意の点とする．$n = \dim X$ とし，U は広義局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ を持つ P のアフィン開近傍とする．ただし，必要なら U を小さく選び直し，U における $Y \cap U$ の定義方程式が $x_n = 0$ となるように，広義局所座標系を選んでおく．このとき，$(x_1,\ldots, x_{n-1})$ は $P \in U \cap Y \subset Y$ の広義局所座標系になる．

$$\omega = \frac{g}{x_n}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in H^0(U, \Omega^n_X(Y))$$

$(g \in \mathcal{O}_X(U))$ に対し，

$$\varphi_U(\omega) = g\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \in H^0(U \cap Y, \Omega^{n-1}_Y)$$

を対応させる写像 $\varphi_U \colon H^0(U, \Omega^n_X(Y)) \to H^0(U \cap Y, \Omega^{n-1}_Y)$ を考える．

この φ_U の定義が局所座標系の選び方に依存しないことを確かめる．$W \subset X$ は広義座標系 $(z_1,\ldots, z_n)$ を持つ座標開集合で，$Y \cap W$ は $z_n = 0$ で定まるものとする．$\dfrac{\partial x_i}{\partial z_j}$ を (i, j)-成分とする n 次正方行列式 ($U \cap W$ 上のヤコビアン) を J_X, その左上の $(n-1)$ 次正方小行列式を J_Y とする．$U \cap W$ 上のある可逆関数 u により，$x_n = u z_n$ と書ける．$Y' = Y \cap U \cap W$ とおくとき，Y' 上では $z_n = 0$ だから，

$1 \leqq i \leqq n-1$ に対し，

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial z_i}\right)\bigg|_{Y'} = \left(\frac{\partial u}{\partial z_i}\cdot z_n\right)\bigg|_{Y'} = 0, \quad \left(\frac{\partial x_n}{\partial z_n}\right)\bigg|_{Y'} = u$$

が成り立つ．よって，Y' 上では，$J_X = uJ_Y$ が成り立つ．$W \cap U$ 上では，$\omega = \dfrac{g}{uz_n}\cdot J_X\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ だから，

$$\begin{aligned}\varphi_W(\omega) &= \frac{g\cdot J_X}{u}\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} = \frac{g\cdot uJ_Y}{u}\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} \\ &= gJ_Y\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} = g\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = \varphi_U(\omega)\end{aligned}$$

であり，$\varphi_U(\omega)$ は U の選び方に依存せずに定まる．$\{\varphi_U\}$ より，簡易層の準同型写像 $\varphi\colon \Omega_X^n(Y) \to \Omega_Y^{n-1}$ が矛盾なく定まる．これは，$\varphi\colon \mathcal{O}_X(K_X+Y) \to \mathcal{O}_Y(K_Y)$ と同一視できる．これより，Y 上で $\varphi(K_X+Y) \sim K_Y$ であるが，φ の定義から，$\varphi(K_X+Y) = (K_X+Y)|_Y$ である． □

● 初版 p198 〜 199, 新装版 p.200 〜 201. 定理 4.3.8 の直後

定理 4.3.8 の直後に以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

上の定理の証明のように構成される写像 φ を，

$$\mathrm{Res}_Y\colon \mathcal{O}_X(K_X+Y) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(K_Y)$$

と書き，**ポアンカレー留数写像**という.

この写像を，一般的な局所座標系で表示しておこう．$(x_1,\ldots, x_n)$ は上の定理の証明のような U 上の局所座標系とし，$(y_1,\ldots, y_n)$ を U 上の一般の局所座標系とする．ただし，$x_n = f(y_1,\ldots, y_n)$ とするとき，$f_{y_n} = \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \neq 0$ と仮定しておく．f は Y の定義方程式である．

$$J = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}, \quad J_i = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n)}$$

とおく．行列式の展開公式より，$J = (-1)^{n+i}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} J_i\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}J_i\cdot f_{y_i}$ である．また，

$$\omega = \frac{g}{x_n}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \frac{gJ}{f}\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \qquad (*)$$

である．Y 上では $0 = df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_n}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^{n} f_{y_j} dy_j$ であるから，

$$dy_n = -\frac{1}{f_{y_n}} \sum_{j=1}^{n-1} f_{y_j} dy_j$$

である．これより，Y 上では，

$$\begin{aligned}
&dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{i-1} \wedge dy_{i+1} \wedge \cdots \wedge dy_n \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} J_i \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{i-1} \wedge dy_{i+1} \wedge \cdots \wedge dy_{n-1} \wedge \left(-\frac{1}{f_{y_n}} \sum_{j=1}^{n-1} f_{y_j} dy_j \right) \\
&\qquad\qquad + J_n \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1} \\
&= \frac{1}{f_{y_n}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(n-i-1)+1} J_i \cdot f_{y_i} \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1} \\
&= \frac{1}{f_{y_n}} J \, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\mathrm{Res}_Y(\omega) = \varphi_U(\omega) = g \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} = \frac{gJ}{f_{y_n}} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}$$

である．$(*)$ と比較し，両辺を J で割ると，

$$\mathrm{Res}_Y \left(\frac{g}{f} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \right) = \frac{g}{f_{y_n}} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-1}$$

が得られる．

命題 4.3.8b. X は n 次元非特異代数多様体，Y は X の非特異超曲面とする．また，$(x_1, \ldots, x_n)$ を局所座標系とする X の座標開集合 U 上で，Y は $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ で定まり，$f_{x_n} \neq 0$ であると仮定する．すると，ポアンカレー留数写像 $\mathrm{Res}_Y \colon \mathcal{O}_X(K_X + Y) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(K_Y)$ は，以下のように表される．

$$\mathrm{Res}_Y \left(\frac{g}{f} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \right) = \frac{g}{f_{x_n}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

ここで，$g \in \mathrm{Rat}(X)$ である．

同伴公式は，以下のような見方で考えてもよい．

写像 $\psi\colon \mathcal{O}_Y(K_Y - Y|_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(K_X)$ を，

$$\begin{aligned}\psi\,(fg\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}) &= fg\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge d\log f \\ &= g\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\,dx_i \\ &= gf_{x_n}\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n\end{aligned}$$

で定める．上の命題より，この写像は well-defined で，同型写像になる．

● 初版 p199, 新装版 p.201. 参考 4.3.9

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

参考 4.3.9a. X は非特異代数多様体，Y は X の非特異な閉部分多様体で，$\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_X$ における Y の定義イデアルとする．このとき，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\varphi} \Omega^1_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\psi} \Omega^1_Y \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

が存在する．(テンソル積 $\otimes$ の定義は定義 6.2.3 を見よ．この場合，X の座標開集合 U に対し，$\omega \otimes 1 \in \Omega^1_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$ は，U 上の 1 次微分形式 $\omega \in \Omega^1_X(U)$ を Y に制限したもの $\omega|_{U\cap Y}$ と同一視することができる.)

証明. X の各点 P に対し，P を含む X の座標開集合 U と，U 上の局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ を，$Y \cap U$ の U 上での定義方程式が $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$ であるようにとることができる．ここで，$n = \dim X$, $r = \dim Y$ である．また，$\mathcal{I}(U) = (x_{r+1},\ldots, x_n) \subset \mathcal{O}_X(U)$, $\Omega^1_X(U) = \mathcal{O}_X(U) \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_X(U) \cdot dx_n$, $\Omega^1_Y(U \cap Y) = \mathcal{O}_Y(U \cap Y) \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_Y(U \cap Y) \cdot dx_r$ である．

$$\psi_U\colon \Omega^1_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(U \cap Y) \longrightarrow \Omega^1_Y(U \cap Y)$$

は $1 \leqq i \leqq r$ に対しては $\psi_U(dx_i \otimes 1) = dx_i$, $r+1 \leqq i \leqq n$ に対しては $\psi_U(dx_i \otimes 1) = 0$ と定めることによって自然に定義される．

$$\varphi_U\colon \mathcal{I}(U)/\mathcal{I}(U)^2 \longrightarrow \Omega^1_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$$

は，$x_i \in \mathcal{I}(U)$ $(r+1 \leqq i \leqq n)$ の $\mathcal{I}(U)^2$ を法とする同値類 $\overline{x_i}$ に対し，$\varphi_U(\overline{x_i}) = dx_i$ として定義される．φ_U が矛盾なく定義されることは，$r+1 \leqq i \leqq j \leqq n$ に対して，$d(x_i x_j) = x_j\,dx_i + x_i\,dx_j = 0 \in \Omega^1_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(U \cap Y)$ であることから保証される．この $\varphi = \{\varphi_U\}_U$, $\psi = \{\psi_U\}_U$ から完全系列 $(*)$ が得られることは容易にわかる． $\square$

● 初版 p199, 新装版 p.202. 系 4.3.10 の証明

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

証明. $K_{\mathbb{P}^n} \sim -(n+1)H$, $S \sim dH$ と定理 4.3.8 からすぐわかる. □

● 初版 p201, 新装版 p.203. 定理 4.4.4

定理 4.4.4 を次の定理と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定理 4.4.4a. R はネーター整域とする. このとき, R が整閉整域であることと, R が正規環であることは同値である.

証明. R は整閉整域, $\mathfrak{p}$ は R の素イデアルとする. $x \in Q(R_\mathfrak{p}) = Q(R)$ が $R_\mathfrak{p}$ 上整であるとすると, ある $n \in \mathbb{N}$ と $a_i \in R$ $(1 \leqq i \leqq n)$ と $b \in R - \mathfrak{p}$ が存在して,

$$x^n + \frac{a_1}{b}x^{n-1} + \frac{a_2}{b}x^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{b} = 0$$

と書ける. この式の両辺に b^n を掛けると, bx が R 上整であることがわかる. R は整閉だから, $bx \in R$ である. したがって, $x \in R_\mathfrak{p}$ である. よって, $R_\mathfrak{p}$ は整閉整域で, R は正規環である.

逆に, R はネーター正規整域とする. $x \in S(R)$ は R 上整な元とすると, R の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について, x は任意の $R_\mathfrak{p}$ 上整で $R_\mathfrak{p}$ は整閉だから, $x \in R_\mathfrak{p}$ である. よって, $x \in \bigcap_{\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p} = R$ となり, R は整閉整域である. □

● 初版 p202, 新装版 p.204. 定理 4.4.7

定理 4.4.7 とその証明を下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定理 4.4.7a. (**整閉包の有限性**) R は $\mathbb{C}$ 上有限生成な整域, L は $K = Q(R)$ の有限次代数拡大体とする. このとき, L における R の整閉包 R'_L は有限 R-多元環, つまり R-加群として有限生成である.

証明. 必要なら L/K のガロア閉包をとることにより, 最初から L は K のガロア拡大であると仮定してよい. 標数 0 の体の有限次代数拡大は単純拡大であったから, ある $a \in L$ により, $L = K(a)$ と書ける. a の K 上の最小多項式は $f(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_n$ $(c_0, \ldots, c_n \in R)$ という形に書ける. $L = K(c_0a)$ だから, a の代わりに c_0a をとることにより, $c_0 = 1$ で a は R 上整であると仮定してよい. $S = R[a]$ は R の整拡大なので, $S'_L = R'_L$ である. S'_L が有限 S-加群であることが証明できれば, S は有限 R-加群だから S'_L は有限 R-加群であることがわかる.

$f'(a)S_L \subset S$ を証明しよう．$f(x) = 0$ の根全体を $a_1 := a,\ a_2, \ldots,\ a_n$ とし，$g_i(x) = f(x)/(x - a_i)$ とおく．$f'(x) = g_1(x) + \cdots + g_n(x)$ である．任意の元 $b \in S'_L$ をとる．体拡大 L/K のガロア群を $G = \{\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n\}$ とする．ただし，$\sigma_1 = \mathrm{id}$, $\sigma_i(a) = a_i$ となるように添え字をつけておく．$g_1(x) = e_{n-1}x^{n-1} + e_{n-2}x^{n-2} + \cdots + e_0$ $(e_i \in S)$ と表す．$g_i(x) = \sigma_i(e_{n-1})x^{n-1} + \cdots + \sigma_i(e_0)$ である．$\gamma_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(be_j)$ とおく．任意の $\tau \in G$ に対して，$\tau(\gamma_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau \circ \sigma_i(be_j) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(be_j) = \gamma_j$ だから，$\gamma_j \in R$ である．$i \geqq 2$ のとき $g_i(a) = 0$ だから，

$$bf'(a) = bg_1(a) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(b)g_i(a) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_i(be_j)a^j = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j a^j \in R[a] = S$$

となる．以上で，$S'_L \subset (1/f'(a))S$ が証明された．

$(1/f'(a))S$ はネーター加群なので，その部分加群である S'_L もネーター加群であり，有限 S-加群である． □

● 初版 p203, 新装版 p.205．命題 4.4.8 ～定義 4.4.9

命題 4.4.8 ～定義 4.4.9 を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 4.4.8a. X, L は上と同様とする．

(1) U, W が X のアフィン開集合のとき，$R(U \cap W) = R(U) \cdot R(W)$ に対応して，

$$R'_L(U \cap W) = R'_L(U) \cdot R'_L(W) \subset L$$

が成り立つ．

(2) X がアフィン代数多様体で，$\{U_1, \ldots, U_r\}$ が X のアフィン開被覆のとき，

$$R'_L(X) = R'_L(U_1) \cap \cdots \cap R'_L(U_r) \subset L$$

が成り立つ．

証明. 先に (2) を証明する．$R = R(X) = \mathcal{O}_X(X)$ とし，ある $f_1, \ldots, f_r \in R$ により $U_i = D(f_i)$ と書ける場合に証明すれば十分である．$R(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i) = R[1/f_i]$ である．

R の L における整閉包を R'_L とするとき，$R[1/f_i]$ の L における整閉包は $R'_L[1/f_i]$ であることを示す．$R[1/f_i]$ 上整な元 $z \in L$ をとる．$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ を $R[1/f_i]$ 上の z の最小多項式とする．$a_j = b_j/f_i^m$ $(b_j \in R)$ と書けるので，$m \gg 0$

とすれば，$f^m z$ は R 上整であることがわかる．したがって，$z \in R'_L[1/f_i]$ であり，$R[1/f_j]$ の L における整閉包は $R'_L[1/f_i]$ である．

$X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ だから $R = R[1/f_1] \cap \cdots \cap R[1/f_r]$ である．R を R'_L に係数拡大すると (つまり，両辺に R'_L を掛けると)

$$R'_L = R'_L[1/f_1] \cap \cdots \cap R'_L[1/f_r] = R'_L(U_1) \cap \cdots \cap R'_L(U_r) \subset L$$

が得られる．

(1) 整の定義から $R(U)$ 上整な元は，$R(U \cap W)$ 上整である．よって，$R'_L(U \cap W) \supset R'_L(U)$, $R'_L(U \cap W) \supset R'_L(W)$ で，$R'_L(U \cap W) \supset R'_L(U) \cdot R'_L(W)$ となる．

逆に，$R'_L(U \cap W) \subset R'_L(U) \cdot R'_L(W)$ を示す．$R = R(U)$, $R' = R'_L(U)$ とする．U 内のアフィン開集合として，ある $f_1, \ldots, f_r \in R$ により $U \cap W = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$ と書ける．$R[1/f_1] \cap \cdots \cap R[1/f_r] = R(U \cap W) = R \cdot R(W)$ であるので，R を R' に係数拡大すると，(2) と同様に，$R'[1/f_1] \cap \cdots \cap R'[1/f_r] = R' \cdot R(W)$ である．よって，$R'_L(U \cap W) \subset R'[1/f_1] \cap \cdots \cap R'[1/f_r] = R' \cdot R(W) \subset R'_L(U) \cdot R'_L(W)$ である．

□

定義 4.4.9. $R'_L(U)$ の極大イデアル全体の集合を $\operatorname{Spm} R'_L(U)$ とし，$U' = \operatorname{Spm} R'_L(U)$ と同一視する．上の命題から，$U' = \operatorname{Spm} R'_L(U)$, $W' = \operatorname{Spm} R'_L(W)$ として，$U' \cap W' = \operatorname{Spm}(R'_L(U) \cdot R'_L(W)) = \operatorname{Spm} R'_L(U \cap W)$ とみなせる．このようにして，X のアフィン開被覆 $X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ から，代数多様体 $X' = U'_1 \cup \cdots \cup U'_r$ を構成でき，全射 $\pi\colon X' \to X$ が存在し，$\pi|_{U'_i} = \pi_{U'_i}\colon U'_i \to U_i$ である．この $\pi\colon X' \to X$ を X の L における**正規化**という．構成の仕方から，$\operatorname{Rat}(X') \subset L$ である．また，X' は同型を除いて一意的に定まる．

$\operatorname{Rat}(X)$ における X の正規化を単に，X の**正規化**という．

● 初版 p.204, 新装版 p.206. 命題 4.4.12

命題 4.4.12 を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 4.4.12a. X, Y は代数多様体で，$\varphi\colon X \to Y$ は有限写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) Y の任意のアフィン開集合 U に対し，$\varphi^{-1}(U)$ は X のアフィン開集合である．

(2) 任意の $Q \in Y$ に対し，$\varphi^{-1}(Q)$ は有限集合である．

(3) さらに，Y は非特異と仮定する．このとき，W が X のザリスキー開集合ならば，$\varphi(W)$ は Y のザリスキー開集合である．

証明. (1) R が U の座標環のとき，$\varphi^{-1}(U)$ は R の整拡大 R'_L を座標環をするアフィン開集合であることを示す．定義 4.4.10 のように $Y = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ と表す．$W_i = U_i \cap U$, $K = \mathrm{Rat}(Y)$, $L = \mathrm{Rat}(X)$, $R_i = \mathcal{O}_Y(W_i)$ とおく．$\varphi^{-1}(W_i)$ が R_i の L における整閉包 R'_i を座標環とするアフィン開集合であることは容易にわかる．また，命題 4.4.8a(2) より，$R'_1 \cap \cdots \cap R'_r = R'_L$ である．よって，$\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(W_1) \cup \cdots \cup \varphi^{-1}(W_r)$ は R'_L を座標環とするアフィン開集合である．

(2) 定理 2.2.26 よりすぐわかる．

(3) W が開集合系の基底に属する場合に証明すればよいから，X, Y がアフィン代数多様体で，$W = D(f)$ $(f \in R_X = \mathcal{O}_X(X))$ である場合に証明すれば十分である．f は $R_Y = \mathcal{O}_Y(Y)$ 上整なので，その最小多項式を $g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ とする．Y 上で $U = D(a_0) \cup \cdots \cup D(a_{n-1})$ とおく．$\varphi(W) = U$ を示す．

勝手な点 $P \in W$ をとる．$Q = \varphi(P)$ とおく．$f(P) \neq 0$ である．

$$f(P)^n + a_{n-1}(Q)f(P)^{n-1} + \cdots + a_0(Q) = 0$$

だから，$a_i(Q) \neq 0$ を満たす i が存在するので，$Q \in U$ である．よって，$\varphi(W) \subset U$ である．

逆に，$\varphi(W) \supset U$ でないと仮定して矛盾を導く．点 $Q \in U - \varphi(W)$ が存在する．$\varphi(P) = Q$ となるような任意の点 $P \in X$ に対し，$P \notin W$ なので，$f(P) = 0$ である．Q は非特異点なので，$x^n + a_{n-1}(Q)x^{n-1} + \cdots + a_0(Q) = 0$ の解は，$x = f(P)$ $(P \in \varphi^{-1}(Q))$ で尽くされる．すると，解と係数の関係より，任意の $i = 0, \ldots, n-1$ に対し $a_i(Q) = 0$ となる．これは矛盾である．

なお，(3) は Y が非特異でなくても正規であれば成立する．その場合の証明は，[松村] p.83 定理 9.6 を参照せよ． □

● 初版 p.204, 新装版 p.206. 定理 4.4.14(1) の証明の 2 行目

誤: Y のアフィン開被覆である．

正: X のアフィン開被覆である．

● 初版 p.206, 新装版 p.208. 命題 4.4.18 の証明の最後の 3 行

証明が遠回りで無駄があったので，簡略なほうに修正します．

旧: このとき，ある $b \in R$ をとると，$ab - 1 \in (x^r)$ とできる．すると，$by - x^m = (ab-1)x^m \in (x^{r+m}) \subset I$ より，$x^m \in I$ となる．つまり，$I = (x^m)$ であり，I は単項イデアルである． □

新: $a \notin (x)$ なので，a は R の可逆元である．よって，$x^m \in I$ となる．つまり，

$I = (x^m)$ であり，I は単項イデアルである． □

● 初版 p.206. 新装版 p.208. 系 4.4.20 の下の説明

アウスランダー・ブックスバウムの定理を証明を追加したので，下記の説明は削除して下さい．

[削除する部分]

本書ではアウスランダー・ブックスバウムの定理を証明しなかったが，Krull $\dim R = 1$ の場合には，命題 4.4.18 が定理 4.2.5 の代わりをする．また，定理 4.2.5 をを系由しない証明が，[松村] 定理 19.4 にある．

(ついでに,「系由」→「経経」でした.)

● 初版 p.207. 新装版 p.209. 定理 4.4.22 の証明の 1 行目

誤: $x \in \mathbb{Q}(R)$

正: $x \in Q(R)$

● 初版 p.207. 新装版 p.209. 定理 4.4.22 の証明の 5 行目

誤: 書けると，

正: 掛けると，

● 初版 p.207. 新装版 p.209. 定理 4.4.22 の証明の最後の 4 行

定理 4.4.22 の証明の最後の 4 行を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

今，$(1/x)R'$ を含む R' の高さ 1 の素イデアルのひとつを $\mathfrak{p}'$ とする．$1/x \in \mathfrak{p}'R'_{\mathfrak{p}'}$ なので，$x \notin R'_{\mathfrak{p}'}$ である．$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap R$ とすると，$\mathfrak{p}$ は R の素イデアルであり，$x \notin R_{\mathfrak{p}}$ である． □

● 初版 p208. 新装版 p.210. 定理 4.4.23

定理 4.4.23 の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．丁寧に書き直しました．

[差し替え原稿]

証明. X, Y はアフィン代数多様体であると仮定してよい．その座標環を R_X, R_Y とするとき，R_X は R_Y の整拡大である．I_W を W の定義イデアルとし，局所環 $R = (R_Y)_{I_W}$ を考える．$\mathfrak{p} = I_W R$ とおくと，$\mathfrak{p}$ は R の唯一の極大イデアルで，Krull $\dim R = 1$ である．R は正則局所環なので，y を R の正則パラメター系とすると，$\mathfrak{p} = yR$ と書ける．

単射 $\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(Y) \to \mathrm{Rat}(X)$ を通して，$\mathrm{Rat}(Y) \subset \mathrm{Rat}(X)$ と考える．

$$S = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathrm{Rat}(X) \;\middle|\; f \in R_X,\, g \in R_Y - \mathfrak{p} \right\}$$

とする．$d = \deg\varphi = [Q(R_X) : Q(R_Y)]$ とおくと，R-加群として $S = \bigoplus_{i=1}^{d} R \cdot e_i \subset \mathrm{Rat}(X)$ と書ける．すると $K = R/yR = R/\mathfrak{p} = \mathrm{Rat}(W)$ とおくとき，K-ベクトル空間として，$S/yS = \bigoplus_{i=1}^{d} (R/yR) \cdot \overline{e}_i$ となり，$\dim_K S/yS = d$ がわかる．

準素イデアル分解 $yS = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ をとり，$\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ とする．$\mathfrak{p}_i$ は V_i に対応するイデアルであるとしておく．必要なら，X, Y を小さく選び直せば，W は Y 内で $y = 0$ で定まる超曲面であり，V_i は X 内で $x_i = 0$ で定まる超曲面であると仮定してよい．$\varphi^* W$ の定義から $y = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \in S$ である．また，$\mathfrak{p}_\mathfrak{i} S_{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}} = x_i S_{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}$ である．$j \neq i$ のとき x_j は $S_{\mathfrak{p}_i}$ で可逆だから，$yS_{\mathfrak{p}_i} = x_i^{a_i} S_{\mathfrak{p}_i}$ である．よって，$\mathfrak{q}_i S_{\mathfrak{p}_i} = x_i^{a_i} S_{\mathfrak{p}_i}$ である．したがって，

$$\mathfrak{q}_i = S \cap \mathfrak{q}_i S_{\mathfrak{p}_i} = S \cap x_i^{a_i} S_{\mathfrak{p}_i} = S \cap \mathfrak{p}_i^{a_i} S_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}_i^{a_i}$$

である．

$$S/yS \cong S/\mathfrak{q}_1 \oplus \cdots \oplus S/\mathfrak{q}_r$$
$$\dim_K S/\mathfrak{q}_i = a_i \dim_K S/\mathfrak{p}_i = a_i [\mathrm{Rat}(V_i) : \mathrm{Rat}(W)]$$

より，$\deg\varphi = d = \dim_K S/yS = \sum_{i=1}^{r} a_i [\mathrm{Rat}(V_i) : \mathrm{Rat}(W)]$ を得る． □

● 初版 p.211. 新装版 p.213. 演習問題 4.8(3) の 1 行目末尾

誤: 何起こるか

正: 何が起こるか

● 初版 p.211. 新装版 p.213. 演習問題 4.9 の 4 行目

誤: 半時計回り

正: 反時計回り

第5章

● 初版 p215, 新装版 p.217. 補題 5.1.4 の証明の 2 行目

誤: $0 \to (R \cap x^n R')/x^n R \to R/x^n R \to R'/x^n R' \to R'/(R \cap x^n R') \to 0$

正: $0 \to (R \cap x^n R')/x^n R \to R/x^n R \to R'/x^n R' \to R'/(R + x^n R') \to 0$

● 初版 p215, 新装版 p.217. 補題 5.1.4 の証明の 4 行目

誤: 他方，$\dim_{\mathbb{C}} R'/(R \cap x^n R') \geqq$

正: 他方，$\dim_{\mathbb{C}} R'/(R + x^n R') \leqq$

● 初版 p215. 新装版 p.217, 注意 5.1.5

注意 5.1.5 の中で，$R'/x'R'$ と印刷されている 4 ケ所を R'/xR' に修正し，R/gR と印刷されている所を R/xR に修正して下さい．

修正後は，以下のようになります．

[修正後原稿]

注意 5.1.5.　上の命題において，$\dim_{\mathbb{C}} R/xR = \dim_{\mathbb{C}} R'/xR'$ であっても，自然な写像 $R/xR \to R'/xR'$ は同型写像とは限らない．

例えば，$R = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2 - Y^3)$, $x = X$ では，$X = T^3$, $Y = T^2$ とおくとき，$R' = \mathbb{C}[T]$ である．このとき，$R/xR = \mathbb{C}[X,\,Y]/(X^2 - Y^3,\,X) = \mathbb{C}[Y]/(Y^3) = \mathbb{C}[T^2]/(T^6) = \mathbb{C} + \mathbb{C}T^2 + \mathbb{C}T^4$, $R'/xR' = \mathbb{C}[T]/(X) = \mathbb{C}[T]/(T^3) = \mathbb{C} + \mathbb{C}T + \mathbb{C}T^2$ であり，自然な写像 $\varphi\colon R/xR \to R'/xR'$ は $\varphi(T^4) = 0$ であり，同型写像ではない．

● 初版 p216, 新装版 p.218. 命題 5.1.6 の証明の最後から 2 行目

$\dim_{\mathbb{C}} R'/g'R' = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ord}_{Q_i} g'$ だから，(5.2) がわかる．

と書かれた 1 行を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

点 Q_i に対応する R' の極大イデアルを $\mathfrak{m}'_i$ とし，$R_i = (R')_{\mathfrak{m}'_i}$ とおく．R_i は正則局所環で Krull $\dim R_i = 1$ だから，正則パラメータ系 $x_i \in R_i$ により $\mathfrak{m}'_i R_i = x_i R_i$ と書ける．$e_i = \mathrm{ord}_{Q_i} g'$ とおくと $g'R_i = x_i^{e_i} R_i$ となる．中国剰余定理より，

$$R'/g'R' \cong (R_1/x_1^{e_1} R_1) \oplus \cdots \oplus (R_r/x_r^{e_r} R_r)$$

なので，$\dim_{\mathbb{C}} R'/g'R' = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ord}_{Q_i} g'$ であり，(5.2) がわかる．

● 初版 p217, 新装版 p.219. 命題 5.1.11 の 1 〜 2 行目

誤: すると，$D = \varphi^* P$ に対し $(D^2)_S = 0$ が成り立つ.

正: すると，$F = \varphi^* P$ に対し $(F^2)_S = 0$ が成り立つ.

● 初版 p218, 新装版 p.220. 1 行目 命題 5.1.11 の証明の最初の行

旧: $n \gg 0$ のとき $n\pi^* P$ は非常にアンプルだから，

新: 系 3.5.17 より $n \geqq 2g(\Gamma') + 1$ のとき $n\pi^* P$ は非常にアンプルだから，

● 初版 p218, 新装版 p.220. 命題 5.1.11 の証明の 5 行目

誤: $F_i' = \varphi^*(Q_i)$ とおけば，$F \cap \operatorname{Supp} F_i' = \phi$ であり，

正: $F_i' = \varphi^*(\pi(Q_i))$ とおけば，$\operatorname{Supp} F \cap \operatorname{Supp} F_i' = \phi$ であり，

● 初版 p218 〜 219, 新装版 p.220 〜 221. 定理 5.1.12 の証明

もとの証明は説明が不親切だったようです．下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. Γ の特異点は有限個しかないから，Γ が非特異の場合に証明すれば十分である．$P \in S$, $Q = \varphi(P) \in \Gamma$ とし，$\mathcal{O}_{S,P}$, $\mathcal{O}_{\Gamma,Q}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_P$, $\mathfrak{m}_Q$ とする．$\varphi^*: \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ を自然な写像とする．また，F は P を含む $\varphi^{-1}(Q)$ のすべての既約成分の和集合とする．S における点 P の十分小さいアフィン開集合 U において $F \cap U$ の座標環 R_F を考え，点 P に対応する R_F の極大イデアルを $\tilde{\mathfrak{n}}_P$ とする．R_F は 0 以外の巾零元を持たないことに注意する．$S = R_F - \tilde{\mathfrak{n}}_P$ は積閉集合なので，S による R_F の局所化 (演習問題 2.10 参照) を $\mathcal{O}_{F,P} = S^{-1}R_F$ と書く．また，$\mathfrak{n}_P = \tilde{\mathfrak{n}}_P \mathcal{O}_{F,P}$ とおく．自然な全射 $\tilde{\psi}: \mathcal{O}_{S,P} \to \mathcal{O}_{F,P}$ から全射 $\psi: \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow \mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2$ が誘導される．$f \in \mathfrak{m}_Q$ をとるとき，任意の点 $P' \in F$ に対して $f(\varphi(P')) = f(Q) = 0$ であり，$\mathcal{O}_{F,P}$ は 0 以外の巾零元を持たないから，ヒルベルトの零点定理により $\tilde{\psi}(\varphi^*(f)) = 0 \in \mathcal{O}_{F,P}$ である．よって，$\psi \circ \varphi^* = 0$ である．

F が点 P で滑らかでないとき，つまり，P が F の 2 つ以上の既約成分の交点であるか，F のある既約成分の特異点であるとき，$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2 \geqq 2$ である．すると，$\psi: \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow \mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2$ は同型写像になり，$\varphi^*: \mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ はゼロ写像になる．つまり，x を点 Q の近傍での局所座表系とするとき，点 P の近傍で定義された正則関数 $\varphi^* x$ の 2 つの 1 次偏導関数が，点 P において 0 になる，ということである．このような性質を満たす点 P 全体の集合を Z とする．Z は各点の近傍で，2 つの独立な偏導関数の共通零点であるので，0 次元の代数的集合になり，特に有限集合である．$\Sigma \subset Z$ なので，Σ も有限集合である．　□

● 初版 p219. 新装版 p.221. 系 5.1.13

系 5.1.13 は定理 5.1.12 の系ではなく，この場所に配置されているのは不適切でした．系 5.1.13 を削除して，次の注意 5.1.13 に差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

注意 5.1.13a. 上の定理の証明の記号で，

$$T_{S,P} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2,\ \mathbb{C}), \quad T_{\Gamma,Q} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2,\ \mathbb{C}),$$
$$T_{F,P} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{n}_P/\mathfrak{n}_P^2,\ \mathbb{C})$$

とおけば，次の完全系列が存在することがわかる．

$$0 \longrightarrow T_{F,P} \longrightarrow T_{S,P} \xrightarrow{d\varphi_P} T_{\Gamma,Q}$$

● 初版 p219, 新装版 p.221. 命題 5.1.14 の証明の 7 行目

誤: D が既約曲線の場合考えれば十分で，

正: D が既約曲線の場合に考えれば十分で，

● 初版 p220, 新装版 p.222. 命題 5.1.14 の証明の 16 〜 17 行目

誤: $C = \mathrm{div}(f) + mL_1 + nL_2$

であり，$C \sim mL_1 + nL_2 = \pi_1^*(mP) + \pi_2^*(nQ)$ が成り立つ．

正: $D = \mathrm{div}(f) + mL_1 + nL_2$

であり，$D \sim mL_1 + nL_2 = \pi_1^*(mP) + \pi_2^*(nQ)$ が成り立つ．

● 初版 p221, 新装版 p.223. 8 〜 9 行目

局所座標系が存在すれば，ヤコビアン判定法を持ち出すまでもなく，非特異です．

旧: $(x_n, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ を $\tilde{U}_n$ の狭義局所座標系として選び，ヤコビアン判定法で計算すると，$\tilde{U}_n$ は非特異であることがわかる．

新: $(x_n, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$ を $\tilde{U}_n$ の狭義局所座標系として選ぶことができるので，$\tilde{U}_n$ は非特異であることがわかる．

● 初版 p221 の下から 3 行目と p.222 の 4 行目, 新装版 p223 の下から 3 行目と p.224 の 4 行目,

誤: と中心とした

正: を中心とした

● 初版 p221, 新装版 p.223. 第 5.2.1 項の末尾

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

点 $(\mathbf{0}, \mathbf{T}) \in \tilde{E}$ $(\mathbf{T} = (T_1 : \cdots : T_n) \in \mathbb{P}^{n-1})$ は，もとの $\mathbb{C}^n$ において，原点 O を通り方向ベクトル $(T_1,\ldots, T_n)$ を持つ直線に対応することに注意しよう．

● 初版 p222, 新装版 p.224. 命題 5.2.1 の 4 行前

「$\tilde{V}$ は $\tilde{\mathbb{C}^n}$ における V_0 の閉包である」の直前に，下記の説明を追加して下さい．

追加: $\tilde{E}$ は $\tilde{\mathbb{C}^n}$ の閉集合なので，$V_0 = \tilde{V} - \tilde{E}$ は $\tilde{V}$ の開集合である．よって，

● 初版 p222, 新装版 p.224. 定理 5.2.3 の証明の 2 行目

誤: 逆に，$f \in \mathrm{Rat}(\tilde{V})$ に対し，$f|_W \in \mathrm{Rat}(W) = \mathrm{Rat}(V)$

正: 逆に，$f \in \mathrm{Rat}(\tilde{V})$ に対し，$f|_{V_0} \in \mathrm{Rat}(V_0) = \mathrm{Rat}(V)$

● 初版 p.223. 定理 5.2.4 の 2 〜 3 行目 (新装版では修正済み)

誤: $Q = f(P) \in V_2$ とおき，

正: $Q = \varphi(P) \in V_2$ とおき，

● 初版 p223 〜 224. 新装版 p.225 〜 226.

定理 5.2.4 の証明の直後から定理 5.2.5 の最後までの説明が理解しずらいようですので，下記の原稿と差し替えます．説明の一部を定理に組込み，証明を追加しました．

[差し替え原稿]

上の定理から，点 P を中心としたブロー・アップ $\pi\colon \tilde{V} \to V$ は，V のアフィン空間への埋めこみ方法 $V \subset \mathbb{C}^n$ に依存せずに，同型を除いて一意的に定まることが保証される．

定理 5.2.5a. V は d 次元アフィン代数多様体で，$\pi\colon \tilde{V} \to V$ は点 $P \in V$ を中心とするブロー・アップで，$E = \pi^{-1}(P)$ をその例外集合とする．$\mathcal{O}_{V,P}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_P$ とおけば，E は，次数付き環

$$S = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}_P^k/\mathfrak{m}_P^{k+1}$$

を座標環とする射影多様体である．特に，P が V の非特異点ならば，$E \cong \mathbb{P}^{d-1}$ である．

証明. 定理 5.2.4 の前の説明と同じ記号を使う．$\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}\mathcal{O}_{V,P}$ なので，$\mathfrak{m}_P^k/\mathfrak{m}_P^{k+1} \cong \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ である．例えば，$i = n$ のとき，$R_n = \mathbb{C}[x_1/x_n,\ldots, x_{n-1}/x_n, x_n]$ (多項式環とは限らない) である．また，U_n 内で $E \cap U_n$ は $x_n = 0$ で定まる部分代数多様体である．したがって，R_n/x_nR_n が $E \cap U_n$ の座標環である．R_n/x_nR_n は $S[1/x_n]$

の 0 次部分と同型である．$1 \leqq i < n$ の時も同様なので，E は S を座標環とする射影多様体である．

P が V の非特異点のとき，$\mathfrak{O}_{V,P}$ は正則局所環なので，定理 2.5.3(2) より S は $\mathbb{C}$ 上の d 変数多項式環と同型である．よって，$E \cong \mathbb{P}^{d-1}$ である． □

● 初版 p224, 新装版 p.226. 5.2.3 項の 6 行目

誤: $\tilde{W} = W \supset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$ と考えて，

正: $\tilde{W} = W \supset U_0 \cap U_i = \tilde{U}_0 \cap U_i$ と考えて，

● 初版 p224, 新装版 p.226. 5.2.3 項の 8 行目

誤: 前記のように何個かのアフィン開集合の合併集合として表す．

正: 前記のように何個かのアフィン開集合の合併集合として表せる．

● 初版 p224. 新装版 p.226. 定理 5.2.6 の直前の 4 行

定理 5.2.6 の直前の 4 行の説明は，埋没してしまって目立たないので，定理として独立させます．

[差し替え原稿]

定理 5.2.5b. 射影代数多様体 V の非特異点 P を中心としたブロー・アップを $\pi: \tilde{V} \to V$ とするとき，$\tilde{V}$ も射影代数多様体である．

証明. $V \subset \mathbb{P}^n$ で，$P = (1:0:\cdots:0) \in \mathbb{P}^n$ とする．$\mathbb{P}^n$ の点 P におけるブロー・アップは，

$$\left\{ (X_0 : \cdots : X_n ; T_1 : \cdots : T_n) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \;\middle|\; X_i T_j = X_j T_i \ (1 \leqq \forall i < \forall j \leqq n) \right\}$$

と同一視できるので，定義 2.6.5 に書いたように，射影多様体である．$\tilde{V}$ は，上のような射影多様体の閉部分多様体と看做せるので，射影多様体になる． □

● 初版 p225, 新装版 p.227. 定理 5.2.6 の証明

$\mathfrak{I}$ と書かれたところ 3 ケ所を $\mathfrak{I}_C$ と書き直して下さい．

証明の 6 行目の

「 逆に，P の開近傍 U と $g \in \varphi_* \mathfrak{I}(U)$ に対し,」

を

「逆に，P の開近傍 U と U 上の正則関数 $g \in \varphi_* \mathfrak{I}_C(U)$ に対し,」

と書き直して下さい．

● 初版 p226, 新装版 p.228. 定理 5.3.2 とその後の解説

定理 5.3.2 とその後の解説を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

クルル次元 1 のネーター局所整域はコーエン・マコーレイ環であり，また，クルル次元 2 のネーター正規局所環はコーエン・マコーレイ環である ([永田] 例 6.5.11, 6.5.12 および次の定理を参照) ので，代数曲線論や代数曲面論でコーエン・マコーレイ環の概念が必要になることは希だが，3 次元以上の特異点を持つ代数多様体を扱うとき，セールの双対定理などで本質的に重要になる．

次の補題は，ホモロジー代数に詳しくない方は飛ばして読んで頂いて差し支えない．

補題 5.3.1b. R はネーター可換環，M は有限生成 R-加群，I は R のイデアルで $IM \neq M$ を満たすとする．

(1) I の中から長さ n の M-正則列が取り出せるための必要十分条件は，任意の $i < n$ に対して $\mathrm{Ext}^i_R(R/I,\, M) = 0$ が成り立つことである．

(2) 任意の $i < n$ に対して $\mathrm{Ext}^i_R(R/I,\, M) = 0$ が成り立つと仮定し，$r < n$ とする．$x_1, x_2, \ldots, x_r \in I$ が M-正則列ならば，ある $x_{r+1}, \ldots, x_n \in I$ で，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が M-正則列になるようなものが存在する．

証明は [松村] 定理 16.6 の直後の説明, または [安藤] 定理 7.5.9 の証明を見よ．

定義 5.3.1c. R は可換環，M は R-加群，$x \in M$ とする．

$$\mathrm{ann}(x) = \bigl\{ a \in R \bigm| ax = 0 \bigr\}$$

と書く．もし，$\mathrm{ann}(x)$ が R の素イデアルであるならば，$\mathrm{ann}(x)$ を M の**素因子**という．M の素因子全体の集合を $\mathrm{Ass}(M)$ とか $\mathrm{Ass}_R(M)$ と書く．

定理 5.3.1d. R はネーター環，I は R のイデアルで，$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ は準素イデアル分解とする．このとき，

$$\mathrm{Ass}(R/I) = \bigl\{ \sqrt{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \sqrt{\mathfrak{q}_n} \bigr\}$$

が成り立つ．

証明. $\sqrt{\mathfrak{q}_1} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ を示す．

$X = \bigl(\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n\bigr) - \mathfrak{q}_1$ とおくと，$X \neq \phi$ である．一般に $x \in R$ の R/I における像を $\overline{x}$ と書くことにする．集合 $\bigl\{ \mathrm{ann}(\overline{x}) \bigm| x \in X \bigr\}$ の中で包含関係に関して極大なものを $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ とおく．$ab \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$ とすると，$bx_1 \notin I$, $bx_1 \in \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ より $b \notin \mathfrak{q}_1$ なので，極大性から $\mathrm{ann}(\overline{bx_1}) = \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ となる．よって，$a\overline{x_1} = 0$ であり，$a \in \mathfrak{p}$ となる．したがって，$\mathfrak{p}$ は素イデアルである．

$\mathrm{ann}(\overline{x_1}) = \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ を示す．

$y \in \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ をとる．ある $m \in \mathbb{N}$ をとると $y^m \in \mathfrak{q}_1$ である．任意の i に対して $x_1 y^m \in \mathfrak{q}_i$ なので，$x_1 y^m \in I$ である．よって，$y^m \in \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ である．$\mathrm{ann}(\overline{x_1})$ は素イデアルなので $y \in \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ である．よって，$\mathrm{ann}(\overline{x_1}) \supset \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ である．

逆に，$a \in \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ をとる．$ax_1 \in I \subset \mathfrak{q}_1$ である．$x_1 \notin \mathfrak{q}_1$ なので，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $a^m \in \mathfrak{q}_1$ となる．よって，$\mathrm{ann}(\overline{x_1}) \subset \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ である．

以上より，$\sqrt{\mathfrak{q}_i} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ である．

逆に，任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ に対して $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$ を満たす i が存在することを示す．$\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(\overline{x_0})$ と書ける．

x_0 倍写像 $R \to R$ から誘導される写像を $\varphi\colon R/\mathfrak{p} \longrightarrow R/I$ とする．$x_0 y \in I$ ならば $y \in \mathfrak{p}$ であるから φ は単射である．よって，φ から誘導される写像 $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \longrightarrow R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ も単射であり，$R_\mathfrak{p} \neq IR_\mathfrak{p}$ がわかる．よって，$R_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i R_\mathfrak{p}$ を満たす i が存在する．$\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}$ である．必要なら添え字を付け替えて $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}$ かつ $\sqrt{\mathfrak{q}_1} \subsetneqq \sqrt{\mathfrak{q}_j} \subsetneqq \mathfrak{p}$ を満たす j は存在しないと仮定しておく．

前半の議論より，ある $x_1 \in X$ により $\sqrt{\mathfrak{q}_1} = \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ と表せる．$x_0 x_1 \notin \mathfrak{q}_1$ であることは容易に証明できるので，$x_0 x_1 \in X$ である．$\mathrm{ann}(\overline{x_1})$ の極大性から $\mathrm{ann}(\overline{x_0 x_1}) = \mathrm{ann}(\overline{x_1})$ が成り立つ．他方，$\mathrm{ann}(\overline{x_0}) \subset \mathrm{ann}(\overline{x_0 x_1})$ なので，$\sqrt{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{p}$ がわかる． □

定理 5.3.2a. (**セールの正規性判定法**) R はネーター整域とする．以下の 3 つの条件 (R_1), (S_2), (K) を考える．

(R_1) R の任意の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し，$R_\mathfrak{p}$ は正則局所環である．

(S_2) R の任意の高さ 2 以上の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，$\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geqq 2$ となる．

(K) $0 \neq a \in R$ は非可逆元 $(aR \neq R)$ とする．すると，単項イデアル aR の任意の素因子 $\mathfrak{p}$ は $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$ を満たす．

このとき，以下が成り立つ．

(1) (S_2) と (K) は同値である．

(2) R が正規環になるための必要十分条件は，2 条件 (R_1) と (S_2) が成立することである．

セールの条件 (R_n), (S_n) と呼ばれるものがあって，上の (R_1), (S_2) はその記号である．なお,「R が正規環になるための必要十分条件は，2 条件 (R_1) と (K) が成立することである」という定理を **Krull の定理**という．

証明. (1)　まず，$(S_2) \Longrightarrow (K)$ を示す．

(S_2) を仮定する．ある非可逆元 $0 \neq a \in R$ に対し，$\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/aR)$ で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \geqq 2$ であるものが存在したと仮定して矛盾を導く．$aR = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ を準素イデアル分解とし，$\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ と仮定しておく．ある $x \in (\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n) - \mathfrak{q}_1$ をとり，$\overline{x} \in R/aR$ をその同値類として，$\mathfrak{p} = \mathrm{ann}(\overline{x})$ と表すことができる．

(S_2) より $\mathrm{depth}\,R_{\mathfrak{p}} \geqq 2$ なので，補題 5.3.1b(2) から，正則列 $a, b \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ が存在する．ここで，$a, b \in \mathfrak{p}$ として選ぶことができる．$b \in \mathrm{ann}(\overline{x})$ だから，$bx \in aR$ である．$bx \in aR \subset \mathfrak{q}_1$, $x \notin \mathfrak{q}_1$ だから，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $1 \leqq j \leqq n$ に対して $b^m \in \mathfrak{q}_j$ となる．よって，$b^m \in aR$ である．これは，$\overline{b}$ が R/aR-正則であることに矛盾する．

$(K) \Longrightarrow (S_2)$ を示す.

(K) を仮定する．$\mathrm{ht}\,\mathfrak{p} \geqq 2$ かつ $\mathrm{depth}\,R_{\mathfrak{p}} \leqq 1$ を満たす R の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在すると仮定して矛盾を導く．$R_{\mathfrak{p}}$ も (K) を満たすので，$(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ を改めて $(R, \mathfrak{m})$ とおき，$(R, \mathfrak{m})$ は局所環で，$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ であると仮定してよい．R-正則元 $a \in \mathfrak{p}$ をとる．準素イデアル分解 $aR = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ は，任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対して $\mathrm{ht}\sqrt{\mathfrak{q}_i} = 1$ を満たす．単射 $\varphi\colon R/aR \longrightarrow \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{q}_i$ を考える．$b \in \mathfrak{p} - \left(\sqrt{\mathfrak{q}_1} \cup \cdots \cup \sqrt{\mathfrak{q}_n}\right)$ をとる．各 $R/\mathfrak{q}_i$ 上で b 倍写像は単射であるので，R/aR 上でも b 倍写像は単射である．すると，a, b は正則列で $\mathrm{depth}\,R \geqq 2$ となる．

(2) の十分性の証明.

ネーター整域 R が (R_1), (K) を満たすとき，R が整閉整域であることを示す．a/b (a, $b \in R$ で b は R の非可逆元) が R 上整であるとし，その最小多項式を $t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$ ($c_i \in R$) とする．準素イデアル分解 $bR = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ をとり，$\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ とする．(K) より $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_i = 1$ である．

$$a^n = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i b^{n-i}$$

であるが，これを正則局所環 (よって UFD) である $R_{\mathfrak{p}_i}$ で考えると，a は b の倍数，つまり $a \in bR_{\mathfrak{p}_i}$ でなければならない．$a \in bR_{\mathfrak{p}_i} \cap R = \mathfrak{q}_i$ であるから，$a \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = bR$ となり，$a/b \in R$ が得られる．よって，R は整閉である．

(2) の必要性の証明.

R は正規環とする．$\mathfrak{p}$ が R の高さ 1 の素イデアルのとき，$R_{\mathfrak{p}}$ はクルル次元 1 の正規局所環であるが，定理 4.4.15 より $R_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環となる．よって (R_1) が成立する．

次に (K) が成立することを証明する．

$0 \neq a \in R$ で，a は可逆元でないとする．$aR = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ を準素イデアル分解とし，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathfrak{q}_1}$ とする．以下，$\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$ を証明する．もし $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \geqq 2$ ならば，$R_\mathfrak{p}$ において $\operatorname{ht}\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} \geqq 2$ なので，最初から $R = R_\mathfrak{p}$ と仮定し，$\mathfrak{p}$ は局所環 R の極大イデアルであると仮定して証明すればよい．

$n = 1$ の場合は自明だから，$n \geqq 2$ の場合を考える．$aR \subsetneqq \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ だから，$c \in \bigl(\mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n\bigr) - \mathfrak{q}_1$ が存在する．$J = \bigl\{x \in R \bigm| cx \in aR\bigr\}$ とおく．もし $cx \in \mathfrak{q}_1$ ならば，$c \in \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ だから，$cx \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = aR$ となる．よって，$J = \bigl\{x \in R \bigm| cx \in \mathfrak{q}_1\bigr\}$ である．

$x \in J$ のとき，$cx \in aR \subset \mathfrak{q}_1$ で，$c \notin \mathfrak{q}_1$ だから，ある $k \in \mathbb{N}$ に対し $x^k \in \mathfrak{q}_1$ である．よって，$x \in \sqrt{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{p}$ である．これより，$J \subset \mathfrak{p}$ である．また，$c\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = R$ だから，$\mathfrak{q}_1 \subset J$ である．特に，$\sqrt{J} = \mathfrak{p}$ である．

$xy \in J, y \notin J$ とすると，$cxy \in \mathfrak{q}_1, cy \notin \mathfrak{q}_1$ である．$\mathfrak{q}_1$ は準素イデアルだから，ある $n \in \mathbb{N}$ により $x^n \in \mathfrak{q}_1$ となり，$cx^n \in aR$ となる．よって，$x^n \in J$ で，J は準素イデアルである．

以上の議論から，$cd\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_1$ かつ $cd \notin \mathfrak{q}_1$ を満たす $d \in R$ が存在することがわかる．上の議論を参考にすれば，$\mathfrak{p} = \bigl\{x \in R \bigm| cdx \in \mathfrak{q}_1\bigr\}$ であることは容易にわかる．c の選び方より，$\mathfrak{p} = \bigl\{x \in R \bigm| cdx \in aR\bigr\}$ である．

仮に，$(cd/a)\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ であると仮定してみる．$\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_n)$ として，$(cd/a)x_i = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j$ で定まる n 次正方行列を $A = (a_{ij})$ とするとき，cd/a は固有多項式 $f(t) = \det(tI_n - A)$ の根になる．よって，cd/a は R 上整である．R は整閉だったので，$cd/a \in R$ となる．すると，$cd \cdot 1 \in aR$ だから，$1 \in \mathfrak{p}$ となって矛盾する．したがって，$\mathfrak{p}$ は R の極大イデアルであったから，$(cd/a)\mathfrak{p} = R$ である．つまり，$\mathfrak{p} = (a/cd)R$ であり，$\mathfrak{p}$ は単項イデアルで，よって，$\operatorname{ht}\mathfrak{p} = 1$ である． □

● 初版 p227, 新装版 p229. 定理 5.3.4 の証明

ページの先頭の「$f_i \in \mathrm{Rat}(X)$ だから，上で示したことから,」以降の部分の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

任意の i, j に対して $g_{ij} = f_i/f_j \in \mathrm{Rat}(X)$ だから，上で示したことから，あるザリスキー閉集合 $F_{ij} \subset X$ が存在し，$\dim F_{ij} \leqq \dim X - 2$ で，$g_{ij} \colon (X - F_{ij}) \to \mathbb{P}^1$ は正則写像になる．$U = X - \displaystyle\bigcup_{i,j} F_{ij}$ とすれば，$\dim(X - U) \leqq \dim X - 2$ で，任意

の i, j に対し $g_{ij}: U \to \mathbb{P}^1$ は正則写像になる．$U \cap Z \neq \phi$ である．

不確定点 $P \in Z \cap U$ を固定する．今，$f_0 = 1$ とおき $f_i = f_0 g_{i0}$ と考えるとき，もし，$f_1(P), \ldots, f_n(P) \in \mathbb{C}$ であれば，$f(P) \in \mathbb{P}^n$ は確定するので P は不確定点でない．よって，$f_i(P) = \infty$ となる i が存在する．$f_0, \ldots, f_n$ をすべて f_i で割り，それを改めて $f_0, \ldots, f_n$ とおく $(f_i = 1)$．まだ，$f_j(P) = \infty$ となる j が存在したら，さらに f_j で割る．この操作を繰り返すと，$f_0(P), \ldots, f_n(P) \in \mathbb{C}$ で，ある i に対し $f_i(P) = 1$ となり，$f(P) \in \mathbb{P}^n$ の値が確定する．よって，P が f の不確定点であることと矛盾する． □

● 初版 p227 〜 228, 新装版 p229 〜 230. 第 5.3.3 項全部

第 5.3.3 項全体，つまり定理 5.3.6 から系 5.38 までを以下の原稿と差し替えて下さい．射影 (的) 正則写像の概念を利用ように変更し，ザリスキーの主定理は定理 5.3.14 の直後に移動します.

[差し替え原稿]

定義 5.3.6a. X, Y は代数多様体，$\varphi: X \to Y$ は正則写像，$\pi: \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ は正射影とする．ある自然数 n と閉部分多様体 $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$ と同型写像 $\psi: X \to Z$ が存在し，$\varphi = \pi \circ \psi$ が成り立つとき，φ は**射影 (的) 正則写像**であると言う．

命題 5.3.6b. X, Y が射影代数多様体ならば，任意の正則写像 $\varphi: X \to Y$ は射影的である．

証明. $X \subset \mathbb{P}^n$ とする．$X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times Y$ だから，

$$Z = \left\{ (x, \varphi(x)) \in X \times Y \;\middle|\; x \in X \right\} \subset \mathbb{P}^n \times Y$$

とし，$\psi(x) = (x, \varphi(x))$ で $X \to Z$ を定めれば，$\varphi = \pi \circ \psi$ なので，φ は射影的である． □

定理 5.3.6c. X, Y は代数多様体，$\varphi: X \to Y$ は射影正則写像で，$\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ が成り立つと仮定する．このとき，任意の点 $P \in Y$ に対して $\varphi^{-1}(P)$ は連結である．

証明. この定理の厳密な証明には，本書で解説していない知識が必要で，例えば，[Ha] 第 III 章・系 11.3 を参照せよ．ここでは，証明のアイデアだけ紹介しておく．

$\varphi^{-1}(P) = Z_1 \cup Z_2$, $Z_1 \cap Z_2 = \phi$ と 2 つの代数的集合 Z_1, Z_2 の直和に分解したと仮定する．P の空でないアフィン開近傍 $W \subset Y$ をとり，$U = \varphi^{-1}(W) \subset X$ とおく．$\mathcal{O}_Y(W) = (\varphi_* \mathcal{O}_X)(W) = \mathcal{O}_X(U)$ なので，任意の $f \in \mathcal{O}_X(U)$ に対し，ある $g \in \mathcal{O}_Y(W)$ が存在して $f = g \circ \varphi$ を満たすので，特に $f(Z_1) = f(Z_2) = g(P)$ を満

たす．しかし，U 上の解析的正則関数 h で，Z_1 と Z_2 で相異なる定数値をとるようなものが存在する．h はテーラー展開の意味で $\mathcal{O}_X(U)$ に属する関数列の極限として表せるので，$\mathcal{O}_X(U)$ の元で Z_1 と Z_2 で相異なる定数値を持つものが存在するはずである．これは矛盾である． □

定理 5.3.7a. X は正規代数多様体，Y は代数多様体とし，$\varphi\colon X \to Y$ は射影正則写像と仮定する．このとき，$\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(Y) \to \mathrm{Rat}(X)$ は単射だから，これにより $\mathrm{Rat}(Y) \subset \mathrm{Rat}(X)$ と考える．Y の $\mathrm{Rat}(X)$ における正規化を $f\colon Z \to Y$ とする．このとき，ある正則写像 $g\colon X \to Z$ が存在して，

(1) $\varphi = f \circ g$

(2) 任意の $P \in Z$ に対し $g^{-1}(P)$ は連結である．

を満たす．この分解 $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} Y$ を $\varphi\colon X \to Y$ の**シュタイン分解** (Stein factorization) という．

証明. 空でないアフィン開集合 $W \subset Y$ をとり，$R_W = \mathcal{O}_Y(W), U = \varphi^{-1}(W) \subset X$ とおく．$S = (\varphi_*\mathcal{O}_X)(W) = \mathcal{O}_X(U)$ を考える．φ^* を通して $R_W \subset S$ とみなす．

$Q(S)$ が $Q(R_W)$ の超越拡大であると仮定して矛盾を導く．すると，$Q(R_W)$ 上の超越元 $h \in S$ が存在する．ある $P \in W$ を選べば，$h\colon \varphi^{-1}(P) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は支配的である．特に，$\varphi^{-1}(P)$ のある既約成分 C を選べば，$h\colon C \to \mathbb{P}^1$ は支配的である．しかし，h は C 上の正則関数で，C は射影多様体なので，h は定数関数でなくてはならず，矛盾する．よって，$Q(S)$ は $Q(R_W)$ の代数拡大である．

ここで，$P \in W$ が任意の点であるとき，今の議論から，$\varphi^{-1}(P)$ の各連結成分上で $h \in S$ は定数関数であるから，$\varphi^{-1}(P)$ で h が取る値は有限個である．$\mathfrak{m}_P \subset R_W$ を点 P に対応する極大イデアルとすれば，$S/\mathfrak{m}_P S$ において $h(\varphi^{-1}(P))$ は有限次元ベクトルであることを意味する．つまり，$S/\mathfrak{m}_P S$ は有限次元 $R_W/\mathfrak{m}_P$-ベクトル空間である．したがって，S は R_W-加群として有限生成である．よって，S は R_W 上整である．

S を座標環とするアフィン代数多様体 Z' をとる．環の包含写像 $R_W \subset S$, $S \subset R_U = \mathcal{O}_U(U)$ から $f'\colon Z' \to W$ と $g'\colon U \to Z'$ が導かれる．$\varphi|_U\colon U \to W$ も包含写像 $R_W \subset R_U$ から得られるので，$f' \circ g' = \varphi|_W$ が成り立つ．$(\varphi|_U)_*\mathcal{O}_U(U) = S = \mathcal{O}_{Z'}(Z')$ だから，$(\varphi|_U)_*\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{Z'}$ である．前定理により，任意の $Q \in Z'$ に対し $f'^{-1}(Q)$ は連結である．

X は正規だから $S = \mathcal{O}_X(W)$ は正規環である．よって，Z' は Z の開集合である． □

系 5.3.8a. X は正規代数多様体，Y は代数多様体とし，$\varphi\colon X \to Y$ は射影正則写像で，任意の点 $Q \in Y$ に対し $\varphi^{-1}(Q)$ は有限集合であると仮定する．このとき，φ は有限写像である．

● 初版 p228 〜 230, 新装版 p230 〜 232. 第 5.3.4 項のほぼ全部

定理 5.3.9 と定理 5.3.10 の部分を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 5.3.8b. S, T は正規射影代数曲面，$\varphi\colon S \to T$ は支配的正則写像とする．このとき，

$$Z = \left\{ P \in T \;\middle|\; \dim \varphi^{-1}(P) \geqq 1 \right\}$$

は有限集合である．

証明. φ のシュタイン分解を考えれば，φ が双有理写像の場合に証明すれば十分である．もし，Z が代数曲線 C を含めば，$\dim \varphi^{-1}(C) \geqq 2$ である．$\varphi^{-1}(C)$ の閉包は S に一致するから，$\varphi(S) \subset C$ となり，φ が支配的であることに矛盾する．よって，Z は代数曲線を含まない．

φ は X, Y のある空でない開集合上で同型写像になるから，$\varphi^{-1}(Z)$ は何個かの曲線の和集合 $C_1 \cup \cdots \cup C_r$ に含まれる．$P \in Z$ に対し，$\varphi^{-1}(P)$ はそのうちの何個かの C_i の和集合である．したがって，Z は有限集合である． $\square$

定理 5.3.9. (**射影公式**, projection formula) S, T は非特異射影曲面で，$\varphi\colon S \to T$ は全射正則写像とする．D, D' は T 上の因子であるとすると，

$$(\varphi^* D \cdot \varphi^* D')_S = (\deg \varphi) \cdot (D \cdot D')_T$$

が成り立つ．

証明. T 上の因子は，2 つの非常にアンプルな因子の差で表せるので，D, D' が T 上の非常にアンプルな非特異曲線である場合に証明すれば十分である．また，φ のシュタイン分解を考えれば，φ が有限写像の場合と，φ が双有理写像の場合に証明すればよい．

φ が双有理写像の場合には，上の命題のような Z をとるとき，D, D' を適当に線形同値な因子に選び直して，$Z \cap \operatorname{Supp} D = \phi$, $Z \cap \operatorname{Supp} D' = \phi$ となるようにできる．すると，$I_P(D \cdot D')_T$ の定義から，$(\varphi^* D \cdot \varphi^* D')_S = (D \cdot D')_T$ である．

$\varphi\colon S \to T$ が有限写像の場合を考える．$\varphi^* D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i D_i$ (D_i は S 上の曲線) とし，

$\varphi_i = \varphi|_{D_i}: D_i \to D$ とするとき，定理 4.4.23 により，

$$\deg \varphi = [\mathrm{Rat}(S) : \mathrm{Rat}(T)] = \sum_{i=1}^{r} a_i [\mathrm{Rat}(D_i) : \mathrm{Rat}(D)] = \sum_{i=1}^{r} a_i \deg \varphi_i$$

である．$\pi: \varGamma \to D$, $\pi_i: \varGamma_i \to D_i$ を正規化とするとき，$(D \cdot D')_T = \deg \pi^* D'|_D$, $(D_i \cdot \varphi^* D')_S = \deg \pi_i^* (\varphi_i^* D'|_D)$ である．$\varphi_i: D_i \to D$ から誘導される有理写像 $\varphi_i': \varGamma_i \cdots \to \varGamma$ は正則写像になり，$\pi_i^*(\varphi_i^* D'|_D) = \varphi_i'^*(\pi^* D'|_D)$ となる．

$$\begin{array}{ccc} \varGamma_i & \xrightarrow{\varphi_i'} & \varGamma \\ {\scriptstyle \pi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ D_i & \xrightarrow{\varphi_i} & D \end{array}$$

すると，定理 3.5.3 から，

$$\deg \varphi_i'^*(\pi^* D'|_D) = (\deg \varphi_i') \cdot \deg \pi^* D'|_D$$

となる．

$$\deg \varphi_i' = [\mathrm{Rat}(\varGamma_i) : \mathrm{Rat}(\varGamma)] = [\mathrm{Rat}(D_i) : \mathrm{Rat}(D)] = \deg \varphi_i$$

だから，

$$\begin{aligned} (\varphi^* D \cdot \varphi^* D')_S &= \sum_{i=1}^{r} a_i (D_i \cdot \varphi^* D')_S = \sum_{i=1}^{r} a_i \deg \pi_i^* (\varphi_i^* D'|_D) \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i (\deg \varphi_i') \cdot \deg \pi^* D'|_D = (\deg \varphi) \cdot \deg \pi^* D'|_D \\ &= (\deg \varphi) \cdot (D \cdot D')_T \end{aligned}$$

が得られる． □

定理 5.3.10. (**射影公式**) S, T は非特異射影曲面で，$\varphi: S \to T$ は双有理全射正則写像とする．D は T 上の因子，C は S 上の曲線であるとすると，

$$(\varphi^* D \cdot C)_S = (D \cdot \varphi(C))_T$$

が成り立つ．ただし，$\varphi(C)$ が 1 点のときは，$(\varphi^* D \cdot C)_S = 0$ である．

証明. 系 4.2.40 より，$D = P - N$ (P, N は非常にアンプルな因子) と表せるから，D が $\varphi(C)$ と異なる非特異代数曲線で，因子として非常にアンプルな場合に証明すれば十分である．

もし，$\varphi(C)$ が 1 点ならば，D は非常にアンプルだから，$\varphi(C)$ を通らない $A \in |D|$ がある．$\varphi^{-1}(A) \cap C = \phi$ だから，$(\varphi^* D \cdot C)_S = (\varphi^* A \cdot C)_S = 0$ である．

$\mathit{\Gamma} = \varphi(C)$ が曲線の場合を考える．$\varphi^{-1}(\mathit{\Gamma}) \supset C$ であるので，因子として

$$\varphi^*\mathit{\Gamma} = C + \sum_{i=1}^{r} a_i E_i \quad (\text{ただし，} \varphi(E_i) \text{ は } 1 \text{ 点})$$

と書ける．上の結果から，$(\varphi^*D \cdot E_i)_S = 0$ だから，前定理より，

$$(\varphi^*D \cdot C)_S = (\varphi^*D \cdot \varphi^*\mathit{\Gamma})_S = (D \cdot \varphi(C))_T$$

である． □

● 初版 p230 〜 232, 新装版 p232 〜 234. 定理 5.3.13

以下の原稿と差し替えて下さい．n 次元に一般化しました．

[差し替え原稿]

定理 5.3.13a. X は n 次元非特異射影多様体，$\pi{:}Y \to X$ は点 $P \in X$ でのブロー・アップとし，$E = \pi^{-1}(P)$ をその例外集合とする．このとき，次が成り立つ．

(1) D は X 上の $(n-1)$ 次元閉部分多様体で，$m = \mathrm{mult}_P D$ とし, D の強変換を $\tilde{D}$ とするとき，

$$\pi^*D = \tilde{D} + mE$$

(2) $K_Y \sim \pi^*K_X + (n-1)E$

証明. (1) $\mathfrak{m}_P$ を $\mathcal{O}_{X,P}$ の極大イデアルとし，$(x_1,\ldots, x_n)$ をその正則パラメータ系，$U \subset X$ を $(x_1,\ldots, x_n)$ を狭義座標系とする P の解析的開集合とする．話は局所的だから，Y のかわりに，

$$Y_0 = \left\{ (x_1, \ldots, x_n; T_1 : \cdots : T_n) \in U \times \mathbb{P}^{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } 1 \leqq i < j \leqq n \text{ に} \\ \text{対して } x_iT_j = x_jT_i \end{array} \right\}$$

で考えれば十分である．Y_0 内で $T_n \neq 0$ で定まる開集合を W とし，$(s_1,\ldots, s_{n-1}, x_n)$ (ただし $s_i = T_i/T_n$) を座標系として用いる．D の定義方程式を $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ とする．$f \in \mathfrak{m}_P^m - \mathfrak{m}_P^{m+1}$ だから，$f(x_1,\ldots, x_n)$ の最低次の項は m 次式である．よって，

$$\pi^*f(x_1, \ldots, x_n) = f(s_1x_n, \ldots, s_{n-1}x_n, x_n) = x_n^m g(s_1, \ldots, s_{n-1}, x_n)$$

$(g(s_1,\ldots, s_{n-1}, x_n)$ は x_n で割り切れない$)$ と表せる．$g(s_1,\ldots, s_{n-1}, x_n) = 0$ は $\tilde{D} \cap W$ の定義方程式で，$x_n = 0$ は $E \cap W$ の定義方程式だから，

$$(\pi^*D)|_W = (\tilde{D} \cap W) + m(E \cap W)$$

である．これは, Y_0 内で $T_i \neq 0$ で定まる開集合で考えても同じだから，$\pi^*D = \tilde{D} + mE$ である．

(2)　$X_0 = X - \{P\}$, $Y_0 = Y - E$ とすると，$\pi|_{Y_0}: Y_0 \xrightarrow{\cong} X_0$ である．X 上の n 次有理微分形式 ω_X をとる．$\omega_Y = \pi^*\omega_X$ は Y 上の n 次有理微分形式なので，$K_X = \operatorname{div}(\omega_X)$, $K_Y = \operatorname{div}(\omega_Y)$ と選んでおく．すると，$(\omega_X)|_{X_0} = (\omega_Y)|_{Y_0}$ なので，$(K_X)|_{X_0} = (K_Y)|_{Y_0}$ となる．したがって，ある整数 k により，$K_Y \sim \pi^*K_X + kE$ と書ける．

以下，k の値を決定する．(1) の証明の記号を用いる．$\omega_U = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と選んでおく．ω_U は U 上で極も零点も持たないので，$K_X|_U = 0$ である．よって，$(\pi^*K_X)|_{Y_0} = 0$ である．$\omega_W = \pi^*\omega_U$ を W の座標系 $(s_1, \ldots, s_{n-1}, x_n)$ を用いて計算する．$1 \leqq i \leqq n-1$ に対し，$\pi^*dx_i = d(s_i x_n) = x_n\, ds_i + s_i\, dx_n$ であるから，

$$\begin{aligned}\pi^*\omega_U &= (x_n\, ds_1 + s_1\, dx_n) \wedge \cdots \wedge (x_n\, ds_{n-1} + s_{n-1}\, dx_n) \wedge dx_n \\ &= x_n^{n-1} ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_{n-1} \wedge dx_n\end{aligned}$$

となる．$E|_W = \operatorname{div}(x_n)$ で，$ds_1 \wedge \cdots \wedge ds_{n-1} \wedge dx_n$ は W 上で極も零点も持たないから，$(K_Y)|_W = \operatorname{div}(\pi^*\omega_U)|_W = (n-1)E|_W$ である．これは，他の $T_i \neq 0$ で定まる Y_0 の開集合でも同様だから，$(K_Y)|_{Y_0} = (n-1)E$ が得られる．よって，$k = n-1$ である．　□

定理 5.3.13b.　S は非特異射影曲面，$\pi: T \to S$ は点 $P \in S$ でのブロー・アップとし，$E = \pi^{-1}(P)$ をその例外集合とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $(E^2)_T = -1$.

(2) C は S 上の閉曲線で，C の強変換を $\tilde{C}$ とし，$m = \operatorname{mult}_P C$ とするとき，

$$m = (\tilde{C} \cdot E)_T.$$

(3) $(K_T^2)_T = (K_S^2)_S - 1$.

(4) $\operatorname{Pic}(T) \cong \operatorname{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}E$.

証明. (1)　点 P を通る S 上の曲線 C をとる．ただし，C は点 P で非特異であるとする．C の π による強変換を $\tilde{C}$ とすれば，前定理の (1) より $\pi^*C = \tilde{C} + E$ となる．

また，C の定義方程式を f とするとき，$f \in \mathfrak{m}_P - \mathfrak{m}_P^2$ だから，$\mathfrak{m}_P$ の正則パラメータ系を取り替えて，$f(x, y) = x$ と仮定できる．すると，$\pi^*f(x, y) = x = sy$ だから，$\tilde{C}$ は $s = 0$, E は $y = 0$ で定義できる．したがって，$\tilde{C}$ と E は $(s, y) = (0, 0)$ の 1 点のみで横断的に交わる．したがって，$(\tilde{C} \cdot E)_T = 1$ である．

射影公式により，$(\pi^*C \cdot E)_T = (C \cdot \pi(E))_S = 0$ である．$0 = (\pi^*C \cdot E)_T = (\tilde{C} \cdot E)_T + (E^2)_T$ で，$(\tilde{C} \cdot E)_T = 1$ より，$(E^2)_T = -1$ である．

(2)　射影公式により，

$$0 = (C \cdot \pi(E))_S = (\pi^* C \cdot E)_T = (\tilde{C} \cdot E)_T + m(E^2)_T$$

である．(1) より，$(E^2)_T = -1$ だから，$(\tilde{C} \cdot E)_T = m$ である．

(3) は (1) と $K_T \sim \pi^* K_S + E$ より簡単に証明できる．

(4)　E 以外の T 上の曲線 Γ に対し，$C = \pi(\Gamma)$ とおくと，C は S 上の曲線で，C の強変換は Γ と一致する．したがって，$\mathrm{Pic}(T)$ は $\pi^*(\mathrm{Pic}(S))$ と E によって生成される．□

● 初版 p232, 新装版 p234. 定理 5.3.14 の直後

サリスキーの主定理 (旧 定理 5.3.7) をこの場所に移動します．

[追加原稿]

定理 5.3.14b. (**ザリスキーの主定理**, Zariski's main theorem) X, Y が正規射影代数多様体で，$\varphi\colon X \to Y$ が双有理正則写像ならば，任意の $Q \in Y$ に対し $\varphi^{-1}(Q)$ は連結である．

証明. 定理 5.3.6c と定理 5.3.14 より，すぐわかる．□

● 初版 p233, 新装版 p235. (5.5) 式

誤:

$$\mathcal{O}_T(W_L) = \mathcal{O}_T(W_0 \cap W_L) + \mathcal{O}_T(W_1 \cap W_L) \tag{5.5}$$

正:

$$\mathcal{O}_T(W_L) = \mathcal{O}_T(W_0 \cap W') + \mathcal{O}_T(W_1 \cap W') \tag{5.5}$$

● 初版 p233, 新装版 p235. (5.6) 式以降.

定理 5.3.15 の (5.6) 式以降を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$$\mathcal{O}_T(W_0 \cap W_1) = \mathcal{O}_T(W_0) + \mathcal{O}_T(W_1) \tag{5.6}$$

を証明することのみである．U は局所座標系 (x, y) を持つ座標開集合で，$xX_1 = yX_0$ が成り立つと仮定してよい．$s = X_1/X_0, t = X_0/X_1$ とおくと，(x, s) が W_1 の局所座標系，(y, t) が W_0 の局所座標系になる．$R_U = \mathcal{O}_S(U)$ とするとき，$\mathcal{O}_T(W_0) = R_U[s]$, $\mathcal{O}_T(W_1) = R_U[t]$ である．他方，$\mathcal{O}_T(W_0 \cap W_1) = R_U[s, 1/s] = R_U[s, t] = R_U[t, 1/t]$ なので，(5.6) が成立する．□

● 初版 p234, 新装版 p236. 命題 5.3.17 の証明

まず，単純誤植として，$\tilde{g}_S$ と書かれているところ 3 ケ所を $\tilde{h}_S$ に修正して下さい．あと，次の変更 (説明追加) をします.

旧: $\tilde{h}_S \in H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ であることは容易に確認できる．

新: 必要なら D を線形同値なものに取り替え，D の成分上に P が含まれないと仮定してよい．すると，E 上での h_T の極の位数は一定であり，$h_T|_E\colon E \to \mathbb{P}^1$ は定数関数となる．よって，$h_S(P) = h_T(E) \in \mathbb{P}^1$ の値は確定する．ところが，h_S は P の近傍で極を持たないので $h_S(P) \in \mathbb{C}$ である．したがって，$\tilde{h}_S \in H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ である．

● 初版 p235, 新装版 p237. 定理 5.4.1 の証明

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

証明. 定理 4.2.34a を $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S(D)$ として用いればよい． □

● 初版 p236, 新装版 p238. 定理 5.4.3 の証明の 4 行目

誤: であるるので，

正: であるので，

● 初版 p236, 新装版 p238. 定理 5.4.3 の証明の 5 〜 6 行目

式変形の途中の過程を詳しくしました．

[差し替え原稿]

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_S(D)) &= \chi(\mathcal{O}_S(B)) = \chi(\mathcal{O}_S(B-C)) + \chi(\mathcal{O}_C(B)) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) + \deg B|_C + 1 - g(C) \\ &= \chi(\mathcal{O}_S) + (B\cdot C)_S + \chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) + (D^2)_S + \chi(\mathcal{O}_C)\end{aligned}$$

● 初版 p236 〜 237, 新装版 p238 〜 239. 第 5.4.3 項

セールの双対定理の証明を書くことにしました．ただし，この場所に入れる証明としては非常に難しいです.

[差し替え原稿]

定理 5.4.4. (**セールの双対定理**, Serre duality) X が n 次元非特異射影代数多様体，D が X 上の因子のとき，各 $r \in \mathbb{Z}$ に対し

$$H^r(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong H^{n-r}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$$

が成立する．ここで，$\mathbb{C}$-ベクトル空間 V に対し，$V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ である．

この定理の証明には，第 6.3 節で解説するホモロジー代数の諸知識が必要になる．以下に，6.3 節の知識を仮定した証明を書いておくので，さしあたって飛ばして読んでもらい，後日，気が向いたら参照してほしい．

さて，X は n 次元射影多様体で $X \subset \mathbb{P}^N$ とする．さらに，任意の点 $P \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,P}$ はコーエン・マコーレイ局所環であると仮定する．このとき，X は**コーエン・マコーレイ**であるという．X が非特異ならば，この仮定は満たされることに注意する．以下，本項では「層」は簡易層ではなく定義 6.2.1 で与えるものを意味する．

R はネーター局所環，M は R-加群，$T \subset M$ とする．

$$\mathrm{ann}(T) = \left\{ a \in R \;\middle|\; 任意の\ x \in T\ に対して\ ax = 0 \right\}$$

と書く．$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ が M-正則列のとき，その $\mathrm{ann}(M)$ を法とする同値類 $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n} \in \mathbb{R}/\mathrm{ann}(M)$ も M-正則列であるので，$\mathrm{depth}_R M = \mathrm{depth}_{R/\mathrm{ann}(M)} M$ が成り立つことに注意する．また，

$$\mathrm{Krull\ dim}_R M = \mathrm{Krull\ dim}\, R/\mathrm{ann}(M)$$

と定義する．例えば $R = \mathcal{O}_{X,P}$, $M = \mathcal{F}_P$ のとき，点 P の近傍における $\mathrm{Supp}\,\mathcal{F}$ の次元が $\mathrm{Krull\ dim}_R M$ である．

$\mathrm{depth}_R M = \mathrm{Krull\ dim}_R M$ が成り立つとき，M は**コーエン・マコーレイ** R-加群であるという．上に述べたことから，R/I がコーエン・マコーレイ R-加群であることと，R/I がコーエン・マコーレイ環であることは同値であることに注意する．

補題 5.4.4b. (Ischebeck) R は $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとするネーター局所環，$k = R/\mathfrak{m}$ とし, M, N は 0 でない有限生成 R-加群とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $i < \mathrm{depth}_R N - \mathrm{Krull\ dim}_R M$ に対して $\mathrm{Ext}^i_R(M\ N) = 0$ である．

(2) M が長さ有限の射影的分解 (自由分解) を持つか，あるいは，N が長さ有限の移入的分解を持つならば，

$$\mathrm{depth}\, R - \mathrm{depth}_R M = \sup \left\{ i \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \mathrm{Ext}^i_R(M, N) \neq 0 \right\}$$

である．特に，R が正則局所環 (またはゴレンシュタイン環) ならば $i > \mathrm{Krull\ dim}\, R - \mathrm{depth}_R M$ に対して $\mathrm{Ext}^i_R(M\ R) = 0$ である．

(1) の証明は [安藤] 命題 7.5.13，(2) の証明は [安藤] 命題 7.6.6 を見よ．

補題 5.4.4c. $X \subset \mathbb{P}^N$ がコーエン・マコーレイ射影多様体ならば，$i \neq N-n$ に対して，

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N})) = 0$$

証明. 点 $P \in X$ をとり，$R = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N, P}$ とする．また，R における X の定義イデアルを I とおくと，点 P での局所化について

$$\left(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))\right)_P = \mathrm{Ext}^i_R(R/I, R)$$

が成り立つ．R は正則局所環で，$\mathrm{depth}_R\, R/I = \mathrm{Krull}\dim_R R/I = n$ なので，前補題より結論を得る． □

$$\omega_X = \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))$$

とおく．これを X の **dualizing sheaf** という．特に，$\omega_{\mathbb{P}^N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N})$ である．ω_X が埋めこみ $X \subset \mathbb{P}^N$ に依存しないことは，以下で順次証明される．

補題 5.4.4d. $X \subset \mathbb{P}^N$ がコーエン・マコーレイ射影多様体ならば，任意の $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Ext}^{i-N+n}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))$$

証明. 定理 6.3.16 を $T_1(\mathcal{G}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})$, $T_2(\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ として用いて，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^pT_2(R^qT_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))) \quad\Longrightarrow\quad E^n = R^n(T_2\circ T_1)(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))$$

を構成する．

$$(T_2\circ T_1)(\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{G})\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

であることは容易に証明できる．前補題と定理 6.3.3(7)(証明は [安藤] 定理 5.2.3 参照) より，$E_2^{i-N+n, N-n} \cong E^i$ が分かるので，結論を得る． □

補題 5.4.4e. $X \subset \mathbb{P}^N$ が射影多様体ならば，$\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，次の形の完全系列が存在する．

$$\bigoplus_{i=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(a_i) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(b_j) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

ここで，s, t, a_i, b_j は適当な整数である．

証明. 補題 4.2.33d の完全系列をとり，さらに，$\mathcal{K}$ を $\mathcal{F}$ と考えて再び補題 4.2.33d を適用すればよい．　□

この完全系列を以下何度か利用するので，

$$\mathcal{E}_1 = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(a_i), \quad \mathcal{E}_2 = \bigoplus_{j=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(b_j)$$

とおき，$\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{F} \to 0$ と書く．

補題 5.4.4f.　下の図式は $\mathbb{C}$-ベクトル空間の可換図式で，横の 2 行はいずれも完全系列であるとする．

$$\begin{array}{ccccccccc}
L_1 & \xrightarrow{f_1} & L_2 & \xrightarrow{f_2} & L_3 & \xrightarrow{f_3} & L_4 & \xrightarrow{f_4} & L_5 \\
{\scriptstyle h_1}\downarrow & & {\scriptstyle h_2}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle h_4} & & \downarrow{\scriptstyle h_5} \\
M_1 & \xrightarrow{g_1} & M_2 & \xrightarrow{g_2} & M_3 & \xrightarrow{g_3} & M_4 & \xrightarrow{g_4} & M_5
\end{array}$$

もし，h_1 が全射, h_2 と h_4 が同型写像, h_5 が単射ならば，同型写像 $h_3 \colon L_3 \to M_3$ で，$h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$, $h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3$ を満たすものが存在する．(ただし，h_3 は一意的ではない.)

証明は基底を使って議論するだけで簡単なので省略する．

補題 5.4.4g.　$X \subset \mathbb{P}^N$ が射影多様体ならば，任意の連接な $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^N}) \cong H^{N-i}(X, \mathcal{F})^\vee \qquad ①$$

証明. $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$ と略記する．

Step 1. $X = \mathbb{P}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ の場合に ① が成立することを証明する．

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ の場合に証明すれば十分である．定理 6.2.34 より，

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d), \omega_{\mathbb{P}}) \cong H^i\big(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d), \omega_{\mathbb{P}})\big) \cong H^i(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-N-d-1))$$

である．定理 4.2.32, 定理 4.2.32b より，$\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(d)$ の場合には ① が成立することがわかる．

Step 2. $i = 0$ の場合に ① を証明する．

一般に，完全系列 $\cdots \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$ が存在するとき，その双対加群について完全系列 $\cdots \to M_3^\vee \to M_2^\vee \to M_1^\vee \to \cdots$ が存在することに注意する．

以下の可換図式が存在することは容易に証明できる．ここで，横の 2 本の系列は完全であり，Step 1 の結論より 3 項目と 4 項目の上下は同型である．

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{E}_2, \omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{E}_1, \omega_{\mathbb{P}}) \\ \downarrow\cong & & & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ 0 & \longrightarrow & H^N(X, \mathcal{F})^\vee & \longrightarrow & H^N(\mathbb{P}, \mathcal{E}_2)^\vee & \longrightarrow & H^N(\mathbb{P}, \mathcal{E}_1)^\vee \end{array}$$

補題 5.4.4f より，$i = 0$ の場合に ① が成立することがわかる．

Step 3. $i \geqq 1$ の場合を考える．

補題 5.4.4e の証明で述べたように補題 4.2.33d の完全系列 $0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{F} \to 0$ をとる．可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{E}_2, \omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i-1}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{K}, \omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}}) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^{i}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{E}_2, \omega_{\mathbb{P}}) \\ \cong\downarrow & & f_{i-1}\downarrow & & \downarrow g_i & & \downarrow\cong \\ H^{N-i+1}(X, \mathcal{E}_1)^\vee & \longrightarrow & H^{N-i+1}(X, \mathcal{K})^\vee & \longrightarrow & H^{N-i}(X, \mathcal{F})^\vee & \longrightarrow & H^{N-i}(X, \mathcal{E}_1) \end{array}$$

を考える．i に関する帰納法を $\mathcal{K}$ と $\mathcal{F}$ に適用すると図式を可換にする同型写像 f_{i-1} と g_{i-i} が存在するので，補題 5.4.4f より図式を可換にする同型写像 g_i が存在する．

□

定理 5.4.4h. $X \subset \mathbb{P}^N$ がコーエン・マコーレイ射影多様体，$\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-加群のとき，$i \in \mathbb{Z}$ に対して以下が成り立つ．

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

特に，$H^n(X, \omega_X) \cong \mathbb{C}$ で，ω_X は埋めこみ $X \subset \mathbb{P}^N$ に依存せず同型を除いて一意的に定まる．

証明. Step 1. $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，

$$T_1^i(\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X), \quad T_2^i(\mathcal{F}) = H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$$

とおく．T_1^0, T_2^0 は連接 $\mathcal{O}_X$-加群の圏から $\mathbb{C}$-ベクトル空間の圏への左半完全反変関手である．また，$\mathcal{O}_X$-加群の完全系列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ に対して，以下の完全系列が存在する．

$$0 \to T_1^0(\mathcal{H}) \to T_1^0(\mathcal{G}) \to T_1^0(\mathcal{F}) \to T_1^1(\mathcal{H}) \to T_1^1(\mathcal{G}) \to T_1^1(\mathcal{F}) \to T_1^2(\mathcal{H}) \to \cdots$$
$$0 \to T_2^0(\mathcal{H}) \to T_2^0(\mathcal{G}) \to T_2^0(\mathcal{F}) \to T_2^1(\mathcal{H}) \to T_2^1(\mathcal{G}) \to T_2^1(\mathcal{F}) \to T_2^2(\mathcal{H}) \to \cdots$$

T_1^0, T_2^0 については，補題 5.4.4d, 補題 5.4.4g より，

$$\begin{aligned} T_1^0(\mathcal{F}) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{N-n}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N})) \\ &\cong H^n(X, \mathcal{F}) = T_2^0(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

である．もし，任意の連接 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}$ の局所自由分解 (命題 6.2.31a 参照)

$$\cdots \xrightarrow{d_2} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{d_1} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

で，任意の $i \geqq 1$ と任意の $j \geqq 0$ に対して，$T_1^i(\mathcal{P}_j) = T_2^i(\mathcal{P}_j) = 0$ を満たすようなものが存在するならば，定理 6.2.32a または定理 6.2.24 の証明のように

$$T_1^i(\mathcal{F}) \cong \operatorname{Ker} T_1^0(d_i)/\operatorname{Im} T_1^0(d_{i-1}) \cong \operatorname{Ker} T_2^0(d_i)/\operatorname{Im} T_2^0(d_{i-1}) \cong T_2^i(\mathcal{F})$$

が成立することが証明でき，定理の結論が得られる．そこで，以下，上の性質を満たす局所自由分解が存在することを証明する．

Step 2. $m \gg 0,\, i \geqq 1$ のとき $T_1^i(\mathcal{O}_X(-m)) = 0$ を示す．

定理 6.2.34 より，$\mathcal{L}$ が可逆 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\, \omega_X) \cong H^i\big(X,\, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\, \omega_X)\big) \cong H^i(X,\, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee)$$

である．特に，$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-m)$ の場合，$\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^\vee = \omega_X(m)$ だから，定理 4.2.34a より，$i \geqq 1,\, m \gg 0$ のとき，

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-m),\, \omega_X) \cong H^i(X,\, \omega_X(m)) = 0$$

となる．

Step 3. $\mathcal{F}$ が局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群で，$m \gg 0,\, i \geqq 1$ のとき $T_2^i(\mathcal{F}(-m)) = 0$ を示す．

補題 5.4.4g より，

$$H^{N-i}(X,\, \mathcal{F}(-m))^\vee \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F}(-m),\, \omega_\mathbb{P}) \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F},\, \omega_\mathbb{P}(m))$$

である．$P \in X \subset \mathbb{P}$ をとる．$\mathcal{F}_P \cong \mathcal{O}_{X,P}^{\oplus r}$ であるから，$M := \mathcal{F}_P$ はコーエン・マコーレイ $R := \mathcal{O}_{\mathbb{P},P}$ 加群である．補題 5.4.4b より，$i \neq N-n$ のとき

$$\big(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F},\, \omega_\mathbb{P}(m))\big)_P = \operatorname{Ext}^i_R(M, R) = 0$$

となる．よって，$i \neq N-n$ のとき $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F},\, \omega_\mathbb{P}(m)) = 0$ である．系 6.3.18 と定理 6.3.3(7) より，

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F},\, \omega_\mathbb{P}(m)) \cong H^{i-N+n}(\mathbb{P},\, \mathcal{E}xt^{N-n}_{\mathcal{O}_\mathbb{P}}(\mathcal{F}, \omega_\mathbb{P}(m))) \cong H^{i-N+n}(\mathbb{P},\, \omega_X(m))$$

である．定理 4.2.34a より，$m \gg 0,\, i \neq 0$ のとき $H^i(\mathbb{P},\, \omega_X(m)) = 0$ である．よって，$m \gg 0,\, i \neq n$ のとき $H^{N-i}(X,\, \mathcal{F}(-m)) = 0$ となる．

Step 4. $T_1^i(\mathcal{P}_j) = T_2^i(\mathcal{P}_j) = 0$ $(\forall i \geqq 1, \forall j \geqq 0)$ を満たす $\mathcal{F}$ の局所自由分解 $(*)$ が存在することを証明する．

Step 2, 3 より，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ をとると，任意の $m \geqq m_0$ と任意の $i \geqq 1$ に対して，$T_1^i(\mathcal{O}_X(-m)) = T_2^i(\mathcal{O}_X(-m)) = 0$ となる．定理 4.2.35b より，ある $m_1 \in \mathbb{N}$ をとる

と，任意の $m \geqq m_1$ に対して，ある自然数 r と全射 $\varphi\colon \mathcal{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{F}(m)$ が存在する．$m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ とおくと，$m \geqq m_2$ のとき，全射 $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r} \longrightarrow \mathcal{F}$ $(\exists r \in \mathbb{N})$ が存在する．そこで，$\mathcal{P}_0 = \mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}$ とおく．

$\mathcal{P}_1$ 以降は，射影的分解を構成するときの要領で，上と同様に順次構成していけばよい．

Step 5. $H^n(X, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \omega_X) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbb{C}$ である．また，別の埋めこみ $X \subset \mathbb{P}^{N'}$ によって定まる dualizing sheaf ω'_X に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega'_X, \omega_X) \cong H^n(X, \omega'_X)^\vee \cong \mathbb{C}$ である．同様に，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X, \omega'_X) \cong \mathbb{C}$ なので，$1 \in \mathbb{C}$ に対応する $f\colon \omega'_X \to \omega_X$, $g\colon \omega_X \to \omega'_X$ は $f \circ g = \mathrm{id}$, $g \circ f = \mathrm{id}$ を満たすので，同型写像である． □

補題 5.4.4i. $X \subset \mathbb{P}^n$ は非特異射影多様体，$\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ における X の定義イデアルとする．すると，以下が成り立つ．

$$\omega_X \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\bigwedge^{N-n}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2),\ \mathcal{O}_X(K_{\mathbb{P}^N})\right)$$

証明. $n = \dim X$, $r = N - n$ とおく．X は非特異だから，点 $P \in X$ の $\mathbb{P}^N$ における座標開集合 U を十分小さく選べば，P の局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n, f_1,\ldots, f_r)$ で，$\mathcal{I}(U) = (f_1,\ldots, f_r) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(U)$ であり，かつ，$(x_1,\ldots, x_n)$ が $X \cap U$ における $P \in X$ の局所座標系であるようなものが存在する．

$S = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N,P}$, $I = \mathcal{I}_P$, $R = \mathcal{O}_{X,P} = R/I$, $\omega_S = \omega_{\mathbb{P}^N,P}$, $\omega_R = \omega_{X,P}$ とおく．S における f_j の像を $a_j \in S$ とする．R はコーエン・マコーレイ環で，$\mathbf{a} = (a_1,\ldots, a_r) \subset S$ は S-加群 R についての R-正則列になっている．また，$I = Sa_1 + \cdots + Sa_r$ である．例えば，[安藤] 系 7.1.2, 定理 8.1.8 より，

$$\omega_R = \left(\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N}))\right)_P \cong \mathrm{Ext}^r_S(R, \omega_S)$$

であって，これは R の標準加群 ([安藤] 定義 8.1.2 参照) である．R はゴレンシュタイン環だから，$\omega_R \cong R$ である ([安藤] 定理 8.1.7 参照)．特に，ω_X は可逆 $\mathcal{O}_X$-加群である．

L は $e_1,\ldots, e_r$ を基底とする自由 S-加群，

$$K_i = K_i^{\mathbf{a}} = \bigwedge^i L \quad (i \text{ 個の } L \text{ の交代積})$$

とする．つまり，K_i は，

$$\left\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \;\middle|\; 1 \leqq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leqq r\right\}$$

を基底とする自由 S-加群である．$d_i = d_i^{\mathbf{a}} : K_i \to K_{i-1}$ を，

$$d_i^{\mathbf{a}}(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r}) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} a_{j_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{k-1}} \wedge e_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$$

と定義すると，$d_{i-1} \circ d_i = 0$ を満たし，

$$\cdots \to K_2 \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

$(K_0 \cong S)$ は $R = S/I$ の S-自由分解になる ([安藤] 定理 7.6.3(2) 参照)．$d_i\colon K_i \to K_{i-1}$ から誘導される写像を

$$\delta_i = \delta_i^{\mathbf{a}} : \mathrm{Hom}_S(K_{i-1}, \omega_S) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(K_i, \omega_S)$$

とすると，ホモロジー代数の一般論から，

$$\omega_R = \mathrm{Ext}_S^r(R, \omega_S) \cong \mathrm{Ker}\,\delta_{r+1}/\,\mathrm{Im}\,\delta_r$$

であることが導かれる．δ_{r+1} はゼロ写像で，$K_r \cong S$ だから，$\mathrm{Ker}\,\delta_{r+1} = \mathrm{Hom}_S(S, \omega_S) = \omega_S$, $\mathrm{Im}\,\delta_r = I\omega_S$ である．よって，以下の同型写像が存在する．

$$\rho_{\mathbf{a}}\colon \omega_R = \mathrm{Ext}_S^r(R, \omega_S) \xrightarrow{\cong} \omega_S/I\omega_S$$

$d_i^{\mathbf{a}}$ の定義は正則列 $\mathbf{a}$ の選び方に依存していた．よって，同型 $\rho_{\mathbf{a}}$ も $\mathbf{a}$ の選び方に依存する．$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r) \subset S$ を別の R-正則列で, I を生成するものとする．ある $c_{ij} \in S$ が存在して $b_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} a_j$ と書ける．$K_1^{\mathbf{b}}$ の基底を $e'_1, \ldots, e'_r$ とし，$e'_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} e_j$ で $K_k^{\mathbf{a}} \to K_k^{\mathbf{b}}$ を定める (そうしないと d_i と可換にならない)．r 次正方行列 (c_{ij}) の行列式を γ とすると，r 次の部分については $d_r^{\mathbf{b}}(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_r) = \gamma d_r^{\mathbf{a}}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)$ が成り立つ．よって，$\rho_{\mathbf{b}} = \gamma \rho_{\mathbf{a}}$ である．

$L = \bigwedge^{r} I/I^2$ とおく．$1 \in R$ に $a_1 \wedge \ldots \wedge a_r$ の L における同値類を対応される写像 $\varphi_{\mathbf{a}}\colon R \longrightarrow L$ は同型写像である．$\varphi_{\mathbf{b}} = \gamma \varphi_{\mathbf{a}}$ が成り立つ．$\rho_{\mathbf{a}}$ と $\varphi_{\mathbf{a}}$ から同型写像

$$\psi_P\colon \omega_R = \mathrm{Ext}_S^r(R, \omega_S) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(L, \omega_S/I\omega_S)$$

を作ると，これは正則列 $\mathbf{a}$ の選に方に依存しない同型写像になる．言い換えると ψ_P は P の局所座標系の選び方に依存せずに，一意的に定まる．

$\mathfrak{L} = \bigwedge^{r} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ とおく．ψ_P は P の十分小さいアフィン開近傍 $U \subset \mathbb{P}^N$ に延長できて，

$$\psi_U\colon \omega_X|_U = \mathcal{E}xt^r_{\mathfrak{O}_U}(\mathfrak{L}|_U, \mathfrak{O}_U(K_{\mathbb{P}^N})) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_{X\cap U}}(\mathfrak{L}|_U, \mathfrak{O}_{X\cap U}(K_{\mathbb{P}^N}))$$

は標準的に定まる同型写像になる．点 P を X 上を動かすとき，この同型は自然に貼り合わさって，同型

$$\psi_X\colon \omega_X \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L},\, \mathcal{O}_X(K_{\mathbb{P}^N}))$$

を定める． □

なお，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(K_{\mathbb{P}^N})$ が $\mathbb{P}^N$ の標準加群であることの正当性については，[安藤] 系 8.5.18 の証明を見よ．$\mathbb{P}^N$ の座標環 $S = \mathbb{C}[X_0,\ldots, X_N]$ を局所次数付き環と考えたときの次数付き標準加群は $K_S = S(-N-1)$ (次数を $-N-1$ シフトした次数付き加群) である．

定理 5.4.4j. $X \subset \mathbb{P}^N$ が非特異射影多様体のとき次が成り立つ．

$$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$$

証明. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ における X の定義イデアルを $\mathcal{I}$ とする．参考 4.3.9a で説明したように，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^N} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0$$

が存在する．$n = \dim X$, $r = N - n$ として，上の完全系列より，

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(K_{\mathbb{P}^N}) &\cong \left(\bigwedge^N \Omega^1_{\mathbb{P}^N}\right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}} \mathcal{O}_X \cong \left(\bigwedge^n \Omega^1_X\right) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right) \\ &\cong \mathcal{O}_X(K_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \left(\bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2\right) \end{aligned}$$

である．これと前補題より，

$$\mathcal{O}_X(K_X) = \bigwedge^n \Omega^1_X \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\bigwedge^r \mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\ \mathcal{O}_X(K_{\mathbb{P}^N})\right) \cong \omega_X$$

である． □

さて，定理 5.4.4 を証明する．定理 5.4.4h, 定理 5.4.4j, 命題 6.2.28, 定理 6.2.30 より，

$$\begin{aligned} H^{n-i}(X,\, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee &\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(K_X - D),\, \omega_X) \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(K_X - D),\, \mathcal{O}_X(K_X)) \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\, \mathcal{O}_X(D)) \\ &\cong H^i(X,\, \mathcal{O}_X(D)) \end{aligned}$$

を得る． □

● 初版 p237, 新装版 p239. 定義 5.4.5 の 7, 8, 10 行目

(3 ケ所)

誤: $N_1(S)$

正: $N^1(S)$

● 初版 p237, 新装版 p239. 定義 5.4.5 と定理 5.4.6 の間

以下の命題を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 5.4.5b. S は非特異射影曲面で，A はアンプル因子，D は 0 でない因子で $D \geqq 0$ とする．すると，$(A \cdot D)_S > 0$ である．

証明. $m \gg 0$ に対し mA は非常にアンプルで，$(mA \cdot D)_S = m(A \cdot D)_S$ だから，最初から A が非常にアンプルである場合に証明すればよい．点 $P \in \operatorname{Supp} D$ をとる．ベルティニの定理の証明からわかるように，$P \in \operatorname{Supp} A'$ となるような $A' \in |A|$ で，しかも A' のどの既約成分も $\operatorname{Supp} D$ に含まれないようなものがとれる．このとき，$P \in \operatorname{Supp} A' \cap \operatorname{Supp} D$ は有限集合だから，交点数の定義 (定義 5.1.1) に戻って考えれば，$(A \cdot D)_S = (A' \cdot D)_S > 0$ である． □

● 初版 p237, 新装版 p239. 定理 5.4.6 とその証明

(6 ケ所)

誤: $N_1(S)$

正: $N^1(S)$

● 初版 p237, 新装版 p239. 定理 5.4.6 の 3 行目

誤: $C_1, \ldots, C_\rho$ を $N_1(C)$ の基底とし，

正: $C_1, \ldots, C_\rho$ を $N^1(S)$ の基底とし，

● 初版 p237, 新装版 p239. 定理 5.4.6 の証明の最初の 6 行

定理 5.4.6 の証明の冒頭の 6 行を以下の原稿に差し替えて下さい．表現を変更しただけですが．

[差し替え原稿]

証明. 上の命題より，アンプル因子 H は $(H^2)_S > 0$ を満たすので，J は少なくとも 1 つ正の固有値を持つ．$\mathbb{R}$-因子 D の同値類を $[D] \in N^1(S)$ で表す．

$$W = \{[D] \in N^1(S) \mid (D \cdot H)_S = 0\}$$

とおく．$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で調密だから，整数係数因子 D が $[D] \in W$ を満たすとき $(D^2)_S < 0$ であることを示せば，定理が証明される．$(D \cdot H)_S = 0$ である．

● 初版 p238, 新装版 p2401. 第 5.4.4 項の直後

以下の「第 5.4.4b 項 ザリスキー分解」を追加して下さい．

[追加原稿]

5.4.4b.　ザリスキー分解

定義 5.4.6b.　S は非特異射影曲面，D は S 上の $\mathbb{R}$-因子とする．S 上の任意の曲線 C に対し，$(D \cdot C)_S \geqq 0$ が成り立つとき，D は**ネフ** (nef) であるという．

定理 5.4.6c. (**ザリスキー (Zariski) 分解**)　S は非特異射影曲面，$D \geqq 0$ は S 上の因子とする．このとき，以下の条件 (1), (2), (3), (4) を満たす $\mathbb{Q}$-因子 P, $N = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ ($a_i \in \mathbb{Q}$, E_i は曲線) が一意的に存在する．この $D = P + N$ を D の**ザリスキー分解**という．

(1) $D = P + N$.

(2) P はネフで，$P \geqq 0$, $N \geqq 0$.

(3) 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して $(P \cdot E_i)_S = 0$.

(4) N の交点行列 $\big((E_i \cdot E_j)\big)_{i,j}$ は負定値.

証明. $D = \sum_{i=1}^{n} b_i C_i$ ($b_i \in \mathbb{N}$, C_i は曲線),

$$V := \{D' \mid D' \text{ はネフな } \mathbb{R}\text{-因子で } 0 \leqq D' \leqq D\}$$

とおく．$D_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i C_i$, $D_2 = \sum_{i=1}^{n} c'_i C_i \in V$ に対し，$D_3 = \sum_{i=1}^{n} \max\{c_i, c'_i\} C_i$ とおく．例えば $c_j \geqq c'_j$ のとき $(D_3 \cdot C_j)_S \geqq (D_1 \cdot C_j)_S \geqq 0$ だから D_3 もネフで，$D_3 \in V$ となる．V は $\mathbb{R}^n$ の部分位相空間として完備だから，V には $\leqq$ について最大元 $P = \sum_{i=1}^{n} p_i C_i$ が存在する．V の定義より，P はネフである．$N = D - P$ とおく．$(P \cdot E_i)_S > 0$ となる N の成分 E_i が存在すると，$0 < \varepsilon \ll 1$ のとき $P + \varepsilon E_i$ もネフで，$P + \varepsilon E_i \in V$ となって P の最大性に矛盾する．よって，(3) が成立する．また $(E_i^2)_S \geqq 0$ と仮定すると，$0 < \varepsilon \ll 1$ のとき $P + \varepsilon E_i \in V$ となって P の最大性に矛盾するので，$(E_i^2)_S < 0$ である．

(4) を示す．N の交点行列が負定値でないと仮定すると，ある $\mathbb{R}$-因子 $Z = \sum_{i=1}^{r} e_i E_i$ で $(Z^2)_S \geqq 0$ を満たすものが存在する．$Z = Z_+ - Z_-$ $(Z_+ \geqq 0, Z_- \geqq 0)$ と表すとき，$(Z_+^2)_S + (Z_-^2)_S \geqq (Z^2)_S \geqq 0$ だから，$(Z_+^2)_S \geqq 0$ または $(Z_-^2)_S \geqq 0$ である．そこで最初から $Z > 0$ と仮定してよい．もし Z がネフならば，$0 < \varepsilon \ll 1$ のとき $P + \varepsilon Z \in V$ となって P の最大性に矛盾するので，Z はネフでなく，$(Z \cdot E_i)_S < 0$ を満たす E_i が存在する．$Z_1 := Z - \dfrac{(Z \cdot E_i)_S}{(E_i^2)_S} E_i$ とおく．$(Z_1^2)_S = (Z^2)_S - \dfrac{(Z \cdot E_i)_S^2}{(E_i^2)_S} > (Z^2)_S \geqq 0$ である．また，$(Z_1 \cdot E_i)_S = 0$, $0 < Z_1 < Z$ である．

Z から Z_1 を作ったように，Z_1 から Z_2 を作り，以下同様に Z_k から Z_{k+1} を作る．$Z > Z_1 > Z_2 > \cdots > 0$ なので，$\mathbb{R}$-因子の列 $\{Z_k\}_k$ の極限 Z_∞ が $\mathbb{R}$-因子として存在する．$(Z_\infty^2)_S > (Z^2)_S \geqq 0$ だから $Z_\infty > 0$ である．Z_∞ の構成法から，$(Z_\infty \cdot E_i)_S < 0$ を満たす E_i は存在しないので，Z_∞ はネフである．すると，$0 < \varepsilon \ll 1$ のとき $P + \varepsilon Z_\infty \in V$ となって P の最大性に矛盾する．よって，(4) が成立する．

$(P \cdot E_i)_S = 0$ より $\sum_{j=1}^{r} a_j (E_j \cdot E_i)_S = (N \cdot E_i)_S = (D \cdot E_i)_S \in \mathbb{Z}$ である．a_j はこの整数係数連立方程式の解として定まるので，$a_i \in \mathbb{Q}$ である．よって，P, N は $\mathbb{Q}$-因子である．

最後に D のザリスキー分解の一意性を証明する．$D = P + N = P' + N'$ を 2 通りのザリスキー分解とする．$N' = \sum_{i=1}^{r+r'} a_i' E_i$ とし，$E = \sum_{i=1}^{r} \min\{a_i, a_i'\} E_i$ とおく．$D_0 = D - E$, $N_0 = N - E$, $N_0' = N' - E$ とすると，N, N' の交点行列は負定値なので，

$$0 \geqq (N_0^2)_S = ((P + N_0) \cdot N_0)_S = (D_0 \cdot N_0)_S = ((P' + N_0') \cdot N_0)_S \geqq 0$$

となり，$(N_0^2)_S = 0$ を得る．N の交点行列は負定値なので，$N_0 = 0$ である．同様に，$N_0' = 0$ が導かれるので，$N = E = N'$ となりザリスキー分解の一意性がわかる． □

系 5.4.6d. 上の定理の仮定のもと，分数 $a_1, \ldots, a_r$ の分母の最小公倍数を m_0 とする．このとき，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ．

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0 D)) \cong H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0 P))$$

証明. M を $mm_0 D$ の可動部分とする．M はネフである．$D = P + N$ が D のザリスキー分解ならば，$mm_0 D = mm_0 P + mm_0 N$ は $mm_0 D$ のザリスキー分解にな

る．mm_0P は $mm_0P \leqq mm_0D$ を満たすネフな $\mathbb{R}$-因子の中で最大なものであるから，$M \leqq mm_0P$ である．よって，

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(M)) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0P)) \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0D))$$

である．命題 4.2.17 より，$H^0(S, \mathcal{O}_S(M)) = H^0(S, \mathcal{O}_S(mm_0D))$ であるから，結論を得る．□

● 初版 p238 〜 239, 新装版 p240 〜 241．補題 5.4.7

補題 5.4.7 を以下の原稿と差し替えて下さい．証明を修正し，大幅に丁寧に書き直しました．

[差し替え原稿]

補題 5.4.6e. S, T は非特異射影代数曲面，$A \subset S$ と $B \subset T$ は有限集合で，$\varphi\colon (S - A) \to (T - B)$ は双有理全射正則写像であるとする．すると，ある正則写像 $\tilde{\varphi}\colon S \to T$ で，$\tilde{\varphi}|_{(S-A)} = \varphi$ を満たすものが存在する．

証明. 点 $P \in A$ をとり，P の座標開集合 $U : (x, y)$ をとる．同型写像 φ^* を通して $\mathrm{Rat}(T) = \mathrm{Rat}(S)$ と考える．

$t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}^1$ に対して $f_t = t_1x - t_0y$ とおき，U 上で $f_t = 0$ で定まる曲線を C_t とする．また，$\varphi(C_t - A)$ の T における閉包を $\mathit{\Gamma}_t$ とする．$\mathit{\Gamma}_t$ は射影曲線で，命題 2.5.17 の証明と同様な議論で φ から正則写像 $\varphi_t\colon C_t \to \mathit{\Gamma}_t$ が定まる．

$$E = \left\{\varphi_t(P) \;\middle|\; t \in \mathbb{P}^1\right\}$$

とおく．E は T 上のある代数的集合で，ある正則写像による $\mathbb{P}^1$ の像になっているから，E は射影曲線であるか 1 点であるかのいずれかである．

もし E が 1 点ならば，$\varphi(P) = E$ として φ を P まで正則に延長できるから，E が射影曲線の場合を考える．$\varphi^{-1}(E - B)$ の S における閉包を F とすると，F は射影曲線である．勝手な点 $Q \in F - A$ をとる．ある $t \in \mathbb{P}^1$ が存在して $\varphi(Q) \in \mathit{\Gamma}_t \cap E$ であるから，$Q \in C_t \cap F$ であり，結局 $Q = P$ となって矛盾する．□

上の証明からわかるように，一般に，非特異代数曲面の間の支配的有理写像 $\varphi\colon S \cdots \to T$ の不確定点の像は，何本かの有理曲線の和集合である．

補題 5.4.7. S, T が非特異射影代数曲面で，$\varphi\colon T \to S$ が同型写像でない全射双有理正則写像ならば，ある点 $P \in S$ を選んで，P を中心とするブロー・アップ $\pi\colon X \to S$ を作ると，ある正則写像 $\psi\colon T \to X$ が存在し，$\varphi = \pi \circ \psi$ と分解できる．

証明． 点 $P \in S$ は $\varphi^{-1}(P)$ が 1 点でないような点とする．T は正規だから，$\varphi^{-1}(P)$ が 2 点以上からなる有限集合になることはなく，$\varphi^{-1}(P)$ は曲線を含む．$\pi\colon X \to S$ を P を中心とするブロー・アップとし，$E = \pi^{-1}(P) \subset X$ とする．有理写像 $\psi = \pi^{-1} \circ \varphi\colon T \cdots \to X$ が正則写像であることを証明する．$S - \varphi^{-1}(P)$ 上では ψ は同型写像であるので，ψ が正則写像でないとすれば，ψ の不確定点 Q が $\varphi^{-1}(P)$ 上に存在する．まず，Q が $\varphi^{-1}(P)$ の非特異点である場合を考える．つまり，Q を含む $\varphi^{-1}(P)$ の既約成分 C は唯一であって，Q は C の非特異点であると仮定する．

(x_1, x_2) を点 P のある座標近傍 W における局所座標系とする．W 上で $x_i = 0$ で定まる代数的集合は既約曲線 Γ_i であると仮定してよい．$\tilde{\Gamma}_i$ を Γ_i の φ による強変換とする．すなわち $\tilde{\Gamma}_i$ は $\varphi^{-1}(W)$ 上の既約曲線で，$\varphi(\tilde{\Gamma}_i) = \Gamma_i$ を満たすものとする．例えば，$Q \notin \tilde{\Gamma}_1$ と仮定しても一般性を失わない．点 Q の座標近傍 U を $U \cap \tilde{\Gamma}_1 = \phi$ であり，U が C 以外の $\varphi^{-1}(P)$ の既約成分を含まないようにとる．$\varphi^{-1}(W)$ 上では $\varphi^* x_i = 0$ で定まる代数的集合は重複度を無視すれば $\big(\varphi^{-1}(P) \cup \tilde{\Gamma}_i\big) \cap \varphi^{-1}(W)$ であるので，U 上での $\varphi^* x_1$ の零点集合は $C \cap U$ である．UFD $\mathcal{O}_{T,Q}$ において $\varphi^* x_1 = \alpha y^m$ (α は可逆元) と素因数分解し，t を適当に選び，必要なら U を小さくとり直して，α は $\mathcal{O}_T(U)$ で可逆で，(t, y) が U の局所座標系で，U における C の定義方程式が $y = 0$ で，t が $C \cap U$ での広義局所座標になるようにできる．必要なら x_1 のかわりに $x_1 + \beta x_2$ ($\beta \in \mathbb{C}$) をとり，β を少し動かしても m の値が変わらないようにしておく．必要なら，同様に x_2 も適当に選び直すと，U 上のある正則関数 h により，$\varphi^* x_2 = y^m h(t, y)$ (h は y の倍数でない) と書ける．

ブロー・アップの構成法から，$E \cap W \neq \phi$ であるような X のアフィン開集合 W で，広義座標系 (t_1, y_1) を持ち，$\pi^* x_1 = y_1, \pi^* x_2 = t_1 y_1$ を満たすものが選べる．同型写像 $\varphi^*\colon \mathrm{Rat}(S) \to \mathrm{Rat}(T), \pi^*\colon \mathrm{Rat}(S) \to \mathrm{Rat}(X)$ を通して $\mathrm{Rat}(T) = \mathrm{Rat}(S) = \mathrm{Rat}(X)$ と考えれば，$y = x_1 = y_1$ である．また，この関数体の中で，

$$h(t, y) = \frac{x_2}{y^m} = \frac{t_1 y_1}{y^m} = \alpha t_1$$

である．よって，$\psi^* t_1 = \alpha^{-1} h(t, y)$ である．$\psi^* y_1 = y$ も $\psi^* t_1 = \alpha^{-1} h(t, y)$ も U で正則だから，$Q' \in U$ に対して

$$\psi(Q') = \big(y_1(Q'),\ \alpha(Q')^{-1} h(Q')\big) \in X$$

であり，ψ は Q の近傍で正則である．これは，Q が不確定点であることに反する．

今の考察からわかるように，$C \cap U$ において $\alpha^{-1} h(t, y)$ が定数関数であれば $\psi(C)$ は 1 点であるが，そうでない場合には $\psi(C \cap U)$ は E の空でない開集合である．特に，$\tilde{\Gamma}_2 \cap C \neq \phi$ となる既約成分 C を選べば，C 上で $\alpha^{-1} h(t, y)$ は定数関数でない

($\tilde{\Gamma}_2 \cap C$ で 0 であるが，それ以外の点では 0 でない) から，$\psi(C \cap U)$ は E の空でないザリスキー開集合になる．

ところで，$\varphi^{-1}(P)$ の特異点は有限集合であるから，ある有限集合 $A \subset S$, $B \subset T$ を選べば $\psi\colon (S - A) \to (X - B)$ は正則写像になる．上の補題から，$\psi\colon S \to X$ は正則写像である． □

上の証明において，その最終的な結果から C は非特異曲線であり，後の系 5.4.8 から $m = 1$ であることがわかる．

補題 5.4.7b. S, T は非特異射影曲面で，$f\colon T \to S$ は点 $P \in S$ を中心とするブロー・アップとする．このとき，$\rho(T) = \rho(S) + 1$ である．

証明. $E = f^{-1}(P)$ とするとき，定理 5.3.13b より $\mathrm{Pic}(T) \cong \mathrm{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}E$ であるので，$\rho(T) \leqq \rho(S) + 1$ である．もし，$\rho(T) = \rho(S)$ とすると，$E \equiv f^*D$ (算術的同値) を満たす S 上の $\mathbb{R}$-因子 D が存在する．S 上の任意の因子 D' に対して，

$$(D \cdot D')_S = (E \cdot f^*D')_T = (f(E) \cdot D')_T = 0$$

であるので，$D' \equiv 0$ である．よって，$E \equiv 0$ であるが，これは $(E^2)_T = -1$ と矛盾する．よって，$\rho(T) = \rho(S) + 1$ である． □

● 初版 p239, 新装版 p241. 系 5.4.8 の証明

系 5.4.8 の証明を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. φ が同型でない場合に証明すればよい．補題 5.4.7 より，ある点でのブロー・アップ $\pi_1\colon S_1 \to S_0 = S$ によって，$\varphi\colon T \xrightarrow{\psi} S_1 \xrightarrow{\pi_1} S_0$ と分解できる．$T \not\cong S_i$ である限り，S_i をブロー・アップする操作を繰り返す．$\rho(T) \geqq \rho(S_i) = \rho(S_{i-1}) + 1 = \rho(S) + i$ だから，この操作は $\rho(T) - \rho(S)$ 回で終わり，$T \cong S_i$ となる． □

● 初版 p239 〜 240, 新装版 p241 〜 242. 定理 5.4.10 とその証明

定理 5.4.10 を以下の原稿と差し替えて下さい．証明を大幅に丁寧に書き直しました．

[差し替え原稿]

定理 5.4.10. (**エンリッケス・カステルヌオボーの定理**, Enriques-Castelnuovo) S が非特異射影曲面で，$C \subset S$ が $C \cong \mathbb{P}^1$ かつ $(C^2)_S = -1$ を満たす曲線ならば，ある非特異射影曲面 Y と全射正則写像 $f\colon S \to Y$ が存在し，$f(C)$ は 1 点で，$U = S - C$ とおくと $f|_U\colon U \to (Y - f(C))$ は同型写像となる．また，$f\colon S \to Y$ は点 $f(C)$ を

中心とする Y のブロー・アップと同一視できる．このような C を**第 1 種例外曲線** (exceptioal curve of the first kind) とか，(-1)-**曲線**という．また，この $f\colon S \to Y$ を C の**コントラクション** (contraction) という．

証明. A を S 上の非常にアンプルな因子とし，$m = (A \cdot C)_S$, $L = A + mC$ とおく．定理 5.4.1 より，$H^1(S, \mathbf{O}_S(A)) = 0$ と仮定してよい．

まず，$0 \leqq k \leqq m$ を満たす任意の整数 k に対し，$H^1(S, \mathbf{O}_S(A + kC)) = 0$ であることを証明する．

今，$0 \leqq k < m$ とし，$H^1(S, \mathbf{O}_S(A + kC)) = 0$ であると仮定する．完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbf{O}_S(A + kC) \longrightarrow \mathbf{O}_S(A + (k+1)C) \longrightarrow \mathbf{O}_C(A + (k+1)C) \longrightarrow 0$$

が存在し，$C \cong \mathbb{P}^1$ で $\deg(A + (k+1)C)|_C = m - k - 1 \geqq 0$ より，$H^1(C, \mathbf{O}_C(A + (k+1)C)) = 0$ である．したがって，完全系列

$$\begin{aligned} 0 = H^1(S, \mathbf{O}_S(A + kC)) &\longrightarrow H^1(S, \mathbf{O}_S(A + (k+1)C)) \\ &\longrightarrow H^1(C, \mathbf{O}_C(A + (k+1)C)) = 0 \end{aligned}$$

より，$H^1(S, \mathbf{O}_S(A + (k+1)C)) = 0$ となる．

以上より，$H^1(S, \mathbf{O}_S(L - C)) = 0$ であるから，コホモロジー完全系列

$$H^0(S, \mathbf{O}_S(L)) \longrightarrow H^0(C, \mathbf{O}_C(L)) \longrightarrow H^1(S, \mathbf{O}_S(L - C)) = 0$$

から，制限写像 $\boldsymbol{L}_S(L) \to \boldsymbol{L}_C(L)$ が全射であることがわかる．$\mathrm{Bs}\,|A| = \phi$ であるから，$\mathrm{Bs}\,|L| = \mathrm{Bs}\,|A + mC| \subset C$ である．$C \cong \mathbb{P}^1$ で，$\mathbb{P}^1$ 上の因子は固定点を持たないから，$L|_C$ は固定点を持たない．また，$H^0(C, \mathbf{O}_C(A + mC)) \cong H^0(C, \mathbf{O}_C) \cong \mathbb{C}$ なので，補題 4.2.42a(2) より $\mathrm{Bs}\,|L| = \phi$ であり，Φ_L は正則写像になる．また，補題 4.2.42a(1) より，$\Phi_L(C)$ は 1 点である．

$Y = \Phi_L(S)$ とし，Φ_L の終域の制限を $f\colon S \to Y$ とおく．$f(C) = \Phi_L(C)$ は 1 点である．他方，$U = S - C$ 上では $L|_U = A|_U$ で，$\Phi_L|_U = \Phi_A|_U$ であり，A は非常にアンプルだから，$f|_U = \Phi_A|_U\colon U \to f(U)$ は同型写像である．

Y が非特異であることを証明する．$P = f(C)$, $\mathfrak{I}_C$ を $\mathbf{O}_X$ における C の定義イデアル，$\mathfrak{m}$ を $\mathbf{O}_Y$ における点 P の定義イデアルとし，局所環 $\mathbf{O}_{Y,P}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_P$ とする．十分小さいアフィン開集合 $U \ni P$ をとると，$h \in \mathfrak{I}_C(f^{-1}(U))$ は C 上では 0 なので，$h \in \mathfrak{m}(U)$ とみなすことができるので，$\mathfrak{m}(U) = \mathfrak{I}_C(f^{-1}(U)) = f_*\mathfrak{I}_C(U)$ である．よって，$\mathfrak{m} = f_*\mathfrak{I}_C$ である．これより，

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = f_*(\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)(P) = (\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)(f^{-1}(P)) = H^0(C, \mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)$$

である．また，$\mathfrak{I}_C = \mathbf{O}_S(-C)$, $\mathfrak{I}_C^2 = \mathbf{O}_S(-2C)$ で，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathbf{O}_S(-2C) \longrightarrow \mathbf{O}_S(-C) \longrightarrow \mathbf{O}_C(-C) \longrightarrow 0$$

が存在するから，$\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2 \cong \mathfrak{O}_C(-C)$ である．一般に，$C = \mathbb{P}^1$ 上の因子 D_1, D_2 について，$\deg D_1 = \deg D_2$ であれば $\mathfrak{O}_C(D_1) \cong \mathfrak{O}_C(D_2)$ であるから，$\deg C|_C = (C^2)_S = -1$ より，$\mathfrak{O}_C(-C) \cong \mathfrak{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ である．したがって，

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong H^0(C,\, \mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2) \cong H^0(\mathbb{P}^1,\ \mathfrak{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \mathbb{C}^2$$

となり，$\mathfrak{O}_{Y,P}$ は正則局所環である．したがって，Y は非特異である．

$f\colon S \to Y$ がブロー・アップであることは，系 5.4.8 からわかる． □

● 初版 p241, 新装版 p243. 定義 5.5.1 の 3 行目

誤: $\mathrm{Sing}(C) \notin \mathrm{Supp}\, D_1 \cup \mathrm{Supp}\, D_2$

正: $\mathrm{Sing}\, C \cap \mathrm{Supp}\, D_1 = \phi$ かつ $\mathrm{Sing}(C) \cap \mathrm{Supp}\, D_2 = \phi$

● 初版 p241, 新装版 p243. 定義 5.5.1 の最後から 3 行目

旧: $\deg D|_C = (D \cdot C)_S$

新: $\deg D|_C = (D \cdot C)_S = (D_1 \cdot C)_S - (D_2 \cdot C)_S$

● 初版 p242. 新装版 p244. 定理 5.5.2 の証明の 3 行目

誤: $D = C_1 - C_2$ と書ける．

正: $D \sim C_1 - C_2$ と書ける．

● 初版 p243, 新装版 p245. 定義 5.5.4 の 5 〜 7 行目

誤: ただし，$|D| = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_X(D)^\vee)$ のアフィン部分空間 Λ に対しては，対応する複素ベクトル空間 $V \subset \boldsymbol{L}_X(D)$ は一意的に定まる．

正: ただし，複素ベクトル空間 $V \subset \boldsymbol{L}_X(D)$ に対し．対応するアフィン部分空間 $\Lambda = V^\vee/\mathbb{C}^\times = \mathbb{P}(V^\vee) \subset \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_X(D)^\vee) = |D|$ は一意的に定まる．

● 初版 p243, 新装版 p245. 定義 5.5.4 の 10 行目

誤: $\Phi_V(P) = (f_1(P) : \cdots : f_n(P)) = \mathbb{P}(V^\vee)$

正: $\Phi_V(P) = (f_1(P) : \cdots : f_n(P)) \in \mathbb{P}(V^\vee)$

● 初版 p243, 新装版 p245. 定義 5.5.4 の 13 〜 21 行目

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

曲面 S の場合に戻る．正規化 $\pi\colon C' \to C$ から定まる単射

$$\pi^*\colon H^0(C,\, \mathfrak{O}_C(D)) \longrightarrow H^0(C',\, \mathfrak{O}_{C'}(\pi^* D))$$

の像を $V \subset H^0(C', \mathcal{O}_{C'}(\pi^* D))$ とする．もし，$\dim_{\mathbb{C}} V \geqq 2$ ならば，$\Phi_V \colon C' \to \mathbb{P}(V^{\vee})$ は正則写像である．有理写像 $\Phi_V \circ \pi^{-1} \colon C \cdots \to \mathbb{P}(V^{\vee})$ を，$\Phi_{D|_C} \colon C \cdots \to \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_C(D)^{\vee})$ と書き，$D|_C$ **が定める有理写像**という．

もし，$\Phi_{D|_C}$ が正則写像で中への同型写像であり，

$$\mathrm{Bs}\, V := \left\{ P \in C \;\middle|\; \text{任意の } f \in V \text{ に対して } f(P) = 0 \right\} = \phi$$

であるとき $D|_C$ は**非常にアンプル**であるという．また，ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $mD|_C$ が非常にアンプルになるとき，$D|_C$ は**アンプル**であるという．

● 初版 p243, 新装版 p245. 定義 5.5.5 の 1 行目

旧: S が非特異射影曲面で，C が S 上の特異点を持つ曲線のとき，

新: 定理 4.3.8 の類推として，S が非特異射影曲面で，$C \subset S$ が特異点を持つ射影曲線のとき，

● 初版 p244, 新装版 p246. 命題 5.5.6 の証明の 1 〜 6 行目

命題 5.5.6 の証明の 1 〜 6 行目を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. $W = C - \mathrm{Sing}(C)$, $W_0 = \pi^{-1}(W)$ とするとき，$K_{C'}|_{W_0} = K_C|_W$ と仮定してよい．そこで，C の特異点 Q をとり，S における点 Q の近傍での局所座標系 (x, y) を，Q が $(x, y) = (0, 0)$ となるようにとる．また，C の定義方程式を $f(x, y) = 0$ とおく．f は 1 次以下の項を持たない．$f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 等と書く．命題 4.3.8b より，

$$\mathrm{Res}_C \left(\frac{dx \wedge dy}{f} \right) = \frac{dx}{f_y}$$

であるので，$\omega_S = \dfrac{dx \wedge dy}{f}$, $\omega_C = \dfrac{dx}{f_y}$ とし，$K_S + C = \mathrm{div}(\omega_S)$ とすれば，$K_C = \mathrm{div}(\omega_C)$ である．

● 初版 p245, 新装版 p247. 命題 5.5.8 の直前

「が得られる.」の後に，以下の文を追加して下さい．

[追加する文] $P \in \mathrm{Sing}(C)$ ならば $\delta_P(C) \geqq 1$ であることに注意する．

● 初版 p246, 新装版 p248. 系 5.5.10 の 1 行目

旧: (非特異とは限らない) 曲線 C が

新: (非特異とは限らない) 射影曲線 C が

● 初版 p246, 新装版 p248. 系 5.5.10 の証明の 3 行目

誤: $=((K_S+C)\cdot C)_S=(C^2)_S+(C\cdot K_S)$
正: $=((K_S+C)\cdot C)_S=(C^2)_S+(C\cdot K_S)_S$

● 初版 p246, 新装版 p248. 系 5.5.10 の証明の 7 行目
旧: $-2\leqq \deg K_{C'}<((K_S+C)\cdot C)_S\leqq -2$
新: $-2\leqq p_a(C)-2=\deg K_{C'}<((K_S+C)\cdot C)_S\leqq -2$

● 初版 p247, 新装版 p249. 定理 5.5.12 の証明の 15 行目〜最後
定理 5.5.12 の証明のうち，$r=2$ の場合の証明を以下の原稿と差し替えて下さい．
$r=2$ の場合を考える．R の $\mathfrak{m}$ による完備化を $\hat{R}$ とする．P を含む S の十分小さい解析的開集合 U と，その狭義局所座標系 $(x,\,y)$ を P が原点になるようにとる．$f(x,\,y)$ を U における C の定義方程式とする．C' における Q_i の十分小さい解析的開近傍を W_i とし，$\pi(W_i)$ の U における定義方程式を $g_i\in\hat{R}$ とする．すると，$\hat{R}$ において $f=g_1\cdot g_2\cdot h$ と書ける．ここで，h は $\hat{R}$ の可逆元である．自然な写像

$$\varphi\colon \hat{R}\cong\mathbb{C}[[X,\,Y]]/(g_1g_2)\longrightarrow\mathbb{C}[[X\,,Y]]/(g_1)\oplus\mathbb{C}[[X\,,Y]]/(g_2)$$
$$\psi\colon \mathbb{C}[[X\,,Y]]/(g_1)\oplus\mathbb{C}[[X\,,Y]]/(g_2)\longrightarrow\mathbb{C}[[T_1]]\oplus\mathbb{C}[[T_2]]\cong\hat{R}'$$

を考える．$\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Coker}\psi\circ\varphi=\delta_P(C)=1$ である．ところが，$\operatorname{Coker}\varphi\neq 0$ なので，ψ は同型写像で，$\operatorname{Coker}\varphi\cong\mathbb{C}$ でなければならない．ψ が同型だから，$g_1,\,g_2$ は $X,\,Y$ について 1 次の項を持つ．$X,\,Y$ を適当に 1 次変換して，g_1 の 1 次の項は Y, g_2 の 1 次の項は $aX+bY$ $((a,\,b)\neq(0,\,0))$ であるとしておく．$a\neq 0$ を示せば，P が単純結節点であることがわかる．そこで，$a=0$ と仮定して矛盾を導く．$g_1=Y+h_1(X,\,Y)$, $g_2=bY+h_2(X,\,Y)$ $(h_1,\,h_2$ はオーダー 2 以上の巾級数で $b\neq 0)$ と書ける．$\mathbb{C}[[X,\,Y]]/(g_i)=\mathbb{C}[[X]]$ であるから，$(c_0+c_1X,\,c_2+c_3X)\in\mathbb{C}[[X,\,Y]]/(g_1)\oplus\mathbb{C}[[X,\,Y]]/(g_1)$ という形の元を考えるとき，$\operatorname{Im}\varphi$ に属するのは $(c_0+c_1X,\,c_0+c_1X)$ という形の元だけである．よって，$\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Coker}\varphi\geqq 2$ となり矛盾する． □

● 初版 p248, 新装版 p250. 定理 5.5.12 の後
次の原稿を追加して下さい．
[追加原稿]

系 5.5.12b. C は $\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲線で，特異点を持つとする．すると，C は単純尖点を 1 点だけ持つ有理曲線か，単純結節点を 1 点だけ持つ有理曲線である．

証明. C は $\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲線とする．H を $\mathbb{P}^2$ 内の直線とするとき，$C\sim 3H$, $K_{\mathbb{P}^2}\sim -3H$ である．定理 5.5.9(2) より，

$$2p_a(C)-2=((K_{\mathbb{P}^2}+C)\cdot C)_{\mathbb{P}^2}=((3H-3H)\cdot 3H)_{\mathbb{P}^2}=0$$

であり，$p_a(C) = 1$ である．よって，前定理より結論を得る． □

● 初版 p248 〜 250, 新装版 p250 〜 252. 定理 5.5.13 と定理 5.5.14

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 5.5.13a. S は非特異射影曲面，D は S 上の因子，$V \subset H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ は部分 $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする．

$$|V| = \left\{ D' \in |D| \;\middle|\; \exists f \in V - \{0\} \text{ によって } D' = D + \operatorname{div}(f) \right\}$$

とおく．$\dim_{\mathbb{C}} V \geqq 2$ かつ $\operatorname{Bs}|V| = \displaystyle\bigcap_{D \in |V|} \operatorname{Supp} D$ は曲線を含まないと仮定する．このとき，$|V|$ の一般の元は $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} C_i$ (C_i は S 上の曲線) と書け，各 C_i は $\operatorname{Bs}|V|$ 以外の点で非特異で，かつ $i \neq j$ のとき $C_i \cap C_j \subset \operatorname{Bs}|V|$ である．特に $\operatorname{Bs}|V| = \phi$ ならば，$|V|$ の一般の元は何本かの互いに交わらない非特異曲線の和集合である．

証明. $|V|$ の普遍族と呼ばれる多様体 $\pi\colon X \to \mathbb{P}(V) = |V|$ を構成する．$r = \dim_{\mathbb{C}} V$ とし，$\mathbf{a} = (a_1 : \cdots : a_r) \in \mathbb{P}(V)$ に対し，$\Phi_D\colon S \cdots \to \mathbb{P}(V^\vee)$ による $\mathbb{P}(V^\vee)$ 内の超平面 $H_{\mathbf{a}} : a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = 0$ の引き戻しを $D_{\mathbf{a}} = \Phi_D^* H_{\mathbf{a}} \in V$ として，

$$\pi^{-1}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{a}} \times \mathbf{a} \subset X \subset S \times \mathbb{P}(V)$$

となるように，X と π を定める．正確に言うと，以下のようになる．$f_i = \Phi_i^*(X_i/X_r)$ として V の基底 $f_1, \ldots, f_r$ を作り，S のアフィン開集合 U 上での $D \cap U$ の定義方程式を g とする．gf_i は U 上で正則で，その零点が $X_i = 0$ で定まる超平面の引き戻しを定めるので，$h = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} gf_iX_i = 0$ で定まる $U \times \mathbb{P}(V^\vee)$ の超曲面が $X \cap \bigl(U \times \mathbb{P}(V^\vee)\bigr)$ である．

ヤコビアン判定法により，X の特異点 $P = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$ ($\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{a} \in \mathbb{P}(V)$ では外微分が $dh(P) = 0$ となる．$dh(P) = 0$ ならば $(gf_1)(\mathbf{x}) = (gf_2)(\mathbf{x}) = \cdots = (gf_r)(\mathbf{x}) = 0$ であるので，$\mathbf{x} \in \operatorname{Bs}|V|$ である．したがって，$\operatorname{Sing}(X) \subset \bigl(\operatorname{Bs}|V| \times \mathbb{P}(V)\bigr) \cap X$ である．

定理 5.1.12 の証明から，$\pi\colon X \to \mathbb{P}(V)$ の一般ファイバーは $\operatorname{Sing}(X)$ の外では非特異である．これより結論を得る． □

定理 5.5.14a. S は非特異射影曲面で，A は非常にアンプルな S 上の因子とする．

(1) 任意の相異なる 2 点 $P, Q \in S$ に対し，P, Q を通る非特異曲線 C と，C を成分に含む因子 $D \in |A|$ が存在する．

(2) $P \in S$ と，接ベクトル $\mathbf{0} \neq \mathbf{t} \in T_{S,P}$ を任意に与えたとき，P を通る非特異曲線 C で $\mathbf{t} \in T_{C,P}$ を満たすものと，C を成分に含む因子 $D \in |A|$ が存在する．ここで，包含写像 $\iota\colon C \stackrel{\subset}{\longrightarrow} S$ から定まる自然な単射 $T_{C,P} \longrightarrow T_{S,P}$ によって $T_{C,P} \subset T_{S,P}$ と考える．

証明. $\Phi_A(S)$ と S を同一視することにより，$S \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(A)^\vee)$ と仮定してよい．$(n = h^0(S, \mathcal{O}_S(A)) - 1 \geqq 2)$ $\mathbb{P}^n$ の超平面全体の集合を $(\mathbb{P}^n)^\vee$ とする．定理 4.2.37 の証明のように，$x \in S$ に対し，

$$B_x = \left\{ H \in (\mathbb{P}^n)^\vee \;\middle|\; T_{S,x} \subset H \right\} \subset (\mathbb{P}^n)^\vee$$

とおく．$\dim B_x \leqq n-3$ である．また，$x \in H \notin B_x$ ならば $H \cap S$ は x で非特異である．

(1) $\mathbb{P}^n$ 内の直線 PQ を L とする．もし，$L \subset S$ ならば，$C = L$ とし，C を含む超平面と S の交わりを D とすればよい．そこで，$L \cap S = \{P_1, \ldots, P_r\} \ni P, Q$ と仮定する．

$$V = \left\{ f \in H^0(S, , \mathcal{O}_S(A)) \;\middle|\; f(P) = f(Q) = 0 \right\}$$

とおく．$\dim_{\mathbb{C}} V = (n+1) - 2 = n-1$ である．また，

$$|V| = \mathbb{P}(V) = \left\{ H \in (\mathbb{P}^n)^\vee \;\middle|\; P \in H \text{ かつ } Q \in H \right\}$$

とみなせる．$\mathrm{Bs}\,|V| = L \cap S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ である．前定理より，$|V| = \mathbb{P}(V)$ のある空でない開集合 U で，任意の $D \in U$ は $\mathrm{Bs}\,|V|$ 以外の点で非特異になるようなものが存在する．$\dim U = \dim V - 1 = n-2$ で，$B_{P_1} \cup \cdots \cup B_{P_r}$ は $n-3$ 次元の閉部分集合なので，U の一般の元は非特異曲線である．その非特異曲線を D とすればよい．

(2) 点 P を通り，方向ベクトルが $\mathbf{t}$ であるような直線を L とすれば，(1) の証明と全く同様である． □

● 初版 p251, 新装版 p252. 定理 5.5.15(2) の 4 行目

誤: $|\boldsymbol{L}_X(D)|$ は**無限に近い** 2 **点を分離**するとか，

正: $|D|$ は**無限に近い** 2 **点を分離**するとか，

● 初版 p251, 新装版 p252. 定理 5.5.15 の証明の 8 行目

誤: $\Phi_{|D|} = \Phi_{|\pi^* D|} \circ \pi$

正: $\Phi_{|\pi^* D|} = \Phi_D \circ \pi$

● 初版 p251, 新装版 p252. 定理 5.5.15 の証明の 9 行目

誤: 点 P における接ベクトル $\mathbf{t}_1 \neq \mathbf{t}_2 \in T_{X,P}$

正: 点 P における 1 次独立な接ベクトル $\mathbf{t}_1,\, \mathbf{t}_2 \in T_{X,P}$

● 初版 p252 〜 253, 新装版 p254 〜 255. 補題 5.5.16 〜定理 5.5.17

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

補題 5.5.16a. S は非特異射影曲面, D は S 上の因子で $D \geqq 0$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(1) 任意の点 $P \in \operatorname{Supp} D$ に対し, P を通る (非特異とは限らない) ある射影曲線 $C_P \subset S$ と自然数 $m_0(P)$ が存在し, 以下の条件 (a), (b), (c) を満たすとする.

(a) $(D \cdot C_P)_S \geqq 0$.

(b) 任意の $m \geqq m_0(P)$ に対して $H^0(C_P,\, \mathcal{O}_{C_P}(mD)) \neq 0$.

(c) 任意の $m \geqq m_0(P)$ に対して,

$$\psi_m\colon H^0(S,\, \mathcal{O}_S(mD)) \longrightarrow H^0(C_P,\, \mathcal{O}_{C_P}(mD))$$

は全射である.

すると, ある自然数 n が存在し, 任意の整数 $m \geqq n$ に対して $\operatorname{Bs}|mD| = \phi$ となる.

(2) S 内の任意の非特異曲線 C に対し $(D \cdot C)_S > 0$ が成り立ち, かつ, ある自然数 $m_0 = m_0(C)$ が存在し, 任意の自然数 $m \geqq m_0$ に対し,

$$\psi_m\colon H^0(S,\, \mathcal{O}_S(mD)) \longrightarrow H^0(C,\, \mathcal{O}_C(mD))$$

は全射であると仮定する. すると, D はアンプルである.

証明. 一般に代数多様体 X の閉部分集合列 $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ があると, ネーター環においてイデアルの増大列が昇鎖条件を満たすことの双対として, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $F_{n_0} = F_{n_0+1} = \cdots$ を満たす.

(1) $\Phi_m = \Phi_{|mD|}$, $S_m = \Phi_m(S)$ とする. $\pi_P\colon C'_P \to C_P$ を C_P の正規化とする. 系 3.5.17 より, もし $(D \cdot C_P)_S > 0$ ならば, $m \geqq 2g(C'_P) + 1$ のとき $m\pi_P\ {*D}$ は C'_P 上の非常にアンプルな因子であるので, $\operatorname{Bs}|m\pi_P^* D| = \phi$ である. $(D \cdot C_P)_S = 0$ のときも, $m \geqq 2g(C'_P) + 1$ のとき $m\pi_P^* D|_{C'_P} \sim 0$ なので, $\operatorname{Bs}|m\pi_P^* D| = \phi$ である. いずれの場合も, 定理 4.2.42a(3) より, $P \notin \operatorname{Bs}|mD|$ である.

$\operatorname{Bs}|mD| \supset \operatorname{Bs}|(m+1)D| \supset \cdots$ で, $\displaystyle\bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{Bs}|mD| = \phi$ であるので, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m \geqq n$ に対して $\operatorname{Bs}|mD| = \phi$ となる.

(2) $(D\cdot C)_S>0$ ならば，$m\gg 0$ のとき，曲線のリーマン・ロッホの定理から，

$$\dim H^0(C,\,\mathcal{O}_C(mD))\geqq m(D\cdot C)_S+1-g(C)>0$$

であることに注意する．(1) より，$\Phi_m{:}\,S\to S_m$ は正則写像である．そこで，十分大きい m を固定し，D を mD でおきかえて，最初から $\mathrm{Bs}\,|D|=\phi$ で，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し Φ_m は正則であると仮定してよい．

(I) ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して Φ_m は単射となることを示す．

勝手な 2 点 $P\neq Q\in S$ をとる．P,Q を含む非特異曲線 $C\subset S$ をとる．$\Phi_m=\Phi_{|mD|}$, $\phi_m=\Phi_{mD|_C}{:}\,C\to\mathbb{P}(\boldsymbol{L}_C(mD)^\vee)$ とすると，定理 4.2.42a より $\phi_m=\Phi_m|_C$ が成り立つ．ϕ_m も正則写像である．ある $m_2(P,\,Q)\in\mathbb{N}$ が存在して，$m\geqq m_2(P,\,Q)$ のとき，$\phi_m(P)\neq\phi_m(Q)$ より $\Phi_m(P)\neq\Phi_m(Q)$ が成り立つ．いま，

$$F_n=\bigl\{(P,\,Q)\in S\times S\bigm|\Phi_n(P)=\Phi_n(Q)\bigr\}$$

は $S\times S$ の閉集合である．$m>n$ のとき，全射正則写像 $\Phi_{m,n}{:}\,S_m\to S_n$ が存在して $\Phi_n=\Phi_{m,n}\circ\Phi_m$ を満たすので，$F_m\subset F_n$ である．Δ_S を $S\times S$ の対角線集合 ($(P,\,P)$ という形の点全体の集合) とすると，上の考察から，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\Delta_S$ であるので，ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して，$F_{n_0}=\Delta_S$ となる．すなわち，任意の $P\neq Q\in S$ に対し $\Phi_{n_0}(P)\neq\Phi_{n_0}(Q)$ である．つまり，$m\geqq n_0$ のとき，mD は前定理の条件 (1) を満たす．

(II) $P\in S$ と 1 次独立な接ベクトル $\mathbf{t}_1,\,\mathbf{t}_2\in T_{S,P}$ を取る．

$Q=\Phi_m(P)\in S_m$, $\mathfrak{m}_P$, $\mathfrak{m}_Q$ を $\mathcal{O}_{S,P}$, $\mathcal{O}_{S_m,Q}$ の極大イデアルとするとき，$\Phi_m^*{:}\,\mathcal{O}_{S_m,Q}\longrightarrow\mathcal{O}_{S,P}$ が同型写像 $\rho_{P,m}{:}\,\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2\longrightarrow\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ を誘導することを示す．

$\phi_m(C)\subset\Phi_m(S)\subset\mathbb{P}^n=\mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(mD)^\vee)$ と看做す．ある $n_1(P)\in\mathbb{N}$ が存在して $m\geqq n_1(P)$ のとき ϕ_m は同型写像であるから，$\phi_m(C)$ は非特異であり，点 Q を通る $\mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(mD)^\vee)$ の超平面 H を適当に選ぶと，H は 点 Q における接ベクトル $\Phi_m(\mathbf{t}_2)$ を含む．このことは，$m\geqq n_1(P)$ のとき，自然な写像 $\rho_{P,n}{:}\,\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2\longrightarrow\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ が全射であることを意味する．

$$U_m=\bigl\{P\in S\bigm|\text{上のように構成される }\rho_{P,m}{:}\,\mathfrak{m}_Q/\mathfrak{m}_Q^2\longrightarrow\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2\text{ が全射}\bigr\}$$

とおく．$\rho_{P,m}$ は局所的に正則な関数を成分とする行列で表されるから，$m\geqq n_1(P)$ のとき U_m は S のザリスキー開集合になる．そして $n>m$ のとき $U_n\supset U_m$ である．よって，ある $n_2\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $m\geqq n_2$ に対して $U_m=S$ がわかる．つまり，$m\geqq n_2$ のとき，mD は前定理の条件 (2) を満たす．

したがって，$m \geqq \max\{n_0, n_2\}$ のとき，mD は非常にアンプルである． □

補題 5.5.16b. S は非特異射影曲面，D は S 上の因子で，$\mathrm{Bs}\,|D| = \phi$ かつ $N = \dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}_S(D) \geqq 2$ とする．

(1) $(D^2)_S \neq 0$ ならば，正則写像 $\Phi_D\colon S \to \mathbb{P}^{N-1}$ による S の像 $\Phi_D(S)$ は曲面である．

(2) $(D^2)_S = 0$ ならば，$\Phi_D(S)$ は曲線である．

証明. $T = \Phi_D(S)$ とする．命題 4.2.23c より，T を含む $\mathbb{P}^{N-1}$ の最小のアフィン部分空間は $\mathbb{P}^{N-1}$ だから，T は 1 点ではない．

(1) T が曲線であると仮定する．H, H' を $\mathbb{P}^{N-1}$ の一般の超平面とすると，命題 4.2.23c より $H \cap T$ は何個かの点の和集合であり，また，$H \cap H' \cap T = \phi$ となるようにできる．$D_1 = \Phi_D^* H,\ D_2 = \Phi_D^* H'$ とするとき，$D \sim D_1 \sim D_2$ で，$\mathrm{Supp}\, D_1 \cap \mathrm{Supp}\, D_2 = \phi$ である．よって，$(D^2)_S = (D_1 \cdot D_2)_S = 0$ となる．これは，$(D^2)_S \neq 0$ に矛盾する．したがって，T は曲面である．

(2) T が曲面であると仮定する．H, H' を $\mathbb{P}^{N-1}$ の一般の超平面とすると，$H \cap H' \cap T \neq \phi$ なので，$D_1 = \Phi_D^* H,\ D_2 = \Phi_D^* H'$ とするとき，$(D_1 \cdot D_2)_S > 0$ となる．これは，$(D^2)_S = 0$ に矛盾する． □

定理 5.5.17. (**セールの定理の逆**) S は非特異射影曲面で，A は S 上の因子とする．S 上の任意の因子 D に対しある整数 $m_0(D) \in \mathbb{N}$ が存在し，$m \geqq m_0$ を満たす任意の整数 m に対し，

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mA + D)) = 0, \quad H^2(S, \mathcal{O}_S(mA + D)) = 0$$

が成り立つならば，A はアンプルである．

証明. Step1. $d(m, k) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S(mA + kC))$ とおく．$m \gg 0,\ i \geqq 1$ のとき $H^i(S, \mathcal{O}_S(mA + kC)) = 0$ なので，曲面のリーマン・ロッホの定理から，$m \gg 0$ のとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} d(m,k) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S(mA + kC)) = \chi(\mathcal{O}_S(mA + kC)) \\ &= \frac{1}{2}\bigl((mA + kC) \cdot (mA + kC - K_S)\bigr)_S + \chi(\mathcal{O}_S) \end{aligned}$$

S 上の任意の非特異曲線 C に対して $(A \cdot C)_S > 0$ であることと，$m \gg 0$ のとき $|mA| \neq \phi$ であることは，後で示すことにし，これを認めて先に進む．完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(mA - C) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mA) \longrightarrow \mathcal{O}_C(mA) \longrightarrow 0$$

が存在する．$m \gg 0$ のとき $H^1(C, \mathcal{O}_C(mA - C)) = 0$ であるので，$\psi_m: H^0(S, \mathcal{O}_S(mA)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(mA))$ が全射であることがわかる．すると，補題 5.5.16a(2) から，A はアンプルである．

Step 2. S 上の任意の非特異曲線 C に対して $(A \cdot C)_S > 0$ であることを示す．曲線のリーマン・ロッホの定理から，

$$0 \leqq \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \mathcal{O}_C(mA + kC)) = m(A \cdot C)_S + k(C^2)_S + 1 - g(C) \qquad (*)$$

である．k を固定して $m \to +\infty$ とすると，$(A \cdot C)_S \geqq 0$ がわかる．

以下，$(A \cdot C)_S = 0$ と仮定して矛盾を導く．$k \gg 0$ のときも $k \ll 0$ のときも $(*)$ が成り立つので，$(C^2)_S = 0$ である．すると，$(*)$ より, $g(C) \leqq 1$ である．

もし，$g(C) = 1$ とすると，$m \geqq 3$ のとき $mA|_C \sim 0$ である．すると，$h^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) = 1$ となって，矛盾する．

よって，$g(C) = 0$ である．以下，Step 2 の最後まで，$C \cong \mathbb{P}^1$ の場合を考察する．このとき，$A|_C \sim 0$ である．このとき，任意の整数 m に対して $H^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) = \mathbb{C}$ で，$\mathrm{Bs}\left|mA|_C\right| = \phi$ である．

$$(K_S \cdot C)_S = \big((K_S + C) \cdot C)_S = \deg(K_S + C)|_C = \deg K_C = 2g(C) - 2 = -2$$

なので，$(A \cdot C)_S = 0,\ (C^2)_S = 0$ とあわせて，

$$d(m,k) = \frac{m^2(A^2)_S - m(A \cdot K_S)_S}{2} + k + \chi(\mathcal{O}_S)$$

となる．k がどんなに小さい負の整数でも $m \gg 0$ に対して $d(m, k) \geqq 0$ だから，$(A^2)_S \geqq 0$ でなければならない．

$(A^2)_S = 0$ と仮定してみる．$k \ll 0$ でも $d(m, k) \geqq 0$ だから $(A \cdot K_S)_S < 0$ である．$m \gg 0, i \geqq 1$ のとき $H^i(S, \mathcal{O}_S(mA + K_S)) = 0$ なので，

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S(mA + K_S)) = \chi(\mathcal{O}_S(mA + K_S)) \\ &= \frac{1}{2}\big((mA + K_S) \cdot (mA + K_S - K_S)\big)_S + \chi(\mathcal{O}_S) \\ &= \frac{1}{2}m(A \cdot K_S)_S + \chi(\mathcal{O}_S) \end{aligned}$$

となる．これより，$(A \cdot K_S)_S \geqq 0$ となり，矛盾する．

以上より，$(A^2)_S > 0$ である．すると，$m \to +\infty$ のとき $d(m, k) \to +\infty$ なので，$m \gg 0$ のとき $|mA| \neq \phi$ である．

$m \gg 0$ のとき，$\psi_m: H^0(S, \mathcal{O}_S(mA)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) \cong \mathbb{C}$ は全射なので，補題 5.5.16a(1) より，$\mathrm{Bs}\,|mA| = \phi$ である．十分大きい自然数 m を固定して，正則写像 $\Phi_{|mA|}: S \longrightarrow \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_C(mA)^\vee)$ による S の像を $T = \Phi_{|mA|}(S)$ とし，$\Phi_{|mA|}$ の終域を T に制限した写像を $\varphi: S \to T$ と書く．補題 5.5.16b より，T は曲面である．

$H^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) = \mathbb{C}$ であったので，定理 4.2.42a(1) より $\varphi(C) = \Phi_{|mA|}(C)$ は 1 点である．$P = \varphi(C)$ とし，$\mathcal{O}_{T,P}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_P$ とする．また，$\mathcal{O}_S$ における C の定義イデアルを $\mathfrak{I}_C$ とする．定理 5.4.10 の証明で述べたように，$C \cong \mathbb{P}^1$, $\deg C|_C = (C^2)_S = d$ のとき，

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \varphi_*(\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)(P) = (\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)(\varphi^{-1}(P)) = H^0(C, \mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2)$$
$$\mathfrak{I}_C/\mathfrak{I}_C^2 \cong \mathcal{O}_C(-C) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$$

である．いま，$d = 0$ だから，$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong \mathbb{C}$ となる．これは，点 P における T の接空間の次元が 2 以上であることに矛盾する．以上で，$(A \cdot C)_S > 0$ が証明された．

Step 3. $m \gg 0$ のとき $|mA| \neq \phi$ であることを示す．

Step 1 の最後で述べたように，$m \gg 0$ のとき $\psi_m \colon H^0(S, \mathcal{O}_S(mA)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(mA))$ は全射である．$(*)$ で $k = 0$ の場合を考えると，$(A \cdot C)_S > 0$ だから，$m \to \infty$ のとき $\dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \mathcal{O}_C(mA)) \longrightarrow \infty$ である．よって，$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S(mA)) \longrightarrow \infty$ であり，$|mA| \neq \phi$ である． □

● 初版 p254 〜 255, 新装版 p256 〜 257. 定理 5.5.18 の証明

定理 5.5.18 の証明を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. 必要であることは明らかである．十分であることを示す．

$(D^2)_S > 0$ とすると，リーマン・ロッホの定理より，$m \gg 0$ のとき $\boldsymbol{L}(mD) \neq 0$ または $\boldsymbol{L}(K_S - mD) \neq 0$ となる．もし，$\forall m \gg 0$ に対して $\boldsymbol{L}(K_S - mD) \neq 0$ とすると，$D' \in |K_S - mD|$ をとるとき，(2) より，アンプルな曲線 C に対し，$m \gg 0$ のとき $0 \leqq (D' \cdot C)_S = ((K_S - mD) \cdot C)_S < 0$ となり矛盾する．したがって，ある $m \gg 0$ に対して $\boldsymbol{L}(mD) \neq 0$ である．そこで，D のかわりに $|mD|$ の元をとることにより，最初から $D \geqq 0$ と仮定してよい．

(I)　C を S 上の任意の曲線，B を S 上の任意の因子とするとき，ある自然数 m_0 が存在し $m \geqq m_0$ ならば，$H^1(C, \mathcal{O}_C(mD + B)) = 0$ となることを証明する．

$\pi \colon C' \to C$ を C の正規化として，定義 5.5.7 で登場した完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{C'} \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathrm{Sing}(C)} (R'_P/R_P) \longrightarrow 0$$

を考える．この完全系列から，以下の完全系列が誘導される．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(mD + B) \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_{C'}(\pi^*(mD + B)) \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathrm{Sing}(C)} (R'_P/R_P) \longrightarrow 0$$

$\deg \pi^* D = (D \cdot C)_S > 0$ だから系 3.5.17 より，$m \gg 0$ のとき $\pi^*(mD + B)$ は C' 上の非常にアンプルな因子である．任意の $f \in R'_P/R_P$ は十分大きな m を選べば $\boldsymbol{L}_{C'}(\pi^*(mD + B))$ の元の像として書け，$\mathrm{Sing}(C)$ は有限次元集合なので，$m \gg 0$ のとき

$$H^0\big(C',\, \mathcal{O}_{C'}(\pi^*(mD + B))\big) \longrightarrow \bigoplus_{P \in \mathrm{Sing}(C)} (R'_P/R_P)$$

は全射になることがわかる．このとき，コホモロジー完全系列を考えれば

$$H^1\big(C, \mathcal{O}_C(mD + B)\big) \longrightarrow H^1\big(C', \mathcal{O}_{C'}(\pi^*(mD + B))\big)$$

は単射であることがわかる．$m \gg 0$ のとき右辺は 0 になる．したがって，$H^1(C, \mathcal{O}_C(mD + B)) = 0$ となる．

(II)　$\mathrm{Bs}\,|mD| = \phi$ $(m \gg 0)$ を証明する．

$m \gg 0$ とする．完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(mD + B - C) \longrightarrow \mathcal{O}_S(mD + B) \longrightarrow \mathcal{O}_C(mD + B) \longrightarrow 0$$

から得られるコホモロジー完全系列において，$H^1(C, \mathcal{O}_C(mD + B)) = 0$ だから，$H^1(S, \mathcal{O}_S(mD + B - C)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(mD + B))$ は全射である．

$D = C_1 + \cdots + C_r$ と既約曲線の和で書いて，$B = -(C_1 + \cdots + C_i)$, $C = C_{i+1}$ の場合に上の結果を使えば，$i = 0, 1, \ldots, r - 1$ に対して，$m \gg 0$ のとき，

$$H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_1 - \cdots - C_{i+1})) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_1 - \cdots - C_i))$$

が全射であることがわかる．特に，$H^1(S, \mathcal{O}_S((m-1)D)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(mD))$ は全射である．自然数列 $a_m = h^1(\mathcal{O}_S(mD))$ は広義単調減少だから，ある $m_1 \gg 0$ が存在し，$m > m_1$ ならば，$h^1(\mathcal{O}_S(mD)) = h^1(\mathcal{O}_S(m_1 D))$ となる．すると，

$$\begin{aligned} &H^1(S, \mathcal{O}_S((m-1)D)) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_1 - \cdots - C_{r-1})) \\ &\cong \cdots \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_1 - C_2)) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_1)) \\ &\cong H^1(S, \mathcal{O}_S(mD)) \end{aligned}$$

である．C_1 の代わりに他の C_i をとっても同じことだから，$m > m_1$ のとき $H^1(S, \mathcal{O}_S(mD - C_i)) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(mD))$ である．よって，

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(mD)) \longrightarrow H^0(C_i, \mathcal{O}_{C_i}(mD))$$

は全射である．補題 5.5.16a(1)(b) の条件が成立することはすぐ確かめられるので，補題 5.5.16a(1) より $\mathrm{Bs}\,|mD| = \phi$ が得られる．

(III)　$m \gg 0$ をとり $Y = \Phi_{|mD|}(S)$ とし，$\Phi_{|mD|}\colon S \to \mathbb{P}(\boldsymbol{L}(mD)^\vee) = \mathbb{P}^n$ の終域を Y に制限した写像を $\varphi\colon S \to Y$ とおくとき，$\varphi\colon S \to Y$ は有限写像であることを証明する．

D のかわりに mD をとることにより，はじめから $m=1$ で $\mathrm{Bs}\,|D|=\phi$ と仮定してよい．φ が有限写像でないとすると，ある $Q\in Y$ に対し $\varphi^{-1}(Q)$ がある曲線 $E\subset S$ を含む．Q を通らない $\mathbb{P}^n$ の超平面 H をとり $D'=\varphi^*H\in|D|$ とおくと，$(\mathrm{Supp}\,D')\cap E=\phi$ となる．すると，$0=(D'\cdot E)_S=(D\cdot E)_S>0$ となり，矛盾する．よって，φ は有限写像である．

(IV)　$m\gg 0$ のとき $H^1(S,\mathbf{O}_S(mD))=0$ であることを証明する．

定理 4.4.14 より，

$$H^1(S,\mathbf{O}_S(mD))\cong H^1(Y,\varphi_*\mathbf{O}_S(mD))$$

が成り立つ．$\mathfrak{F}=\varphi_*\mathbf{O}_S$ とする．定理 4.4.14 より $\mathfrak{F}$ は局所自由 $\mathbf{O}_Y$-加群であり，連接な $\mathbf{O}_Y$-加群の簡易層である．

$\varphi_*\mathbf{O}_S(mD)\cong\mathfrak{F}(m)$ であることを証明する．そうすると，定理 4.2.34a より $m\gg 0$ のとき $H^1(S,\mathfrak{F}(m))=0$ だから，(IV) の結論が得られる．$\mathbb{P}^n$ の斉次座標系を $(X_0:\cdots:X_n)$ とする．$D=\varphi^*H$ となる $\mathbb{P}^n$ の超平面 H をとる．H は $X_0=0$ で定まると仮定してよい．$W\subset Y$ を $X_i\neq 0$ で定まるアフィン開集合とする．命題 4.4.12(1) より，$U=\varphi^{-1}(W)$ は S のアフィン開集合である．Y の斉次座標環を $R_Y=\displaystyle\bigoplus_{d=0}^{\infty}R_{Y,d}$ とし，$R_W=\mathbf{O}_Y(W)=\big(R_Y[1/X_i]\big)_0$, $A_U=\mathbf{O}_S(U)$ とする．φ は有限写像だから，A_U はランク有限の自由 R_W-加群である．$H|_W=\mathrm{div}(X_0/X_i)$, $D|_U=\mathrm{div}(\varphi^*(X_0/X_i))$ と書ける．

$$\begin{aligned}
\big(\mathfrak{F}(m)\big)(W)&=(R_W[1/X_i])_m\cdot\mathfrak{F}(W)=(R_W[1/X_i])_m\cdot A_U\\
&=\left\{\,\frac{GV}{X_i^k}\;\middle|\;k\in\mathbb{N},\,V\in A_U,\,G\in R_{m+k}\right\}\\
&\cong\left\{\,\frac{GV}{X_i^{m+k}}\cdot\left(\frac{X_i}{X_0}\right)^m\;\middle|\;k\in\mathbb{N},\,V\in A_U,\,G\in R_{m+k}\right\}\\
&=(R_W[1/X_i])_0\cdot A_U\cdot\big(\varphi^*(X_i/X_0)\big)^m=\big(\mathbf{O}_S(mD)\big)(U)
\end{aligned}$$

であるので，$\mathfrak{F}(m)\cong\varphi_*\mathbf{O}_S(mD)$ である．

(V)　任意の曲線 $C\subset S$ に対して，$m\gg 0$ のとき $H^1(S,\mathbf{O}_S(mD-C))=0$ であることを証明する．

$\varphi(C)$ を含む $\mathbb{P}^n$ の超曲面 Z をとる．Z が d 次超曲面であれば $Z\sim dH$ で，$\pi^*Z\sim dD$ である．$dD\sim B=C+C'_2+\cdots+C'_k$ (C'_i は曲線) となるような B をとり，(II) の証明と同じ議論を行えば，$m\gg 0$ のとき，

$$H^1(S,\mathbf{O}_S((m-d)D))\cong H^1(S,\mathbf{O}_S(mD-C))\cong H^1(S,\mathbf{O}_S(mD))$$

がわかる．(IV) の結果とあわせて，$H^1(S, \mathcal{O}_S(mD-C))=0$ を得る．

S 上の任意の曲線 C に対して $H^0(S, \mathcal{O}_S(mD)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_S(mD))$ は全射であって，$(D\cdot C)_S>0$ だから，補題 5.5.16a(2) より，D はアンプルである． □

● 初版 p255 〜 257, 新装版 p257 〜 259. 補題 5.5.19 と定理 5.5.20

補題 5.5.19 と定理 5.5.20 を以下の原稿と差し替えて下さい．元の補題 5.5.19 は補題 5.5.16b に移動し，別の補題に差し替えました．定理 5.5.20 は，証明がより詳細・丁寧になっています.

[差し替え原稿]

補題 5.5.19a. $d \geqq 1$ かつ $m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq m_4 \geqq m_5 \geqq m_6 \geqq 0$ かつ

$$d^2-\sum_{i=1}^{6} m_i^2=-1, \quad 3d-\sum_{i=1}^{6} m_i=1$$

を満たす整数 $(d, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$ の組は，(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) と (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0) の 2 個だけである．

証明. コーシー・シュワルツの不等式より，

$$(3d-1)^2=\left(\sum_{i=1}^{6} 1\cdot m_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{6} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{6} m_i^2\right)=6(d^2+1)$$

である．この不等式から，$3d^2-6d-5 \leqq 0$ が得られ，$1 \leqq d \leqq 2$ となる．

$d=1$ のときは，$m_1=m_2=1,\ m_3=m_4=m_5=m_6=0$ である．

$d=2$ のときは，$m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=1,\ m_6=0$ である． □

定理 5.5.20. $P_1,\ldots, P_6$ は $\mathbb{P}^2$ 内の 6 点で，これらの 6 点は同一の 2 次曲線上になく，またどの 3 点も同一直線上にないとする．このとき，これらの 6 点で (順に) ブロー・アップして得られる曲面を S とすると，S は $\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面と同型である．

また，$S \subset \mathbb{P}^3$ と考えたとき，S 上には丁度 27 本の直線 ($\mathbb{P}^3$ 内の直線) が存在し，この 27 本は S の第 1 種例外曲線である．

証明. $\mathbb{P}^2$ の 6 点ブロー・アップを $\pi\colon S \to \mathbb{P}^2$ とし，$E_i=\pi^{-1}(P_i)$ $(1 \leqq i \leqq 6)$ とする．L を $\mathbb{P}^2$ 内の直線とするとき，

$$K_S=\pi^*K_{\mathbb{P}^2}+\sum_{i=1}^{6} E_i=-3\pi^*L+\sum_{i=1}^{6} E_i$$

である．

また，$\mathbb{P}^2$ 内の直線 P_iP_j を $\tilde{L}_{ij}$ とし，$\tilde{L}_{ij}$ の π による強変換を L_{ij} とする $(1 \leqq i < j \leqq 6)$．つまり，$\pi^*\tilde{L}_{ij} = L_{ij}+E_i+E_j$ である．$(L_{ij}^2)_S = (\tilde{L}_{ij}^2)_{\mathbb{P}^2} - 2 = -1$, $L_{ij} \cong \mathbb{P}^1$ なので，L_{ij} は第 1 種例外曲線である．

さらに，$P_1,\ldots, P_6$ のうちの P_i 以外の 5 点を通る 2 次曲線 $\tilde{C}_i$ が一意的に定まるが，$\tilde{C}_i$ の π による強変換を C_i とする $(1 \leqq i \leqq 6)$．$(C_i^2)_S = (\tilde{C}_i^2)_{\mathbb{P}^2} - 5 = 2^2 - 5 = -1$, $C_i \cong \mathbb{P}^1$ なので，C_i は第 1 種例外曲線である．

さて，$P_1,\ldots, P_6$ を通る $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線の 1 つを Γ とし，Γ の π による強変換を A とする．$P_1,\ldots, P_6$ を通る $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線全体の集合を Λ とすると，$\Lambda = \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(A)^\vee)$ とみなせる．つまり，$\boldsymbol{L}_S(A)$ は $P_1,\ldots, P_6$ 上で 0 になる 3 変数 3 次斉次式全体の集合と同一視できる．補題 4.2.32b 等より，

$$
\begin{aligned}
&A \sim 3\pi^*L - \sum_{i=1}^{6} E_i \\
&\dim \boldsymbol{L}_S(A) = \dim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{L}_{\mathbb{P}^2}(3L) - 6 = 10 - 6 = 4
\end{aligned}
$$

である．

$\mathrm{Bs}\,|A| = \phi$ を示す．$Q \in \mathrm{Bs}\,|A|$ とすると，任意の $C \in \Lambda$ に対し $\pi(Q) \in C$ である．したがって，$\pi(Q) = P_i$ $(\exists i)$ である．すなわち，$Q \in E_i$ である．ところが，P_i を通る任意の直線 ℓ に対し，ℓ を点 P_i における接線とするような Λ の元が存在するから，$E_i \cap \mathrm{Bs}\,|A| = \phi$ である．したがって，$\mathrm{Bs}\,|A| = \phi$ である．そこで，正則写像 $\Phi_A\colon S \to \mathbb{P}^3$ を考える．$T = \Phi_A(S)$ とする．前補題から T は $\mathbb{P}^3$ 内の曲面である．

$\Phi_A\colon S \to \mathbb{P}^3$ の終域を T に制限した写像を $f\colon S \to T$ とする．f が同型写像であることを証明する．$U = S - (E_1 \cup \cdots \cup E_6)$, $U' = \mathbb{P}^2 - \{P_1,\ldots, P_6\}$ とする．U' の任意の 2 点 (無限に近い 2 点を含む) は Λ のある元によって分離されるから，U 上の 2 点は $|A|$ の元で分離される．したがって，$f|_U\colon U \to T$ は中への同型写像である．また，$(A \cdot E_i)_S = -(E_i^2)_S = 1$ だから，$f(E_i)$ は 1 点ではない．f は双有理だから $f\colon E_i \to f(E_i)$ は全単射である．したがって，$f\colon S \to T$ は全単射である．

E_i 上の 1 点 P と点 P における接ベクトルを与えると，$f(P)$ を始点とするベクトルとそれに接する曲率円が対応して定まる．この曲率円に点 $f(P)$ で接する Λ の元が存在するので，定理 5.5.15 により A は非常にアンプルであり，f は同型写像である．

H, H' を $\mathbb{P}^3$ 内の一般の平面とするとき．$(H|_T \cdot H'|_T)_T = (A^2)_S = 9 - 6 = 3$ である．これは，$H \cap H' \cap T$ が一般には 3 点からなる集合であることを意味する．直線 $H \cap H'$ と T が 3 点で交わるのだから，T は $\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面である．

$(H|_T \cdot f(E_i))_T = (A \cdot E_i)_S = 1$ より，$f(E_i)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の直線である．同様に，

$(A\cdot L_{ij})_S=1$, $(A\cdot C_i)_S=1$ より，$f(L_{ij})$, $f(C_i)$ は $\mathbb{P}^3$ 内の直線である．

C が T 内の直線のとき，$K_T=-H|_T$ より，$(K_T\cdot C)_T=-1$ で，$C\cong\mathbb{P}^1$ より，$(C^2)_T=-1$ である．したがって，C は第 1 種例外曲線である．

逆に，C が T 内の第 1 種例外曲線のとき，$-1=(K_T\cdot C)_T=-(H|_T\cdot C)_T$ より，C と H は $\mathbb{P}^3$ 内の 1 点で横断的に交わる．したがって，C は $\mathbb{P}^3$ 内の直線である．

T 内の第 1 種例外曲線 C に対し，$f(C')=C$ となる S 内の第 1 種例外曲線 C' をとる．$C'\neq E_i$ の場合を考える．$m_i=(C'\cdot E_i)_S\geqq 0$ とおく．$\pi(C')$ が $\mathbb{P}^2$ 内の d 次曲線になるとすると，$C'\sim d\pi^*L-\displaystyle\sum_{i=1}^{6}m_iE_i$ なので，

$$-1=(C'^2)_S=d^2-\sum_{i=1}^{6}m_i^2$$
$$1=(C'\cdot f^*H)_S=3d-\sum_{i=1}^{6}m_i$$

$(d\geqq 1)$ となる．この連立方程式の非負整数解は前補題の通りだから，$C'=L_{ij}$ か，$C'=C_i$ しかありえない． □

● 初版 p260, 新装版 p262. 演習問題 5.7 の 2 行目

誤: $\tilde{\pi}\colon \tilde{C}^3\to\mathbb{C}^3$

正: $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathbb{C}}^3\to\mathbb{C}^3$

第6章

● 初版 p261, 新装版 p.263. 定義 6.1.1 の 1 行目
旧: 連結なコンパクトな位相空間 X と
新: 連結かつコンパクトな位相空間 X と

● 初版 p261, 新装版 p.263. 定義 6.1.1(1) の 1 行目
誤: $\mathbb{R}^d$ のある開集合 W_i と,
正: $\mathbb{R}^n$ のある開集合 W_i と,

● 初版 p262, 新装版 p.264. 定義 6.1.2 の 1 行目
旧: 連結なコンパクトな位相空間 X と
新: 連結かつコンパクトな位相空間 X と

● 初版 p265, 新装版 p.267. 命題 6.1.3 の後の解説
命題 6.1.3 の後の解説の 1 〜 4 行目と 12 〜 15 行目を削除して下さい．この部分の解説は，定理 6.1.7 の後に移動します．結局，命題 6.1.3 と定理 6.1.4 の間の解説は，以下のようになります.
[修正後]
$\varphi: X \to Y$ が位相空間の間の連続写像のとき，X 内の特異 r-単体 $f: \sigma \to X$ に対し，Y 内の特異 r-単体 $\varphi \circ f: \sigma \to Y$ を対応させつことにより，R-準同型 $C_r(X, R) \longrightarrow C_r(Y, R)$ が得られる．この準同型写像から，$\varphi_*: H_r(X, R) \longrightarrow H_r(Y, R)$ が自然に誘導される.

代数多様体や代数的集合 X について特異ホモロジー群を考えるときは，ザリスキー位相ではなく，解析的位相によって X を位相空間と考えて，特異ホモロジー群を定義する．(ザリスキー位相で特異コホモロジーを考えると，ほとんどの高次ホモロジー群が消滅してしまい，有用な情報は得られない.)
上の命題より，X が n 次元代数的代数多様体，または，n 次元複素多様体のとき，$r < 0$ または $r > 2n$ のならば $H_r(X, R) = 0$ であり，さらに，X が射影代数多様体，または，コンパクト複素多様体ならば，$H_{2n}(X, R) \cong R$ である.

次の 2 つの定理の証明は簡単ではない．モース理論による証明は，[Mi]p.43 〜 46(定理 7.1 〜系 7.3) を参照せよ．なお，ホッジ理論を利用した Lefschetsz の定理の証明が [小林] 定理 7.29 にある.

● 初版 p266, 新装版 p.268. 定理 6.1.7 の後

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

X は n 次元非特異射影代数多様体，Y は X の r 次元閉部分多様体とする．ある $2r$-単体 $\sigma_1,\ldots,\sigma_k$ で，$Y=\overline{\sigma_1}\cup\cdots\cup\overline{\sigma_k}$, かつ $i\neq j$ のとき $\sigma_i^\circ\cap\sigma_j^\circ=\phi$ を満たすものが存在する．ここで，$\overline{\sigma}$ は σ の閉包，σ° は σ の内部である．Y は閉部分多様体で境界を持たないので，$\partial_{2r}(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)=0$ である．そこで，σ の $\mathrm{Im}\,\partial^K_{2r+1}$ を法とする同値類を $[\sigma]$ と書くことにすると，

$$[Y]=[\sigma_1]+\cdots+[\sigma_k]\in H_{2r}(K,R)\cong H_{2r}(X,R)$$

と考えることができる．もう少し一般に，$Y_1,\ldots,Y_r$ が X の r 次元閉部分多様体のとき，$a_i\in R$ を係数とする形式和

$$[Z]=\sum_{i=1}^{m}a_i[Y_i]\in H_{2r}(X,R)\cong H_{2r}(X,R)$$

$[Z]$ を Z が定める **(代数的)** r**-サイクル**という．

X が n コンパクト可微分多様体，Y が X の r 次元閉部分多様体のときも，上と同様に，$[Y]\in H_r(K,R)\cong H_r(X,R)$ と考えられる．命題 6.1.3 において，同型写像 $\varphi_n\colon H_n(X,R)\longrightarrow R$ を $\varphi_n([X])=1$ となるように定めることができる．この φ_n を**標準的同型写像**という．以後，$H_n(X,R)=R$ とみなすときは，この標準的同型写像を通して同一視する．$H_0(X,R)=R$ とみなすときも，1 点 P のホモロジー類 $[P]\in H_0(X,R)$ を $1\in R$ に対応させるものとする．

● 初版 p267, 新装版 p.269. 定義 6.1.8 項の 10 〜 11 行目

誤: 胞体 $\sigma=\varphi(B^r)$ には，$B^r\subset\mathbb{R}^r$ から定まる自然な向きを正の向きとして，向きを定めておく．また，$\dot{\sigma}$ にも，σ の向きから自然に向きを定めておく．

正: 胞体 $\sigma=\varphi(\overline{B^r})$ には，$B^r\subset\mathbb{R}^r$ から定まる自然な向きを正の向きとして，向きを定めておく．また，$\dot{\sigma}$ の境界の $r-1$ 次元の成分にも，σ の向きから自然に向きを定めておく．

● 初版 p267, 新装版 p.269. 定義 6.1.8 の 14 行目

旧: W^r とし，$|W^r|=\displaystyle\bigcup_{i=0}^{r}\bigcup_{\sigma\in W^i}\sigma^\circ$ とする．

新: W^r とする．

● 初版 p267, 新装版 p.269. 定義 6.1.8 の 17 行目

旧: (3) $\sigma\in W^r$ ならば $\dot{\sigma}\subset|W^{r-1}|$.

新: (3) $\sigma \in W^r$ ならば，ある $\tau_1,\ldots,\tau_k \in \displaystyle\bigcup_{i=0}^{r-1} W^i$ により，$\dot{\sigma} = \tau_1^\circ \cup \cdots \cup \tau_k^\circ$ と書ける．

(解説) CW 複体の通常の定義としては，古い版の弱い (広い) 条件が普通ですが，代数幾何で使う場合は，新しい (3) のもっと強い (狭い) 条件で考えるほうが簡明だと思います．例えば，自分で定理 6.1.9 を証明しようとするとき，新しい (3) の条件下で証明するほうが，証明がずっと簡単になります．

● 初版 p.269. 参考 6.1.13 の 3 行目 (新装版では修正済み)

誤: $\longrightarrow H_r(X,\,R) \longrightarrow \displaystyle\bigoplus_{p+q=r-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X,R),\ H_q(Y,R)) \longrightarrow 0$

正: $\longrightarrow H_r(X \times Y,\,R) \longrightarrow \displaystyle\bigoplus_{p+q=r-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(X,R),\ H_q(Y,R)) \longrightarrow 0$

● 初版 p.269 の最下行と p.270 の 3 行目, 新装版 p.271 の最下行と p272 の 3 行目. 第 6.1.8 項の 5, 8 行目 (2 ケ所)

誤: 順同型写像全体

正: 準同型写像全体

● 初版 p.270, 新装版 p.272. 定理 6.1.18(1).

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 6.1.18. (1) X は位相空間，K は $\mathbb{Z}$ を含む体であるとする．このとき，$f \in C^r = C^r(X,\,K)$ と $x \in C_r = C_r(X,\,K)$ に対して，$\langle f,\,x\rangle = f(x) \in K$ で定まる写像 $C^r \times C_r \to K$ から，誘導される 2 次形式

$$\varphi\colon H^r(X,\,K) \times H_r(X,\,K) \longrightarrow K$$

は非退化である．特に，$\dim_K H_r(X,\,K) = \dim_K H^r(X,\,K)$ である．

● 初版 p.271, 新装版 p.273. 定理 6.1.18 の直後.

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

$\varphi\colon X \to Y$ が位相空間の間の連続写像のとき，φ から誘導される R-準同型 $C_r(X,\,R) \longrightarrow C_r(Y,\,R)$ の双対写像として $C^r(Y,\,R) \longrightarrow C^r(X,\,R)$ がが得られる．この準同型写像から，$\varphi^*\colon H^r(Y,\,R) \longrightarrow H^r(X,\,R)$ が自然に誘導される．

● 初版 p.271, 新装版 p.273. 第 6.1.9 項.

第 6.1.9 項「カップ積」全体を以下の原稿と差し替えて下さい．記述を厳密にし，キャップ積の説明を追加しました．

[差し替え原稿]

6.1.9. カップ積

$\mathbb{R}^n$ 内の $(p+q)$-単体 $\sigma = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{p+q} \rangle$ に対して，p-単体 $\sigma' = \langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle$ と，q-単体 $\sigma'' = \langle \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_{p+q} \rangle$ を考える．

X は位相空間，$r = p+q$, $C_r = C_{p+q}(X, R)$ は特異複体，$C^r = C_r^{\vee}$ はその双対加群として得られるコホモロジー複体とする．C_r の元 $\varphi\colon \sigma \to X$ に対し，$\varphi' = \varphi|_{\sigma'}\colon \sigma' \to X$ で $\varphi' \in C_p$ を定め，$\varphi'' = \varphi|_{\sigma''}\colon \sigma'' \to X$ で $\varphi'' \in C_q$ を定める．そして，$f \in C^p$ と $g \in C^q$ に対し，

$$\langle f \cup g, \varphi \rangle = (f \cup g)(\varphi) = f(\varphi') \cdot g(\varphi'') = \langle f, \varphi' \rangle \cdot \langle g, \varphi'' \rangle \in R$$

によって，写像 $\cup\colon C^p \times C^q \longrightarrow C^{p+q}$ を定める．このとき，

$$\partial^{p+q}(f \cup g) = (\partial^p f) \cup g + (-1)^p f \cup (\partial^q g)$$

が成り立つ．したがって，この写像 $\cup$ から，

$$\cup\colon H^p(X, R) \times H^q(X, R) \longrightarrow H^{p+q}(X, R)$$

が誘導される．これを**カップ積** (cup product) という．

$H^*(X, R) = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{\infty} H^i(X, R)$ とおくと，$H^*(X, R)$ はカップ積 $\cup$ について (非可換) 環になる．

また，上のように $\varphi, \varphi', \varphi''$ をとり，$g \in C^q$ に対し，

$$g \cap \varphi = g(\varphi'')\varphi' \in C_p$$

と定める．この $\cap$ を線形に拡張することにより，準同型写像 $\cap\colon C^q \times C_{p+q} \longrightarrow C_p$ が得られる．この写像は，

$$\begin{aligned}\langle f \cup g, \varphi \rangle &= (f \cup g)(\varphi) = f(\varphi') \cdot g(\varphi'') = f(g \cap \varphi) \\ &= \langle f, g \cap \varphi \rangle \\ \partial^p(g \cap \varphi) &= (-1)^p \partial^q(g) \cap \varphi + g \cap \partial_{p+q}(\varphi)\end{aligned}$$

を満たす．よって，$\cap$ は準同型写像

$$\cap\colon H^q(X, R) \times H_{p+q}(X, R) \longrightarrow H_p(X, R)$$

を誘導する．これを**キャップ積** (cap product) という．

● 初版 p.271 〜 272, 新装版 p.273 〜 274. 第 6.1.10 項.

第 6.1.10 項「ポアンカレーの双対定理」全体を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

6.1.10. ポアンカレーの双対定理

定理 6.1.19. (**Poincaré の双対定理**) (1) 向きづけられた連結コンパクト n 次元可微分多様体 X に対し，

$$H^{n-r}(X, R) \cong H_r(X, R)$$

が成り立つ．この同型写像は，$g \in H^{n-r}(X, R)$ に対し，$[X] \in H_n(X, R)$ とのキャップ積 $g \cap [X] \in H_r(X, R)$ を対応させることによって得られる．この同型写像を**標準的同型写像**という．

(2) X は n 次元コンパクト複素多様体とする．このとき，$0 \leqq r \leqq 2n$ に対し，カップ積

$$\cup : H^r(X, \mathbb{Z})_{free} \times H^{2n-r}(X, \mathbb{Z})_{free} \longrightarrow H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

はユニモジュラーである．つまり，$x_1,\ldots, x_m$ を $H^r(X, \mathbb{Z})_{free}$ の基底，$y_1,\ldots, y_m$ を $H^{2n-r}(X, \mathbb{Z})_{free}$ の基底とするとき，$x_i \cup y_j$ を (i, j)-成分とする m 次正方行列の行列式の絶対値は 1 である．

X は向きづけられた連結コンパクト n 次元可微分多様体とし，ポアンカレーの双対定理によって与えられる標準的同型写像を

$$\mu_r : H_r(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n-r}(X, \mathbb{Z})$$

とする．また，$[X]$ を 1 に対応させて $H^n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ と考える．Y を X の p 次元部分多様体，Z を X の q 次元部分多様体とし，$p + q = n$ と仮定する．このとき，

$$(Y \cdot Z)_X = \mu_p(Y) \cup \mu_q(Z) \in H^n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

として，Y と Z の**交点数**を定義する．

今，$Y \cap Z = \{P_1,\ldots, P_m\}$ で，各点 P_i で Y と Z は横断的に交わると仮定する．点 P_i における Y の正の局所座標系 $(y_1,\ldots, y_p)$ と，Z の正の局所座標系 $(z_1,\ldots, z_q)$ を並べて得られる X の座標系 $(y_1,\ldots, y_p, z_1,\ldots, z_q)$ が正の座標系なら $I_{P_i}(Y, Z) = +1$，負の座標系なら $I_{P_i}(Y, Z) = -1$ と定めるとき，

$$(Y \cdot Z)_X = \sum_{i=1}^{m} I_{P_i}(Y, Z)$$

が成り立つ．

X が n 次元非特異射影代数多様体のとき，$Y \in H^{2r}(X, \mathbb{Z})$ がある代数的サイクル $[Z] \in H_{2n-2r}(X, \mathbb{Z})$ によって $Y = \mu_{2n-2r}([Z])$ と書けるとき，Y を Z が定め

るコホモロジー類という．また，Y は**代数的サイクル**という．そうでない $H^{2r}(X, \mathbb{Z})$ の元を**超越サイクル**という．やや混乱する記号ではあるが，$\mu_{2n-2r}([Z])$ を単に $[Z] \in H^{2r}(X, \mathbb{Z})$ と書く場合も多い．X 内の非特異とは限らない r 次元閉部分多様体 Y と $n-r$ 次元閉部分多様体 Z に対しても，上と同様にして交点数

$$(Y \cdot Z)_X = \mu_{2r}([Y]) \cup \mu_{2n-2r}([Z]) \in H^{2n}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

が定義できる．これが第 5 章で定義した交点数と一致することは，次の定理で保証される．

定理 6.1.20. X は n 次元非特異射影代数多様体，C は X 内の代数曲線，D は X の因子とする．また，$\pi\colon \tilde{C} \to C$ を C の正規化とする．このとき，

$$\mu_2([C]) \cup \mu_{2n-2}([D]) = \mu_{2n-2}([D]) \cup \mu_2([C]) = \deg \pi^* D|_C$$

が成り立つ．

● 初版 p.273 〜 274, 新装版 p.275 〜 276. 第 6.1.12 項.

第 6.1.12 項「チェック・ホモロジー群」全体を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

6.1.12. チェック・ホモロジー群

双対的に，チェック・ホモロジー群が定義できるが，繁を避けて，強い仮定のもとに説明する．

X は向きづけられたコンパクト n 次元可微分多様体で，有限単体分割 K を持つとする．K に属する n-単体 $\sigma \in K^n$ に対し，σ を含む十分小さい開集合 U_σ を以下の条件を満たすようにとる．

(1) U_σ は $\mathbb{R}^n$ と同相である．

(2) 任意の空でない部分集合 $J \subset K^n$ に対し，$U_J = \bigcap_{\sigma \in J} U_\sigma$ は $\mathbb{R}^n$ と同相であるか空集合であるかのいずれかである．

(3) 一般に，$\tau \in K$ に対し τ を面として含む K^n の元全体の集合を $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in K^n$ とし，$U_\tau = U_{\sigma_1} \cap \cdots \cap U_{\sigma_k}$ とする．すると，$\tau_1, \tau_2 \in K$ で $\overline{\tau_1} \cap \overline{\tau_2} = \phi$ のとき $U_{\tau_1} \cap U_{\tau_2} = \phi$ である．

$\mathfrak{U} = \{U_\sigma\}_{\sigma \in K^n}$ は X の開被覆である．

$$\mathfrak{K}_r = \left\{ J \subset K^n \;\middle|\; \#J = n - r + 1 \text{ かつ } U_J \neq \phi \right\}$$
$$C_r(\mathfrak{U}, R) = \bigoplus_{J \in \mathfrak{K}_r} R \cdot U_J$$

とおく．ここで，$R \cdot U_J \cong R$ は U_J を基底とするランク 1 の自由 R-加群である．定義より，

$$C_r(\mathfrak{U},\, R) \cong C^{n-r}(\mathfrak{U},\, R)$$

である．そこで，$d^{n-r}\colon C^{n-r} \to C^{n-r+1}$ を境界作用素 $d_r\colon C_r \to C_{r-1}$ であると定義する．この複体 $\{C_r,\, d_r\}$ からチェック・ホモロジー群 $H_r(\mathfrak{U},\, R)$ が定義できるが，定義からこれは $H^{n-r}(\mathfrak{U},\, R)$ と同型である．ただし，開被覆 $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{U}$ の細分のとき，自然な写像は，

$$H_r(\mathfrak{V},\, R) \longrightarrow H_r(\mathfrak{U},\, R)$$

という方向に走り，コホモロジーと反対向きになる．また，$d_r\colon C_r(\mathfrak{U},\, R) \longrightarrow C_{r+1}(\mathfrak{U},\, R)$ は本質的には単体的複体の境界作用素 $\partial_r^K\colon C_r(K,\, R) \longrightarrow C_{r+1}(K,\, R)$ と同じような写像であるから，

$$H^r(\mathfrak{U},\, R) \cong H^r(K,\, R) = H^r(X,\, R)$$

となる．以上とポアンカレーの双対定理より，次の定理を得る．

命題 6.1.21a. 以上の仮定のもと，以下が成立する．

$$H_r(\mathfrak{U},\, R) \cong H^{n-r}(\mathfrak{U},\, R)$$
$$H_r(\mathfrak{U},\, R) \cong H_r(K,\, R) \cong H_r(X,\, R)$$
$$H^r(\mathfrak{U},\, R) \cong H^r(X,\, R)$$

上の定理から，X が非特異射影代数多様体のとき，解析的位相についてチェック・コホモロジー群やチェック・ホモロジー群を考えれば，それは，特異単体や単体分割や胞体分割を利用して定義したコホモロジー群やホモロジー群と一致する．(ザリスキー位相で考えてはいけない.)

● 初版 p.276, 新装版 p.278. 定義 6.2.1 の中の層化の定義の 4 〜 8 行目

旧: で，次の条件 (1), (2) を満たすもの全体の集合を $\mathfrak{F}^+(U)$ とする．

(1) 任意の点 $Q \in U$ に対し，$s(Q) \in \mathfrak{F}_Q \subset \bigcup_{P \in U} \mathfrak{F}_P$.

(2) 任意の点 $Q \in U$ に対し，ある開近傍 $Q \in W \subset U$ と元 $t \in \mathfrak{F}(W)$ が存在し，任意の点 $R \in W$ に対し，$\varphi_{WR}\colon \mathfrak{F}(W) \to \mathfrak{F}_R$ を自然な写像とするとき，$\varphi_{WR}(t) = s(R)$ が成り立つ．

新: で，次の条件 (5), (6) を満たすもの全体の集合を $\mathfrak{F}^+(U)$ とする．

(5) 任意の点 $Q \in U$ に対し，$s(Q) \in \mathfrak{F}_Q \subset \bigcup_{P \in U} \mathfrak{F}_P$.

(6) 任意の点 $Q \in U$ に対し，ある開近傍 $Q \in W \subset U$ と元 $t \in \mathcal{F}(W)$ が存在し，任意の点 $P' \in W$ に対し，$\rho_{WP'}\colon \mathcal{F}(W) \to \mathcal{F}_{P'}$ を自然な写像とするとき，$\rho_{WP'}(t) = s(P')$ が成り立つ．

● 初版 p.276, 新装版 p.278. 下から 3 〜 2 行目

誤: ただし，$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ が $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層の場合には逆も成立する．

正: ただし，命題 4.1.18 で証明したように，$\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ が連接な $\mathcal{O}_X$-加群の簡易層の場合には逆も成立する．

● 初版 p.278, 新装版 p.280. 定義 6.2.3 の最後の 2 行

旧: また，テンソル積 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ は，

$$\big(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}\big)(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

で定まる前層の層化として定義する．

新: また，テンソル積 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ は，

$$\mathcal{T}(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

で定まる前層 $\mathcal{T}$ の層化として定義する．

● 初版 p.278, 新装版 p.280. 定義 6.2.4 〜定義 6.2.6

以下の原稿と差し替えて下さい．説明不十分な点がいろいろありました．

[差し替え原稿]

定義 6.2.4a. X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し，

$$\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$$

の閉包を $\operatorname{Supp}\mathcal{F}$ と書き，$\mathcal{F}$ の**台**とか**サポート**という．

$Y = \operatorname{Supp}\mathcal{F}$ とおくとき，$\mathcal{F}$ は以下のようにして Y 上の層とみなすことができる．Y の勝手な空でない開集合 U をとると，$U = Y \cap W_1 = Y \cap W_2$ を満たすような X の開集合 W_1, W_2 が存在するが，層化の定義から容易に証明できるように，$\mathcal{F}(W_1) = \mathcal{F}(W_2)$ が成り立つ．そこで，$\mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}(W_1)$ によって Y 上の層 $\mathcal{F}'$ を定義することができる．$\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ と同一視することによって，$\mathcal{F}$ を Y 上の層と考える．同様に，$Y \subset Z \subset X$ を満たす集合 Z に対し，$\mathcal{F}$ は Z 上の層とみなすことができる．

定義 6.2.5a. X の何個かの閉部分多様体の和集合 Y に対し，$Y = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ となるような $\mathcal{O}_X$ の被約なイデアル $\mathcal{I}$ が一意的に存在する．そこで，

$$\mathcal{F}|_Y = \mathcal{F}/\mathcal{I}\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$$

と定義し，$\mathcal{F}$ の Y への**制限**という．つまり，Y の開集合 U はある X の開集合 W によって，$U = W \cap Y$ と書ける．そこで，前層 $\mathcal{F}'$ を

$$\mathcal{F}'(W) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(W)$$

によって定義し，$\mathcal{F}'$ を層化して得られる層を $\mathcal{F}|_Y$ と定義する．

なお，$Y \supset \operatorname{Supp}\mathcal{F}$ の場合には，$\mathcal{F}|_Y$ は $\mathcal{F}$ を Y 上の層とみなしたものと一致することに注意する．

定義 6.2.6a. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は環付き空間で，連続写像 $\varphi\colon X \to Y$ が与えられているとする．さらに，Y の各開集合 U に対し，環の準同型写像 $\varphi_U^*\colon \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ が与えられていて，$\varphi^* = \{\varphi_U^*\}$ が $\mathcal{O}_Y$-加群としての準同型写像になっているとする．このとき，φ と φ^* の組を**環付き空間の写像**といい，通常，単に $\varphi\colon X \to Y$ と書く．

φ^* を通して $\mathcal{O}_X$ を $\mathcal{O}_Y$-加群と考える．

$\mathcal{F}$ が X 上の層のとき，Y の開集合 U に対して，$(\varphi_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ によって，Y 上の層 $\varphi_*\mathcal{F}$ を定める．$\varphi_*\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の**順像** (direct image) という．$\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$-加群ならば，$\varphi_*\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}_Y$-加群になる．

特に，Z が X の閉集合で，$j\colon Z \to X$ が包含写像のとき，Z 上の層 $\mathcal{H}$ を X 上の層 $j_*\mathcal{H}$ と同一視して，$\mathcal{H}$ を X 上の層と考えることがしばしばある．

$\mathcal{G}$ が $\mathcal{O}_Y$-加群のとき，X の開集合 U に対して，$W \supset \varphi(U)$ を満たす Y の開集合全体の集合を包含関係によって帰納系とみなし帰納的極限 $\varinjlim \mathcal{G}(W)$ を U に対応させる前層を考え，その層化を $\varphi^{-1}\mathcal{G}$ と書く．そして，

$$\varphi^*\mathcal{G} = \mathcal{O}_X \otimes_{\varphi^{-1}\mathcal{O}_Y} \varphi^{-1}\mathcal{G}$$

として，$\mathcal{O}_X$-加群 $\varphi^*\mathcal{G}$ を定義する．$\varphi^*\mathcal{G}$ を φ による $\mathcal{G}$ の**引き戻し** (pull back) という．

X, Y が代数多様体で，$\varphi\colon X \to Y$ が正則写像であり．アフィン開集合 $U \subset X$, $W \subset Y$ が $\varphi(U) = W \cap \varphi(X)$ を満たすとき，

$$(\varphi^*\mathcal{G})(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{G}(W) = \mathcal{O}_X(U) \cdot \mathcal{G}(W) \qquad \text{(係数拡大)}$$

が成り立つことに注意する．実際，$W' \subset W$ もアフィン開集合で $\varphi(U) = W' \cap \varphi(X)$ を満たすとき，制限写像 $\mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{G}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W')} \mathcal{G}(W')$ は同型写像になるので，これが帰納的極限を与える．

命題 6.2.6b. (射影公式) $\varphi\colon X \to Y$ は環付き空間の写像，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{O}_X$-加群，$\mathcal{G}$ はランク有限の局所自由 $\mathcal{O}_Y$-加群とする．すると以下が成り立つ．

$$\varphi_*\bigl(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{G}\bigr) \cong (\varphi_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}$$

証明. $W \subset Y$ を十分小さい開集合とし，$U = f^{-1}(W) \subset X$ とする．$\bigl((\varphi_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}\bigr)(W) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{G}(W)$ の元 $f \otimes g$ に対し，$f \otimes \varphi^* g \in \bigl(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{G}\bigr)(U) = \bigl(\varphi_*\bigl(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{G}\bigr)\bigr)(W)$ を対応させる写像を $\psi\colon (\varphi_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G} \longrightarrow \varphi_*\bigl(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \varphi^*\mathcal{G}\bigr)$ とする．十分小さい各開集合 W 上で ψ_W が同型であることを示せばよい．W が十分小さければ $\mathcal{G}|_W$ は自由 $\mathcal{O}_W$-加群になるので，$\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y$ の場合に証明すれば十分であるが，その場合，結論は自明である． □

命題 6.2.6c. X, Y は非特異射影多様体，$f\colon X \to Y$ は全射正則写像，D は Y 上の因子とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $f^*\mathcal{O}_Y(D) \cong \mathcal{O}_X(f^*D)$

(2) もし，$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ が成り立つならば，$f_*\bigl(\mathcal{O}_X(f^*D)\bigr) \cong \mathcal{O}_Y(D)$ である．

(3) $\mathcal{L}$ が可逆 $\mathcal{O}_X$-加群で，$f_*\mathcal{L}$ が可逆 $\mathcal{O}_Y$-加群であるならば，自然な単射

$$\psi\colon f^*(f_*\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}$$

が存在する．

証明. (1)　$U \subset X, W \subset Y$ をザリスキー開集合とし，$f(U) = W$ と仮定する．$h \in (\mathcal{O}_Y(D))(W)$ に対して $f^*h = h \circ f \in \mathcal{O}_X(f^*D)(U)$ であることは，f^*D の定義からすぐわかる．よって，自然な写像 $\varphi\colon f^*\mathcal{O}_Y(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^*D)$ が定義できる．$h \circ f$ が定数関数 0 ならば $h = 0$ であるので，φ は単射である．

$f^*\mathcal{O}_Y(D)$ は可逆 $\mathcal{O}_X$-加群なので，練習問題 4.2 より，X 上のある因子 E により $f^*\mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X(E)$ と書ける．φ の構成法から，W 上で $D = \mathrm{div}(h)$ であれば $E = \mathrm{div}(1 \otimes h) = \mathrm{div}(f^*h)$ である．よって，$E = f^*D$ である．

(2)　前命題より，ランク有限の局所自由 $\mathcal{O}_Y$-加群 $\mathcal{G}$ に対し，$f_*(f^*\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}$ が成り立つ．$\mathcal{G} = \mathcal{O}_Y(D)$ とし (1) を使うと結論を得る．

(3)　$U \subset X, W \subset Y$ を十分小さい開集合とし，$f(U) = W$ が成り立つと仮定する．

$$h \in (f^*f_*\mathcal{L})(U) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} (f_*\mathcal{L})(W) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(W)} \mathcal{L}(f^{-1}(W))$$

をとる．$f^{-1}(W) \supset U$ なので，$h \in \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(U)$ とみなせる．よって，自然な写像 $\psi\colon f^*f_*\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ が存在する．$f_*\mathcal{L}$ が可逆 $\mathcal{O}_Y$-加群だから，$f^*f_*\mathcal{L}$ は可逆 $\mathcal{O}_X$-加群である．構成法から ψ はゼロ写像でないので，単射である． □

● 初版 p.278 〜 279, 新装版 p.280 〜 281. 第 6.2.2 項の最初の 8 行

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

X は位相空間, $\mathfrak{F}$ は X 上の加群の層とする. $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を X の開被覆とし, $K \subset I$ に対し, $U_K = \bigcap_{i\in K} U_i$ とする. 一般には, $\mathfrak{U}$ が無限開被覆の場合を考える必要があるが, 本書では性質のよい X しか扱わないので, $\mathfrak{U}$ が有限開被覆の場合だけを扱う.

$$\mathfrak{I}_r = \bigl\{K \subset I \bigm| \#K = r+1 \text{ かつ } U_K \neq \phi\bigr\}$$
$$C^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \bigoplus_{K\in\mathfrak{I}_r} \mathfrak{F}(U_K)$$

とおく. $d^r\colon C^r \to C^{r+1}$ は, 第 3.3.3 項で定義した $d^r\colon C^r \to C^{r+1}$ と同様に定義する. ただし, うるさく言うと,

$$g_L = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k f_{L_k} \in \mathfrak{F}(U_L) \subset \mathfrak{M}$$

と書かれている行は,

$$g_L = \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^k \rho_{U_{L_k}U_L}(f_{L_k}) \in \mathfrak{F}(U_L)$$

と書き直す必要があるが, 写像 $\rho_{U_{L_k}U_L}$ を書くのを省略しても, 誤解を生じる可能性はないので, 以下でも省略する.

$$H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^{r-1}$$

によって, 層 $\mathfrak{F}$ を係数とするチェック・コホモロジー群を定義する.

● 初版 p.279 〜 280, 新装版 p.281 〜 282. 定理 6.2.7

定理 6.2.7 とその証明を下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定理 6.2.7. X は位相空間, $\mathfrak{L}$ は X 上の加群の層, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ は X の開被覆で, 任意の空でない部分集合 $J \subset I$ と $r \geqq 1$ に対し, $H^r(U_J, \mathfrak{L}) = 0$ (ただし, $U_J = \bigcap_{i\in J} U_i$) を満たすとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{L}) \cong H^r(X, \mathfrak{L})$.

(2) $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ は X 上の加群の層で, $0 \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \to 0$ は定義 4.1.17 の意味での完全系列であると仮定する. すると, 加群の完全系列

$$0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{L}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) \longrightarrow H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{N})$$

$$\longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{L}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{N})$$
$$\longrightarrow H^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{L}) \longrightarrow H^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) \longrightarrow H^2(\mathfrak{U}, \mathfrak{N}) \longrightarrow \cdots$$

が存在する．

証明．(2) を示す．仮定から，各点 $P \in U_J$ に対し，P の開近傍 $W_P \subset U_J$ で $0 \to \mathfrak{L}(W_P) \to \mathfrak{M}(W_P) \to \mathfrak{N}(W_P) \to 0$ が完全系列になるようなものが存在する．$\mathfrak{W} = \{W_P \mid P \in U_J\}$ は U_J の開被覆である．例えば [小平 1] 定理 3.4 に書いてあるように，$H^1(\mathfrak{W}, \mathfrak{L}) \subset H^1(U_J, \mathfrak{L}) = 0$ である．U_J, $\mathfrak{W}$ を定理 4.1.19 の証明の中の X, $\mathfrak{U}$ として適用すると，定理 4.1.19 の証明はそのまま働くので，$0 \to \mathfrak{L}(U_J) \to \mathfrak{M}(U_J) \to \mathfrak{N}(U_J) \to H^1(\mathfrak{W}, \mathfrak{L}) = 0$ は完全系列であることがわかる．すると，X と $\mathfrak{U}$ に対して，定理 4.1.9 の証明がそのまま働くので，(2) の結論が得られる．

(1) は，後の定理 6.2.24 で証明する． □

● 初版 p.280, 新装版 p.282. 定義 6.2.8 〜注意 6.2.9

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 6.2.8. $\mathfrak{F}$ が位相空間 X 上の層で，U が X の開集合のとき，U の開集合 W は X の開集合である．このとき，

$$\mathfrak{F}|_U(W) = \mathfrak{F}(W)$$

として，U 上の層 $\mathfrak{F}|_U$ が定まる．$\mathfrak{F}|_U$ を $\mathfrak{F}$ の U への**制限**という．

$\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{O}_X$-加群の場合には，$\mathfrak{F}|_U$ は $\mathfrak{O}_U$-加群になる．

U が X の開集合でも閉集合でも，$j: U \to X$ を包含写像とするとき，$\mathfrak{F}|_U = j^*\mathfrak{F}$ であることに注意する．

定義 6.2.9a. X は位相空間, U は X の開集合，$j: U \to X$ は包含写像とする．

(1) $\mathfrak{F}$ は U 上の層とする．X 上の前層 $\mathfrak{G}$ を，X の開集合 W が $W \subset U$ を満たすときは $\mathfrak{G}(W) = \mathfrak{F}(W)$, そうでないときは $\mathfrak{G}(W) = 0$ として定義する．前層 $\mathfrak{G}$ の層化を $j_!\mathfrak{F}$ と書き，**U の外では 0 として $\mathfrak{F}$ を X に延長した層**という．$j_!\mathfrak{F}$ は X 上の層である．

(2) $\mathfrak{F}$ は X 上の層とする．$\mathfrak{F}_U = j_!(\mathfrak{F}|_U)$ とおく．$\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{O}_X$-加群ならば $\mathfrak{F}_U$ も $\mathfrak{O}_X$-加群である．また，ストークについては，$P \in U$ ならば $(\mathfrak{F}_U)_P = \mathfrak{F}_P$ であり，$P \in X - U$ ならば $(\mathfrak{F}_U)_P = 0$ である．

V は U の開集合であるとする．X の開集合 W に対し，$\varphi_W\colon \mathfrak{F}_V(W) \to \mathfrak{F}_U(W)$ を以下のように定義する．

(i) もし $W \subset V$ ならば φ_W は恒等写像.

(ii) そうでないときは φ_W はゼロ写像.

$\{\varphi_W\}$ から $\mathfrak{O}_X$-加群の準同型 $\varphi\colon \mathfrak{F}_V \to \mathfrak{F}_U$ が定まり，φ は単射になる．

● 初版 p.280 〜 281, 新装版 p.282 〜 283. 定義 6.2.11

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 6.2.11. X はアフィン代数多様体，$\mathfrak{O}_X$ はその構造層，$R = \mathfrak{O}_X(X)$ は座標環とする．R-加群 M が与えられたとき，$\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{F}$ を，X の開集合 U に対し

$$\mathfrak{F}'(U) = M \otimes_R \mathfrak{O}_X(U)$$

で定まる前層 $\mathfrak{F}'$ の層化として定義する．この $\mathfrak{F}$ を M **から定まる層**といい，$\mathfrak{F} = \widetilde{M}$ などと書く．

● 初版 p.281, 新装版 p.283. 命題 6.2.13 の直前

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

例 6.2.12b. 定義 6.2.9a において $U \subsetneqq X$ のとき，$\mathfrak{F}$ が連接 $\mathfrak{O}_X$-加群であっても，$\mathfrak{F}_U = j_!(\mathfrak{F}|_U)$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群ではない．

命題 6.2.12c. X は代数多様体，$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{O}_X} \mathfrak{G}$, $\mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ も連接 $\mathfrak{O}_X$-加群である．

(2) $\varphi\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ が $\mathfrak{O}_X$-準同型ならば，$\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Coker}\varphi$ も連接 $\mathfrak{O}_X$-加群である．

命題 6.2.12d. $(X, \mathfrak{O}_X)$ は環付き空間，$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ は $\mathfrak{O}_X$-加群の完全系列で，$\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ は局所自由 $\mathfrak{O}_X$-加群であるとする．すると，$\mathfrak{F}$ も局所自由 $\mathfrak{O}_X$-加群で，$\operatorname{rank}\mathfrak{F} + \operatorname{rank}\mathfrak{H} = \operatorname{rank}\mathfrak{G}$ が成り立つ．

● 初版 p.281, 新装版 p.283. 定義 6.2.13 の末尾

以下の文を追加して下さい．

また，$H^r(\operatorname{Supp} D, \mathfrak{F}|_D)$ を単に $H^r(D, \mathfrak{F}|_D)$ とか $H^r(D, \mathfrak{F})$ と書く．

● 初版 p.282 〜 283, 新装版 p.284 〜 285. 定理 6.2.19

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 6.2.19. (1)　任意の $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ は移入的分解を持つ．

(2)　$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ は $\mathcal{O}_X$-加群の完全系列，

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_F} \mathcal{I}_F^0 \xrightarrow{\delta_F^0} \mathcal{I}_F^1 \xrightarrow{\delta_F^1} \mathcal{I}_F^2 \xrightarrow{\delta_F^2} \cdots$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\varepsilon_H} \mathcal{I}_H^0 \xrightarrow{\delta_H^0} \mathcal{I}_H^1 \xrightarrow{\delta_H^1} \mathcal{I}_H^2 \xrightarrow{\delta_H^2} \cdots$$

はそれぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{H}$ の任意の移入的分解とする．このとき，$\mathcal{I}_G^n = \mathcal{I}_F^n \oplus \mathcal{I}_H^n$ とおけば，次のような可換図式が存在し，$\mathcal{I}_G^*$ が $\mathcal{G}$ の移入的分解を与える．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varepsilon_F\downarrow & & \downarrow\varepsilon_G & & \downarrow\varepsilon_H & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_F^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_G^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_H^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta_F^0\downarrow & & \downarrow\delta_G^0 & & \downarrow\delta_H^0 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_F^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_G^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}_H^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta_F^1\downarrow & & \downarrow\delta_G^1 & & \downarrow\delta_H^1 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_F^2 & \longrightarrow & \mathcal{I}_G^2 & \longrightarrow & \mathcal{I}_H^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta_F^2\downarrow & & \downarrow\delta_G^2 & & \downarrow\delta_H^2 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

ここで，縦の 3 本の系列は移入的分解であり，横の系列はすべて完全系列である．この可換図式を，$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ の**移入的分解**という．

証明. (1)　$\varepsilon: \mathcal{F} \to \mathcal{I}^0$ は定理 6.2.16 のように構成する．$\operatorname{Coker}\varepsilon$ を含む移入的加群を $\mathcal{I}^1$ とし，この包含写像を延長して $\delta^0: \mathcal{I}^0 \to \mathcal{I}^1$ を作る．以下同様，$\operatorname{Coker}\delta^i$ を含む移入的加群を $\mathcal{I}^{i+1}$ とし，この包含写像を延長して $\delta^i: \mathcal{I}^i \to \mathcal{I}^{i+1}$ を作ればよい．

(2)　$\mathcal{I}_F^0$ は移入的だから，ある $h: \mathcal{G} \to \mathcal{I}_G^F$ が存在し，$\varepsilon_F = h \circ f$ を満たす．そこで，$\varepsilon_G = h \oplus (\varepsilon_H \circ g) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}_G^0 = \mathcal{I}_F^0 \oplus \mathcal{I}_H^0$ が定義でき，下の図式を可換にする．蛇の補題より，ε_G は単射である．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} & \xrightarrow{g} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varepsilon_F\downarrow & & \downarrow\varepsilon_G & & \downarrow\varepsilon_H & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_F^0 & \xrightarrow{F^0} & \mathcal{I}_G^0 & \xrightarrow{G^0} & \mathcal{I}_H^0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

以下同様に，$0 \to \mathfrak{I}_F^n \to \mathfrak{I}_G^n \to \mathfrak{I}_H^n \to 0$ まで構成できたとき，$\operatorname{Coker}\delta_F^{n-1}$, $\operatorname{Coker}\delta_G^{n-1}$, $\operatorname{Coker}\delta_H^{n-1}$ (ただし，$\delta_F^{-1} = \varepsilon_F$ 等) を $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ とし，上で ε_G を構成したように δ_G^{n+1} を構成すれば，$\mathfrak{I}^{n+1}$ の行までの可換性が得られる． □

● 初版 p.283 ～ 284, 新装版 p.285 ～ 286. 定理 6.2.19 の証明の後の説明

定理 6.2.19 のあとの説明の「なお，上の (2) から得られる可換図式」という行から，次のページの，6.2.5 脆弱層の直前までの説明は，後の定理 6.3.12 と重複しているので削除して下さい．

● 初版 p.284 ～ 285, 新装版 p.286 ～ 287. 命題 6.2.21 ～命題 6.2.22

命題 6.2.21 ～命題 6.2.22 の部分を下記の原稿と差し替えて下さい．両方の命題に証明を付けました．

[差し替え原稿]

命題 6.2.21. $(X, \mathfrak{O}_X)$ は環付き空間，$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{O}_X$-加群とする．もし，$\mathfrak{F}$ が移入的ならば，$\mathfrak{F}$ は脆弱である．

証明. $j\colon U \to X$ を包含写像とする．$x \in \mathfrak{F}(U)$ をとる．$j_!\mathfrak{O}_U$ の単位元 1 に対して x を対応させることにより，$\mathfrak{O}_X$-加群の準同型 $f\colon j_!\mathfrak{O}_U \longrightarrow \mathfrak{F}$ が定まる．$0 \longrightarrow j_!\mathfrak{O}_U \xrightarrow{\iota} \mathfrak{O}_X$ は完全系列で $\mathfrak{F}$ は移入的だから，$\mathfrak{O}_X$-加群の準同型 $g\colon \mathfrak{O}_X \longrightarrow \mathfrak{F}$ で，$g \circ \iota = f$ を満たすものが存在する．$g_X\colon \mathfrak{O}_X(X) \longrightarrow \mathfrak{F}(X)$ の 1 の像を $y = g_X(1) \in \mathfrak{F}(X)$ とおけば，$\rho_{XU}(y) = x$ である．よって，$\mathfrak{F}$ は脆弱である． □

命題 6.2.22. $\mathfrak{U}$ は位相空間 X の開被覆，$\mathfrak{F}$ は X 上の脆弱層とする．すると，任意の $r \geqq 1$ に対し，次が成り立つ．

$$H^r(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$$

証明. r に関する帰納法で証明する．X は連結と仮定してよい．第 3.3.3 項の記号を用いる．後の説明 (定理 6.2.30a など) の都合上，$T = \mathfrak{F}$, $T(U) = \mathfrak{F}(U)$, $T_Z = \mathfrak{F}|_Z$ などと記号を変更する．以下の証明では，開集合 $W \subset U \subset X$ に対し $\rho_{UW}\colon T(U) \to T(W)$ が全射である，という性質だけが使われる．

$I = \{0, 1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ としておく．また，$\mathfrak{U}' = \{U_0, \ldots, U_{n-1}\}$, $Y = U_0 \cup \cdots \cup U_{n-1}$, $I' = I - \{n\}$,

$$\mathfrak{I}'_r = \{K \subset I' \mid \#K = r+1\}$$

とおく．

$r=1$ の場合を考える．$n=0$ なら $H^1=0$ だから，$n \geqq 1$ とし，n に関する帰納法で，$H^1(\mathfrak{U}', T_Y)=0$ と仮定する．$\mathbf{g}=(g_{ij} \mid 0 \leqq i < j \leqq n) \in Z^1(\mathfrak{U}, T)$ をとる．$\mathbf{g}'=(g_{ij} \mid 0 \leqq i < j < n) \in Z^1(\mathfrak{U}', T_Y)$ である．n についての帰納法の仮定から，ある $\mathbf{f}'=(f_i \mid 0 \leqq i < n) \in C^0(\mathfrak{U}, T_Y)$ $(f_i \in T_Y(U_i)=T(U_i))$ が存在して，$d^0(\mathbf{f}')=\mathbf{g}'$ を満たす．$\mathfrak{F}$ は軟弱層だから，ある $f_n \in \mathfrak{F}(U_n)=T(U_n)$ が存在して，

$$\rho_{U_n U_{0n}}(f_n)=g_{0n}+\rho_{U_0 U_{0n}}(f_0) \in T(U_0 \cap U_n)$$

を満たす．例えば $1 \leqq i < j < n$ のとき，

$$\begin{aligned}\rho_{U_{in}U_{ijn}}(g_{in}) &= \rho_{U_{ij}U_{ijn}}(g_{ij})+\rho_{U_{jn}U_{ijn}}(g_{jn}) \\ &= \bigl(\rho_{U_j U_{ijn}}(f_j)-\rho_{U_i U_{ijn}}(f_i)\bigr)+\bigl(\rho_{U_n U_{ijn}}(f_n)-\rho_{U_j U_{ijn}}(f_j)\bigr) \\ &= \rho_{U_n U_{ijn}}(f_n)-\rho_{U_i U_{ijn}}(f_i)\end{aligned}$$

であり，$1 \leqq j < i < n$ のときも同様な等式が証明できる．よって，$g_{in}=\rho_{U_n U_{in}}(f_n)-\rho_{U_i U_{in}}(f_i)$ が成り立つ．したがって，$\mathbf{f}=(f_i \mid 0 \leqq i \leqq n)$ とおけば，$d^0(\mathbf{f})=\mathbf{g}$ であり，$H^1(\mathfrak{U}, T)=0$ となる．

$r \geqq 2$ の場合を考える．$r=1$ の場合と同様に，n についての帰納法も使う．$\mathbf{f}=(f_{i_0\cdots i_r}) \in Z^r(\mathfrak{U}, T)$ をとる．$\mathbf{f}'=(f_{i_0\cdots i_r} \mid i_r < m) \in Z^r(\mathfrak{U}', T_Y)$ とおけば，n に関する帰納法の仮定から $H^r(\mathfrak{U}', \mathcal{G}|_Y)=0$ なので，ある $\mathbf{g}'=(g_{i_0}\cdots g_{i_{r-1}}) \in C^r(\mathfrak{U}', T_Y)$ が存在して，$d^{r-1}(\mathbf{g}')=\mathbf{f}'$ を満たす．

$L=\{i_0<\cdots<i_{r-1}<n\} \in \mathfrak{I}_r$ をとり，$L'=\{i_0<\cdots<i_{r-1}\} \in \mathfrak{I}_{r-1}$ とおく．また，$W_i=U_i \cap U_n$, $\mathfrak{W}=\{W_0,\ldots, W_{n-1}$ とおく．$h_{L'}=g_L+(-1)^{r-1}\rho_{U_{L'}U_L}(f_{L'}) \in T(U_L)$ とし，$\mathbf{h}=(h_{L'}) \in C^{r-1}(\mathfrak{W}, T_{U_n})$ を考える．$\mathbf{h} \in Z^{r-1}(\mathfrak{W}, T_{U_n})$ であることは容易に証明できる．帰納法の仮定から，$H^{r-1}(\mathfrak{W}, T_{U_n})=0$ であるので，ある $\mathbf{e} \in C^{r-2}(\mathfrak{W}, T_{U_n})$ が存在して，$\mathbf{h}=d^{r-2}(\mathbf{e})$ と書ける．$K=\{i_0<\cdots<i_{r-2}<n\} \in \mathfrak{I}_{r-1}$ に対し，$K'=\{i_0<\cdots<i_{r-2}\} \in \mathfrak{I}'_{r-2}$ とする．$f_K=\rho_{W_{K'}W_K}(e_{K'}) \in T_{U_n}(W_K)=T(U_K)$ とおき，$\mathbf{f}=(f_K \mid f_K \in \mathfrak{I}_{r-1}) \in C^r(\mathfrak{U}, T)$ とおけば，$d^{r-1}(\mathbf{f})=\mathbf{g}$ となることは，容易に確認できる．

なお，$\mathfrak{U}$ が無限被覆の場合には，帰納法のかわりに，ツォルンの補題を使えばよい． □

● 初版 p.285, 新装版 p.287. 定義 6.2.23 の 1 行目

誤: 各 $r \leqq 0$ に対し

正: 各 $r \geqq 0$ に対し

● 初版 p.285 〜 286, 新装版 p.287 〜 288. 定理 6.2.24 の証明

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. まず，$H^r(U_J, \mathfrak{F}) = 0$ $(r \geqq 1)$ という仮定をしないで，代わりに，各 U_J に対して

$$0 \xrightarrow{\delta_J^{-1}} \mathfrak{I}^0(U_J) \xrightarrow{\delta_J^0} \mathfrak{I}^1(U_J) \xrightarrow{\delta_J^1} \mathfrak{I}^2(U_J) \xrightarrow{\delta_J^2} \cdots \tag{$*$}$$

は完全系列である，と仮定して定理を証明する．

$$C^{p,q} = C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}^p) = \bigoplus_{\#J=q+1} \mathfrak{I}^p(U_J)$$

とおくと，自然に $\delta_1^{p,q}\colon C^{p,q} \longrightarrow C^{p+1,q}$, $\delta_2^{p,q}\colon C^{p,q} \longrightarrow C^{p,q+1}$ が定義でき，2 重複体になる．

この 2 重複体から構成されるスペクトル系列 $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．$\mathfrak{I}^p$ は脆弱だから，$q \geqq 1$ に対し，$E_1^{p,q} = H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{I}^p) = 0$ である．よって，$E_2^{p,q} = 0$ である．定理 6.3.3(4) より，$\operatorname{Ker}\delta^p/\operatorname{Im}\delta^{p-1} = E_2^{p,0} \cong E^p$ である．

次に，$E_2^{q,p} = H_2^q(H_1^p(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．$E_0^{q,p} = C^{p,q}$ で，$(*)$ が完全系列だから，任意の $q \geqq 0$ に対して，$E_0^{q,0} \to E_0^{q,1} \to E_0^{q,2} \to \cdots$ は完全系列である．よって，$p \geqq 1$ のとき，$E_1^{q,p} = 0$, $E_2^{p,q} = 0$ である．定理 6.3.3(4) より，$H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = E_2^{q,0} \cong E^q$ である．

したがって，$\operatorname{Ker}\delta^p/\operatorname{Im}\delta^{p-1} \cong E^p \cong H^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ となる．

さて，上で証明されたことを $X = U_J$ として適用すると，チェック・コホモロジー群 $H^r(U_J, \mathfrak{F}) = 0$ $(r \geqq 1)$ という条件から，$(*)$ が完全系列であることが導かれる．よって，定理が証明された． □

● 初版 p.286, 新装版 p.288. 系 6.2.25 の 2 行目

旧: (6.1) の脆弱分解を持つとする．

新: $\delta^r\colon \mathfrak{I}^r(X) \longrightarrow \mathfrak{I}^{r+1}(X)$ は前定理と同様とする．

● 初版 p.286 ～ 292, 新装版 p.288 ～ 294. 第 6.2.6 項～第 6.2.7 項

この部分は大幅な書き直しになります．まず，第 6.3.5 項の導来関手の説明の一部を第 6.2.6 項の前に移動し，第 6.2.7 項の一部を第 6.3.5 項に移動します．

[差し替え原稿]

6.2.5b. 導来関手

定義 6.2.25b. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ は環付き空間とする．各 $\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{F}$ に対し，ある 1 つの $\mathfrak{O}_Y$-加群 $T(\mathfrak{F})$ を対応させる規則 T があり，また，$\mathfrak{O}_X$-加群の準同型写

像 $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{O}_Y$-加群の準同型写像

$$T(\varphi)\colon T(\mathcal{F}) \to T(\mathcal{G})$$

を対応させる規則 T があって，以下の (1) ～ (3) を満たすとする．

(1) 任意の $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $g\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ に対して，$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ に対しては，$T(\mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \mathrm{id}_{T(\mathcal{F})}$.

(3) 任意の $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ に対して，$T(f+g) = T(f) + T(g)$.

このとき，T は $\mathcal{O}_X$-加群の**圏**から $\mathcal{O}_Y$-加群の圏への**共変関手** (covariant functor) であるという．この場合，T はさらに，以下の (4) を満たすことに注意する．

(4) ゼロ加群 0 やゼロ写像 0 に対して $T(0) = 0$.

共変関手 T が次の条件 (5) を満たすとき，T は**左半完全**という．

(5) $0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ が $\mathcal{O}_X$-加群の完全系列ならば，

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{F}) \xrightarrow{T(\varphi)} T(\mathcal{G}) \xrightarrow{T(\psi)} T(\mathcal{H})$$

は $\mathcal{O}_Y$-加群の完全系列である．

この場合，T はさらに，以下の (6) を満たす (例えば，[安藤] 補題 4.3.4 参照).

(6) $T(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) \cong T(\mathcal{F}) \oplus T(\mathcal{G})$.

T が左半完全共変関手のとき，$\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ の移入的分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots$$

をとり，$i \geqq 0$ に対して，

$$R^iT(\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\, T(d^i)/\,\mathrm{Im}\, T(d^{i-1}), \quad (\text{ただし } 0 \xrightarrow{T(d^{-1})} T(\mathcal{I}^0) \text{ はゼロ写像})$$

とおく．$R^iT(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の移入的分解の選び方に依存せずに同型を除いて一意的に定まることが，ルーティンワークで証明できる (例えば，[安藤] 定義 4.4.1 参照)．$R^iT(\mathcal{F})$ を T の i 次**右導来関手**という．

R が可換環で，X が 1 点からなる位相空間のとき，$\mathcal{O}_X(X) = R$ として環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ を定めると，$\mathcal{O}_X$-加群と R-加群は同一視できる．このとき，$\mathcal{O}_X$-加群の圏を R-加群の圏という．

命題 6.2.25c. $(X, \mathcal{O}_X)$ は環付き空間とし，記号は上の通りとする．T は左半完全共変関手とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) 任意の $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ に対して，

$$R^0T(\mathcal{F}) = T(\mathcal{F}).$$

(2) $\mathfrak{I}$ が移入的 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，任意の $i \geqq 1$ に対して，

$$R^i T(\mathfrak{I}) = 0.$$

証明. (1) $0 \to T(\mathfrak{F}) \to T(\mathfrak{I}^0) \to T(\mathfrak{I}^1)$ が完全系列であることからわかる．

(2) $0 \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{I} \to 0$ を $\mathfrak{I}$ の移入的分解として選べる．この複体 $\{C^i\}$ は，$C^0 = \mathfrak{I}$ で，$i \geqq 1$ のとき $C^i = 0$ なので，$R^i T(\mathfrak{I}) = 0$ である． □

定理 6.2.25d. 上の記号のもと，T は左半完全共変関手とする．このとき，$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ が $\mathcal{O}_X$-加群の完全系列であれば，次の $\mathcal{O}_Y$-加群の完全系列が存在する．

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow T(\mathfrak{F}) \longrightarrow T(\mathfrak{G}) \longrightarrow T(\mathfrak{H}) \\
&\longrightarrow R^1T(\mathfrak{F}) \longrightarrow R^1T(\mathfrak{G}) \longrightarrow R^1T(\mathfrak{H}) \\
&\longrightarrow R^2T(\mathfrak{F}) \longrightarrow R^2T(\mathfrak{G}) \longrightarrow R^2T(\mathfrak{H}) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

証明. $\mathfrak{I}$ が移入的 $\mathcal{O}_X$-加群で，$0 \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ という $\mathcal{O}_X$-加群の完全系列があるとき，$\mathfrak{G} \cong \mathfrak{I} \oplus \mathfrak{H}$ が成り立つ．よって，$0 \to T(\mathfrak{I}) \to T(\mathfrak{G}) \to T(\mathfrak{H}) \to 0$ は完全系列になる．よって，定理 6.2.19(2) の可換図式に T を作用させると，以下の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_F^r) & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_G^r) & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_H^r) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle d_F^r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_G^r} & & \downarrow{\scriptstyle d_H^r} & & \\
0 & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_F^{r+1}) & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_G^{r+1}) & \longrightarrow & T(\mathfrak{I}_H^{r+1}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

この図式から，定理 4.1.19 の証明と同様に，下の図式が得られる．

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \operatorname{Coker} d_F^{r-1} & \longrightarrow & \operatorname{Coker} d_G^{r-1} & \longrightarrow & \operatorname{Coker} d_H^{r-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_F^{r+1} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_G^{r+1} & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_H^{r+1} & &
\end{array}$$

命題 4.1.16 より，これに蛇の補題を適用すると，所望の完全系列が得られる． □

定理 6.2.25e. X は代数多様体，$\mathfrak{U}$ は X のアフィン開被覆とする．$\mathcal{O}_X$-加群 $\mathfrak{G}$ に対し，$T(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}(X)$ で左半完全共変関手 T を定める．$\mathfrak{F}$ が準連接 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，

$$R^i T(\mathfrak{F}) = H^i(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$$

である．

証明. [Ha] 第 III 章・定理 3.5 に書いてあるように，X の任意のアフィン開集合 U と任意の $i \geqq 1$ に対して，$H^i(U, \mathfrak{F}) = 0$ であるから，定理 6.2.24 より結論を得る． □

6.2.6. Hom と Ext

定義 6.2.26. $(X, \mathfrak{O}_X)$ は環付き空間とする．X 上の $\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ に対し，$\mathfrak{F}$ から $\mathfrak{G}$ への $\mathfrak{O}_X$-加群の準同型写像全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

と書く．これは，$\mathfrak{O}_X(X)$-加群になる．

また，X の各開集合 U に対し，

$$\mathfrak{H}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X|_U}(\mathfrak{F}|_U, \mathfrak{G}|_U)$$

によって定まる層 $\mathfrak{H}$ を

$$\mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

と書く．これは，$\mathfrak{O}_X$-加群になる．俗称，Hom を固いホム，$\mathcal{H}om$ を柔らかいホムなどという．

命題 6.2.26b. 上の定義の記号を用いる．$\mathfrak{F}$ を固定し，$\mathfrak{G}$ を変数と考えて，

$$T_1(\mathfrak{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}), \quad T_2(\mathfrak{G}) = \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

によって，関手 T_1, T_2 を定めると，T_1 も T_2 も左半完全共変関手になる．

ホモロジー代数学の周知の事実なので，証明は省略する．

定義 6.2.27a. 上の命題の記号を用いる．関手 T_1, T_2 の右導来関手を，それぞれ，

$$\mathrm{Ext}^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = R^r T_1(\mathfrak{G})$$
$$\mathcal{E}xt^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) = R^r T_2(\mathfrak{G})$$

と書く． $\mathrm{Ext}^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ は $\mathfrak{O}_X(X)$-加群であり，$\mathcal{E}xt^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ は $\mathfrak{O}_X$-加群の層である．

次に，$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ は X の開被覆とし，$K \subset I$ に対し，$U_K = \bigcap_{i \in K} U_i$ とする．定義 6.2.9 のように，$\mathfrak{F}_{U_K} = j_!(\mathfrak{F}|_{U_K})$ を定める．

$$\mathfrak{I}_r = \left\{ K \subset I \;\middle|\; \#K = r+1 \text{ かつ } U_K \neq \phi \right\}$$
$$C^r(\mathfrak{U}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}_{U_K}, \mathfrak{G})$$

とおく．$U_L \subset U_K$ のとき完全系列 $0 \to \mathfrak{F}_{U_L} \to \mathfrak{F}_{U_K}$ が存在するから，$d^r\colon C^r(\mathfrak{U}) \to C^{r+1}(\mathfrak{U})$ が定義される．そこで，

$$\mathrm{Ext}^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{U};\, \mathfrak{F},\, \mathfrak{G}) = \mathrm{Ker}\, d^r / \mathrm{Im}\, d^{r-1}$$

と書く．また，上の定義で，$C^r(\mathfrak{U})$ の定義を変更し，

$$C^r(\mathfrak{U}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X|_{U_K}}(\mathfrak{F}|_{U_K},\, \mathfrak{G}|_{U_K})$$

として定まるコホモロジー群を

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{U};\, \mathfrak{F},\, \mathfrak{G})$$

と書く．ただし，これらのチェック・コホモロジーを使って定義した Ext や $\mathcal{E}xt$ は，導来関手として定義された Ext や $\mathcal{E}xt$ とかなり異なる場合が多い．

定理 6.2.28a. $0 \to \mathfrak{L} \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \to 0$ が X 上の連接 $\mathfrak{O}_X$-加群の完全系列で，$\mathfrak{F}$ が $\mathfrak{O}_X$-加群のとき，次の完全系列が存在する．

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N}) && (1)\\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N})\\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N}) \longrightarrow \cdots\\
0 &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F}) && (2)\\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F})\\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots\\
0 &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N}) && (3)\\
&\longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N})\\
&\longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{L}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{M}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F},\, \mathfrak{N}) \longrightarrow \cdots\\
0 &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F}) && (4)\\
&\longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F})\\
&\longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{N},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{M},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{E}xt^2_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{L},\, \mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

証明. (1) と (3) は命題 6.2.26b と定理 6.2.25d から得られる．

(2) $\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{F}$ の移入的分解

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathfrak{I}^0_X \xrightarrow{d^0_X} \mathfrak{I}^1_X \xrightarrow{d^1_X} \mathfrak{I}^2_X \xrightarrow{d^2_X} \cdots$$

をとる．$C^r_{\mathfrak{L}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{L}, \mathfrak{I}^r)$ などと書くことにすると，

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0_{\mathfrak{N}} & \longrightarrow & C^0_{\mathfrak{M}} & \longrightarrow & C^0_{\mathfrak{L}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^1_{\mathfrak{N}} & \longrightarrow & C^1_{\mathfrak{M}} & \longrightarrow & C^1_{\mathfrak{L}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

という可換図式が存在する．この図式に対して定理 6.2.25d の証明と同じ議論を行えば，求める完全系列を得る．

(4) は (2) の証明において，$C^r_{\mathfrak{L}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{L}, \mathfrak{I}^r)$ などと書き換えればよい． □

定理 6.2.29a. $(X, \mathcal{O}_X)$ は環付き空間，$\mathfrak{F}$ は $\mathcal{O}_X$-加群とする．このとき，次が成立する．

(1) $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) \cong H^r(X, \mathfrak{F})$. ($r$ は任意の整数)

(2) $\mathfrak{L}$ が局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，$r \geqq 1$ のとき $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F}) = 0$ である．特に，$r \geqq 1$ に対して $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) = 0$ である．

(3) $\mathfrak{I}$ が移入的 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，$r \geqq 1$ のとき，

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{I}) = 0, \quad \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{I}) = 0.$$

証明. (1)　Ext^r も H^r も，$T(\mathfrak{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}(X)$ の導来関手である．

(2)　$T_2(\mathfrak{F}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}$ は恒等関手だから，$i \geqq 1$ に対し $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) = R^i T_2(\mathfrak{F}) = 0$ である．

X のアフィン開被覆 $\{U_i\}$ を $\mathfrak{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$ となるようにとる．$r \geqq 1$ のとき

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{L}, \mathfrak{F})|_{U_i} \cong \mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_{U_i}}(\mathfrak{L}|_{U_i}, \mathfrak{F}|_{U_i}) = 0$$

なので結論を得る．

(3) は命題 6.2.25c よりわかる． □

定理 6.2.30a. X は代数多様体，$\mathfrak{U}$ は X のアフィン開被覆，$\mathfrak{F}$ は $\mathcal{O}_X$-加群とする．このとき，次が成立する．

(1) $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{O}_X, \mathfrak{F}) \cong H^r(X, \mathfrak{F})$. ($r$ は任意の整数)

(2) $\mathcal{L}$ が局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群で，$\mathfrak{U} = \{U_i\}$ が任意の i に対して $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$ を満たす開被覆ならば，$r \geqq 1$ のとき $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{L}, \mathcal{F}) = 0$ である．特に，$r \geqq 1$ に対して $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) = 0$ である．

(3) $\mathcal{I}$ が移入的 $\mathcal{O}_X$-加群ならば，$r \geqq 1$ のとき，

$$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0, \quad \mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0.$$

証明. (1)　定義 6.2.27a のように，$j_U\colon U \to X$ を埋入写像として，$\mathcal{O}^!_U = (j_U)_!\mathcal{O}_U$ とおく．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}^!_U, \mathcal{F})$ に対して，$f_U(1) \in \mathcal{F}(U)$ を対応させる写像

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}^!_U, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

が同型写像であることは，逆写像を構成することによって容易に確認できる．よって，定義 6.2.27a の $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ を定義する複体は，

$$C^r(\mathfrak{U}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}^!_{U_K}, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathcal{F}(U_K)$$

となり，$H^r(X, \mathcal{F})$ を定義する複体と一致する．

(2)　定義より，

$$C^r(\mathfrak{U}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_{U_K}}(\mathcal{L}|_{U_K}, \mathcal{F}|_{U_K}) \cong \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathcal{F}|_{U_K}^{\oplus r}$$

となる．命題 6.2.22 の証明を $T(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{L}|_U, \mathcal{F}|_U)$ として用いると，$W \subset U \subset X$ が開集合のとき $T(U) \longrightarrow T(W)$ は全射であるので，$H^r(\mathfrak{U}) = 0$ $(r \geqq 1)$ が証明できる．

(3)　まず $\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0$ を示す．$T(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{I}|_U)$ とおく．$\mathcal{I}$ は移入的だから，開集合 $W \subset U \subset X$ に対して自然な写像 $T(U) \longrightarrow T(W)$ は全射であることが，容易に証明できる．よって，命題 6.2.22 の証明と同様に，$\mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0$ $(r \geqq 1)$ がわかる．

最後に $\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0$ を示す．定義 6.2.27a のように $\mathcal{F}_U = j_!(\mathcal{F}|_U)$ を定め，$T(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_U, \mathcal{I})$ とおく．$W \subset U$ のとき $0 \to \mathcal{F}_W \to \mathcal{F}_U$ は $\mathcal{O}_X$-加群の完全系列で，$\mathcal{I}$ は移入的だから，$T(U) \to T(W) \to 0$ は完全系列である．よって，命題 6.2.22 の証明と同様に，$\mathrm{Ext}^r_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathcal{F}, \mathcal{I}) = 0$ $(r \geqq 1)$ がわかる．□

命題 6.2.31a.　X はアフィン代数多様体または射影代数多様体とし，$\mathcal{F}$ は連接 $\mathcal{O}_X$-加群とする，このとき，ランクが有限の局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{P}_r$ $(r \geqq 0)$ と，完全系列

$$\cdots \xrightarrow{d_2} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{d_1} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が存在する．この完全系列を $\mathcal{F}$ の**局所自由分解**という．

証明. 例えば X が射影代数多様体の場合に証明する．S の座標環を適当にとると，次数付き S-加群 M で，$\mathfrak{F} = \widetilde{M}$ となるものが存在する．S-加群 M の次数付き局所自由分解をとり，それからできる層を考えればよい． □

一般に，可換環上の加群の場合と異なり，層の場合には，自由加群層や局所自由加群層は射影的対象ではないので，局所自由分解は射影的分解であるとは限らない．しかし，次の定理のように，$\mathfrak{F}$ の局所自由分解を利用して，$\mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ の導来関手を定義することができる．

定理 6.2.32a. $(X, \mathfrak{O}_X)$ は環付き空間，$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{O}_X$-加群，$\mathfrak{F}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とし，ランクが有限の局所自由 $\mathfrak{O}_X$ 加群 $\mathfrak{P}_r$ $(r \geqq 0)$ と，完全系列

$$\cdots \xrightarrow{d_2} \mathfrak{P}_2 \xrightarrow{d_1} \mathfrak{P}_1 \xrightarrow{d_0} \mathfrak{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

が存在すると仮定する．この完全系列から誘導される (完全とは限らない) 系列を

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{G}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots \qquad (*)$$

とする．このとき，各非負整数 i に対し，

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \operatorname{Ker} \delta^i / \operatorname{Im} \delta^{i-1}$$

が成り立つ．

証明. 移入的分解 $0 \longrightarrow \mathfrak{G} \to \mathfrak{I}^0 \to \mathfrak{I}^1 \to \cdots$ をとり，$C^{p,q} = \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_p, \mathfrak{I}^q)$ として 2 重複体を作る．

第 1 のスペクトル系列 $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考えると，定理 6.2.29a より，$q \geqq 1$ に対して $E_1^{p,q} = \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_p, \mathfrak{G}) = 0$ なので，$E_2^{p,0} \cong E^p$ となる．

第 2 のスペクトル系列 $E_2^{q,p} = H_2^q(H_1^p(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．$\mathfrak{G} = \mathfrak{I}^q$ の場合には，$(*)$ は完全系列になることが容易に証明できる．よって $p \geqq 1$ に対して $E_1^{q,p} = 0$ である．よって，$E_2^{q,0} \cong E^q$ となる．これより，結論を得る． □

一般には，$\operatorname{Ext}^q_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{P}_p, \mathfrak{G})$ が消えないので，Ext については上のような定理は成立しない．チェック・コホモロジーとの関係もちょっと微妙である．

命題 6.2.33a. $(X, \mathfrak{O}_X)$ は環付き空間，$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ は $\mathfrak{O}_X$-加群とする．

$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ が X の開被覆とする．$\phi \neq K \subset I$ に対して，$U_K = \displaystyle\bigcap_{i \in K} U_i$ とする．

(1) もし，任意の $\phi \neq K \subset I$ と任意の $i \geqq 1$ に対して $\operatorname{Ext}^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}_{U_K}, \mathfrak{G}) = 0$ ならば，

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

が成り立つ．

(2) もし，任意の $\phi \neq K \subset I$ と任意の $i \geqq 1$ に対して $\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{O}_{U_K}}(\mathfrak{F}|_{U_K}, \mathfrak{G}|_{U_K}) = 0$ ならば，

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

が成り立つ．

証明. (1)　定義 6.2.27a の記号を用いて，

$$C^{p,q} = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_q} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}_{U_K}, \mathfrak{I}^p)$$

とおくと，これは 2 重複体になる．この 2 重複体から構成されるスペクトル系列 $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．定理 6.2.30a(3) より，$q \geqq 1$ に対し，$E_1^{p,q} = \mathrm{Ext}^q(\mathfrak{F}, \mathfrak{I}^p) = 0$ である．あとは，定理 6.2.24 の証明とまったく同じである．

(2) の証明も同様である．□

したがって，X が代数多様体，$\mathfrak{F}$ が有限ランクの局所自由加群で，$\mathfrak{U} = \{U_i\}$ がアフィン開被覆ならば，$\mathcal{E}xt^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ をチェック・コホモロジーで計算してもかまわない．さらに，各 U_K 上 $\mathfrak{F}|_{U_K}$ が自由加群になる場合には，$\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ をチェック・コホモロジーで計算してもかまわない．

命題 6.2.33b.　X は代数多様体，$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とする．すると，$\mathcal{E}xt^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ も連接 $\mathfrak{O}_X$-加群である．

証明. X がアフィン代数多様体の場合に証明すれば十分である．$\mathfrak{F}$ の局所自由分解をとり，それを利用して $\mathcal{E}xt$ を記述すれば，直ちに結論を得る．□

系 6.3.18 で証明するように，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p\bigl(X,\ \mathcal{E}xt^q_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})\bigr) \implies E^n = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

が存在する．これを使うと次が証明できる．

定理 6.2.34.　$\mathfrak{F}$ が局所自由層ならば，

$$\mathrm{Ext}^r_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong H^r\bigl(X,\ \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})\bigr)$$

である．

証明. 後で述べる定理 6.3.3(4) よりすぐわかる．□

定理 6.2.35a. (**セールの双対定理**, Serre duality) n 次元非特異射影多様体 X 上の局所自由層 $\mathfrak{F}$ に対し，

$$H^i(X, \mathfrak{F}) \cong H^{n-i}\bigl(X, \mathcal{H}om_{\mathfrak{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{O}_X(K_X))\bigr)$$

が成り立つ.

証明は，定理 5.4.4h, 定理 5.4.4j などから得られる.

6.2.7. 高次順像

定義 6.2.36a. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ は環付き空間で，$\varphi\colon X \to Y$ は環付き空間の写像とする．また，$\mathfrak{F}$ は連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とする．Y の開集合 U に対して，

$$(\varphi_*\mathfrak{F})(U) = \mathfrak{F}\bigl(f^{-1}(U)\bigr)$$

によって，$\mathfrak{O}_Y$-加群 $\varphi_*\mathfrak{F}$ が定義され，これを $\mathfrak{F}$ の φ による順像と言った.

$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ が $\mathfrak{O}_X$-加群の完全系列のとき，$0 \to \mathfrak{F}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \to \mathfrak{G}\bigl(f^{-1}(U)\bigr) \to \mathfrak{H}\bigl(f^{-1}(U)\bigr)$ は完全系列なので，f_* は $\mathfrak{O}_X$-加群の圏から $\mathfrak{O}_Y$-加群の圏への左半完全共変関手である．この関手の導来関手を

$$R^r\varphi_*\mathfrak{F}$$

と書き，φ の**高次順像** (heigher direct image sheaf) という.

命題 6.2.37a. 記号は上の定義の通りとする.

(1) 非負整数 r を固定する．Y の開集合 U に対し，

$$\mathfrak{R}^r_{\mathfrak{F}}(U) = H^r(\varphi^{-1}(U), \mathfrak{F}|_{\varphi^{-1}(U)})$$

として $\mathfrak{O}_Y$-加群 $\mathfrak{R}^r$ を定義する．すると，

$$\mathfrak{R}^r_{\mathfrak{F}} \cong R^r\varphi_*\mathfrak{F}$$

が成り立つ.

(2) $\mathfrak{F}$ が X 上の簡易層のときは，Y のアフィン開被覆 $\mathfrak{U}$ に対し，

$$C^r(\mathfrak{U}) = \bigoplus_{K \in \mathfrak{I}_r} \mathfrak{F}|_{\varphi^{-1}(U_K)}$$

を使って定義したチェック・コホモロジー群が $R^r\varphi_*\mathfrak{F}$ と一致する.

証明. (1)　$\mathcal{F}$ に $\mathcal{R}^i_{\mathcal{F}}$ を対応させる関手を T_i とする．$T_0 = f_*$ である．$\mathcal{F}$ を含む移入的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{I}$ をとり，$\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$ とおく．$i \geqq 1$ に対して $T_i(\mathcal{I}) = 0$ なので，完全系列

$$0 \to T_0(\mathcal{F}) \to T_0(\mathcal{I}) \to T_0(\mathcal{G}) \to T_1(\mathcal{F}) \to 0$$

が存在し，$i \geqq 1$ に対して $T_i(\mathcal{G}) \cong T_{i+1}(\mathcal{F})$ である．同様に，完全系列

$$0 \to f_*(\mathcal{F}) \to f_*(\mathcal{I}) \to f_*(\mathcal{G}) \to R^1 f_*(\mathcal{F}) \to 0$$

が存在して，$T_0 = f_*$ なので，$T_1(\mathcal{F}) \cong R^1 f_*\mathcal{F}$ である．また，$R^i f_*\mathcal{H} \cong R^{i+1} f_*\mathcal{F}$ なので，i に関する帰納法で $T_{i+1}\mathcal{F} \cong R^{i+1} f_*\mathcal{F}$ を得る．

(2) は (1) よりすぐわかる．　□

● 初版 p.293. 定義 6.3.1(5). (新装版では修正済み)

誤: (5)　各 n に対し，ある p_0, p_1 が存在し，$F^{p_1}(E^n) = E^n$, $F^{p_2}(E^n) = 0$.

正: (5)　各 n に対し，ある p_1, p_2 が存在し，$F^{p_1}(E^n) = E^n$, $F^{p_2}(E^n) = 0$.

● 初版 p.293, 新装版 p.295. 注意 6.3.2 の 3 行目

誤: (5) を「$F^0(E^n) = E^n$, $F^{n+1}(F^n) = 0$」で置き換える

正: (5) を「$F^0(E^n) = E^n$, $F^{n+1}(E^n) = 0$」で置き換える

● 初版 p.293. 定理 6.3.3(2) の冒頭 (新装版では修正済み)

誤: (2)　整数 $i \geqq 2$ を固定する．$E_2^{1,i-1} = E_2^{2,i-2} = \cdots = E_2^{i-2,2} = E_2^{i-1,1} = 0$, $E_2^{1,i} = E_2^{2,i-1} = \cdots = E_2^{i-1,2} = E_2^{i,1} = 0$ ならば，完全系列

正: (2)　整数 $i \geqq 2$ を固定する．$E_2^{1,i-2} = E_2^{2,i-3} = \cdots = E_2^{i-3,2} = E_2^{i-2,1} = 0$, $E_2^{1,i-1} = E_2^{2,i-2} = \cdots = E_2^{i-2,2} = E_2^{i-1,1} = 0$, $E_2^{2,i-1} = E_2^{3,i-2} = \cdots = E_2^{i-1,2} = E_2^{i,1} = 0$ ならば，完全系列

● 初版 p.294 〜 295, 新装版 p.296 〜 297. 定理 6.3.3 の証明

細かい誤植が沢山あって，結局以下の原稿のように修正してください．

[差し替え原稿]

証明. スペクトル系列の定義 (2) より，$E_r^{p,q} = 0$ ならば $E_{r+1}^{p,q} = 0$ である．このとき，定義 (3) より，$E_\infty^{p,q} = 0$ である．$p < 0$ または $q < 0$ ならば $E_\infty^{p,q} = 0$ だから，定義 (4), (5) より，$F^0(E^n) = E^n$, $F^{n+1}(E^n) = 0$ となる．

(1) 〜 (3) を示す．$i - 1 \leqq p + q \leqq i + 1$, $p \geqq 1$, $1 \leqq q \leqq i - 1$ ならば $E_2^{p,q} = 0$ であると仮定する．p, q がこの条件を満たすとき，$r \geqq 2$ および $r = \infty$ に対し，$E_r^{p,q} = 0$ である．

$r > i$ または $2 \leqq r < i$ とする．$d_r^{i,0}\colon E_r^{i,0} \longrightarrow E_r^{i+r,1-r} = 0$, $d_r^{i-r,r-1}\colon 0 = E_r^{i-r,r-1} \longrightarrow E_r^{i,0}$ はゼロ写像だから，$E_{r+1}^{i,0} = \operatorname{Ker} d_r^{i,0} / \operatorname{Im} d_r^{i-r,r-1} = E_r^{i,0}$ であり，

$$E_2^{i,0} = E_3^{i,0} = \cdots = E_i^{i,0} \twoheadrightarrow E_{i+1}^{i,0} = E_{i+2}^{i,0} = \cdots = E_\infty^{i,0}$$

である．同様に，$r > i+1$ または $2 \leqq r < i+1$ のとき $E_r^{i+r+1,1-r} = 0$, $E_r^{i-r+1,r-1} = 0$ より，

$$E_2^{i+1,0} = E_3^{i+1,0} = \cdots = E_{i+1}^{i+1,0} \twoheadrightarrow E_{i+2}^{i+1,0} = E_{i+3}^{i+1,0} = \cdots = E_\infty^{i+1,0}$$

となる．したがって，

$$E_{i+1}^{i,0} = E_\infty^{i,0} \cong F^i(E^i)/F^{i+1}(E^i) = F^i(E^i)$$

となる．包含写像 $F^i(E^i) \subset E^i$ より，完全系列 $0 \to E_{i+1}^{i,0} \to E^i$, および，$0 \to E_{i+2}^{i+1,0} \to E^{i+1}$ ができる．

$1 \leqq j < i$ のとき，$F^j(E^i)/F^{j+1}(E^i) \cong E_\infty^{j,i-j} = 0$ なので，$F^1(E^i) = F^i(E^i)$ である．したがって，

$$E^i/E_{i+1}^{i,0} = F^0(E^i)/F^i(E^i) = F^0(E^i)/F^1(E^i) \cong E_\infty^{0,i}$$

である．これより，完全系列

$$0 \to E_{i+1}^{i,0} \to E^i \to E_\infty^{0,i} \to 0$$

を得る．$r > 0$ のとき，$d_r^{-r,i+r-1}\colon 0 = E_r^{-r,i+r-1} \longrightarrow E_r^{0,i}$ はゼロ写像だから，

$$E_{r+1}^{0,i} = \operatorname{Ker} d_r^{0,i} / \operatorname{Im} d_r^{-r,i+r-1} = \operatorname{Ker} d_r^{0,i} \subset E_r^{0,i}$$

であり，$E_\infty^{0,i} \subset E_2^{0,i}$ である．

さらに，$2 \leqq r \leqq i$ または $r \geqq i+2$ のとき，$E_2^{r,i-r+1} = 0$ より $E_r^{r,i-r+1} = 0$ で，$d_r^{0,i}\colon E_r^{0,i} \longrightarrow E_r^{r,i-r+1} = 0$ はゼロ写像なので，$E_{r+1}^{0,i} = \operatorname{Ker} d_r^{0,i} / \operatorname{Im} d_r^{-r,i+r-1} = E_r^{0,i}$ である．したがって，$E_2^{0,i} = E_{i+1}^{0,i}$ である．つまり，

$$E_2^{0,i} = E_3^{0,i} = \cdots = E_{i+1}^{0,i} \supset E_{i+2}^{0,i} = E_{i+3}^{0,i} = \cdots = E_\infty^{0,i}$$

である．また，$r \geqq i+1$ のとき $\operatorname{Im} d_r^{-i-1,2i+1} = 0$ だから，

$$\operatorname{Ker}\left(E_2^{0,i} = E_{i+1}^{0,i} \xrightarrow{d_{i+1}^{0,i}} E_{i+1}^{i+1,0} = E_2^{i+1,0} \right) = E_{i+2}^{0,i} = E_\infty^{0,i}$$

である．したがって，完全系列

$$0 \to E_{i+1}^{i,0} \to E^i \to E_2^{0,i} \to E_2^{i+1,0}$$

が存在する．$\mathrm{Ker}\, d_{i+1}^{i+1,0} = E_{i+1}^{i+1,0}$ だから，$E_{i+2}^{i+1,0} = E_{i+1}^{i+1,0} / \mathrm{Im}\, d_{i+1}^{0,i}$ である．また，$\mathrm{Ker}(E_{i+2}^{i+1,0} \to E^{i+1}) = 0$ だから，

$$\mathrm{Ker}(E_{i+1}^{i+1,0} \to E^{i+1}) \cong \mathrm{Im}\, d_{i+1}^{0,i}$$

したがって，完全系列

$$0 \to E_{i+1}^{i,0} \to E^i \to E_2^{0,i} \to E_2^{i+1,0} \to E^{i+1}$$

が存在する．これと，全射 $E_2^{i,0} \twoheadrightarrow E_{i+1}^{i,0}$ を合成して，求める完全系列を得る．

(4), (5) は (3) よりすぐわかる．

(6), (7) の証明も上と同様にできる．詳細な証明は，[安藤] 定理 5.2.3 を参照せよ．

□

● 初版 p.296, 新装版 p.298. 第 6.3.3 項の最初の行

誤: 複体とそのフルターづけから，

正: 複体とそのフィルターづけから，

● 初版 p.296, 新装版 p.298. 定義 6.3.6 の 1 〜 6 行目

誤:

定義 6.3.6. $A = \bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} A^r$ は次数付き加群とする．各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し，部分加群 $F^p(A) \subset A$ が与えられていて，$F^p(A^n) = F^p(A) \cap A^n$ とおくとき，

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F^p(A) = A, \quad F^{p+1}(A) \subset F^p(A), \quad d(F^p(A)) \subset F^p(A),$$

$$F^0(A) = A, \quad F^{p+1}(A^p) = 0, \quad F^p(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (F^p(A^n))$$

正:

定義 6.3.6. (A, d) は前定義のような複体とする．各 $p \in \mathbb{Z}$ に対し，部分加群 $F^p(A) \subset A$ が与えられていて，$F^p(A^n) = F^p(A) \cap A^n$ とおくとき，

$$F^{p+1}(A) \subset F^p(A), \quad d(F^p(A)) \subset F^p(A), \quad F^p(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} F^p(A^n)$$

$$F^0(A) = A, \quad F^{p+1}(A^p) = 0$$

● 初版 p.296, 新装版 p.298. 定義 6.3.7 の 2 行目

「(A, d) は複体で，フィルターづけ $F^p(A)$ が与えられているとする.」の後に次の文を追加して下さい.

追加する文: $p, q, r \in \mathbb{Z}$ に対し，

● 初版 p.297. 11 行目. (新装版では修正済み)

誤: $d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-r+1} + B_{r-1}^{p,q}}$

正: $d_r^{p,q}\colon E_r^{p,q} = \dfrac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}$

● 初版 p.297, 新装版 p.299. 命題 6.3.8 の直前の行

旧: $F^p(\operatorname{Ker} d^n) = F^p(A) \cap \operatorname{Ker} d^n$ の $\operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = E^n$ における像を $F^p(E^n)$ とする.

新: $F^p(\operatorname{Ker} d^n) = F^p(A) \cap \operatorname{Ker} d^n$ の $\operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1} = E^n$ における像を

$$F^p(E^n) = \frac{F^p(A) \cap \operatorname{Ker} d^n}{F^p(A) \cap \operatorname{Im} d^{n-1}}$$

とする.

● 初版 p.297, 新装版 p.299. 命題 6.3.8

命題 6.3.8 に，次の (7), (8), (9) を追加して下さい.

[追加原稿]

(7) $F^0(E^n) = E^n$, $F^{n+1}(E^n) = 0$.

(8) $E_0^{p,q} = F^p(A^{p+q})/F^{p+1}(A^{p+q}) = A^{p,q}/A^{p+1,q-1}$.

(9) $E_1^{p,q} = H^{p+q}\big(F^p(A^*)/F^{p+1}(A^*)\big)$.

● 初版 p.298, 新装版 p.300. 命題 6.3.8 の証明〜第 6.3.3 項の末尾

命題 6.3.8 の (2), (3), (5), (6) の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．また，(7), (8) の証明を追加し，命題 6.3.8 の証明の後の文章を，下記のように書き換えて下さい.

[差し替え・追加原稿]

(2) $\operatorname{Ker} d_r^{p,q}$ の等式を示すには，d から自然に誘導される写像を

$$\delta_r^{p,q}\colon Z_r^{p,q} \longrightarrow \frac{Z_r^{p+r,q-r+1}}{Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}}$$

とおき，$\operatorname{Ker} \delta_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r+1}^{p,q}$ を示せばよい．$x \in \operatorname{Ker} \delta_r^{p,q}$ をとると，$d(x) \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$ である．$B_{r-1}^{p+r,q-r+1} = d(Z_{r-1}^{p+1,q-1})$ なので，ある $y \in Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_r^{p,q}$ と $z \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r}$ により，$d(x) = z + d(y)$ と書ける．$u = x - y \in Z_r^{p,q}$ とおくと，$d(u) = z \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} \subset F^{p+r+1}(A)$ であるので，$u \in Z_{r+1}^{p,q}$ となる．したがって，$\operatorname{Ker} \delta_r^{p,q} \subset Z_{r-1}^{p+1,q-1} + Z_{r+1}^{p,q}$ である．反対向きの包含関係は容易に

わかる．

$$\mathrm{Im}\left(d_r^{p-r,q+r-1}\colon \frac{Z_r^{p-r,q+r-1}}{Z_{r-1}^{p-r+1,q+r-2}+B_{r-1}^{p-r,q+r+1}} \longrightarrow \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1}+B_{r-1}^{p,q}}\right)$$

に関する等式は，$d(Z_r^{p-r,q+r-1}) = B_r^{p,q}$ より容易にわかる．

(3)　$B_r^{p,q} \subset Z_{r+1}^{p,q}$ である．また，(1) より，$Z_{r+1}^{p,q} \cap Z_{r-1}^{p+1,q-1} = Z_r^{p+1,q-1}$ である．これらと (2) に注意し，第 2 同型定理を使うと，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q}}{\mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1}} &= \frac{Z_{r-1}^{p+1,q-1}+Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1}+B_r^{p,q}} \cong \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_{r+1}^{p,q}\cap(Z_{r-1}^{p+1,q-1}+B_r^{p,q})}\\ &= \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{Z_r^{p+1,q-1}+B_r^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}\end{aligned}$$

である．

(5)　$Z_r^{p,q} = \{x \in A^{p,q} \mid d(x) \in F^{p+r}(A)\}$ であるが，$r > q+1$ のとき，$F^{p+r}(A^{p+q+1}) = 0$ なので，$r > q+1$ のとき，$Z_r^{p,q} = A^{p,q} \cap \mathrm{Ker}\, d^{p+q}$ である．

$r > p$ のとき，$A^{p-r,q+r-1} = A^{p+q-1}$ なので，$B_r^{p,q} = d^{p+q-1}(Z_r^{p-r,q+r-1}) = A^{p,q} \cap \mathrm{Im}\, d^{p+q-1}$ である．また，

$$F^p(E^{p+q}) = \frac{F^p(A)\cap \mathrm{Ker}\, d^{p+q}}{F^p(A)\cap \mathrm{Im}\, d^{p+q-1}} = \frac{A^{p,q}\cap \mathrm{Ker}\, d^{p+q}}{A^{p,q}\cap \mathrm{Im}\, d^{p+q-1}} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

(6)　$A^{p+1,q-1} \subset A^{p,q}$ に注意すると，

$$\begin{aligned}Z_\infty^{p+1,q-1}\cap B_\infty^{p,q} &= (A^{p+1,q-1}\cap \mathrm{Ker}\, d^{p+q})\cap(A^{p,q}\cap \mathrm{Im}\, d^{p+q-1})\\ &= A^{p+1,q-1}\cap \mathrm{Im}\, d^{p+q-1} = B_\infty^{p+1,q-1}\end{aligned}$$

となる．これと第 2 同型定理より，

$$\frac{Z_\infty^{p+1,q-1}+B_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}} \cong \frac{Z_\infty^{p+1,q-1}}{Z_\infty^{p+1,q-1}\cap B_\infty^{p,q}} = \frac{Z_\infty^{p+1,q-1}}{B_\infty^{p+1,q-1}} = F^{p+1}(E^{p+q})$$

が得られる．第 1 同型定理より，

$$E_\infty^{p,q} = \frac{Z_\infty^{p,q}}{Z_\infty^{p+1,q-1}+B_\infty^{p,q}} \cong \frac{Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}}{\bigl(Z_\infty^{p+1,q-1}+B_\infty^{p,q}\bigr)/B_\infty^{p,q}} = \frac{F^p(E^n)}{F^{p+1}(E^n)}$$

が得られる．

(7)　$F^0(A) = A$ より $F^0(E^n) = E^n$, $F^{p+1}(A^p) = 0$ より $F^{n+1}(E^n) = 0$.

(8)　$Z_0^{p,q} = Z_{-1}^{p,q} = A^{p,q}$, $B_0^{p,q} = d(A^{p,q-1})$, $B_{-1}^{p,q} = d(A^{p+1,q-2}) \subset A^{p+1,q-1}$ より，

$$E_0^{p,q} = \frac{Z_0^{p,q}}{Z_{-1}^{p+1,q-1}+B_{-1}^{p,q}} = \frac{A^{p,q}}{A^{p+1,q-1}+d(A^{p+1,q-2})} = \frac{A^{p,q}}{A^{p+1,q-1}}.$$

(9)　$d^{p,q}\colon A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ から $d_0^{p,q}\colon E_0^{p,q} \to E_0^{p,q+1}$ が誘導されるので，$E_1^{p,q} = H^{p+q}\big(F^p(A)/F^{p+1}(A)\big)$ である． □

$F^0(A) = A$ より $F^0(E^n) = E^n$, $F^{p+1}(A^p) = 0$ より $F^{n+1}(E^n) = 0$ である．これと以上の結果から，構成された $\{E_r^{p,q},\, d_r^{p,q},\, E^n,\, F^p(E^n)\}$ はスペクトル系列の定義を満たす．このスペクトル系列は $E_2^{p,q}$ の項が明解でないので，$E_1^{p,q}$ のほうを用いて，

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}\big(F^p(A)/F^{p+1}(A)\big) \implies E^n = H^n(A)$$

などと表すことが多い．

● 初版 p.299, 新装版 p.301．定義 6.3.9 の 1 行目

誤: $C = \displaystyle\bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}} C^{p,q}$ ($C_{p,q}$ は加群)

正: $C = \displaystyle\bigoplus_{p=0}^{\infty}\bigoplus_{q=0}^{\infty} C^{p,q}$ ($C^{p,q}$ は加群)

● 初版 p.299, 新装版 p.301．定義 6.3.9 の 4 行目

誤: $\delta_2^{p+1,q} \circ \delta_1^{p,q} + \delta_1^{p,q+1} \circ \delta_2^{p,q} = 0$

正: $\delta_2^{p+1,q} \circ \delta_1^{p,q} = \delta_1^{p,q+1} \circ \delta_2^{p,q}$

(解説) 2 重複体の定義としては，$\delta_2^{p+1,q} \circ \delta_1^{p,q} + \delta_1^{p,q+1} \circ \delta_2^{p,q} = 0$ でも，$\delta_2^{p+1,q} \circ \delta_1^{p,q} = \delta_1^{p,q+1} \circ \delta_2^{p,q}$ でもどちらでもよいのですが，後で登場する二重複体の大半の条件に合わせます．元の条件のままだと，14 行目の d^r の定義は，

$$d^r(x) = \sum_{i=0}^{r} \big(\delta_1^{i,r-i}(x_{i,r-i}) + \delta_2^{i,r-i}(x_{i,r-i})\big)$$

でないといけません．

● 初版 p.300, 新装版 p.302．定理 6.3.10 の 3 行目

旧: $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C))$, $E^n = H^n(C)$

新: $E_0^{p,q} = C^{p,q}$, $E_1^{p,q} = H_2^q(C^{p,*})$, $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C))$, $E^n = H^n(C)$

● 初版 p.300, 新装版 p.302．定理 6.3.10 の証明の 1 行目

誤: $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p+1,q} = C^{p,q}$ で，

正: $E_0^{p,q} = A^{p,q}/A^{p+1,q-1} = C^{p,q}$ で，

● 初版 p.300 〜 305, 新装版 p.302 〜 307．第 6.3.5 項〜第 6.2.6 項

以下の原稿と差し替えて下さい．第 6.3.5 項は「導来関手」から「高次順像再論」に変わります．

[差し替え原稿]

6.3.5a.　高次順像再論

定理 6.3.11a.　$\cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \to \cdots$ を複体とする．このとき，以下の条件 (1) ～ (3) を満たす移入的分解

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{\varepsilon_n} I_n^0 \xrightarrow{\delta_n^0} I_n^1 \xrightarrow{\delta_n^1} I_n^2 \to \cdots$$

が存在する．

(1) 次の可換図式が存在する．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & C^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{d^n} & C^{n+1} & \to \cdots \\
 & {\scriptstyle\varepsilon_{n-1}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_n} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon_{n+1}} & \\
\cdots \to & I_{n-1}^0 & \xrightarrow{d_{n-1}^0} & I_n^0 & \xrightarrow{d_n^0} & I_{n+1}^0 & \to \cdots \\
 & {\scriptstyle\delta_{n-1}^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_n^0} & & \downarrow{\scriptstyle\delta_{n+1}^0} & \\
\cdots \to & I_{n-1}^1 & \xrightarrow{d_{n-1}^1} & I_n^1 & \xrightarrow{d_n^1} & I_{n+1}^1 & \cdots \to \\
 & {\scriptstyle\delta_{n-1}^1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_n^1} & & \downarrow{\scriptstyle\delta_{n+1}^1} & \\
\longrightarrow & I_{n-1}^2 & \xrightarrow{d_{n-1}^2} & I_n^2 & \xrightarrow{d_n^2} & I_{n+1}^2 & \to \cdots \\
 & {\scriptstyle\delta_{n-1}^2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta_n^2} & & \downarrow{\scriptstyle\delta_{n+1}^2} & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

ここで，縦の系列はすべて完全である．

(2) $K_n^i = \operatorname{Ker} d_n^i$, $J_n^i = \operatorname{Im} d_{n-1}^i$ とおくと，

$$0 \longrightarrow Z^n(C) \xrightarrow{\varepsilon_n} K_n^0 \xrightarrow{\delta_n^0} K_n^1 \xrightarrow{\delta_n^1} K_n^2 \to \cdots$$
$$0 \longrightarrow B^n(C) \xrightarrow{\varepsilon_n} J_n^0 \xrightarrow{\delta_n^0} J_n^1 \xrightarrow{\delta_n^1} J_n^2 \to \cdots$$
$$0 \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow K_n^0/J_n^0 \longrightarrow K_n^1/J_n^1 \longrightarrow K_n^2/J_n^2 \to \cdots$$

はいずれも移入的分解になる．

(3) $C^n = 0$ であるような n に対しては，$I_n^m = 0\ (\forall m)$ であり，$\operatorname{Im} d^{n-1} = \operatorname{Ker} d^n$ が成り立つような n に対しては，$J_n^m = K_n^m\ (\forall m)$ が成り立つ．特に $\cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \to \cdots$ が完全系列ならば，(1) の図式の横の系列もすべて完全系列である．

この図式を複体 $C = \{C^n, d^n\}$ の**移入的分解**という.

証明. まず, $J_0^i = 0$ $(i \geqq 0)$ とし, $Z^0(C) = H^0(C) = \operatorname{Ker} d^0$ の移入的分解 K_0^* をとる. $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, 以下の操作を帰納的に行う.

完全系列 $0 \to \operatorname{Ker} d^m \to C^m \to \operatorname{Im} d^m \to 0$ に対し, 定理 6.2.19(2) を適用して, C^m, $B^{m+1}(C) = \operatorname{Im} d^m$ の移入的分解 I_m^*, J_{m+1}^* を構成する. 完全系列 $0 \to \operatorname{Im} d^m \to \operatorname{Ker} d^{m+1} \to H^{m+1}(C) \to 0$ に定理 6.2.19(2) を適用して, $Z^{m+1}(C) = \operatorname{Ker} d^{m+1}$ と $H^{m+1}(C)$ の移入的分解 K_{m+1}^*, L_{m+1}^* を構成すると, $K_{m+1}^*/J_{m+1}^* = L_{m+1}^*$ となる. ただし, $\operatorname{Im} d^m = \operatorname{Ker} d^{m+1}$ の場合は, $K_{m+1}^i = J_{m+1}^i$ とする.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
C^{m-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varepsilon_{m-1}"'] & \operatorname{Im} d^{m-1} \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\varepsilon_m"] & \operatorname{Ker} d^m \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\varepsilon_m"] & C^m \arrow[d, "\varepsilon_m"] \\
I_{m-1}^0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta_{m-1}^0"'] & J_m^0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^0"] & K_m^0 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^0"] & I_m^0 \arrow[d, "\delta_m^0"] \\
I_{m-1}^1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta_{m-1}^1"'] & J_m^1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^1"] & K_m^1 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^1"] & I_m^1 \arrow[d, "\delta_m^1"] \\
I_{m-1}^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta_{m-1}^2"'] & J_m^2 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^2"] & K_m^2 \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\delta_m^2"] & I_m^2 \arrow[d, "\delta_m^2"] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

再び, m の値を $+1$ して, 以上の操作を繰り返す. このようにすると, 求める移入的分解が得られる. □

補題 6.3.12a. $f\colon (X, \mathfrak{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathfrak{O}_Y)$ は環付き空間の写像, $\mathfrak{F}$ は脆弱 $\mathfrak{O}_X$-加群とする.

(1) $f_*\mathfrak{F}$ は脆弱 $\mathfrak{O}_Y$-加群である.

(2) $i \geqq 1$ に対し, $R^i f_*\mathfrak{F} = 0$ である.

証明. (1) U を Y の開集合とすると, $\mathfrak{F}$ は脆弱なので, 制限写像 $\mathfrak{F}(f^{-1}(Y)) = \mathfrak{F}(X) \longrightarrow \mathfrak{F}(f^{-1}(U))$ は全射である. したがって, $f_*\mathfrak{F}(Y) \longrightarrow f_*\mathfrak{F}(U)$ も全射で, $f_*\mathfrak{F}$ も脆弱 $\mathfrak{O}_Y$-加群である.

(2) は命題 6.2.37(1) より分かる. □

定理 6.3.13a. 連接 $\mathfrak{O}_X$-加群層 $\mathfrak{F}$ が脆弱分解

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}^0 \longrightarrow \mathfrak{G}^1 \longrightarrow \mathfrak{G}^2 \longrightarrow \cdots$$

を持つとき，それから誘導される複体

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \varphi_* \mathfrak{G}^0 \xrightarrow{\delta^0} \varphi_* \mathfrak{G}^1 \xrightarrow{\delta^1} \varphi_* \mathfrak{G}^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \qquad (*)$$

を考えると，各整数 $r \geqq 0$ に対し次が成り立つ.

$$R^r \varphi_* \mathfrak{F} \cong \operatorname{Ker} \delta^r / \operatorname{Im} \delta^{r-1}$$

証明. 定理 6.3.11a を利用して，$(*)$ の移入的分解 $0 \to \mathfrak{G}^n \to \mathfrak{I}^{0,n} \to \mathfrak{I}^{1,n} \to \cdots$ をとる．$C^{p,q} = \varphi_* \mathfrak{I}^{p,q}$ として 2 重複体を構成する.

この 2 重複体から構成されるスペクトル系列 $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．定理 6.3.11a より，

$$\mathfrak{I}^{p,0} \longrightarrow \mathfrak{I}^{p,1} \longrightarrow \mathfrak{I}^{p,2} \to \cdots$$

も完全系列であるから，$q \geqq 1$ に対し，$E_1^{p,q} = 0$ である．よって, $E_2^{p,q} = 0$ である. 定理 6.3.3(4) より，$\operatorname{Ker} \delta^p / \operatorname{Im} \delta^{p-1} = E_2^{p,0} \cong E^p$ である.

次に，$E_2^{q,p} = H_2^q(H_1^p(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を考える．$q \geqq 1$ のとき，$E_1^{q,p} = R^q \varphi_* \mathfrak{I}^p) = 0$ である．よって，$p \geqq 1$ のとき，$E_1^{q,p} = 0$, $E_2^{p,q} = 0$ である．定理 6.3.3(4) より，$R^q \varphi_* \mathfrak{F} = E_2^{q,0} \cong E^q$ である.

したがって，$\operatorname{Ker} \delta^p / \operatorname{Im} \delta^{p-1} \cong E^p \cong R^p \varphi_* \mathfrak{F}$ となる. □

系 6.3.17 で述べたように，

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mathfrak{F}) \implies E^{p+q} = H^{p+q}(X, \mathfrak{F})$$

というスペクトル系列が存在するという事実から，次の定理が成り立つ.

定理 6.3.14a. 環付き空間の写像 $\varphi\colon X \to Y$ と連接 $\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{F}$ に対し，以下が成り立つ.

(1) 次の完全系列が存在する.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(Y, \varphi_* \mathfrak{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(Y, R^1 \varphi_* \mathfrak{F}) \\ &\longrightarrow H^2(Y, \varphi_* \mathfrak{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathfrak{F}) \end{aligned}$$

(2) 整数 $i \geqq 2$ を固定する．もし，$i \leqq p+q \leqq i+1$ かつ $p \geqq 1$ かつ $q \geqq 1$ を満たす任意の整数 (p, q) に対して，$H^p(Y, R^q f_* \mathfrak{F}) = 0$ ならば，次の完全系列が存在する.

$$\begin{aligned} H^i(Y, \varphi_* \mathfrak{F}) &\longrightarrow H^i(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(Y, R^i \varphi_* \mathfrak{F}) \\ &\longrightarrow H^{i+1}(Y, \varphi_* \mathfrak{F}) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathfrak{F}) \end{aligned}$$

(3) $1 \leqq p \leqq n$, $1 \leqq q \leqq n-1$, $p+q \leqq n+1$ を満たす任意の整数 p, q に対し $H^p(Y, R^q f_* \mathfrak{F}) = 0$ ならば，次の完全系列が存在する．

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(Y, \varphi_*\mathfrak{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(Y, R^1\varphi_*\mathfrak{F}) \\ &\longrightarrow H^2(Y, \varphi_*\mathfrak{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(Y, R^2\varphi_*\mathfrak{F}) \\ &\longrightarrow H^3(Y, \varphi_*\mathfrak{F}) \longrightarrow H^3(X, \mathfrak{F}) \longrightarrow H^0(Y, R^3\varphi_*\mathfrak{F}) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(4) $p \geqq 0$, $1 \leqq q \leqq n-1$ を満たす任意の整数 p, q に対し $H^p(Y, R^q f_*\mathfrak{F}) = 0$ ならば，任意の i に対し

$$H^i(Y, \varphi_*\mathfrak{F}) \cong H^i(X, \mathfrak{F})$$

が成り立つ．

命題 6.3.15a. (1) Y は 1 点からなる集合で，$\varphi\colon X \to Y$ は環付き空間の写像，$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{O}_X$-加群とする．すると，

$$R^r\varphi_*\mathfrak{F} = H^r(X, \mathfrak{F}).$$

(2) X は代数多様体，Y はアフィン代数多様体，$\varphi\colon X \to Y$ は正則写像，$\mathfrak{F}$ は準連接 $\mathfrak{O}_X$-加群とする．すると，

$$(R^r\varphi_*\mathfrak{F})(Y) \cong H^r(X, \mathfrak{F}).$$

証明. (1) $\mathfrak{F}$ の移入的分解 $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{I}^0 \to \cdots$ をとり，複体 $0 \to \mathfrak{I}^0(X) \to \mathfrak{I}^1(X) \to \cdots$ を作る．$R^r\varphi_*\mathfrak{F} = \big(R^r\varphi_*\mathfrak{F}\big(Y)$ も $H^r(X, \mathfrak{F})$ も，この複体のコホモロジーである．

(2) $i \geqq 1$ のとき $H^i(Y, \varphi_*\mathfrak{F}) = 0$ であるので，前定理 (3) より結論を得る． □

6.3.6. ルレイ・スペクトル系列

ここでは，2 重複体を利用してルレイ・スペクトル系列を構成する．なお，命題 6.3.4 を用いる別のトリッキーな構成法が，[石井] p.62 〜 67 に紹介されている．

定理 6.3.16. $(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$, $(Z, \mathfrak{O}_Z)$ は環付き空間で，T_1 は $\mathfrak{O}_X$-加群の圏から $\mathfrak{O}_Y$-加群の圏への左半完全共変関手，T_2 は $\mathfrak{O}_Y$-加群の圏から $\mathfrak{O}_Z$-加群の圏への左半完全共変関手とする．さらに，任意の移入的 $\mathfrak{O}_X$-加群 $\mathfrak{I}$ と任意の $i \geqq 1$ に対して $R^iT_2(T_1(\mathfrak{I})) = 0$ が成り立つと仮定する．すると，スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = R^pT_2(R^qT_1(\mathfrak{F})) \implies E^n = R^n(T_2 \circ T_1)(\mathfrak{F})$$

が存在する．

証明. $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathcal{F}$ の移入的分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}_X^0 \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{I}_X^1 \xrightarrow{d_X^1} \mathcal{I}_X^2 \xrightarrow{d_X^2} \cdots$$

をひとつとる．$\mathcal{F}_Y = T_1(\mathcal{F})$, $\mathcal{I}_Y^i = T_1(\mathcal{I}_X^i)$, $d_Y^i = T_1(d_X^i)$ とすると，完全とは限らない系列

$$0 \xrightarrow{d_Y^{-1}} \mathcal{I}_Y^0 \xrightarrow{d_Y^0} \mathcal{I}_Y^1 \xrightarrow{d_Y^1} \mathcal{I}_Y^2 \xrightarrow{d_Y^2} \cdots$$

が得られ，$R^iT_1(\mathcal{F}) = \operatorname{Ker} d_Y^i / \operatorname{Im} d_Y^{i-1}$ である．定理 6.3.11a より，次の Claim 1 が証明される．

Claim 1: 各非負整数 q に対し，$\mathcal{I}_Y^q$ の移入的分解

$$(I_q): \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y^q \xrightarrow{\varepsilon^q} \mathcal{J}_Y^{0,q} \xrightarrow{\delta_Y^{0,q}} \mathcal{J}_Y^{1,q} \xrightarrow{\delta_Y^{1,q}} \mathcal{J}_Y^{2,q} \xrightarrow{\delta_Y^{2,q}} \cdots$$

で以下の条件を満たすものが存在する．

(1) 各非負整数 p, q に対し，準同型写像 $d_Y^{p,q}: \mathcal{J}_Y^{p,q} \longrightarrow \mathcal{J}_Y^{p,q+1}$ が存在し，

$$d_Y^{p,q+1} \circ d_Y^{p,q} = 0, \quad d_Y^{p+1,q} \circ \delta_Y^{p,q} = \delta_Y^{p,q+1} \circ d_Y^{p,q}$$

を満たす．

(2) 各 p, q について，$\operatorname{Ker} d_Y^{p,q}$, $\operatorname{Im} d_Y^{p,q}$ は移入的である．

(3) $\mathcal{G}_Y^{p,q} = \operatorname{Ker} d_Y^{p,q} / \operatorname{Im} d_Y^{p,q-1}$ とし，$\delta_Y^{p,q}$ から誘導される写像を $\overline{\delta}_Y^{p,q}: \mathcal{G}_Y^{p,q} \to \mathcal{G}_Y^{p+1,q}$ とすると，完全系列

$$0 \longrightarrow R^qT_1(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{G}_Y^{0,q} \xrightarrow{\overline{\delta}_Y^{0,q}} \mathcal{G}_Y^{1,q} \xrightarrow{\overline{\delta}_Y^{1,q}} \mathcal{G}_Y^{2,q} \xrightarrow{\overline{\delta}_Y^{2,q}} \mathcal{G}_Y^{3,q} \xrightarrow{\overline{\delta}_Y^{3,q}} \cdots$$

は，$R^qT_1(\mathcal{F}) = \operatorname{Ker} d_Y^q / \operatorname{Im} d_Y^{q-1}$ の移入的分解になっている．

$C^{p,q} = T_2(\mathcal{J}_Y^{p,q})$, $\delta_Z^{p,q} = T_2(\delta_Y^{p,q})$, $d_Z^{p,q} = T_2(d_Y^{p,q})$ とすると，2 重複体 $C = \{C^{p,q}, \delta_Z^{p,q}, d_Z^{p,q}\}$ が得られる．これより，スペクトル系列 $E_2^{p,q} = H_1^p(H_2^q(C)) = H_\delta^p(H_d^q(C)) \Longrightarrow E^n = H^n(C)$ を構成できる．

Claim 2: $E_2^{p,q} = H_\delta^p(H_d^q(C)) \cong R^pT_2(R^qT_1(\mathcal{F}))$ を示そう．

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_Y^{p,q-1} \longrightarrow \operatorname{Ker} d_Y^{p,q} \longrightarrow \mathcal{G}_Y^{p,q} \longrightarrow 0$$

は移入的加群の完全系列だから，これに T_2 を作用させて得られる

$$0 \longrightarrow T_2(\operatorname{Im} d_Y^{p,q-1}) \longrightarrow T_2(\operatorname{Ker} d_Y^{p,q}) \longrightarrow T_2(\mathcal{G}_Y^{p,q}) \longrightarrow 0$$

も完全系列で，

$$\operatorname{Ker} d_Z^{p,q} / \operatorname{Im} d_Z^{p,q-1} = T_2(\operatorname{Ker} d_Y^{p,q}) / T_2(\operatorname{Im} d_Y^{p,q-1}) \cong T_2(\mathcal{G}_Y^{p,q})$$

となる．$d_0^{p,q} = d_Z^{p,q}: C^{p,q} \longrightarrow C^{p,q+1}$ だから，

$$E_1^{p,q} \cong \operatorname{Ker} d_0^{p,q} / \operatorname{Im} d_0^{p,q-1} \cong T_2(\mathcal{G}_Y^{p,q})$$

である．したがって，

$$H^p_\delta(H^q_d(C)) \cong H^p_\delta(T_2(\mathfrak{G}^{p,q}_Y)) = R^pT_2(R^qT_1(\mathfrak{F}))$$

となる．

Claim 3: $E^n \cong R^n(T_2 \circ T_1)(\mathfrak{F})$ を示そう．

2 重複体 C から定まるもうひとつのスペクトル系列

$$\tilde{E}^{q,p}_2 = H^q_2(H^p_1(C)) = H^q_d(H^p_\delta(C)) \implies E^n = H^n(C)$$

を考える．$p \geqq 1$ に対し，$R^pT_2(\mathfrak{I}^q_Y) = R^pT_2(T_1(\mathfrak{I}^q_X)) = 0$ だから，$p \geqq 1, q \geqq 0$ に対し，$\operatorname{Ker}\delta^{p,q}_Z = \operatorname{Im}\delta^{p-1,q}_Z$ が成り立つ．したがって，$p \geqq 1, q \geqq 0$ に対し $\tilde{E}^{q,p}_1 = 0$ であり，$\tilde{E}^{q,p}_2 = 0$ である．よって，定理 6.3.3(4) より，

$$E^q \cong \tilde{E}^{q,0}_2 = H^q_\delta(H^0_d(C)) \cong H^q_2(T_2(\mathfrak{I}^*_Y)) = R^q(T_2 \circ T_1)(\mathfrak{F})$$

が成り立つ．したがって，$H^q(C) \cong R^q(T_2 \circ T_1)(\mathfrak{F})$ である． □

系 6.3.17. $f\colon(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, $g\colon(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ は環付き空間の写像とする．このとき，スペクトル系列

$$E^{p,q}_2 = R^pg_*(R^qf_*\mathfrak{F}) \implies E^n = R^n(g \circ f)_*(\mathfrak{F})$$

が存在する．これを，**ルレイ・スペクトル系列** (Leray spectral sequence) という．特に，Z が 1 点の場合を考えると，次のルレイ・スペクトル系列が存在する．

$$E^{p,q}_2 = H^p(Y, R^qf_*\mathfrak{F}) \implies E^n = H^n(X, \mathfrak{F})$$

証明. $T_1 = f_*, T_2 = g_*$ として定理 6.3.16 を適用するには，任意の移入的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathfrak{I}$ と任意の $i \geqq 1$ に対して $R^ig_*(f_*(\mathfrak{I})) = 0$ が成り立つことを証明すればよいが，それは，補題 6.3.12a からわかる．

系 6.3.18. スペクトル系列

$$E^{p,q}_2 = H^p\big(X, \mathcal{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})\big) \implies E^n = \operatorname{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$$

が存在する．

証明. $X = Y$, $Z = (1\text{ 点})$ とする．さらに，$\mathfrak{F}$ を固定して，$T_1(\mathfrak{G}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ とおき，$T_2(\mathfrak{H}) = H^0(X, \mathfrak{H})$ として定理 6.3.16 を適用する．任意の移入的 $\mathcal{O}_X$-加群 $\mathfrak{I}$ と任意の $i \geqq 1$ に対して $R^iT_2(T_1(\mathfrak{I})) = 0$ であることを証明しよう．それには，$\mathfrak{G}$ が移入的のとき，$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ は脆弱であることを証明すればよい．

$U \subset X$ を勝手な開集合とする．自然な全射 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathfrak{F}|_U, \mathfrak{G}|_U)$ が存在することを示せばよい．$f_U \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathfrak{F}|_U, \mathfrak{G}|_U)$ をとる．$j\colon U \to X$ を包含写

像として，$\mathcal{F}_U = j_!(\mathcal{F}|_U)$ とする．f_U は $\mathcal{O}_X$-加群の準同型 $\tilde{f}\colon \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}$ を誘導する．$0 \to \mathcal{F}_U \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}$ は完全系列で，$\mathcal{G}$ は移入的だから，ある $f_X\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ で $f_X \circ \iota = \tilde{f}$ を満たすものが存在する．この f_X の像が f_U である． □

● 初版 p.307. 命題 6.4.1 の証明の 2 〜 3 行目. (新装版では修正済み)

誤:

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} dx_i \wedge dx_j$$
$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

正:

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} dx_j \wedge dx_i$$
$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0$$

● 初版 p.308 〜 309, 新装版 p.310 〜 311. 第 6.4.3 項

第 6.4.3 項「ドラームの定理」の次の行から定理 6.4.5 の直前の行までの説明を，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

X は向きづけられた n 次元コンパクト可微分多様体，M は X の r 次元閉部分可微分多様体であるとする．X の適当な単体分割をとれば，$M \in Z_r(X, \mathbb{R})$ とみなせる．第 6.1.3 項で説明したように，$M \in Z_r(X, \mathbb{R})$ の $B_r(X, \mathbb{R})$ を法とする同値類を $[M] \in H_r(X, \mathbb{R})$ と書くことにする．$H_r(X, \mathbb{R})$ は，何個かの r 次元閉部分多様体の同値類で生成される．

また，$\omega \in Z^r_{dR}(X, \mathbb{R})$ の $B^r_{dR}(X, \mathbb{R})$ を法とする同値類を $[\omega] \in H^r_{dR}(X, \mathbb{R})$ と書く．以下,

$$\int_{[M]} [\omega] = \int_M \omega \tag{6.4}$$

が，$[M]$, $[\omega]$ の代表元 M, ω の選び方に依存せずに，矛盾なく定義できることを示す．

まず，$[\omega] = [\omega']$ の場合に，$\displaystyle\int_M \omega = \int_M \omega'$ が成り立つことを示す．$[\omega] = [\omega']$ ならば，ある $\eta \in C^{r-1}_{dR}(X, \mathbb{R})$ により，$\omega - \omega' = d\eta$ と書ける．η の定義域を M に制限

すれば $\eta \in C_{dR}^{r-1}(M, \mathbb{R})$ と考えられるので，ストークスの定理から，$\displaystyle\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$ が成り立つ．しかし，コンパクト多様体は境界を持たないので $\partial M = 0$ であり，

$$\int_M (\omega - \omega') = \int_M d\eta = \int_\phi \eta = 0$$

となる．同様に，$[M] = [M']$ のとき，X の単体分割を適当に取り直せば，ある $\sigma \in C_{r+1}(X, \mathbb{R})$ により，$M - M' = \partial\sigma$ と書ける．ここで，σ は何個かの $(r+1)$-単体の合併集合と同一視できる．$\omega \in Z_{dR}^r(X, \mathbb{R})$ だから $d\omega = 0$ で，

$$\int_M \omega - \int_{M'} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega = 0$$

となる．したがって，(6.4) が矛盾なく定義できる．

● 初版 p.313, 新装版 p.315. 下から 4 行目

誤: Y における W の閉包が Y に一致するもが存在する．

正: Y における W の閉包が Y に一致するものが存在する．

● 初版 p.314. 定義 6.5.6 の 1 〜 2 行目. (新装版では修正済み)

誤: $Y_1, \ldots, Y_r$ を $n-1$ 次元の X 内の解析多様体として，

正: $Y_1, \ldots, Y_r$ を X の閉集合であるような $n-1$ 次元の解析多様体として，

● 初版 p.314, 新装版 p.316. 定義 6.5.6 の 7 行目

誤: 解析的正則写像 $f\colon (X-U) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を X 上の

正: 解析的正則写像 $f\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を X 上の

● 初版 p.314, 新装版 p.316. 定義 6.5.6 の後

定義 6.5.6 の後に以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

命題 6.5.6b. $(X, \mathcal{O}_X)$ は環付き空間，$\mathcal{F}$ は有限ランクの局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群，$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ は $\mathcal{O}_X$-加群とする．このとき，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}\big) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})\big)$$

が成り立つ．特に，X が非特異代数多様体または複素多様体で，D_1, D_2, D が X 上の因子のとき，以下が成り立つ．

$$\mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$$
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\big(\mathcal{O}_X(D_1), \mathcal{O}_X(D_2)\big) \cong \mathcal{O}_X(D_2 - D_1)$$

証明は簡単だが，自力で証明できない人は，[Ha] 日本語訳第 II 章演習問題 5.1(b), (c) の解答を見よ．

● 初版 p.315, 新装版 p.317. 定義 6.5.8 の下の 1 〜 7 行目

誤:

もし，$\mathrm{Rat}^{hol}(X) \neq \mathbb{C}$ ならば，定数でない $f \in \mathrm{Rat}^{hol}(X)$ をとり，X 上の有理型微分形式

$$\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

が定義できる．このとき，$K_X = \mathrm{div}(\omega)$ とすると，K_X は線形同値を除いて一意的に定まる．K_X を X の**標準因子**という．

$\mathrm{Rat}^{hol}(X) = \mathbb{C}$ となってしまうようなコンパクト複素多様体 X 上では，上のような K_X が定義できないが，Ω^1_X は定義できるので，可逆層 $\det \Omega^1_X$ で代用する．

正:

X が複素多様体のときも，$0 \neq f \in \mathrm{Rat}^{hol}(X)$ をとり，X 上の有理型微分形式

$$\omega = f\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

が定義できる．このとき，$K_X = \mathrm{div}(\omega)$ とすると，K_X は線形同値を除いて一意的に定まる．K_X を X の**標準因子**という．

● 初版 p.315. 定理 6.5.9 の 1 行目. (新装版では修正済み)

誤: 1 次元コンパクト複素多様体 (リーマン面) X は，X は非特異射影代数曲線と複素多様体として同型になる．

正: 1 次元コンパクト複素多様体 (リーマン面) は，非特異射影代数曲線と複素多様体として同型になる．

● 初版 p.316, 新装版 p.318. 第 6.5.5 項の 11 行目

誤: X を複素多様体体と考えると，

正: X を複素多様体と考えると，

● 初版 p.317, 新装版 p.319. 定義 6.6.1 項の 3 行目

誤: (g_{ij} は複数値 C^∞ 級関数)

正: (g_{ij} は複素数値 C^∞ 級関数)

● 初版 p.317, 新装版 p.319. 定義 6.6.1 項の 14 行目

誤: $\{\Omega_U\}_U$ は X 上の (1, 1)-形式を定める．

正: $\Omega = \{\Omega_U\}_U$ は X 上の (1, 1)-形式を定める．

● 初版 p.318, 新装版 p.320. 第 6.6.2 項の 8 行目

初版誤: $J^c = \{j'_1, \ldots, j'_{n-q}\}$ $(j'_1 < \cdots < j'_{n-p})$,

新装版誤: $J^c = \{j'_1, \ldots, j'_{n-q}\}$ $(j'_1 < \cdots < j'_{n-p})$ とし，

正: $J^c = \{j'_1, \ldots, j'_{n-q}\}$ $(j'_1 < \cdots < j'_{n-q})$ とし，

● 初版 p.320, 新装版 p.322. 定義 6.6.7 の 2 行目

誤: (harmnic (p, q)-form) という．

正: (harmonic (p, q)-form) という．

● 初版 p.321, 新装版 p.323. 定理 6.6.9 の証明の 6 〜 9 行目

以下のように書き直して下さい．少し説明を丁寧にしました．

[差し替え原稿]

0 となる．したがって，自然な写像

$$\varphi : \mathcal{H}^{p,q}(X) \longrightarrow H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X)$$

が存在する．$\omega \in \mathcal{H}^{p,q}(X)$ が $\omega = \overline{\partial}\eta$ と書ければ，$(\omega, \omega) = (\eta, \overline{\delta}\omega) = 0$ なので $\omega = 0$ となる．よって，φ は単射である．

さて，$\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(X)$ は，

$$\omega = K(\omega) + \overline{\partial}(\overline{\delta}(G(\omega))) + \overline{\delta}(\overline{\partial}(G(\omega)))$$

と分解できる．このことと，内積を使った簡単な議論で

● 初版 p.322, 新装版 p.324. 定義 6.7.1 の 4 行目

誤: (Kähler manifld) という．

正: (Kähler manifold) という．

● 初版 p.322, 新装版 p.324. 定理 6.7.2 の証明

以下の原稿と差し替えて下さい．微妙に表現を改めました．

[差し替え原稿]

証明. $\mathbb{P}^n \supset \mathbb{C}^n : (x_1, \ldots, x_n)$ において，

$$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial \overline{x}_j} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} \right) \right) dx_i \, d\overline{x}_j$$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} \right) \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_i} x_j \, dx_i \wedge d\overline{x}_j}{\left(1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} \right)^2}$$

とおくと, $d\Omega = 0$ であり，これがケーラー計量を与える. □

● 初版 p.324, 新装版 p.326. 定理 6.7.9 の 3 行目
以下の文を削除して下さい (重複があるので).
削除: $h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X)$ と書くことにすれば,

● 初版 p.325, 新装版 p.327. 定義 6.8.1 の 5 行目
誤: トーラース
正: トーラス

● 初版 p.325, 新装版 p.327. 定義 6.8.1 の 9 行目
誤: $x_i = \varphi_{U_0}(\tilde{x}_i)$ とおくと,
正: $x_i = \tilde{x}_i \circ (\pi|_{U_0})^{-1}$ とおくと,

● 初版 p.325, 新装版 p.327. 最終行 (定義 6.8.3 の 9 行目)
旧: 全射正則写像 $\varphi\colon T \to T'$ が存在するとする.
新: 解析的全射正則写像 $\varphi\colon T \to T'$ が存在するとする.

● 初版 p.326, 新装版 p.328. 5 行目 (定義 6.8.3 の最終行)
誤: T と T' は**同種** (isogeny) であるという.
正: T と T' は**同種** (isogenous) であるといい，φ を**同種写像** (isogeny) という.

● 初版 p.326, 新装版 p.328. 第 6.8.2 項の見出し
誤: 6.8.2　ネロン・ゼベリ群
正: 6.8.2　ネロン・セベリ群

● 初版 p.326, 新装版 p.328. 第 6.8.2 項の 3 行目
誤: 局所定数層を $\mathfrak{F}$ を $\mathbb{Z}_X$ と書く.
正: 局所定数層 $\mathfrak{F}$ を $\mathbb{Z}_X$ と書く.

● 初版 p.326, 新装版 p.328. 第 6.8.2 項の 4 行目
誤: $k \in \mathbb{Z}_X$ に対し,
正: $k \in \mathbb{Z}_X(U) = \mathbb{Z}$ に対し,

● 初版 p.326 〜 327, 新装版 p.328 〜 329. 定義 6.8.5 から注意 6.8.6 の直前まで
以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定義 6.8.5. 解析的位相でチェック・コホモロジーを考えると,

$$H^i(X,\,\mathbb{Z}_X) \cong H^i(X,\,\mathbb{Z})$$

となる．このとき,

$$\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Ker}\left(c_1\colon H^1((\mathcal{O}_X^{hol})^\times) \to H^2(\mathbb{Z}_X)\right) \cong H^1(X,\,\mathcal{O}_X)/H^1(X,\,\mathbb{Z})$$

と定義する．$H^1(\mathcal{O}_X^{hol}) = \mathbb{C}^q$ とすれば，系 6.7.8, 定理 6.7.9 より $\dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathbb{C}) = 2q$ なので，$H^1(\mathbb{Z}_X) \cong \mathbb{Z}^{2q}$ で，$\mathrm{Pic}^0(X)$ は q 次元複素トーラスになる．$\mathrm{Pic}^0(X)$ を X の**ピカール多様体** (Picard variety) という．

また，$NS(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X) \subset H^2(X,\,\mathbb{Z})$ を**ネロン・セベリ群** (Neron-Severi group) という．

また，$D \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し $c_1(D) \in NS(X) \subset H^2(X,\,\mathbb{Z})$ を，D の第 1 **チャーン類** (Chern class; Chern Shing-Shen= 陳省身) という．

X 内の曲線 C と $n-1$ 次元部分多様体 D に対して，第 6.1.10 項で定義したように交点数 $D \cdot C$ が定義できるが，代数多様体の場合の記号にあわせて，以下, $(D \cdot C)_X = D \cdot C$ と書くことにする．定理 6.1.20 より，X が射影代数曲面の場合には，この交点数は第 5.1 節で定義された交点数と一致する．

交点数の定義を少し復習しておこう．D の線形同値類は $\mathrm{Pic}(X)$ の元を定めるが，その c_1 による像を $c_1(D) \in H^2(X,\,\mathbb{Z})$ と書く．これは，D から定まる $H_{2n-2}(X,\,\mathbb{Z})$ の元の，ポアンカレー双対 $\mu_{2n-2}\colon H_{2n-2}(X,\,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\,\mathbb{Z})$ による像と一致する．正射影 $H^2(X,\,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\,\mathbb{Z})_{free}$ による $c_1(D)$ の像を $h(D)$ と書くことにしよう．同様に，C から定まる $H^{2n-2}(X,\,\mathbb{Z})_{free}$ の元を $h(C)$ とする．すると,

$$(D \cdot C)_X = h(D) \cup h(C) \in H^{2n}(X,\,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

である．ポアンカレーの双対定理 (定理 6.1.19) より，このカップ積はユニモジュラーであった．

定義 6.8.5b. D_1, D_2 は X 上の因子とする．X 内の任意の曲線 C に対して $(D_1 \cdot C)_X = (D_2 \cdot C)_X$ が成り立つとき，D_1 と D_2 は**算術的同値**であるといい，$D_1 \equiv D_2$ と書く．$D_1 \sim D_2$ (線形同値) ならば $D_1 \equiv D_2$ である．そこで, $N^1(X) = \mathrm{Pic}(X)/\equiv$ と定義する．また，$\rho(X) = \dim_{\mathbb{R}} N^1(X)$ と書く．これは，定義 5.4.5 の自然な拡張になっている．

カップ積 $H^2(X,\mathbb{Z})_{free}\times H^{2n-2}(X,\mathbb{Z})_{free}\longrightarrow\mathbb{Z}$ はユニモジュラーだから非退化なので，

$$D_1\equiv D_2\iff h(D_1)=h(D_2)$$

が成り立つ．よって，$N^1(X)=NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ である．$H^2(X,\mathbb{Z})$ は有限生成アーベル群だから，$NS(X)$ も有限生成アーベル群であり，$N^1(X)$ は有限次元実ベクトル空間になる．したがって，$\rho(X)=\dim_{\mathbb{R}}N^1(X)<\infty$ である．よって，以下の定理が得られた．

定理 6.8.5c. X はコンパクト複素多様体とする．すると，

$$N^1(X)\cong NS(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R},\qquad \rho(X)=\dim_{\mathbb{R}}N^1(X)<\infty$$

である．

● 初版 p.328, 新装版 p.330. 命題 6.8.7

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 6.8.7a. (1) $\alpha^*\colon H^0(T,\Omega_T^1)\to H^0(X,\Omega_X^1)$ は同型写像である．

(2) $\alpha(X)$ を含む $T=\mathbb{C}^q/L$ の部分トーラスは T 以外に存在しない．とくに，$q\geqq 1$ のとき，$\dim\alpha(X)\geqq 1$ である．

(3) X が複素トーラスならば，$\mathrm{Alb}(X)\cong X$ である．

(4) A が複素トーラスで，正則写像 $\beta\colon X\to A$ が存在すれば，ある正則写像 $\varphi\colon T\to A$ で $\beta=\varphi\circ\alpha$ を満たすものが一意的に存在する．

証明. (1) $H^0(T,\Omega_T^1)$ の基底 $dx_1,\dots dx_q$ に対し，定義から $\alpha^*dx_i=\omega_i$ である．

(2) もし $\alpha(X)$ を含む部分トーラス $T_0\subsetneqq T$ があると，全射 $\alpha^*\colon H^0(T_0,\Omega_{T_0}^1)\to H^0(X,\Omega_X^1)$ が存在することになり矛盾する．

(3) $\mathrm{Alb}(X)$ の定義からすぐわかる．

(4) $A\cong H^0(A,\Omega_A^1)^\vee/H_1(A,\mathbb{Z})_{free}$ で，自然な写像 $H^0(A,\Omega_A^1)\xrightarrow{\beta^*}H^0(X,\Omega_X^1)\cong H^0(T,\Omega_T^1)$ が存在するから，求める φ が一意的に構成される． □

● 初版 p.329, 新装版 p.331. 定義 6.8.9 の 7 行目

誤: $U_Y\subset g^{-1}(Z)$

正: $U_Y\subset g^{-1}(U_Z)$

● 初版 p.329 〜 330, 新装版 p.331 〜 332. 定義 6.8.11

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 6.8.11a. X, Y は代数多様体または複素多様体，$\pi: Y \to X$ は全射有限正則写像とする．

$\mathrm{Rat}(Y)$ が $\mathrm{Rat}(X)$ のガロア拡大であるとき，$\pi: Y \to X$ は**ガロア被覆**であるという．さらに，$\mathrm{Aut}(Y/X)$ がアーベル群であるとき，$\pi: Y \to X$ は**アーベル被覆**であるという．さらに，$\mathrm{Aut}(Y/X)$ が巡回群 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に同型なとき，$\pi: Y \to X$ を X の m 次**巡回被覆** (cyclic covering) という．

定義 6.8.11b. X, Y は非特異射影多様体，$\varphi: X \to Y$ は有限写像とする．Y の超曲面 E に対し，因子としての引き戻しを $\varphi^* E = \sum_{i=1}^{r} e_i D_i$ (D_i は X の超曲面) とおくとき，$e_i \geqq 2$ であれば φ は D_i で**分岐**しているといい，e_i を E_i の**分岐指数**という．このような D_i 上の点を**分岐点**という．

X, Y は非特異代数多様体または複素多様体とする．正則写像 $\varphi: X \to Y$ が**エタール** (étale) であるとは，$\varphi: X \to Y$ が全射有限写像で，X の任意の点 $P \in X$ に対し，P の十分小さい解析的開近傍 $P \in U \subset X$ を選べば，$\varphi|_U: U \to \varphi(U)$ が同型写像になることをいう．

正則写像 $\varphi: X \to Y$ が**平坦** (flat) であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が平坦な $\mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$-加群であることをいう．

命題 6.8.11c. X, Y は非特異代数多様体または複素多様体，$\varphi: X \to Y$ は正則写像とする．このとき，φ がエタールであるための必要十分条件は，φ が平坦かつ不分岐であることである．

証明は，[Ha] 日本語版の第 III 章演習問題 10.3 の解答を見よ．本書でこの命題は使わない．

定理 6.8.11d. X, Y は非特異射影多様体，$\varphi: X \to Y$ は有限写像とする．

(1) φ の分岐点全体の集合は X 上のある因子の台になる．

(2) $P \in X$ が分岐点でなければ，P の十分小さい解析的開近傍 U を選べば，$\varphi|_U: U \to \varphi(U)$ は同型写像になる．

(3) X 上の因子 $R \geqq 0$ で，$K_X = \varphi^* K_Y + R_\varphi$ を満たすものが存在する．また，$\mathrm{Supp}\, R$ は φ の分岐点全体の集合と一致する．

R_φ を φ の**分岐因子**という．$R_\varphi = 0$ のとき φ は**不分岐**であるという，φ が不分岐であることは φ がエタールであることと同値である．

証明. $d = \deg \varphi$, $R_\varphi = K_X - \varphi^* K_Y$ とする．適当な局所座標系を用いれば，φ は多項式 $y_i = f_i(x_1,\ldots, x_n)$ $(i = 1,\ldots, n)$ によって定義される．Y 上の一般の点 $\mathbf{y} = (y_1,\ldots, y_n)$ に対しては，この連立方程式は d 個の相異なる解 $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_d$ を持つ．この連立方程式が d 個未満の解しか持たないような $\mathbf{y} \in Y$ 全体の集合 Z は，ある種の判別式 (ヤコビ行列式) の零点集合であるので，X 上のある因子の台になる．

$\mathbf{y} \in Y - Z$ のとき，$\mathbf{y}$ の単連結な解析的開集合 W を $W \cap Z = \phi$ となるようにとれば，$\mathbf{y}$ が W を連続的に動くとき，連立方程式の解 $\mathbf{x}_1,\ldots, \mathbf{x}_d$ はそれぞれ互いに交わらない解析的開集合 $U_1,\ldots, U_d \subset X$ 上を動く．そして，$U_i \cong W$ である．この場合，$\varphi^* K_Y|_W \sim K_X|_{U_i}$ であるので，点 $\mathbf{x}_i$ は R_φ の成分として現れる因子に含まれない．

Z に含まれる超曲面 E をとり，Y の超曲面 E に対し，因子としての引き戻しを $\varphi^* E = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} e_i D_i$ (D_i は X の超曲面) とする．P を D_i の一般の点とし $Q = \varphi(P)$ とする．Q が E の非特異点であるように P を選んでおく．Q の局所座標系 $(y_1,\ldots, y_n)$ を E の定義方程式が $y_1 = 0$ であるように選ぶ．P の近傍 U_i では $\varphi^*(E|_W) = e_i D_i|_{U_i}$ であるので，P の局所座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ を以下の条件を満たすようにとることができる．

(i) U_i における D_i の定義方程式は $x_1 = 0$ である．

(ii) $\varphi^* y_1 = x_1^{e_i}$ である．

(iii) $2 \leqq j \leqq n$ に対しては $\varphi^* y_j = x_j$ である．

すると，定理 3.5.2 の証明と同様にして，$(K_X)|_{U_i} \sim \varphi^*(K_Y|_W) + (e_i - 1)(D_i|_{U_i})$ であることがわかる．$R_E = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (e_i - 1) D_i$ とし，$Z = E_1 \cup \cdots \cup E_m$ とすれば，今の考察から，$R_\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} R_{E_i}$ であることがわかる．

以上をあわせて，(1), (2), (3) がわかる．また，(2) より不分岐とエタールの同値性がわかる． □

● 初版 p.330 〜 331, 新装版 p.332 〜 333. 定理 6.8.12

定理 6.8.12 を下記の原稿と差し替えて下さい．$B = 0$ の場合の記述に不備があり，$B \neq 0$ の場合と $B = 0$ の場合に分けて書くことにしました．

[差し替え原稿]

定理 6.8.12. X は非特異射影多様体 (あるいは複素多様体) で，m は自然数,

$D \neq 0$ は X 上の因子とする．

(1) ある因子 $0 \neq B \in |mD|$ は特異点を持たない (既約でなくてもよいが被約で各既約成分は交わらない) と仮定する．すると，ある非特異射影多様体 (あるいは複素多様体) Y による巡回被覆 $\pi: Y \to X$ が存在し，$\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を満たす．さらに，$E = \pi^{-1}(B)$ とすると，

$$K_Y \sim \pi^*(K_X + (m-1)D), \quad \pi^* D \sim E$$

を満たす．$\pi: Y \to X$ を E **で分岐する** m **重被覆**という．

(2) $mD \sim 0$ かつ，$1 \leqq i < m$ に対しては $iD \not\sim 0$ であるとする．すると，ある非特異射影多様体 (あるいは複素多様体) Y による巡回被覆 $\pi: Y \to X$ が存在し，$\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ を満たす．さらに，$K_Y \sim \pi^* K_X$, $\pi^* D = 0$ を満たす．$\pi: Y \to X$ を**不分岐** m **重被覆**という．

証明. (1) $B = \mathrm{div}(f) + mD$ となるような $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(mD))$ をとる．$B \cap U \neq \phi$ であるような十分小さい X の座標開集合 U において，$B \cap U$ の定義方程式を $h = 0$ とし，$(h, x_2, \ldots, x_n)$ という形の U の局所座標系を選ぶ．$R_U = H^0(U, \mathcal{O}_X)$ とする．$g \in H^0(U, \mathcal{O}_X(D))$ と $0 \neq a \in H^0(U, \mathcal{O}_X^\times)$ を適当に選んで，

$$f = ahg^m, \quad H^0(U, \mathcal{O}_X(kD)) = R_U \cdot g^k$$

と書くことができる．

$$S_{U,k} = H^0(U, \mathcal{O}_X(-kD)) = R_U \cdot g^{-k}, \quad S_U = \bigoplus_{k=0}^{m-1} S_{U,k}$$

とおく．S_U は R_U-加群であるが，以下のように R_U-代数の構造を定めることができる．g^{-k} 倍写像を $\varphi_k: R_U = S_{U,0} \to S_{U,k}$ と書く．$x \in S_{U,i}$, $y \in S_{U,j}$ に対し，積 $xy \in S_U$ を以下のように定める．

$$xy = \begin{cases} \varphi_{i+j}(\varphi_i^{-1}(x)\varphi_j^{-1}(y)) \in S_{U,i+j} & (i+j < m \text{ の場合}) \\ a^{-1} f \cdot \varphi_{i+j-m}(\varphi_i^{-1}(x)\varphi_j^{-1}(y)) \in S_{U,i+j-m} & (i+j \geqq m \text{ の場合}) \end{cases}$$

すると，$a^{-1} f g^{-m} = h$ だから $S_U \cong R_U[T]/(T^m - h)$ となる．これは体 $K = \mathrm{Rat}(X)[T]/(T^m - h)$ の部分環なので整域である．S_U を座標環とするアフィン代数多様体 (または複素多様体) を Y_U とする．T の同値類を t とするとき，$(t, x_2, \ldots, x_n)$ は Y_U の局所座標系なので，Y_U は非特異である．

W が X のアフィン開集合 (または解析的開集合) で $W \subset U$ のとき，包含写像 $R_U \subset R_W$ を通して $S_U \subset S_W$ とみなせ，$Y_W \subset Y_U$ とみなせる．$W = U_1 \cap U_2$ のとき，この $Y_W \subset Y_{U_1}$, $Y_W \subset Y_{U_2}$ という同一視により Y_{U_1} と Y_{U_2} を貼り合わせ

$Y_{U_1} \cup Y_{U_2}$ を作る．このようにして，X の開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^s$ から，$Y = Y_{U_1} \cup \cdots \cup Y_{U_s}$ を作る．

$R_U \subset S_U$ より，全射有限正則写像 $\pi: Y \to X$ が構成でき，$\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \mathrm{Aut}(Y_U/U) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ となる．

各 Y_U 上で $t = 0$ で定まる Y の超曲面を E とすると，$\pi^*D = \mathrm{div}(\pi^*g) \sim \mathrm{div}(t) = mE$ である．

また，$dh = mt^{m-1}dt$ より，

$$\pi^*(dh \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = mt^{m-1} \cdot dt \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

である．定理 3.5.2 の証明と同様にして，$K_Y \sim \pi^*K_X + (m-1)E$ が得られる．

(2)　$\mathcal{O}_U(D) = \mathcal{O}_U \cdot g_U$ となるような $g_U \in \mathrm{Rat}(X)$ をとる．$mD \sim 0$ より U に依存しない $f_X \in \mathrm{Rat}(X)$ と $a_U \in H^0(U, \mathcal{O}_X^\times)$ が存在して，$a_U g_U^m = f_X$ となる．$S_U = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{m-1} R_U \cdot g_U^{-k}$ とおき，(1) と同じ要領で S_U に積を定めると S_U は R_U-代数になり，整域になる．S_U を座標環とするアフィン代数多様体 (または複素多様体) を Y_U とする．あとは，(1) の証明と同様である．□

● 初版 p.331, 新装版 p.333. 参考 6.8.13 の直後

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

定理 6.8.13b.　X は n 次元非特異射影多様体とし，X 上の因子 $D = \displaystyle\sum_{i=1}^r S_i$ (S_i は X の超曲面) は正規交叉 (定義 6.8.19 参照) であるとする．$m_1, \ldots, m_r$ は自然数とする．すると，非特異射影多様体 Y と全射有限写像 $\pi: Y \to X$ で，以下の (1), (2) を満たすものが存在する．

(1) $\mathrm{Rat}(Y)$ は $\mathrm{Rat}(X)$ のアーベル拡大体で，そのガロア群を $G = \mathrm{Gal}(\mathrm{Rat}(Y)/\mathrm{Rat}(X))$ とするとき，G は Y に作用して $X \cong Y/G$ となる．

(2) すべての成分の係数が 1 である Y 上の因子 (被約因子) E_i が存在して，$\pi^*D_i = m_r E_i$ となる．さらに，$\displaystyle\sum_{i=1}^r E_i$ は正規交叉である．

証明は，[川又] 定理 4.3.1 を見よ．

● 初版 p.332, 新装版 p.334. 定理 6.8.14 の後の 2 〜 3 行目

誤: U を X の空でないアフィン開集合 $D = X - U$ とする．

正: $U = D_+(F)$ を X の空でないアフィン開集合, $D = X - U$ とする.

● 初版 p.333. 11 行目. (新装版では修正済み)
誤: ただし，X が非特異でも X/G は特異点と持つことがある.
正: ただし，X が非特異でも X/G は特異点を持つことがある.

● 初版 p.333 〜 334, 新装版 p.335 〜 336. 定理 6.8.16.

定理 6.8.16 の証明を追加します．かわりに，系 6.8.17 の直後の 1 行 (証明の参照) を削除して下さい．

[追加原稿]

証明. 定理 6.5.11 より，層はすべて解析的層として考えても差し支えない．mD が非常にアンプルになるような $m \in \mathbb{N}$ をとり，非特異超曲面 $B \in |mD|$ をとる．$\pi\colon Y \to X$ を定理 6.8.12(1) のような $\pi^{-1}(B)$ で分岐する m 重被覆とする．$\mathbb{C}$ の元を局所定数関数を考え，自然な単射 $\tau\colon \mathbb{C}_Y \to \mathcal{O}_Y$ を作ると，これから $\hat{\tau}\colon H^r(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H^r(Y, \mathcal{O}_Y)$ が誘導される．$H^r(Y, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^q(Y, \Omega_Y^p)$ であるが，$\hat{\tau}$ はこのホッジ分解における正射影になる．後で証明する系 6.9.11a を用いると，

$$\pi_*\mathcal{O}_Y \cong \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathcal{O}_X(-kD), \quad \pi_*\mathbb{C}_Y \cong \mathbb{C}_X^m$$

となる．具体的にこの同型を観察しよう．$U \cap B = \phi$ となるような解析的開集合 $U \subset X$ に対し，Y の互いに交わらない解析的開集合 $W_0, \ldots, W_{m-1}$ で $\pi|_{W_k}\colon W_k \to U$ が同型であるようなものが存在し，$(\pi_*\mathcal{O}_Y)|_U = \mathcal{O}_{W_0} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{W_{m-1}}$，$\mathcal{O}_{W_k} = \mathcal{O}_U(-kD)$ と同一視できる．また，$(\pi_*\mathbb{C}_Z)|_U \cong \mathbb{C}_{W_0} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{W_{m-1}}$ である．よって，τ から誘導される $\rho\colon \pi_*\mathbb{C}_Y \to \pi_*\mathcal{O}_Y$ は $\rho_k\colon \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X(-kD)$ $(k = 0, \ldots, m-1)$ の直和に分解できる．ρ_k から導かれる写像 $\hat{\rho}_k\colon H^r(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-kD))$ は $\hat{\tau}$ の直和成分であって，$\hat{\tau}$ は全射であったから $\hat{\rho}_k$ も全射である．

$U \cap B \neq \phi$ となるような連結解析的開集合 $U \subset X$ においては，定理 6.8.12(1) の証明のように $S_U = \bigoplus_{k=0}^{m-1} S_{U,k}$ を定めれば，τ は定数関数 1 に対して $1 \in S_{U,0} \subset S_U$ を対応させる写像なので，$k \neq 0$ のとき $\rho_k(1) = 0$ であり，U 上では ρ_k はゼロ写像である．以下，$k, l \in \mathbb{N}$ とし，自然な単射 $\iota\colon \mathcal{O}_X(-kD - lB) \longrightarrow \mathcal{O}_X(-kD)$ を考える．B の外では ι は同型写像で，B と交わる連結開集合上では ρ_k がゼロ写像だから，ある層の準同型 $\mu\colon \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X(-kD - lB)$ が存在して，$\iota \circ \mu = \rho_k$ を満たす．ι, μ からコホモロジーの準同型 $H^r(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\hat{\iota}} H^r(X, \mathcal{O}_X(-kD - lB))$

$\xrightarrow{\hat{\mu}} H^r(X, \mathcal{O}_X(-kD))$ が誘導される．$\hat{\rho}_k = \hat{\mu} \circ \hat{\iota}$ は全射であったから，$\hat{\mu}$ も全射である．定理 4.2.34a とセールの双対定理より $l \gg 0$, $r < \dim X$ のとき，$H^r(X, \mathcal{O}_X(-kD - lB)) = 0$ であるから，$H^r(X, \mathcal{O}_X(-kD)) = 0$ が得られる． □

● 初版 p.335 〜 336, 新装版 p.337 〜 338. 定義 6.8.25 から第 6.8.8 項の最後まで.

定義 6.8.25 から第 6.8.8 項の最後までを，以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定義 6.8.22. X は非特異射影代数多様体，D は X 上の $\mathbb{R}$-因子とする．X 上の任意の曲線 C に対し，$(D \cdot C)_X \geqq 0$ が成り立つとき，D は**ネフ** (nef) であるという.

$c_1(D) \in H^2(X, \mathbb{R})$ の n 個のカップ積を，

$$(D^n)_X = \underbrace{c_1(D) \cup \cdots \cup c_1(D)}_{n\ \text{個}} \in H^{2n}(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

と書く．ネフな因子 D が $(D^n)_X > 0$ を満たすとき，D はネフかつ**巨大** (big) であるという．巨大の正確な定義は，次項で与える.

$Z = \sum_{i=1}^{r} a_i C_i$ (C_i は X 内の射影曲線で, $a_i \in \mathbb{R}$) という形の元を X 内の **1-サイクル**という．因子 D と 1-サイクル Z に対して，交点数 $(D \cdot Z)_X = \sum_{i=1}^{r} a_i (D \cdot C_i)_X$ が定義できる．X 内の 1-サイクル Z_1, Z_2 が，任意の因子 D に対して $(D \cdot Z_1)_X = (D \cdot Z_2)_X$ を満たすとき $Z_1 \equiv Z_2$ と書き，Z_1 と Z_2 は**算術的同値**であるという．X 内の 1-サイクルの算術的同値類全体のなす実ベクトル空間を $N_1(X)$ と書く.

$N_1(X)$ の中で，$Z = \sum_{i=1}^{r} a_i C_i$ ($a_i > 0$, $r \geqq 1$) という形の 1-サイクル全体で生成される凸錐の閉包を $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ と書く.

定理 6.8.22b. (**クライマン (Kleiman) の判定法**) X は非特異射影多様体とする．X 上の因子 D がアンプルであるための必要十分条件は，任意の $0 \neq Z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$ に対し $(D \cdot Z)_X > 0$ が成り立つことである.

証明は，[M-K] p.24 〜 45, [川又] p.117 〜 119 を見よ.

アンプルな $\mathbb{Q}$-因子の算術的同値類全体の集合の $N^1(X)$ における閉包を $\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ と書く．D_1, D_2 がアンプルならば，クライマンの判定法より，$D_1 + D_2$ もアンプルだから，$\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ は凸錐になる.

命題 6.8.23. X は n 次元非特異射影多様体とする．X 上のネフかつ巨大な $\mathbb{R}$-因子 D の算術的同値類を $[D] \in N^1(X)$ とすると，$[D] \in \overline{\mathrm{Amp}}(X)$ である．

証明. D が $\mathbb{Q}$-因子の場合に示せば十分である．X 上のアンプル因子 H を 1 つとる．クライマンの判定法から，任意の十分 0 に近い正の有理数 ε に対し，$D+\varepsilon H$ がアンプルになることがわかり，$[D+\varepsilon H] \in \mathrm{Amp}(X)$ である．ここで，$\varepsilon \to +0$ とすれば，$[D] \in \overline{\mathrm{Amp}}(X)$ が得られる． □

定理 6.8.24. (**川又・フィーベックの消滅定理**) D が X 上の (整数係数の) 因子で，D がネフかつ巨大ならば，$i \geqq 1$ に対し，$H^i(X, \mathcal{O}_X(D+K_X)) = 0$ が成り立つ．

証明は [川又]p.150 〜 151 を見よ．

● 初版 p.336．下から 4 行目 (定義 6.8.25(1) の 1 行目)．(新装版では修正済み)
誤: (1) もし，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $H^0(\mathcal{O}_X(mD))) = 0$ ならは，
正: (1) もし，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $H^0(\mathcal{O}_X(mD)) = 0$ ならば，
(閉じカッコが余計)

● 初版 p.336．下から 1 〜 2 行目 (定義 6.8.25(2))．(新装版では修正済み)
誤: (2) もし，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $h^0(\mathcal{O}_X(mD))) \leqq 1$ であって，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し，$h^0(\mathcal{O}_X(m_0D))) = 1$ ならば，$\kappa(D, X) = 0$.
正: (2) もし，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $h^0(\mathcal{O}_X(mD)) \leqq 1$ であって，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し，$h^0(\mathcal{O}_X(m_0D)) = 1$ ならば，$\kappa(D, X) = 0$.
(閉じカッコが余計なところが 2 ケ所あります)

● 初版 p.337．1 行目 (定義 6.8.25(3) の冒頭)．(新装版では修正済み)
誤: (3) $h^0(\mathcal{O}_X(mD))) \geqq 2$ となるような
正: (3) $h^0(\mathcal{O}_X(mD)) \geqq 2$ となるような
(閉じカッコが余計)

● 初版 p.337, 新装版 p.339．定理 6.8.26 の直前の行
定理 6.8.26 の直前の，以下の行を削除して下さい．
削除: 飯高次元の定義から，次の定理が容易に得られる．
(「容易」ではありません)

● 初版 p.337, 新装版 p.339．定理 6.8.26 の直後の 2 行

旧: 次の定理は本書では利用しないが，その証明に関しては，[飯高 1] 第 10 章を参照されたい．

新: 証明は，[飯高 1] 定理 10.9 を見よ．関連して，[飯高 1] 第 10 章全体を参照されたい．

● 初版 p.337, 新装版 p.339. 定理 6.8.27 の直後の行

旧: 次の予想は，**飯高予想** $C_{m,n}$ と呼ばれている．

新: 証明は [飯高 1] 定理 10.22 を見よ．次の予想は，**飯高予想** $C_{m,n}$ と呼ばれている．

● 初版 p.337, 新装版 p.339. 第 6.8.9 項の末尾

第 6.8.9 項の末尾に以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

定義 6.8.28b. X は n 次元射影代数多様体または n 次元コンパクト複素多様体, D は X 上の因子とする．因子 D が $\kappa(D, X) = \dim X$ を満たすとき，D は**巨大**であるという．

定理 6.8.28c. X は n 次元非特異射影多様体, D は X 上の因子とする．このとき，次の (1) ～ (3) は同値である．

(1) D はネフで，$\kappa(D, X) = n$ を満たす．

(2) D はネフで，$(D^n)_X > 0$ を満たす．

(3) 因子 $E \geqq 0$ を適当に選ぶと，任意の十分小さい正の有理数 $\varepsilon > 0$ に対して，$D - \varepsilon E$ はアンプルな $\mathbb{Q}$-因子になる．

証明は，[M-K] 命題 2.61 を見よ．[川又] 命題 3.4.15 も参考にされたい．

● 初版 p.339, 新装版 p.341. 下から 6 行目 (定義 6.9.2 の最後から 2 行目)

誤: $x_k^\mu = f_{\lambda\mu}^k(x_1^\lambda, \ldots, x_n^\lambda, t_1, \ldots, t_m)$

正: $x_k^\lambda = f_{\lambda\mu}^k(x_1^\mu, \ldots, x_n^\mu, t_1, \ldots, t_m)$

● 初版 p.339, 新装版 p.341. 下から 4 行目 (定義 6.9.2 の最後から 1 行後)

誤: $\dfrac{\partial}{\partial t_k} \in \mathfrak{T}_{S,0}$ に対し，

正: $\dfrac{\partial}{\partial t_k} \in T_{S,0}$ に対し，

● 初版 p.340, 新装版 p.342. 補題 6.9.3 の証明の 1 行目

誤: $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial x_j^\mu}(f_{\mu\nu}^1(\mathbf{x}^\nu, \mathbf{0}), \ldots, f_{\mu\nu}^n(\mathbf{x}^\nu, \mathbf{0}), \mathbf{0}) \frac{\partial f_{\mu\nu}^j}{\partial t_k}(\mathbf{z}^\nu, \mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}$

正: $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial x_j^\mu}(f_{\mu\nu}^1(\mathbf{x}^\nu, \mathbf{0}), \ldots, f_{\mu\nu}^n(\mathbf{x}^\nu, \mathbf{0}), \mathbf{0}) \frac{\partial f_{\mu\nu}^j}{\partial t_k}(\mathbf{x}^\nu, \mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}$

● 初版 p.341, 新装版 p.343. 定義 6.9.5 の最後から 2 行目

誤: s_0 での全微分 $(dg)_0$

正: 0 での全微分 $(dg)_0$

● 初版 p.343, 新装版 p.345. 系 6.9.11

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

系 6.9.11a. X は $n+1$ 次元非特異代数多様体，Y は n 次元非特異代数多様体で，$f\colon X \to Y$ は全射射影正則写像で，任意の $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y)$ は有限本の曲線の和集合であるとする．このとき，

(1) $y \in Y$ に対し，y に対応する $\mathcal{O}_Y$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}_y$ とし，$\mathcal{O}_{X_y} = \mathcal{O}_X / f^*\mathfrak{m}_y$ とおく．このとき，$h^i(f^{-1}(y), \mathcal{O}_{X_y})$ の値は $y \in Y$ に依存せずに一定である．

(2) m は整数，D は X 上の因子で，一般ファイバー $F = f^{-1}(y)$ 上で，$\dim_{\mathbb{C}} H^0(F, \mathcal{O}_F(D)) = m$ ならば，$f_*\mathcal{O}_X(D)$ はランク m の Y 上の局所自由層である．

(3) 一般ファイバー $f^{-1}(y)$ が既約曲線ならば，$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ である．

証明. (1)　$h^i(y) = h^i(f^{-1}(y), \mathcal{O}_{X_y})$ が上半連続で，$\chi(y) = h^0(y) - h^1(y)$ が定数関数だから，$h^0(y)$ と $h^1(y)$ も定数関数である．

(2)　は前定理の (3) の特殊な場合である．

(3)　$h^0(y) = 1$ なので，(2) より $f_*\mathcal{O}_X$ は可逆な $\mathcal{O}_Y$-加群である．前定理 (3) より，自然な写像により $(f_*\mathcal{O}_X)|_y \cong \mathbb{C}$ である．つまり，$f_*\mathcal{O}_X$ は定数関数 1 によって生成される $\mathcal{O}_Y$-加群である．よって，$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ である． □

● 初版 p.343, 新装版 p.345. 例 6.9.13 の 2 行目

誤: j-不変量 $j(E) \in E = \mathcal{M}_1$

正: j-不変量 $j(E) \in \mathbb{C} = \mathcal{M}_1$

● 初版 p.344, 新装版 p.346. 1 〜 2 行目

誤: 種数 g の非特異射影曲線線全体の同型類全体の集合 $\mathfrak{X}_g$ とモジュライ $\mathcal{M}_g$ を考える．

正: 種数 g の非特異射影曲線全体の同型類全体の集合を $\mathfrak{X}_g$ とし，そのモジュライ $\mathfrak{M}_g$ が存在するかどうか考える．

● 初版 p.344, 新装版 p.346. (1) (位相的方法) の部分の段落

誤: $\mathfrak{R}_0$ (2 ケ所あります)

正: $\mathfrak{R}_g$

誤: タイヘミュラー空間

正: タイヒミュラー空間

● 初版 p.345, 新装版 p.347. 定理 6.9.15 の直前の 2 行

誤: もし，複素正則写像 $f\colon\mathbb{C}\to U$ が存在すれば $f(C)$ は 1 点であることが結論される．タイヘミュラー空間 $\mathfrak{T}_g$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の有界な開集合であるから，次を得る．

正: もし，複素正則写像 $f\colon\mathbb{C}\to U$ が存在すれば $f(\mathbb{C})$ は 1 点であることが結論される．タイヒミュラー空間 $\mathfrak{T}_g$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の有界な開集合であるから，次を得る．

● 初版 p.346, 新装版 p.348. 第 6.9.6 項の直前

以下の第 6.9.6a 項と差し替えて下さい．項のタイトルも「曲線の普遍被覆」から「普遍被覆」に変更します．

[差し替え原稿]

6.9.6a.　普遍被覆

本項では，位相多様体 X の基本群 $\pi_1(X, P)$ の定義と，X の普遍被覆 $\tilde{X}\to X$ についての基本的知識を仮定して説明する．ご存知でない方は，例えば，

[小松・中岡・菅原] 小松醇郎・中岡稔・菅原正博「位相幾何学 I」岩波 (1967)

の第 4 章, 特に§6 を参照してほしい．

定義 6.9.17.　X, Y は n 次元複素多様体，$\varphi\colon Y\to X$ は全射正則写像とする．X の各点 P に対して P の開近傍 $U_P\subset X$ が存在して，次の (1) ～ (3) を満たすとする．

(1) 任意の点 $Q\in\varphi^{-1}(P)$ に対して Q の開近傍 $W_Q\subset Y$ が存在して，$\varphi|_{W_Q}\colon W_Q\to U_P$ は同型写像になる．

(2) $\displaystyle\bigcup_{Q\in\varphi^{-1}(P)} W_Q=\varphi^{-1}(U_P)$ である．

(3) $Q\neq Q'\in\varphi^{-1}(P)$ ならば $W_Q\cap W_{Q'}=\phi$.

このとき，$\varphi: Y \to X$ は**被覆空間**であるという．さらに，Y が単連結 (つまり $\pi_1(Y, P) = 0$) であるとき，$\varphi: Y \to X$ は**普遍被覆**であるという．

上の定義で,「複素多様体」を「位相多様体」，「正則写像」を「連続写像」，「同型写像」を「同相写像」と書き直したものが，位相多様体の被覆空間の定義である．以下も，ほぼ同様である．

いま，$\varphi_1: Y_1 \to X$, $\varphi_2: Y_2 \to X$ は被覆空間とする．同型写像 $\psi: Y_1 \to Y_2$ が $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$ を満たすとき，ψ は被覆空間の**同型**写像であるという．特に，$\varphi: Y \to X$ 上の自己同型写像全体のなす群を

$$\mathrm{Aut}(Y/X) = \bigl\{\psi \in \mathrm{Aut}(Y) \bigm| \varphi = \varphi \circ \psi\bigr\}$$

と書く．

命題 6.9.18. X, Y は複素多様体，$\varphi: Y \to X$ は被覆空間，$P \in X$, $Q \in Y$, $\varphi(Q) = P$ とする．

(1) 自然な単射 $\pi_1(Y, Q) \longrightarrow \pi_1(X, P)$ が存在する．この単射を通し，$\pi_1(Y, Q) \subset \pi_1(X, P)$ と考える．

(2) $\mathrm{Aut}(Y/X) \cong \pi_1(X,P)/\pi_1(Y,Q)$ である．

証明. (1) 位相多様体の場合の対応する命題から，すぐわかる．

(2) $\varphi: Y \to X$ が位相空間の被覆空間の場合は，[小松・中岡・菅原] 第 4 章定理 5.6 を見よ．$\varphi: Y \to X$ が複素多様体の被覆空間の場合，$\psi: Y \to Y$ が同相写像で $\varphi = \varphi \circ \psi$ を満たせば，ψ は双正則写像になる． □

定理 6.9.19. X, Y_1, Y_2 は複素多様体，$\varphi_1: Y_1 \to X$, $\varphi_2: Y_2 \to X$ は被覆空間で，$P \in X$, $Q_1 \in Y_1$, $Q_2 \in Y_2$, $\varphi_1(Q_1) = P$, $\varphi_2(Q_2) = P$ とする．このとき，もし，$\pi_1(Y_1, Q_1) \subset \pi_1(Y_2, Q_2) \subset \pi_1(X, P)$ であれば，正則写像 $\psi: Y_1 \to Y_2$ で $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$ を満たすものが一意的に存在する．

証明. 位相多様体の場合の相当する定理の証明は，例えば，[小松・中岡・菅原] 第 4 章定理 6.15 を見よ．このとき，連続写像 ψ が正則写像になることは容易にわかる． □

定理 6.9.20. X はコンパクト複素多様体とする．

(1) X の普遍被覆 $\varphi: Y \to X$ が同型を除いて一意的に存在する．

(2) $\pi_1(X, P)$ の任意の部分群 G に対して，被覆空間 $\psi: Z \to X$ で，$\pi_1(Z, Q) = G \subset \pi_1(X, P)$ $(\psi(Q) = P)$ を満たすものが同型を除いて一意的に存在する．このとき，$Z \cong Y/G$ である．

証明. (1)　X が弧状連結な位相多様体の場合に，位相多様体としての普遍被覆 $\varphi\colon Y \to X$ が存在することは，[小松・中岡・菅原] 第 4 章定理 6.19 を見よ．定義 6.9.17 の記号で $\varphi|_{W_Q}\colon W_Q \to U_P$ は同相写像であるから，$\varphi|_{W_Q}$ が双正則写像になるような複素構造が W_Q に一意的に定まる．W_Q の複素構造は整合的に貼り合わさって Y に複素多様体の構造が定まる．よって，これが複素多様体としての普遍被覆になる．

普遍被覆の一意性は，前定理よりわかる．

(2) も (1) と同様である．　□

上の定理において，X が代数多様体でも，Y は代数多様体であるとは限らないし，また，X, Y が代数多様体であっても，φ が代数多様体としての正則写像であるとは限らない．

定理 6.9.21. (**Hurewcz の定理**)　X が弧状連結な位相空間 (例えば複素多様体) であれば，自然な全射

$$f\colon \pi_1(X, P) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$$

が存在し，$\operatorname{Ker} f$ は $\pi_1(X,\ P)$ の交換子群 $[\pi_1(X, P),\ \pi_1(X, P)]$ になる．ここで，$P \in X$ は任意の点である．

証明. [小松・中岡・菅原] 第 7 章定理 1.4 を見よ．　□

定理 6.9.22.　C は非特異射影曲線，$\varphi\colon Y \to C$ は普遍被覆，

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$$

とする．

(1)　$g(C) = 0$ ならば $Y \cong \mathbb{P}^1$ である．

(2)　$g(C) = 1$ ならば $Y \cong \mathbb{C}$ である．

(3)　$g(C) \geqq 2$ ならば $Y \cong \Delta$ である．

証明. (1)　$\mathbb{P}^1$ は単連結だから，$\mathbb{P}^1$ が $\mathbb{P}^1$ の普遍被覆である．

(2)　$\mathbb{C}$ は単連結で，C を複素トーラス $C \cong \mathbb{C}/L$ と考えたとき自然な全射 $\mathbb{C} \to C$ があり，これが普遍被覆の定義を満たす．

(3)　リーマンの等角写像定理より，単連結な 1 次元の複素多様体は，$\mathbb{P}^1, \mathbb{C}, \Delta$ のいずれかと同型である．もし，Y が $\mathbb{P}^1$ あるいは $\mathbb{C}$ と同型ならば，C は $\mathbb{P}^1$ または楕円曲線になってしまう．　□

定理 6.9.23. X は複素多様体とする．

(1) もし $H_1(X, \mathbb{C}) \neq 0$ ならば，任意の自然数 n に対して，不分岐 n 重被覆 $\pi: Y \to X$ が存在する．

(2) もし，$H_1(X, \mathbb{Z})$ が位数 n のトーション元 γ (つまり，$n\gamma = 0$ で，$1 \leqq k < n$ に対しては $k\gamma \neq 0$) を持てば，n 重被覆 $\pi: Y \to X$ で，$\pi^*\gamma = 0 \in H_1(Y, Z)$ となるようなものが存在する．

証明. (1), (2) とも普遍被覆を利用すれば，すぐわかるが, (1) は以下のように証明してもよい．

アルバネーゼ写像 $\alpha: X \to \mathrm{Alb}(X)$ をとる．複素トーラス $A = \mathrm{Alb}(X) = H^0(X, \Omega^1_X)^\vee / H_1(X, \mathbb{Z})_{free}$ の格子 $L = H_1(X, \mathbb{Z})_{free}$ を細分することによって，$\mathrm{Alb}(X)$ の不分岐 n 重被覆 $\pi: B \to A$ を作る．そして，$Y = X \times_A B$ とおけばよい． □

命題 6.9.24. A はアーベル多様体，$\psi: X \to A$ はエタール正則写像とする．すると，X もアーベル多様体である．

証明. $n = \dim A$, $\varphi: Y \to X$ を普遍被覆とする．$\psi \circ \varphi: Y \to A$ は A の普遍被覆であるので，$Y \cong \mathbb{C}^n$ である．

複素トーラスとして $A = \mathbb{C}^n/L$, $L = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{2n} \mathbb{Z}\mathbf{e}_i$ であるとする．O を A の原点とすると，群として $\pi_1(A, O) \cong L \cong H_1(A, \mathbb{Z})$ であり，$\pi_1(A, O)$ はアーベル群である．$\pi_1(X, P)$ $(\psi(P) = O)$ は $\pi_1(A, O) \cong L$ の部分群なので，$\pi_1(X, P)$ は L の部分格子で，$Y = \mathbb{C}^n/\pi_1(X, P)$ である． □

● 初版 p.348 〜 349, 新装版 p.350 〜 351. 定義 6.10.1 から第 6.10.2 項の最後まで．以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 6.10.1a. (I) X は代数多様体 (または複素多様体)，$\mathcal{E}$ はランク r の局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群とする．X のアフィン開被覆 (または解析的開被覆) $\{U_i\}$ を，各 $\mathcal{E}|_{U_i}$ が自由 $\mathcal{O}_{U_i}$-加群となるようにとる．今，基底 $\{e^i_k\}_{k=1}^r$ により，

$$\mathcal{E}|_{U_i} = \bigoplus_{k=1}^{r} \mathcal{O}_{U_i} \cdot e^i_k$$

と表す．$U_i \cap U_j$ 上では，ある変換関数 $\{f^{ij}_k\}$ により，$e^i_k = f^{ij}_k(e^j_1, \ldots, e^j_r)$ と表せる．

$V_i = \mathbb{P}^{r-1} \times U_i$ と定め，V_i 達を $\{f^{ij}_k\}$ によって貼り合わせて得られる多様体を $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と書く．また，正射影 $\mathbb{P}^{r-1} \times U_i \longrightarrow U_i$ から得られる写像 $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ を**自**

然な全射という．定義より，

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{E}) = (r-1) + \dim X$$

である．

U_i の座標環を R_i とし，e_k^i に対応する不定元 T_k をとり，R_i 上の多項式環 $S_i = R_i[T_1,\ldots, T_r]$ を自然な見方で R_i 上の次数付き環と考える．$F \in S_i$ により $U = D_+(F)$ と表せる $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の開集合 U に対し，$\mathcal{F}(U)$ は $S_i[1/F]$ の n 次部分と定義して定まる層 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)$ と書く．つまり，

$$\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(n)\big)(U) = \big(S_i[1/F]\big)_n$$

である．これは，可逆な $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}$-加群である．

(II)　$\mathcal{S}$ は $\mathcal{O}_X$-可換整域の層とする．つまり，各 $U_i \subset X$ に対し，$\mathcal{S}(U_i)$ は可換整域であり，$\mathcal{O}_X(U_i)$-多元環であるとする．さらに，各 U_i に対して $\mathcal{S}(U_i)$ は $\mathcal{O}_X(U_i)$-多元環として有限生成であると仮定する．$\mathcal{S}(U_i)$ を座標環とする多様体を W_{U_i} とする．この W_{U_i} 達は自然に貼り合わさって，ある多様体 $W = \bigcup_i W_{U_i}$ を定める．この多様体 W を $W = \mathcal{S}pec\,\mathcal{S}$ と書く．

(III)　$\mathcal{S} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{S}_d$ は $\mathcal{S}_d$ を d 次部分とする X 上の次数付き可換整域の層とする．さらに，$\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$ であり，各 U_i に対して $\mathcal{S}(U_i)$ は $\mathcal{O}_X(U_i)$-多元環として有限個の 1 次の元 $y_0,\ldots, y_n \in \mathcal{S}_1(U_i)$ によって生成されると仮定する．

$$\psi_{U_i}\colon \big(\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n] \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(U_i)\big) \longrightarrow \mathcal{S}(U_i)$$

を $\psi_{U_i}(X_j \otimes f) = f y_j$ によって定める．$\operatorname{Ker}\psi_{U_i}$ を定義イデアルとする多様体 $Y_{U_i} \subset \mathbb{P}^n \times U_i$ が定まる．この Y_{U_i} 達は自然に貼り合わさって，ある多様体 $Y = \bigcup_i Y_{U_i}$ を定める．また，正射影 $\pi_{U_i}\colon Y_{U_i} \to U_i$ から正射影 $\pi\colon Y \to X$ が自然に誘導される．この多様体 Y を $Y = \mathbf{Proj}\,\mathcal{S}$ と書く．

$S^d(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ の対称テンソル積 (7.10.6 項参照) とすれば，$\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Proj} \bigoplus_{d=0}^{\infty} S^d(\mathcal{E})$ である．

命題 6.10.1b.　定義 6.10.1a(I) の記号のもと，$\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \mathcal{E}$ が成り立つ．また，自然な全射 $\varphi\colon \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ が存在する．

証明. $\mathcal{S}=\bigoplus_{d=0}^{\infty}S^d(\mathcal{E})$ とする．$\mathcal{S}$ の d 次部分を $\mathcal{S}_d$ とおくと，定義から $\mathcal{S}_1=\mathcal{E}$ である．自然な全射 $S^d(\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}\longrightarrow S^{d+1}(\mathcal{E})$ を d 次部分とする写像として全射 $\varphi\colon\pi^*\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ が誘導される．また，

$$\bigl(\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))\bigr)(U_i)=\bigl(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)\bigr)(\pi^{-1}(U_i))=\bigoplus_{k=1}^{r}\mathcal{O}_X(U_i)\cdot e_k^i=\mathcal{E}(U_i)$$

なので，$\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)=\mathcal{E}$ である． □

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ は可逆層なので，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(H)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ を満たす $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の因子 H が存在する．ただし，H がアンプルであるとは限らない．

● 初版 p.350, 新装版 p.352. 定理 6.10.3 の直前の 5 行

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$n=\operatorname{rank}\mathcal{F}$, $c_i=c_i(\mathcal{F})$ とおくと，6.10.1 項の関係式によって，p_i, L_i, A_i, $R_i\in H^{4i}(X,\mathbb{Z})$ と Ch_i, $T_i\in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ が定まる．このうち，Ch_i, T_i をそれぞれ，$Ch_i(\mathcal{F})$, $Td_i(\mathcal{F})$ と書き，$Ch_i(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の i **次チャーン指標** (Chern characteristic), $Td_i(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の i **次トッド類** (Todd class) という．X の接ベクトル層を $\mathcal{T}_X$ とするとき，$Td_i(\mathcal{T}_X)$ を X の i **次トッド類**という．

● 初版 p.352, 新装版 p.354. 定理 6.10.7 の 2 行手前

誤: t^n の係数は $H^n(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ に属するので，

正: t^n の係数は $H^{2n}(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ に属するので，

● 初版 p.352, 新装版 p.354. 第 6.10.3 項の最後, 第 6.10.4 項の直前

以下の原稿を追加して下さい．

[追加原稿]

上の定理の $n=2$ の場合は，以下の形であることに注意しておく．

$$\chi(\mathcal{F})=\frac{c_1(\mathcal{F})\cup\bigl((c_1(\mathcal{F})-c_1(K_X)\bigr)}{2}-c_2(\mathcal{F})+\frac{(K_X^2)_X+e(X)}{12}$$

定理 6.10.7b. (Splitting principle) X は非特異射影多様体，$\mathcal{F}$ は局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群で $\operatorname{rank}\mathcal{O}_X=r$ とする．このとき，ある非特異射影多様体 Y と平坦写像 $f\colon Y\to X$ が存在して次の (1), (2) を満たす．

(1) $f^*\colon A(X)\longrightarrow A(Y)=\bigoplus_{j=0}^{\infty}H^{2j}(Y,\mathbb{Z})$ は単射である．

(2) 局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群の列 (filtration) $f^*\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_r = 0$ が存在し，各 $i \leqq i \leqq r$ に対して $\mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i$ は可逆 $\mathcal{O}_Y$-加群になる．

特に，$a_1 = c_1(\mathcal{F}_{i-1}/\mathcal{F}_i)$ とすれば，$A(X)$ の拡大環 $A(Y)$ において，$c_k(\mathcal{F})$ は t の多項式

$$(1 + a_1 t)(1 + a_2 t) \cdots (1 + a_r t)$$

の t^k の係数に等しい．

証明. r に関する帰納法で証明する．$r = 1$ のときは自明なので，$r \geqq 2$ とする．$Z = \mathbb{P}(\mathcal{F})$ とし $\pi\colon \mathbb{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow X$ を自然な全射とする．π は平坦で $\pi^*\colon A(X) \to A(Z)$ は単射である．自然な全射の核を $\mathcal{G} = \operatorname{Ker}\bigl(\pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_Z(1)\bigr)$ とおくと，$\mathcal{G}$ は局所自由 $\mathcal{O}_Z$-加群で，$\operatorname{rank}\mathcal{G} = r - 1$ である．以下の証明は容易であろう． □

系 6.10.7c. X は非特異射影多様体，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群で，$\operatorname{rank}\mathcal{F} = r$, $\operatorname{rank}\mathcal{G} = q$ とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $c_i\bigl(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)\bigr) = (-1)^i c_i(\mathcal{F})$

(2) $c_1(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) = q c_1(\mathcal{F}) + r c_1(\mathcal{G})$

証明. (1) $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ の filtration を考えれば，$(1 - a_1 t) \cdots (1 - a_r t)$ の t^k の係数が $c_k(\mathcal{F}^\vee)$ である．

(2) $(1 + b_1 t) \cdots (1 + b_q t)$ の t^k の係数が $c_k(\mathcal{G})$ であるとする．すると，$c_k(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})$ は

$$\prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{q} (1 + (a_i + b_j) t)$$

の t^k の係数である． □

第7章

● 初版 p.358, 新装版 p.360. 命題 7.1.3 の証明

下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

証明. もし，$P_d(S) \neq 0$ ならば，$0 \neq \exists f \in H^0(\mathcal{O}_S(dK_S))$ である．$m = nd$ とするとき，$0 \neq f^n \in H^0(\mathcal{O}_S(mK_S))$ となるから，$P_m(S) \neq 0$ となる． □

● 初版 p.358. 命題 7.1.4 の証明の 6 行目. (新装版では修正済み)

誤: $c_1\Big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^1, \Omega_S^2)\Big) = c_1(\mathcal{T}_S) + 2c_1(\Omega_S^2) = c_1(K_s) = c_1(\Omega_S^1)$

正: $c_1\Big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^1, \Omega_S^2)\Big) = c_1(\mathcal{T}_S) + 2c_1(\Omega_S^2) = c_1(K_S) = c_1(\Omega_S^1)$

($c_1(K_s)$ の添え字の s を大文字の S にする)

● 初版 p.360. 2 行目 (定理 7.1.8 の証明の 2 行目). (新装版では修正済み)

誤: $H^2(S, \mathbb{C}) = H^2(S, \mathbb{C}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) = H^{0,2}(S)$

正: $H^2_{dR}(S, \mathbb{C}) = H^2(S, \mathbb{C}_S) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) = H^{0,2}(S)$

● 初版 p.360, 新装版 p.362. 定理 7.1.8 の証明の 3 〜 4 行目

説明を追加して下さい.

旧: $H^2(\mathbb{Z}_S) \to H^2(\mathcal{O}_S^{hol}) = H^{0,2}(S)$ による $NS(S)$ の像は 0 だから，$NS(S)_{free} \cap H^{0,2}(S) = 0 \subset H^2(S, \mathbb{C})$ である．

新: 合成写像 $\mathrm{Pic}(S) = H^1(\mathcal{O}_S^\times) \to H^2(\mathbb{Z}_S) \to H^2(\mathcal{O}_S)$ はゼロ写像だから，$H^2(\mathbb{Z}_S) \to H^2(\mathcal{O}_S^{hol}) = H^{0,2}(S)$ による $NS(S)$ の像は 0 である．よって，$NS(S)_{free} \cap H^{0,2}(S) = 0 \subset H^2(S, \mathbb{C})$ である．

● 初版 p.360, 新装版 p.362. 命題 7.1.9 の 1 行目

誤: S が非特異射影曲または

正: S が非特異射影曲面または

● 初版 p.360, 新装版 p.362. 命題 7.1.9 の 3 行目

誤: 任意の $Q \in \alpha(S)$ に対し，

正: 任意の $Q \in C$ に対し，

● 初版 p.360 〜 361, 新装版 p.362 〜 363. 第 7.2.1 項の冒頭の 4 行

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

第 5.2 節で，1 点を中心としたブロー・アップを定義したが，非特異代数多様体 (または複素多様体) X の任意の部分代数多様体 (または部分複素多様体) Y に対し，Y を中心としたブロー・アップ $\pi: \tilde{X} \to X$ というものも定義できる．

$\mathfrak{I}_Y \subset \mathfrak{O}_X$ を Y の定義イデアル，$\mathfrak{S} = \displaystyle\bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathfrak{I}_Y^d$, $\tilde{X} = \mathbf{Proj}\,\mathfrak{S}$ とし，$\pi: \tilde{X} \to X$ を正射影 (定義 6.10.1a 参照) とする．これを Y を中心とした X の**ブロー・アップ**という．

Y が非特異の場合に $\tilde{X}$ と π の構造を具体的に書いてみよう．$Y \cap U \neq \phi$ であるような座標開集合 $U \subset X$ をとり，U の座標系 $(x_1,\ldots, x_n)$ を $Y \cap U$ の定義方程式が $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$ であるようにとる．ここで，$n = \dim X$, $r = \dim X - \dim Y$ である．$R = \mathfrak{O}_X(U)$, $I = \mathfrak{I}_Y(U)$ とおく．$I = (x_1,\ldots, x_r)$ である．x_i に対応する $\mathfrak{I}_Y^1(U) \subset \displaystyle\bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathfrak{I}_Y^d(U) = \mathfrak{S}(U)$ の元を T_i と書き，$x_i \in R = \mathfrak{I}_Y^0(U) \subset \mathfrak{S}(U)$ のほうをそのまま x_i と書く．$\mathfrak{S}(U) \cong R[T_1,\ldots, T_r]$ である．ただし，$T_1,\ldots, T_r$ は R 上代数的独立ではなく，$x_iT_j = x_jT_i$ $(1 \leqq i < j \leqq r)$ という関係を持つ．したがって，$\tilde{U} = \pi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ とおくとき，

$$\tilde{U} \cong \left\{(x_1, \ldots, x_n; T_1 : \cdots : T_r) \in U \times \mathbb{P}^{r-1} \;\middle|\; x_iT_j = x_jT_i \ (1 \leqq i < j \leqq r)\right\}$$

である．$\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \longrightarrow U$ は，$\pi|_{\tilde{U}}(x_1,\ldots, x_n;\, T_1 : \cdots : T_r) = (x_1,\ldots, x_n)$ で定まる．よって，$P \in Y$ のとき $\pi^{-1}(P) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ である．また，$E_U = \pi^{-1}(Y \cap U)$ とするとき，$\pi|_{\tilde{U}-E_U}: (\tilde{U} - E_U) \longrightarrow (U - Y)$ は同型写像である．$E = \pi^{-1}(Y)$ を π の**例外集合**という．$\pi|_E: E \longrightarrow Y$ は $\mathbb{P}^{r-1}$-束であるが，E と $\mathbb{P}^{r-1} \times Y$ が同型であるとは限らないので注意しよう．上の $\tilde{U}$ の定義方程式から $\tilde{X}$ は非特異であることがわかる．ただし X が非特異でもブロー・アップの中心 Y が特異点を持つ場合は，$\pi^{-1}(\operatorname{Sing} Y)$ 上で X は特異点を持つ．

X が特異点を持つ場合には，X を閉部分多様体とするような非特異多様体 $Z \supset X$ をとり，$\tilde{\pi}: \tilde{Z} \to Z$ を Y を中心としたブロー・アップとする．$\tilde{X}$ を $\tilde{\pi}$ による $X \subset Z$ の $\tilde{Z}$ への強変換とし，$\pi = \tilde{\pi}|_{\tilde{X}}: \tilde{X} \to X$ とする．これが Z の選び方に依存せずに同型を除いて一意的であることは容易に証明できる．この $\pi: \tilde{X} \to X$ を Y を中心とした X のブロー・アップという．その他の細かい定義は，1 点でのブロー・アップの場合から類推せよ．

広中平祐氏によって，次の定理が証明され，氏はこれによってフィールズ賞を受賞している．

● 初版 p.362, 新装版 p.364. 定義 7.2.3 の 1 行目

誤: X は代数多様体，$P \in X$ で P は X の特異点

正: X は代数多様体，P は X の特異点

● 初版 p.362, 新装版 p.364. 命題 7.2.5 の証明の 2 〜 3 行目

3 ケ所登場する π はすべて f の誤りです.

● 初版 p.363, 新装版 p.365. 命題 7.2.5 の証明の 5 行目

誤: $N_1(S)$

正: $N^1(S)$

● 初版 p.363, 新装版 p.365. 定理 7.2.7 の証明の 9 行目

誤: 第 1 種例外を含んでいたら，

正: 第 1 種例外曲線を含んでいたら，

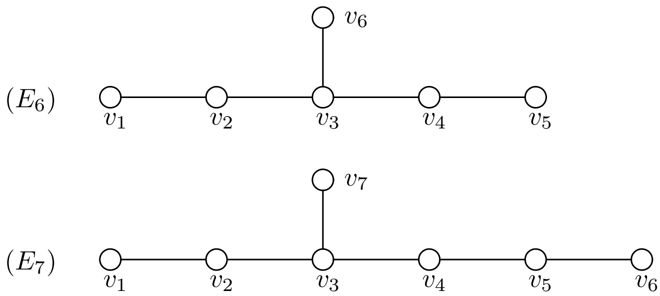
● 初版 p.364, 新装版 p.366. 定理 7.2.7 の証明の最後から 6 行目

誤: $-1 \leqq (C^2)_Z \leqq (C'^2)_{Y_1} < 0$

正: $-1 = (C^2)_Z \leqq (C'^2)_{Y_1} < 0$

● 初版 p.364. 下から 2 つの図. (新装版では修正済み)

(E_6) と (E_7) の図を下記のように修正して下さい.



● 初版 p.365. 図の下から 3 〜 4 行目. (新装版では修正済み)

誤: 今，C_i と C_j は 1 点で横断的に交わるか，交わらないかのいずれかであると仮定する.

正: 今，C_i と C_j は交わらないか，1 点で横断的に交わるかのいずれかであると仮定する.

● 初版第 1 刷 p.365. 最下行 (補題 7.2.10(4)). (初版第 2 刷以降では修正済み)

誤: (4) 任意の e_i に対し，$(e_i, e_j) > 0$ を満たす e_j が存在する．
正: (4) 任意の $i \geqq 2$ に対し，$(e_i, e_j) > 0$ を満たす $j < i$ が存在する．

● 初版 p.367 〜 369, 新装版 p.369 〜 371. 命題 7.2.13 とその証明
命題 7.2.13 とその証明を下記の原稿と差し替えて下さい．
[差し替え原稿]

命題 7.2.13. 上の定義で与えられた曲面 (X, O) の孤立特異点 (A_n), (D_n), (E_n) の最小特異点解消を $\pi\colon Y \to X$ とし，その例外集合を $E = \pi^{-1}(O)$ とする．このとき，E の双対グラフは，それぞれ対応する名前のディンキングラフになる．また，E の各既約成分は (-2)-曲線である．例えば，$x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$ で定まる曲面の最小特異点解消の例外集合の双対グラフは (A_n) 型ディンキングラフである．

証明. (A_n) 型の場合のみ，証明 (計算) を記しておく．
$\mathbb{C}^3$ の原点 O でのブロー・アップは，

$$\tilde{\mathbb{C}^3} = \left\{(x, y, z; T_1 : T_2 : T_3) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \;\middle|\; xT_2 = yT_1,\, yT_3 = zT_2,\, zT_1 = xT_3\right\}$$

として，正射影 $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathbb{C}^3} \to \mathbb{C}^3$ で与えられる．$\tilde{\pi}$ の制限として，X のブロー・アップ $f_1\colon X_1 \to X$ が得られる．$\tilde{\mathbb{C}^3}$ 内で $T_i \neq 0$ で与えられるアフィン開集合を U_i とする．$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \tilde{\mathbb{C}^3}$ である．また，$\tilde{\pi}$, f_1 の例外集合を $\tilde{\pi}^{-1}(O) = \tilde{E} \cong \mathbb{P}^2$, $E = f_1^{-1}(O) = \tilde{E} \cap X_1$ とする．さらに，X 上の有理微分形式

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(n+1)z^n} = \frac{dy \wedge dz}{2x} = \frac{dz \wedge dx}{2y}$$

を考え，$f_1^* \omega$ を計算する．

U_1 では (x, s, t) (ただし，$s = T_2/T_1$, $t = T_3/T_1$) を狭義座標系に選べ，$y = sx$, $z = tx$ より，$U_1 \cap X_1$ の定義方程式は $1 + s^2 + x^{n-1}t^{n+1} = 0$ である．ヤコビアン判定法より容易にわかるように，$U_1 \cap X_1$ は非特異曲面である．$U_1 \cap \tilde{E}$ は U_1 内で $x = 0$ で定まる平面だから，$n \geqq 2$ のとき $U_1 \cap E$ は (s, t)-平面上で $s = \pm\sqrt{-1}$ で定まる $\mathbb{C}$ と同型な 2 本の交わらない直線である．この上で $f_1^* \omega = \dfrac{dt \wedge dx}{2s}$ は $U_1 \cap X_1$ 上で極も零点も持たない．また，$n = 1$ の場合は，$U_1 \cap E$ は (s, t)-平面上で $1 + s^2 + t^2 = 0$ で定まる 2 次曲線で非特異である．このとき $s\,ds + t\,dt = 0$ より，

$$f_1^* \omega = \frac{dt \wedge dx}{2s} = -\frac{ds \wedge dx}{t}$$

となり，$U_1 \cap E$ は $(s, t) \neq (0, 0)$ を通らないので，$f_1^* \omega$ は $U_1 \cap X_1$ 上で極も零点も持たない．

U_2 は U_1 と本質的に同じ形なので，U_2 上での状況は U_1 上での状況と同じである．

以下，U_3 上での状況を考察する．U_3 では $(z,\, u,\, v)$ (ただし，$u = T_1/T_3$, $v = T_2/T_3$) を狭義座標系に選べる．$f_1^*\omega = \dfrac{dz \wedge du}{2v}$ である．$U_3 \cap X_1$ の定義方程式は $u^2 + v^2 + z^{n-1} = 0$ である．これは，$n \geqq 3$ のとき原点 $O_1 = (0,\, 0,\, 0) \in U_3$ に (A_{n-2}) 型特異点を持ち，それ以外の点では非特異な曲面である．また，$n = 1, 2$ のときは $U_3 \cap X_1$ は非特異曲面である．したがって，$n \leqq 2$ のとき X_1 は非特異である．例外集合 $U_3 \cap \tilde{E}$ は $z = 0$ で定まる平面である．よって，$n \geqq 2$ の場合，$U_3 \cap E$ は U_3 内で $z = 0, v = \pm\sqrt{-1}u$ で定まる 2 直線であり，$E = C_1 \cup C_2$, $C_1 \cong C_2 \cong \mathbb{P}^1$ と書ける，C_1 と C_2 は原点 O_1 で横断的に交わっている．

$n = 1$ の場合，$E \cap U_3$ は U_3 内で $z = 0, u^2 + v^2 + 1 = 0$ で定まる 2 次曲線なので，$E \cong \mathbb{P}^1$ がわかる．また，$f_1^*\omega$ が $E \cap U_3$ 上で極も零点も持たないことが U_1 上での考察と同様にしてわかるので，$f_1^*\omega$ は E 上で極も零点も持たないので，$\mathrm{div}(\tilde{\pi}^*\omega)|_E = 0$ であり，$(K_{X_1} \cdot E)_{X_1} = 0$ である．したがって，E は (-2)-曲線である．

$n = 2$ の場合, 上の考察から，E の双対グラフは (A_2) である．$f_1^*\omega = \dfrac{dz \wedge du}{2v} = du \wedge dv$ であるので，$f_1^*\omega$ は $E \cap U_3$ 上で極も零点も持たない．したがって，$(K_{X_1} \cdot E)_{X_1} = 0$ で，E は (-2)-曲線である．

$n \geqq 3$ の場合を考える．特異点 O_1 でブロー・アップ $f_2 \colon X_2 \to X_1$ を行う．f_2 の例外集合を E_2 とし，C_i の強変換を C_i' とするとき，$C_1 \cup E_2 \cup C_2$ が $\mathbb{P}^1$ の木であることは，容易にわかる．したがって，帰納的に，合計 $m = \lceil n/2 \rceil$ ($n/2$ 以上の最小の整数) 回のブロー・アップの後，非特異な曲面 X_m が得られることがわかる．

$X_m \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \xrightarrow{f_{m-1}} \cdots \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X$ の合成写像を $f \colon X_m \to X$ とすると，例外集合が (A_n) 型の木になることは，上の考察からわかる．また，$f^*\omega$ が例外集合上で極も零点も持たないことは，$n = 1, 2$ の場合の考察からすぐわかる．よって，f の例外集合の既約線分は，すべて (-2)-曲線である．

(D_n), (E_n) 型特異点の場合も同様である． □

● 初版 p.369 〜 370, 新装版 p.371 〜 372. 定義 7.2.14 〜命題 7.2.16

以下の原稿と差し替えて下さい．説明・証明を大幅に丁寧に書き直しました．

[差し替え原稿]

7.2.6. 基本サイクル

X は点 x_0 を孤立特異点とする正規代数曲面 (解析曲面でもよい), $f \colon E \to X$ は特異点 x_0 の最小特異点解消とし，$E = f^{-1}(f)$ とする．$E = \bigcup_{i=1}^{r} E_i$ (E_i は曲線) と分

解する．

$$\mathfrak{Z} = \left\{ Z = \sum_{i=1}^{r} m_i E_i \;\middle|\; m_i \in \mathbb{N} \text{ かつ } 1 \leqq \forall i \leqq r \text{ に対し } (Z \cdot E_i)_Y \leqq 0 \right\}$$

とおく．

命題 7.2.14a. 上の仮定と記号のもとに，以下が成り立つ．

(1) $Z_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i E_i \in \mathfrak{Z}$, $Z_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i E_i \in \mathfrak{Z}$ のとき，$c_i = \min\{a_i, b_i\}$ とおけば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i E_i \in \mathfrak{Z}$ である．

(2) $\mathfrak{Z} \neq \phi$ である．

証明. (1) もし，$a_1 \leqq b_1$ ならば，$c_1 = a_1$ で，$i \geqq 2$ のとき $c_i \leqq a_i$ なので，$\left(E_1 \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{r} c_i E_i \right) \leqq \left(E_1 \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i E_i \right) \leqq 0$ となる．

(2) $\{E_1, \ldots, E_r\}$ の交点行列を A とする．ホッジの指数定理より A は負定値 (すべての固有値は負の実数) である．負の整数を並べた r 次の列ベクトルを $\mathbf{b}$ とし，$\mathbf{c} = (\det A) \cdot A^{-1}\mathbf{b}$ とする．列ベクトル $\mathbf{c}$ の各成分 c_i は整数である．$D = c_1 E_1 + \cdots + c_r E_r$ とし，$D = D_+ - D_-$ $(D_+ \geqq 0, D_- \geqq 0)$ と正・負の部分に分解する．$D \neq 0$ である．

A は負定値だから，$(D \cdot E_i)_Y \leqq 0$ であり，よって $(D \cdot D_-)_Y \leqq 0$ である．他方，D_+ と D_- は共通成分を持たないので $(D_+ \cdot D_-)_Y \geqq 0$ である．また，A は負定値なので，もし $D_- > 0$ ならば，$(D_-^2)_Y < 0$ である．すると，$(D \cdot D_-)_Y = (D_+ \cdot D_-)_Y - (D_-^2)_Y > 0$ となって矛盾する．よって，$D_- = 0$ で，$D \in \mathfrak{Z}$ である． □

定義 7.2.14b. 上の命題より $\mathfrak{Z}$ には $\leqq$ について最小な元 Z が存在する．この Z を (X, x_0) または (Y, E) の**基本サイクル** (fundamental cycle) という．

定義 7.2.15. Y は非特異代数曲面または 2 次元複素多様体，D, Z は Y 上の因子で $Z \geqq 0$ とする．このとき，

$$\mathcal{O}_Z = \mathrm{Coker}\{\mathcal{O}_Y(-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_Y\}$$
$$\mathcal{O}_Z(D) = \mathrm{Coker}\{\mathcal{O}_Y(D - Z) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D)\}$$

であった．これより，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D - Z) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(D) \longrightarrow 0$$

が存在する．$\mathcal{O}_Z(D)$ は $\mathcal{O}_Y$-加群層で，コホモロジー $H^i(Y,\, \mathcal{O}_Z(D))$ を $H^i(Z,\, \mathcal{O}_Z(D))$ とか，$H^i(\mathcal{O}_Z(D))$ とも書く．

命題 7.2.16. 記号は今までの通りとする．

(1) もし，$D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ が，$D \geqq 0, D \neq 0$, かつ，任意の i に対し $(D \cdot E_i)_Y \leqq 0$ を満たせば，$D \geqq Z$ である．

(2) $H^0(\mathcal{O}_Z) \cong \mathbb{C}$ である．

証明. (1) 任意の i に対し $a_i > 0$ を示せばよい．もし，ある i に対し $a_i = 0$ とすると，$f^{-1}(x_0)$ の連結性から，E_i と交わる E_j $(i \neq j)$ があるから，$(D \cdot E_i)_Y > 0$ となり矛盾する．

(2) $H^0(\mathcal{O}_Z) \neq \mathbb{C}$ とすると，$s \in H^0(\mathcal{O}_Z) - \mathbb{C}$ が存在する．s は $\operatorname{Supp} Z$ のある十分小さい開近傍上 U 上の正則関数 $\tilde{s}$ に延長できる．点 $P \in \operatorname{Supp} Z$ をとる．必要なら s のかわりに $s - \tilde{s}(P)$ を考え，$\tilde{s}(P) = 0$ と仮定してよい．すると，点 P を含む $\operatorname{Supp} Z$ の連結成分 (それは $\operatorname{Supp} Z$ に一致する) 上のすべての点 Q で $\tilde{s}(Q) = 0$ となる．ただし，$H^0(\mathcal{O}_Z)$ は体でない Artin 環なので，このことは $s = 0 \in H^0(\mathcal{O}_Z)$ を意味しない．

$b_i = \operatorname{ord}_{E_i} \tilde{s}$ とし，$D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i E_i$ とする．$D > 0$ である．もし $D \geqq Z$ とすると，$\tilde{s} \in H^0(U,\, \mathcal{O}_U(-D)) \subset H^0(U,\, \mathcal{O}_U(-Z))$ であり，$\mathcal{O}_Z = \operatorname{Coker}\{\mathcal{O}_U(-Z) \to \mathcal{O}_U\}$ であるので，$s = 0 \in H^0(\mathcal{O}_Z)$ となって矛盾する．よって，$D \geqq Z$ ではない．

他方，$b_i \neq 0$ のときは，E_i を含む D の連結成分にホッジの指数定理を用いると，$(D \cdot E_i)_Y \leqq 0$ がわかる．$b_i = 0$ の場合は，E_i は $\tilde{s}$ の零点でなく，$\tilde{s}$ は E_i で正則なので，$0 = (\operatorname{div}(\tilde{s}) \cdot E_i)_Y = (D \cdot E_i)_Y$ である．つまり $D \in \mathfrak{Z}$ である．これは，基本サイクル Z の定義に反する． □

● 初版 p.371, 新装版 p.373. 命題 7.2.19 の証明の 5 〜 6 行目

誤: $R^i h_* \mathcal{F}$ は点 x_0 の近傍だけで決定されるから，$R^i h_* \mathcal{F}$ の計算においては,

正: $R^i f_* \mathcal{F}$ は点 x_0 の近傍だけで決定されるから，$R^i f_* \mathcal{F}$ の計算においては,

● 初版 p.372 〜 373, 新装版 p.374 〜 375. 命題 7.2.20 〜命題 7.2.21

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 7.2.20a. (X, x_0) は 2 次元正規特異点，$f\colon Y \to X$ はその最小特異点解消，Z はその基本サイクルとする．$f^{-1}(x_0) = E_1 \cup \cdots \cup E_r$ とし，$D = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i$ (a_i は非負整数) とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) 単射 $\mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-D)$ が存在する．

(2) もし $H^1(\mathcal{O}_Z) = 0$ ならば，$H^1(\mathcal{O}_Z(-D)) = 0$ である．

証明. (1)　解析的正則関数の層を構造層として利用して考える．$Z = m_1E_1 + \cdots + m_rE_r$ ($m_i \in \mathbb{N}$) とする．$\mathbb{C}$ 上有限生成な Artin 環 R において，指数関数 $\exp\colon R \to R$ を考えるとき，$\exp(x) = 1$ となるのは $x = 2n\pi\sqrt{-1}$ ($n \in \mathbb{Z}$) の場合に限ることは容易に証明できる．よって，Z 上でも指数関数完全系列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z^{\times} \to 0$ が存在する．これより，完全系列

$$0 = H^1(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_Z^{\times}) \longrightarrow H^2(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_Z) = 0$$

が得られる．よって，

$$H^1(\mathcal{O}_Z^{\times}) \cong H^2(Z, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}[E_i] \cong \mathbb{Z}^r$$

である．したがって，$(A_i \cdot E_i)_U = 1$ で，$j \neq i$ のとき $(A_i \cdot E_j)_U = 0$ であるような U 上の有効因子 A_i とるとき，ある整数 b_i によって，

$$\mathcal{O}_Z(D) \cong \mathcal{O}_Z(b_1A_1 + \cdots + b_rA_r)$$

と書ける．ところが，$(D \cdot E_i)_Y \geqq 0$ なので $b_i \leqq 0$ ($\forall i$) である．よって，単射 $\iota\colon \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-D)$ が存在する．

(2)　$P_i = E_i \cap \operatorname{Supp} A_i$ とおくとき，$\operatorname{Supp}(\operatorname{Coker} \iota)$ は $\{A_1, \ldots, A_r\}$ の部分集合と同型である．したがって，全射 $H^1(\mathcal{O}_Z) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_Z(-D))$ が存在し，$H^1(\mathcal{O}_Z(-D)) = 0$ が得られる．　□

命題 7.2.21a. (X, x_0) は 2 次元正規有理特異点，$f\colon Y \to X$ はその最小特異点解消，Z はその基本サイクルとする．このとき，以下が成り立つ．

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下の完全系列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-nZ) \longrightarrow \mathcal{O}_{(n+1)Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{nZ} \longrightarrow 0$$

(2) 任意の非負整数 n に対して，$R^1 f_* \mathcal{O}_Y(-nZ) = 0$ である．

証明. (1)　定理 5.3.14 より $f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ である．可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(-(n+1)Z) & \longrightarrow & O_Y & \longrightarrow & \mathcal{O}_{(n+1)Z} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow\subset & & \downarrow= & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(-nZ) & \longrightarrow & O_Y & \longrightarrow & \mathcal{O}_{nZ} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

に蛇の補題を適用すると，(1) の完全系列が得られる．

(2)　(1) の完全系列に f_* をほどこして得られるコホモロジー完全系列において，$H^1(\mathcal{O}_Z(-nZ)) = 0$ であるから，$H^0(\mathcal{O}_{(n+1)Z}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{nZ})$ は全射である．このことから，$\mathcal{O}_X = f_*\mathcal{O}_Y \to H^0(\mathcal{O}_{nZ})$ は全射であることがわかる．(より詳しい議論は，[Ha] 第 III 章・定理 11.1 を参照せよ.)

完全系列 $0 \to \mathcal{O}_Y(-nZ) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_{nZ} \to 0$ に f_* をほどこして得られるコホモロジー完全系列を考えると，$R^1f_*\mathcal{O}_Y(-nZ) = 0$ がわかる．　□

● 初版 p.373, 新装版 p.375. 補題 7.2.23 の 1 行目

旧: 命題 7.2.21 と仮定と記号は同じとする．

新: 命題 7.2.20a と仮定と記号は同じとする．

● 初版 p.373, 新装版 p.375. 補題 7.2.23 の証明の 1 行目

旧: 命題 7.2.20 の証明から，

新: 命題 7.2.20a(1) より

● 初版 p.373, 新装版 p.375. 補題 7.2.23 の証明の 6 行目

旧: 命題 7.2.21 の証明で示したことから，

新: 命題 7.2.21a(1) と命題 7.2.20a(2) より，

● 初版 p.374, 新装版 p.376. 定理 7.2.24 とその証明

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 7.2.24a.　(X, x) は曲面上の有理特異点，$f\colon Y \to X$ をその最小特異点解消，Z はその基本サイクルとする．また，$\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．このとき，以下が成立する．$(n \in \mathbb{N})$

(1) $\mathcal{O}_Y(-nZ) = (f^*\mathfrak{m}^n)\mathcal{O}_Y, \quad f_*\mathcal{O}_Y(-nZ) = \mathfrak{m}^n$.

(2) $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \cong H^0(\mathcal{O}_Z(-nZ))$.

(3) $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 - (Z^2)_Y$.

証明. 命題 7.2.20a と同じ記号を用いる．

(1)　任意の $h \in \mathfrak{m}$ をとる．$\mathrm{div}(h \circ f) = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i + D$ ($D \geqq 0$ で D は E_i を成分に含まない) と書けるが，$h \circ f$ は $\mathrm{Supp}\, Z$ 上で 0 なので $a_i > 0$ $(\forall i)$ である．Z の任意の成分 E_i に対し，$(\mathrm{div}(h \circ f) \cdot E_i)_Y = 0$ で，$(D \cdots E_i)_Y \geqq 0$ なので，$\left(\sum_{i=1}^{r} a_i E_i \cdot E_j\right)_Y \leqq 0$ であり，最小性から，$Z \leqq \sum_{i=1}^{r} a_i E_i \leqq \mathrm{div}(h \circ f)$ である．したがって，$f^* h \in H^0(\mathcal{O}_Y(-Z))$ であり，$(f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_Y(-Z)$ がわかる．

逆の包含関係を示す．$y \in \mathrm{Supp}\, Z$ をとる．前補題の U を十分小さく選んでおけば，$((D + Z) \cdot E_i)_Y = 0$ $(\forall i)$ を満たす U 上の因子 D で，$y \notin \mathrm{Supp}\, D$ を満たすものが存在する．y の近傍 U_y を $U_y \cap \mathrm{Supp}\, D = \phi$ となるようにとる．前補題より，$\mathrm{div}(h) = D + Z$ を満たす正則関数 h が存在する．定義 4.2.10 で述べたように $\mathcal{O}_{U_y}(-Z) = \mathcal{O}_{U_y} \cdot h$ である．h は $\mathrm{Supp}\, Z$ 上で 0 だから，$f_* h = h \circ (f^{-1})$ は X 上の正則関数になり，$h \in (f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y$ である．これは，$(f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y \supset \mathcal{O}_Y(-Z)$ を意味する．

よって，$(f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-Z)$ で，これより，$(f^*\mathfrak{m}^n)\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-nZ)$ が得られる．これより，$\mathfrak{m}^n \subset f_*\mathcal{O}_Y(-nZ)$ となる．コホモロジー完全系列

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(-(n+1)Z) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y(-nZ) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z(-nZ)) \\ &\longrightarrow R^1 f_*\mathcal{O}_Y(-(n+1)Z) = 0 \end{aligned}$$

を考える．$n = 0$ の場合を考えると，$f_*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$ より，全射 $\varphi\colon \mathcal{O}_X/\mathfrak{m} \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Z) \cong \mathbb{C}$ を得るが $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ なので φ は同型写像で，$\mathfrak{m} = f_*\mathcal{O}_Y(-Z)$ となる．よって，$\mathfrak{m}^n = f_*\mathcal{O}_Y(-nZ)$ である．

(2) は (1) よりすぐわかる．

(3)　完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-(n+1)Z) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(-nZ) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-nZ) \longrightarrow 0$$

より，

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_Z(-nZ)) &= \chi(\mathcal{O}_Z(-nZ)) = \chi(\mathcal{O}_Y(-nZ)) - \chi(\mathcal{O}_Y(-(n+1)Z)) \\ &= -n(Z^2)_Y - \frac{1}{2}(Z \cdot (K_Y + Z))_Y = 1 - n(Z^2)_Y \end{aligned}$$

となる．　□

● 初版 p.375, 新装版 p.377. 命題 7.2.26 の証明の 1 行目

旧: (1) 命題 7.2.20a の D に対し

新: (1) 命題 7.2.20a の条件を満たす D に対し

● 初版 p.375, 新装版 p.377．命題 7.2.26 の証明の 10 〜 11 行目

誤: $(f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(D)$ を満たすような因子 D をとる．この D は命題 7.2.20 の条件を満たすので，

正: $(f^*\mathfrak{m})\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-D)$ を満たすような因子 D をとる．この D は命題 7.2.20a の条件を満たすので，

● 初版 p.375, 新装版 p.377．命題 7.2.26 の (2) と (3) 証明

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

(2)　リーマン・ロッホの定理より，

$$\chi(\mathcal{O}_Z) = \chi(\mathcal{O}_Y) - \chi(\mathcal{O}_Y(-Z)) = -\frac{1}{2}(Z\cdot(Z+K_Y)) = 1$$

である．命題 7.2.16(2) より $H^0(\mathcal{O}_Z) \cong \mathbb{C}$ なので，$H^1(\mathcal{O}_Z) = 0$ である．

(3)　命題 7.2.17 より $(Z^2)_Y = -2$, $(Z\cdot K_Y)_Y = 0$ なので結論を得る．□

● 初版 p.376, 新装版 p.378．5 行目

旧: として作用させるものとする．このとき，

新: として作用させるものとする．このとき，定理 6.8.14 より

● 初版 p.376, 新装版 p.378．7 行目

誤: 有限生成な環で，$\mathbb{C}^2/G$ は $R = \mathbb{C}[X, Y]^G$ を

正: 有限生成な環で，$S = \mathbb{C}^2/G$ は $R = \mathbb{C}[X, Y]^G$ を

● 初版 p.376, 新装版 p.378．9 〜 10 行目

以下の文を削除して下さい．ウソです．

削除: このとき，S は $\mathbb{C}^2$ の原点 O の像 $\pi(O)$ 以外では非特異で，$\pi(O)$ は S の孤立特異点である．

● 初版 p.376, 新装版 p.378．例 7.2.28 の 7 行目

誤: $x^2 + y^2 + x^n = 0$

正: $x^2 + y^2 + z^n = 0$

● 初版 p.377, 新装版 p.379．定理 7.2.31 の証明の (I) の 3 行目

誤: $(K_Y \cdot E_i)_X = 0$ で，

正: $(K_Y \cdot E_i)_Y = 0$ で，

● 初版 p.378, 新装版 p.380. 定理 7.2.31 の証明の (II) の第 3 〜 5 段落

定理 7.2.31 の証明の (II) の第 3 〜 5 段落を次の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

$h: Y \to \mathbb{C}^2$ を $h(P) = (h_1(P), h_2(P))$ で定める. $P \in E$ のとき $h(P) = (0, 0)$ なので, $h(E)$ は 1 点であり, h から $g: X \to \mathbb{C}^2$ が誘導され, $h = g \circ f$ を満たす. (x, y) を $U \subset \mathbb{C}^2$ の座標系とすると, $h(D_1) = h(D_n) \subset U$ は $x = 0$ で定まる y 軸, $h(D_1') = h(D_n')$ は $y = 0$ で定まる x 軸である. X を十分小さく適当に選び直し, $U = g(X) \subset \mathbb{C}^2$ とおけば, $h|_{D_i}: D_i \to U$, $h|_{D_i'}: D_i' \to U$ $(i = 1, 2)$ は単射になり, U の座標軸の一般の点で h は 2 対 1 写像になるので, 解析的正則写像 $g: X \to U$ は 2 重被覆になる. したがって, 位数 2 の恒等写像でない自己同型写像 $\iota_X: X \to X$ で, $g \circ \iota_X = g$ を満たすものが存在する.

$B \subset U$ を g の分岐因子とする. U における B の定義方程式を $b(x, y) = 0$ とする. すると, 定理 6.8.12 の証明からわかるように, X は $\mathbb{C}^3$ 内の曲面 $z^2 = b(x, y)$ の原点の近傍と同型である. B が原点 $(0, 0)$ 以外に特異点 (x_0, y_0) を持つと, $z^2 = b(x, y)$ で定まる X も $(x_0, y_0, 0)$ を特異点に持ってしまうので, B は $U \subset \mathbb{C}^2$ の原点以外では非特異である.

$\mathrm{Rat}(X) = \mathrm{Rat}(Y)$ なので, ι_X は Y 上の位数 2 の恒等写像でない自己同型写像 $\iota_Y: Y \to Y$ を定める. ι_Y を生成元とする位数 2 の群を $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし, Y/G の正規化を W とする. W の特異点は高々(A_1) 型特異点のみである. Y は非特異なので自然な全射 $Y \to Y/G$ から全射正則写像 $g': Y \to W$ が誘導され, 2 重被覆になる. また, f から正則写像 $f': W \to U$ が誘導される.

● 初版 p.379, 新装版 p.381. 定理 7.2.31 の証明の (II) の最終段落.

定理 7.2.31 の証明の (II) の最終段落を次の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

$E_i' = g'(E_i) \subset W$, $g_i' = g'|_{E_i}: E_i \to E_i'$ とおく. $\iota_Y(D_1) = D_n$, $\iota_Y(D_1') = D_n'$ だから, $L_y = g'(D_1) = g'(D_n)$, $L_x = g'(D_1') = g'(D_n') \subset W$ とおく. $f'(L_x) \subset U$ は x 軸, $f'(L_y) \subset U$ は y 軸である. $\iota_Y(D_1 \cap E_1) \subset D_n \cap E = D_n \cap E_n$ だから $\iota_Y(E_1) = E_n$ である. よって, $E_1' = E_n' \cong \mathbb{P}^1$ である. 帰納的に, 各 $i < n/2$ に対し, $E_i' = E_{n+1-i}' \cong \mathbb{P}^1$ がわかる. g' は 2 対 1 写像だから, $i < j < n/2$ のとき $E_i' \neq E_j'$ である.

● 初版 p.379, 新装版 p.381. 定理 7.2.31 の証明の (II-1) の第 1 段落

次の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

(II-1) $n=2k-1$ が奇数の場合:

$g'_k\colon E_k \to E'_k \cong \mathbb{P}^1$ は 2 重被覆で，系 3.5.4 より g'_k は 2 点 $Q_1, Q_2 \in E'_k$ で分岐する．他の E'_i は，$g'\colon E_i \to E'_i$ がその近傍で同型写像なので，(-2)-曲線である．W は Q_1, Q_2 以外に特異点を持つことはできないが，これらの点は特異点でないことを示そう．Q_1, Q_2 の少なくとも一方が特異点ならば，それは (A_1) 型特異点である．(W, Q_i) の最小特異点解消 $\varphi\colon \tilde{W} \to W$ を行うと，$\varphi^{-1}(Q_i)$ は (-2)-曲線になる．非特異曲面間の双有理正則写像 $f' \circ \varphi\colon \tilde{W} \to W$ は，系 5.4.8 より，(-1)-曲線のコントラクションの合成として書けるはずであるが，$\tilde{W}$ 上の例外曲線の状況から，それは不可能である．したがって，W は非特異である．そして，E'_k が唯一の第 1 種例外曲線である．f' の例外集合は $E' = E'_1 \cup \cdots \cup E'_k$ であり，$E'_k, E'_{k-1}, E'_{k-2}, \ldots, E'_1$ の順に (-1)-曲線をコントラクトする写像の合成として f' は記述できる．

● 初版 p.380, 新装版 p.382. 定理 7.2.31 の証明の (II-1) の第 2 〜 3 段落

次の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

B の W への強変換を $\tilde{B}$ とする．$g'\colon Y \to W$ は $\tilde{B}$ で分岐する 2 重被覆で，Y, W は非特異だから，$\tilde{B}$ は非特異である (既約とは限らない)．2 重被覆 $g'_k\colon E_k \to E'_k$ の分岐集合は $\{Q_1, Q_2\}$ (Q_1, Q_2 は相異なる E'_k 上の 2 点) で，$\tilde{B} \cap E = \{Q_1, Q_2\}$ である．したがって，X をあらかじめ十分小さく選んでおけば，Q_i で E'_k と横断的に交わる非特異解析曲線 $\tilde{B}_i \subset W$ があり，$\tilde{B} = \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ が g' の分岐集合になる．$\tilde{B}_1$ と $\tilde{B}_2$ は同じ曲線の一部かもしれないが，以下の議論に支障は生じない．

E'_k のコントラクションを $\pi_k\colon W \to W_{k-1}$ とする．$\pi_k(E'_k)$ の近傍での座標系 (x_k, y_k) を適当に選ぶと，$\pi_k(\tilde{B})$ は $y_k^2 = x_k^2$ で定まる 2 曲線として記述できる．以下帰納的に，E'_{j+1} の像のコントラクションを $\pi_{j+1}\colon W_{j+1} \to W_j$ とし，W_j の座標系 (x_j, y_j) を $x_{j+1} = x_j, y_{j+1} = x_j y_j$ となるように選ぶと，$\pi_{j+1} \circ \cdots \circ \pi_k(\tilde{B})$ は $y_j^2 = x_j^{2(k-j)}$ で定まる 2 曲線として記述できる．よって，$B \subset U$ は $y_1^2 = x_1^{2k}$ で定まる 2 曲線になる．したがって，X は $z^2 = y^2 - x^{n+1}$ で定まる $\mathbb{C}^3$ の超曲面の原点の近傍と，解析的同型である．

● 初版 p.380 〜 381, 新装版 p.382 〜 383. 定理 7.2.31 の証明の (II-2) の図の直後の段落

次の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

B の W への強変換を $\tilde{B}$ とする．$g'\colon Y \to W$ は $\tilde{B}$ で分岐する 2 重被覆で，$\tilde{B}$ は非特異である．$2(\tilde{B}\cdot E'_k)_W = (g'^*\tilde{B}\cdot(E_k+E_{k+1}))_Y = (2B'\cdot(E_k+E_{k+1}))_Y = 4$ なので，$\tilde{B}$ と E'_k は 1 点で重複度 2 で交わる．$\tilde{B}$ は E'_k 以外の E の成分と交わらないので，$g'(P)$ の近傍の座標系 (s, t) を適当に選べば，E'_k は s-軸，$\tilde{B}$ は $t = s^2$ で定まる曲線となる．

● 初版 p.381, 新装版 p.383. 定理 7.2.31 の証明の (III) の第 3 段落の冒頭

旧: $g'_{n-2}\colon E_{n-2} \to E'_{n-2}$ は同型写像である．

新: U の y 軸, x 軸の Y への強変換が D, D' だから，$g'_{n-2}\colon E_{n-2} \to E'_{n-2}$ は 2 重被覆になりえず，$g'_{n-2}\colon E_{n-2} \to E'_{n-2}$ は同型写像である．

● 初版 p.382, 新装版 p.384. 定理 7.2.31 の証明の (III-1) の 2 行目

誤: $g_2(E_2 \cap E_3)$ 以外の g'_2 の分岐点を Q とする．

正: $g'_2(E_2 \cap E_3)$ 以外の g'_2 の分岐点を Q とする．

● 初版 p.385, 新装版 p.387. 命題 7.3.2 の証明の 1 行目

旧: C が T 内の曲線で,

新: C は T 内の曲線とし,

● 初版 p.386, 新装版 p.388. 命題 7.3.3

次の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 7.3.3a. $f\colon S \to C$ は上のようなファイバー曲面とし，$P, Q \in C$ する．このとき，以下が成り立つ．

(1) 2 つの非特異ファイバー $f^{-1}(P)$ と $f^{-1}(Q)$ は解析的位相に関して同相である．特に，その種数は等しい．

(2) $D = f^*P$, $D' = f^*Q$ とするとき，$D \equiv D'$ (算術的同値) である．

(3) $D = f^*P$ で，E が D の既約成分のとき，$\mathcal{O}_E(D) = \mathcal{O}_E$ である．特に，$(D\cdot E)_S = 0$ である．

証明. (1)　系 6.9.11a(1) よりすぐわかる．

(2)　下図の可換図式が存在して，$c_1(P) = c_1(Q)$, $f^*P = D$, $f^*Q = D'$ なので

$c_1(D) = c_1(D')$ である．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(C) & \xrightarrow{c_1} & H^2(C, \mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ \mathrm{Pic}(S) & \xrightarrow{c_1} & H^2(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

S 内の任意の因子 E に対して，

$$(D \cdot E)_S = c_1(D) \cup c_1(E) = c_1(D') \cup c_1(E) = (D' \cdot E)_S$$

となり，$D \equiv D$ である．

(3)　C は射影曲線なので $C \subset \mathbb{P}^N$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ である．H は点 P で C と横断的に交わる $\mathbb{P}^N$ の超平面，H' は P を通らない $\mathbb{P}^N$ の超平面とする．$H|_C \sim H'|_C$ なので，$P \sim \displaystyle\sum_i a_i Q_i$ (Q_i は P 以外のある点) と書ける．$D' = \displaystyle\sum_i a_i f^* Q_i$ とおくとき，$\mathcal{O}_S(D) \cong \mathcal{O}_S(D')$ である．よって，$\mathcal{O}_E(D) \cong \mathcal{O}_E(D')$ である．D' の既約成分と E は共通部分を持たないので，$\mathcal{O}_E(D') \cong \mathcal{O}_C$ である．□

● 初版 p.386 〜 387, 新装版 p.388 〜 389. 定理 7.3.4

次の原稿と差し替えて下さい．一般化しました．

[差し替え原稿]

定理 7.3.4a. (**ザリスキーの補題**)　S は非特異射影曲面，$C_1, \ldots, C_k$ は S 上の既約曲線で，$F = \displaystyle\sum_{i=1}^k m_i C_i$ $(\forall m_i \in \mathbb{N})$, $0 \neq D = \displaystyle\sum_{i=1}^k a_i C_i$ $(\forall a_i \in \mathbb{Z})$ とする．

(1) 任意の i に対して $(D \cdot C_i)_S \leqq 0$ が成り立つとすれば，$(D^2)_S \leqq 0$ である．また，もし $(D^2)_S = 0$ で $\mathrm{Supp}\, F$ が連結ならば，ある有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在し $D = rF$ となる．

(2) $f \colon S \to C$ はファイバー曲面であり，$\mathrm{Supp}\, D$ はあるファイバー $f^{-1}(P)$ に含まれるとする．すると，$(D^2)_S \leqq 0$ である．また，$(D^2)_S = 0$ かつ $f^{-1}(P)$ が連結であれば，ある有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在し $D = r \cdot f^* P$ となる．

証明. (1)　$(C_1 \cdot C_j)_S$ を (i, j)-成分とする k 次正方行列を A とする．$(F^2)_S \leqq 0$ と定理 5.4.6 より A は正の固有値を持たないので，$(D^2)_S \leqq 0$ である．

$(D^2)_S = 0$ かつ $\mathrm{Supp}\, F$ は連結であるとする．A は正の固有値を持たず，$(D^2)_S = 0$ だから，A は 0 を固有値に持つ．固有値 0 に関する A の固有空間 V が 2 次元以上であるとすると，ある因子 $0 \neq D' = b_1 C_1 + \cdots + b_k C_k \in V$ が存在し，$(D' \cdot C_i)_S = 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq k)$, かつ，$b_i \geqq 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq k)$, かつ，$b_j = 0$ $(1 \leqq \exists j \leqq k)$ となる．しか

し，$\operatorname{Supp} F$ は連結だから，D' の成分に含まれない C_j で $\operatorname{Supp} D' \cap C_j \neq \phi$ を満たすものが存在する．このとき，$(D' \cdot C_j)_S > 0$ となり矛盾する．したがって，V は 1 次元である．

$(F^2)_S = (D^2)_S = 0$ より $D, F \in V$ だから，ある有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在し，$D = rF$ と書ける．

(2)　$F = f^*P$ とおいて，(1) を使えばよい．　□

● 初版 p.388, 新装版 p.390. 定理 7.3.8 の 2 行目

誤: F を非特異ファーバーとする．

正: F を非特異ファイバーとする．

● 初版 p.388, 新装版 p.390. 定理 7.3.8 の証明の 7 行目

誤: $b_1(F) = 2h^1(P)$ だから，

正: $b_1(F) = 2h^1(Q)$ だから，

● 初版 p.388, 新装版 p.390. 定義 7.3.9 の 1 行目

旧: C はある非特異代数曲線とする．

新: C はある非特異射影曲線とする．

(同値ですが...)

● 初版 p.389, 新装版 p.391. 命題 7.3.10 の証明

次の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明．もし，$P_n(S) \neq 0$ とすると，$\exists D \in |nK_S| \neq \phi$ である．$Q \in C$, $F = \pi^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^1$ とすると，

$$-2 = \deg K_F = ((K_S + F) \cdot F)_S = (K_S \cdot F)_S = \frac{1}{n}(D \cdot F)_S \geqq 0$$

となり矛盾する．したがって，$P_n(S) = 0$ である．

$q(S) = g(C)$ を示す．命題 7.1.9 の証明の最後の部分の議論のように，自然な写像 $H^0(C, \Omega^1_C) \longrightarrow H^0(S, \Omega^1_S)$ は単射であるので，$g(C) \leqq q(S)$ である．特に，$q(S) = 0$ ならば $g(C) = q(S) = 0$ である．以下，$q(S) \geqq 1$ の場合を考える．アルバネーゼ写像 $\alpha\colon S \to \operatorname{Alb}(S)$ のシュタイン分解を，$S \xrightarrow{\beta} C' \longrightarrow \operatorname{Alb}(S)$ とする．命題 7.3.2 より，トーラスは有理曲線を含まないので，点 $Q \in C$ に対し，$\pi^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^1$ は β で 1 点にコントラクトされる．したがって，全射正則写像 $\alpha \circ \pi^{-1}\colon C \to \alpha(S)'$ が構成でき，こ

れから全射正則写像 $\varphi = \beta \circ \pi^{-1} \colon C \to C'$ が誘導される．特に，$\dim C' \leqq \dim C = 1$ である．$\mathrm{Alb}(S)$ は $\alpha(S)$ を含む最小のトーラスで $\dim \mathrm{Alb}(S) = q(S) \geqq 1$ なので，$\alpha(S)$ は曲線で，その正規化 C' は非特異曲線である．命題 7.1.9 より $g(C') = q(S)$ が成り立つ．$g(C) \geqq g(C') = q(S) \geqq g(C)$ なので，$g(C) = q(S)$ である．□

● 初版 p.389, 新装版 p.391. 補題 7.3.11

以下のように，少し一般化します．

[差し替え原稿]

補題 7.3.11a. (**Tsen の定理**) S は非特異射影曲面，C は非特異射影曲線，$\pi \colon S \to C$ は全射正則写像，W は C の空でない開集合で，任意の $Q \in W$ に対し $\pi^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^1$ であると仮定する．すると，S 上の因子 H で，$(H \cdot \pi^* Q)_S = 1$ $(\forall Q \in C)$ を満たすものが存在する．

● 初版 p.390, 新装版 p.392. 定理 7.3.12

以下のように，少し一般化します．

[差し替え原稿]

定理 7.3.12a. S は非特異射影曲面，C は非特異射影曲線，$\pi \colon S \to C$ は全射正則写像，W は C の空でない開集合で，任意の $Q \in W$ に対し $\pi^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^1$ であると仮定する．すると，ある空でないアフィン開集合 $U \subset C$ が存在して，$\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$ となる．また，π は切断を持つ．

● 初版 p.390, 新装版 p.392. 定理 7.3.12 の証明の 1 行目

上の一般化に伴う修正です．

旧: 上の補題のように，$F = \pi^{-1}(Q)$ とし，

新: 上の補題のように，$F = \pi^{-1}(Q)$ $(Q \in W)$ とし，

● 初版 p.390, 新装版 p.392. 定理 7.3.12 の証明の最後の 4 行

証明の最後から 4 行目の「また，$t \in \mathbb{P}^1$ に対し，$\varphi^{-1}(t)$ の閉包を C_t とおくと,」以降を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

また，$t \in \mathbb{P}^1$ に対し，$\varphi^{-1}(t)$ の閉包を C_t とおくと，$s \neq t \in \mathbb{P}^1$ のとき，$C_s \cap C_t \in F_1 \cup \cdots \cup F_k$ である．φ の構成法から $C_t,\ C_s \in |H + mF|$ である．$(C_t \cdot F)_S = ((H + mF) \cdot F)_S = (H \cdot F)_S = 1$ なので，$\pi|_{C_t} \colon C_t \to C$ は同型写像で，これは π の切断である．また，$C' = C - \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ とおけば，$P \in U$ に

対して $\left(\left((\pi|_{C_t})^{-1}\circ\pi\right)(P),\,\varphi(P)\right)\in C'\times\mathbb{P}^1$ を対応させる写像は同型写像なので，$U\cong C'\times\mathbb{P}^1$ である． □

● 初版 p.390 〜 391, 新装版 p.392 〜 393. 定理 7.3.13

以下の原稿と差し替えて下さい．(2) を追加しました．

[差し替え原稿]

定理 7.3.13a. S は非特異射影曲面，C は非特異曲線，$\pi\colon S\to C$ は全射正則写像で，C のある空でないザリスキー開集合 U が存在して，任意の $Q\in U$ に対し $\pi^{-1}(Q)\cong\mathbb{P}^1$ である (つまり，π の一般ファイバーは $\mathbb{P}^1$) とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) ある幾何学的線織面 $\pi'\colon S'\to C$ と全射正則双有理写像 $\varphi\colon S\to S'$ で $\pi=\pi'\circ\varphi$ を満たすものが存在する．つまり，S の極小モデルとなる幾何学的線織面が存在する．

(2) もし，π のどのファイバーにも第 1 種例外曲線が含まれなければ，$\pi\colon S\to C$ は幾何学的線織面である．

証明. (1)　$Q\in U$ とし，$F_0=\pi^{-1}(Q)\cong\mathbb{P}^1$ とする．$P\in C-U$ をとる．

もし，$F=\pi^{-1}(P)$ が既約曲線ならば，$F\equiv F_0$ より，$(F^2)_S=0$, $(F\cdot K_S)_S=(F_0\cdot K_S)_S=-2$ となり，$\deg K_F=-2$ となる．定理 5.5.9 より，$F\cong\mathbb{P}^1$ となる．

$\pi^{-1}(P)=C_1\cup\cdots\cup C_r$ (C_i は曲線，$r\geqq 2$) となる場合を考える．因子として，$D=\pi^*P=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}a_iC_i$ と書け，$1\leqq\forall i\leqq r$ に対し $a_i\geqq 1$ である．任意の i に対し $(C_i\cdot D)_S=0$ で，定理 7.3.4 より，$(C_i^2)_S<0$ である．また，$(D\cdot K_S)_S=(F_0\cdot K_S)=-2$ より，$(C_i\cdot K_S)_S<0$ を満たす C_i が存在する．C_i は第 1 種例外曲線なので，エンリッケス・カステルヌボーの定理により，C_i のコントラクション $\psi\colon S\to S_0$ が存在し，S_0 は非特異射影曲面になる．$\pi(C_i)$ は 1 点だから，有理写像 $\pi_0=\pi\circ\psi^{-1}\colon S_0\cdots\to C$ は正則写像になり，π と同じ仮定を満たす．

S_0 に特異ファイバーがある限り，上のように，そこから第 1 種例外曲線を見つけてそれをコントラクトできる．この操作を繰り返すと，特異ファイバーを持たない $\pi'\colon S'\to C$ が得られ，最初に述べた理由から，これは幾何学的線織面になる．

(2)　$D=\pi^*P=\displaystyle\sum_{i=1}^{r}a_iC_i$ (C_i は既約曲線) が $\pi\colon S\to C$ の特異ファイバー であるとする．$(D\cdot K_S)_S=(F_0\cdot K_S)_S=-2$ なので，$(C_i\cdot K_S)_S<0$ を満たす C_i が存在する．系 6.9.11a(1) より $\pi^{-1}(P)=\operatorname{Supp}D$ は連結であるので，もし $r\geqq 2$

ならば $(C_i \cdot D)_S = 0$ より $(C_i^2)_S < 0$ が得られる．すると，C_i は第 1 種例外曲線となり，仮定に反する．よって，$r = 1$ で，$\pi^{-1}(P) = C_1$ は既約曲線である．グラウエルルトの定理より，$p_a(C_1) = g(F_0) = 0$ なので，$C_1 \cong \mathbb{P}^1$ である．さらに，$h^0(\mathcal{O}_D) = h^0(\mathcal{O}_{F_0}) = 1$ より，$D = C_1$ となり，π は特異ファイバーを持たない． □

● 初版 p.391, 新装版 p.393. 定理 7.3.14 の 2 〜 3 行上

誤: $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to X$ は幾何学的線織面である．さらに，$\mathcal{L}$ が C 上の可逆層のとき，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}$, $\pi': \mathbb{P}(\mathcal{E}') \to X$ とおくと，

正: $\pi: \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to C$ は幾何学的線織面である．さらに，$\mathcal{L}$ が C 上の可逆層のとき，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{L}$, $\pi': \mathbb{P}(\mathcal{E}') \to C$ とおくと，

● 初版 p.392 〜 393, 新装版 p.394 〜 395. 定理 7.3.14 の証明

下記の証明と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. (1)　$\sigma: C \to S$ を切断とし，$H = \sigma(C)$ とおく．$\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{O}_S(H)$ とおく．$P \in S$ に対し，$\pi(P)$ を含む C のアフィン開集合 U を，$\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^1$ となるようにとる．$F = \pi^{-1}(\pi(P)) \cong \mathbb{P}^1$, $Q = H \cap F$ とする．$H^0(F, \mathcal{O}_F(Q))$ は定数関数 1 と，Q で 1 位の極を持ち他に極を有理関数を基底とする 2 次元複素ベクトル空間である．同様に，S 上の定数関数 $e_1 = 1$ と，H で 1 位の極を持ち $U \times \mathbb{P}^1$ 上でそれ以外に極を持たない $U \times \mathbb{P}^1$ 上の有理関数 e_2 により，

$$\mathcal{E}(U) = H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_S(H)) \cong \mathcal{O}_C(U) \cdot e_1 \oplus \mathcal{O}_C(U) \cdot e_2$$

と書け，$\mathcal{E}$ はランク 2 の局所自由 $\mathcal{O}_C$-加群である．そこで，

$$\varphi(P) = \pi(P) \times (e_1(P) : e_2(P)) \in U \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

によって，正則写像 $\varphi: S \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ を定義できる．φ が同型写像で，$\pi = \pi' \circ \varphi$ を満たすことは容易に確認できる．

$e_1 = 1$ は C 全体での正則関数に拡張できる．そこで，$\mathcal{E}(U)$ の最初の直和因子 $\mathcal{O}_C(U) \cdot e_1$ を $\mathcal{O}_C(U)$ と同一視して，$\psi: \mathcal{O}_C \to \mathcal{E}$ を作る．他方，$\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}_S(H)$ とおくと，e_2 が因子 H を定めるので，$\mathcal{L}(U) = \mathcal{O}_C(U) \cdot e_2$ である．自然な全射 $\mathcal{E} = \pi_* \mathcal{O}_S(H) \longrightarrow \sigma^* \mathcal{O}_S(H) = \mathcal{L}$ から完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$$

が構成される．

(2)　$C \cong \mathbb{P}^1$ の場合には, $\mathbb{P}^1$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ はある整数 n により, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ と書けるが, このとき $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(n)$ と書く．一般に，完全系列 $0 \to \mathcal{O}_C(a) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_C(b) \to 0$

が存在するとき，$\deg \mathcal{E} = a + b$ と約束する．このとき，

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{E}) &\geqq h^0(\mathcal{E}) - h^1(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{O}_C(a)) + \chi(\mathcal{O}_C(b)) \\ &= a + b + 2(1 - g(C)) = \deg \mathcal{E} + 2 \end{aligned}$$

である．$-(\deg \mathcal{E})/2$ を超えない最大の整数を m とする．$\deg \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(m) = 0, -1$ であり，$\mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(m)) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$ なので，$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(m)$ を新たな $\mathcal{E}$ とすることによって，最初から $-1 \leqq \deg \mathcal{E} \leqq 0$ と仮定してよい．上の考察から，$h^0(C, \mathcal{E}) \geqq 1$ である．$0 \neq f \in H^0(C, \mathcal{E})$ をとる．$\varphi(1) = f$ で定まる写像 $\varphi: \mathcal{O}_C \to \mathcal{E}$ の双対写像 $\varphi^\vee: \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \mathcal{O}_C$ をとり，$\mathcal{I} = \operatorname{Im} \varphi^\vee$ とおく．$\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_C$ のイデアル層なので，ある非負整数 $a \geqq 0$ により，$\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_C(-a)$ と書ける．また，$\operatorname{Ker} \varphi^*$ は $\mathcal{E}$ の部分層でランク 1 なので可逆層であり，$b = \deg \mathcal{E} - a$ として，$\operatorname{Ker} \varphi^* \cong \mathcal{O}_C(-b)$ と書ける．完全系列 $0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-b) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \mathcal{O}_C(-a) \longrightarrow 0$ の双対として，完全系列

$$0 \to \mathcal{O}_C(a) \to \mathcal{E} \to \mathcal{O}_C(b) \to 0$$

が得られる．ここで $a + b = \deg \mathcal{E} \leqq 0$, $a \geqq 0$ なので，$b \leqq a$ である．上の完全系列に $\mathcal{O}_C(-a)$ をテンソルして，$a = 0$, $b \leqq 0$ と仮定してもよい．

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_C) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(a), \mathcal{O}_C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(b), \mathcal{O}_C)$$

は完全系列で，

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(b), \mathcal{O}_C) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C(-b)) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C(-b)) = 0$$

なので，恒等写像 $\mathrm{id}: \mathcal{O}_C(a) \longrightarrow \mathcal{O}_C$ はある写像 $\psi: \mathcal{E} \to \mathcal{O}_C$ の像となる．包含写像 $\mathcal{O}_C \to \mathcal{E}$ と ψ の合成写像は $\mathcal{O}_C$ 上の恒等写像となるので，$\mathcal{E} = \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(b)$ となる． □

● 初版 p.393, 新装版 p.395. 定理 7.3.15 の直前の行

旧: $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_S(C_0)|_{C_0}$ に注意する．このとき，次の定理が成り立つ．

新: σ を通して $C = C_0$ と同一視すれば，$\mathcal{L} = \sigma^* \mathcal{O}_S(C_0) \cong \mathcal{O}_S(C_0)|_{C_0} = \mathcal{O}_{C_0}(C_0|_{C_0})$ なので，$L = C_0|_{C_0}$ と選べる．このとき，次の定理が成り立つ．

● 初版 p.393, 新装版 p.395. 定理 7.3.15 の証明の 3 〜 5 行目

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

$$(\pi_* \mathcal{O}_S(D))|_P = (\pi_* \mathcal{O}_F)|_P = (\pi_* \mathcal{O}_F)(P) = H^0(F, \mathcal{O}_F) = \mathbb{C}$$

であり，$\pi_*\mathcal{O}_S(D)$ は C 上の可逆層になる．したがって，問 4.2 より，C 上のある因子 D_C があり，$\pi_*\mathcal{O}_S(D) \cong \mathcal{O}_C(D_C)$ となる．

自然な写像 $\pi^*(\pi_*\mathcal{O}_S(D)) \longrightarrow \mathcal{O}_S(D)$ は左辺が可逆層なので単射であり，各ファイバーに制限したとき

● 初版 p.394, 新装版 p.396. 定理 7.3.15 の証明の最後

以下を追加して下さい．

[追加原稿]

また，

$$\begin{aligned}(K_S^2)_S &= -4(\pi^*(K_C+L)\cdot C_0)_S + 4(C_0^2)_S = -4(\deg K_C + \deg L) + 4\deg L \\ &= -4\deg K_C = 8(1-g(C))\end{aligned}$$

である． □

● 初版 p.394・p.396, 新装版 p.396・p.398. 定義 7.4.4

定義 7.4.4 をもとの場所から削除して，番号を定義 7.4.1b に変更し，定義 7.4.1 の直後に移動して下さい．

● 初版 p.394, 新装版 p.396. 定理 7.4.2

誤: S が極小な有理曲面ならば，S は $\mathbb{P}^2$ か Σ_n に同型である．

正: S が極小な有理射影曲面ならば，S は $\mathbb{P}^2$ か Σ_n に同型である．

● 初版 p.395, 新装版 p.397. 10 行目．定理 7.4.2 の証明の最後から 7 行目

誤: $C_1 \cap C_2 = \Phi^{-1}(P)$ は 1 点だから，

正: $C_1 \cap C_2 = \Phi_C^{-1}(P)$ は 1 点だから，

● 初版 p.395 〜 396, 新装版 p.397 〜 398. 定理 7.4.2 の直後から第 7.4.1 項の終わりまで，

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 7.4.3a. ヒルツェブルフ曲面 $\pi_n\colon \Sigma_n \to B = \mathbb{P}^1$ $(n \geqq 1)$ は，以下の性質を満たす．

(1) $C_n \cong \mathbb{P}^1$, $(C_n^2)_{\Sigma_n} = -n$ を満たす曲線 $C_n \subset \Sigma_n$ が存在する．このとき，$\mathcal{O}_{\Sigma_n}(1) \cong \mathcal{O}_{\Sigma_n}(C_n)$ である．

(2) $F_n = \pi^{-1}(Q)$ $(Q \in B)$ とする．Σ_n 上の既約曲線 Γ は，ある非負整数 k, l により，$\Gamma \sim kC_n + lF_n$ と書ける．このとき，$l \geqq kn$ である．

(3) $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$, $(\Gamma^2)_{\Sigma_n} < n$ を満たす曲線 Γ は C_n と π_n のファイバー以外に存在しない．

(4) 点 $P_n \in C_n \cap F_n$ におけるブロー・アップを $f_n\colon S_n \to \Sigma_n$ とし，$E_n = f_n^{-1}(P_n)$ とする．また，C_n, F_n の f_n による強変換を C'_n, F'_n とする．すると F'_n は S_n 内の第 1 種例外曲線なので，F'_n のコントラクション $g_n\colon S_n \to T_{n+1}$ が存在する．このとき，$T_{n+1} \cong \Sigma_{n+1}$ である．さらに，$C_{n+1} = g_n(C'_n)$ である．

(5) $K_{\Sigma_n} \sim -2C_n - (n+2)F_n$ である．

証明. (1) $\Sigma_n = \mathbb{P}\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)\big)$ とも書ける．このとき，$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow 0$ より，切断 $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \to \Sigma_n$ が構成される．$C_n = \sigma(\mathbb{P}^1)$ とおく．$\mathcal{O}_{\Sigma_n}(1) \cong \mathcal{O}_{\Sigma_n}(H)$ を満たす Σ_n 上の因子 H をとる．定理 7.3.15(1) より，$H \sim aC_n + bF_n$ である．定義 6.10.1 の $\mathcal{O}_{\Sigma_n}(1)$ の構成法より，$a = 1$ である．

各ファイバー F_n 上で $\big(\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n)\big)|_{F_n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ だから，$R^1\pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n) = 0$ である．よって，完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Sigma_n}(H) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_n}(H) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

に π_* を作用させると，全射 $\psi\colon \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_n}(H)$ が得られる．命題 6.10.1b より $\pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n) \cong \mathcal{O}_{C_n} \oplus \mathcal{O}_{C_n}(-n)$ であって，$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{C_0}$ なので，ψ は C_0 を定める全射 $\mathcal{O}_{C_n} \oplus \mathcal{O}_{C_n}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_n}(-n)$ と一致する．よって，$\mathcal{O}_{C_n}(H) \cong \mathcal{O}_{C_n}(-n)$ で $(H \cdot C_n)_{\Sigma_n} = -n$ である．完全系列 $(*)$ に π_* をほどこすと，

$$\mathcal{O}_{C_0}(bQ) \cong \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_n}(bF_n) \cong \pi_*\mathcal{O}_{\Sigma_n}(H - C_n) \cong \operatorname{Ker}\psi \cong \mathcal{O}_{C_n}$$

が得られる．よって $b = 0$ であり，$H = C_n$ が得られる．また，$(C_n^2)_{\Sigma_n} = (C_n \cdot H)_{\Sigma_n} = -n$ である．

(2) 定理 7.3.15(1) より $\Gamma \sim kC_n + lF_n$ と書ける．$k = (\Gamma \cdot F_n)_{\Sigma_n} \geqq 0$ であり，$0 \leqq (\Gamma \cdot C_n)_{\Sigma_n} = -kn + l$ であるので，$l \geqq kn \geqq 0$ である．

(3) は (2) よりすぐわかる．

(4) n に関する帰納法で同時に証明する．$\pi_n\colon \Sigma_n \to B$ より $\pi'_n\colon S_n \to B$ が誘導される．$(F_n'^2)_{S_n} = (F_n^2)_{\Sigma_n} - 1 = -1$ なので，F'_n は第 1 種例外曲線である．$C_{n+1} \cong C_n \cong \mathbb{P}^1$ で，$(C_{n+1}^2)_{T_{n+1}} = (C_n'^2)_{S_n} = (C_n^2)_{\Sigma_n} - 1 = -(n+1)$ である．また，$\pi'_n(F'_n)$ は 1 点なので，$\pi'_n\colon S_n \to B$ より $\pi\colon T_{n+1} \to B$ が誘導される．(2) より，S_n 内の第 1 種例外曲線は E_n と F'_n のみである．F'_n をコントラクトして得られる T_{n+1} は第 1 種例外曲線を持たない有理曲面であるので，定理 7.4.1 よりある Σ_m と同型である．(1), (2) より自己交点数が $-(n+1)$ であるような非特異有理曲線を含むヒルツェブルフ曲面は Σ_{n+1} しか存在しないので，$T_{n+1} \cong \Sigma_{n+1}$ である．

(5)　$n=1$ のとき．Σ_1 は $\mathbb{P}^2$ の 1 点でのブロー・アップで，C はその例外集合だから，$K_{\Sigma_1} \sim -2C_1 - 3F_1$ である．

$n \geqq 1$ とする．$K_{S_n} = f_n^* K_{\Sigma_n} + E_n = g_n^* K_{\Sigma_{n+1}} + F'_n$ より，n に関する帰納法で，$K_{\Sigma_n} \sim -2C_n - (n+2)F_n$ が証明できる．　□

上の (5) より，$(-K_{\Sigma_n} \cdot C_n)_{\Sigma_n} = 2 - n$ となる．したがって，$n \geqq 2$ のとき，$-K_{\Sigma_n}$ はアンプルでない．

命題 7.4.4a.　前定理と同じ記号を用いる．$\mathrm{Bs}\left|C_n + nF_n\right| = \phi$ である．

証明. $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$ より，切断 $\sigma' \colon \mathbb{P}^1 \to \Sigma_n$ が構成される．$C_0 = \sigma'(\mathbb{P}^1)$ とおく．上の完全系列は split しているので，$C_0 \cap C_n = \phi$ である．$C_0 \sim C_n + bF_n$ $(\exists b \in \mathbb{Z})$ であるが，$0 = (C_0 \cdot C_n)_{\Sigma_n} = -n + b$ より $b = n$ である．

$P \in \mathrm{Bs}\left|C_n + nF_n\right|$ と仮定する．$Q \in \mathbb{P}^1$ は因子として非常にアンプルなので，Q を線形同値に $\mathbb{P}^1$ 上を動かせば，$F_n = \pi^{-1}(Q)$ も Σ_n 上を動く．よって，$P \notin F_n$ と仮定してよい．すると，$P \in C_n$ である．他方, $P \in C_0 \in \mathrm{Bs}\left|C_n + nF_n\right|$ であるが，$P \in C_0 \cap C_n = \phi$ なので，$\mathrm{Bs}\left|C_n + nF_n\right| = \phi$ である．　□

上の命題により，有理写像 $\Psi_{C_0} \colon \Sigma_n \to Y$ は正則写像になる．$(C_0 \cdot C_n)_{\Sigma_n} = 0$ だから，$P = \Psi_{C_0}(C_n)$ は 1 点である．因子 C_0 は曲線 C_n の外ではアンプルだから，$\Psi_{C_0} \colon (\Sigma_n - C_n) \xrightarrow{\cong} (Y - \{P\})$ である．つまり，Ψ_{C_0} は $(-n)$-曲線 C_n だけをコントラクトする正則写像である．ただし，$n \geqq 2$ のとき，P は Y の孤立特異点である．また，$\Psi_{C_0}(F_n)$ は $\mathbb{P}^N$ 内の直線で，特異点 P を通る．よって，Y は曲線 $\Psi_{C_0}(C_0)$ を底とし P を頂点とする錐面である．

● 初版 p.396 〜 397, 新装版 p.398 〜 399. 定理 7.4.5 の証明

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. (1)　$-2 = \deg K_C = ((K_S + C) \cdot C)_S = (K_S \cdot C)_S$ に注意する．

Case 1.　$H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ の場合．完全系列 $0 \to H^0(\mathcal{O}_S) \to H^0(\mathcal{O}_S(C)) \to H^0(\mathcal{O}_C(C)) \to 0$ が存在するから，$h^0(\mathcal{O}_S(C)) = 2$ である．よって，$C \neq D \in |C|$ となる有効因子 D が存在する．$(C \cdot D)_S = (C^2)_S = 0$ だから，$C \cap \mathrm{Supp}\, D = \phi$ で，$\mathrm{Bs}\,|C| = \phi$ である．したがって，有理写像 $\Phi_C \colon S \to \mathbb{P}^1$ は正則写像である．命題 4.2.23c より，Φ_C は全射である．定理 5.1.12 より Φ_C の一般ファイバー $F = \Phi_C^{-1}(P)$

は非特異である．$F = \Phi_C^* P \in |C|$ なので，$(F \cdot K_S)_S = (C \cdot K_S)_S = -2$ であり，$\deg K_F = ((K_S + F) \cdot F)_S = -2$ となり，$F \cong \mathbb{P}^1$ が得られる．定理 7.3.12a より，$\Phi_C \colon S \to \mathbb{P}^1$ は線織面である．

Case 2.　$H^1(S, \mathcal{O}_S) \neq 0$ の場合. アルバネーゼ写像 $\alpha \colon S \to \mathrm{Alb}(S)$ のシュタイン分解 $S \xrightarrow{f} \Gamma \longrightarrow \mathrm{Alb}(S)$ $(\Gamma = f(S))$ をとる．命題 7.3.2 より複素トーラス $\mathrm{Alb}(S)$ は有理曲線を含まず，$\Gamma \to \mathrm{Alb}(S)$ は有限写像なので，$f(C)$ は 1 点である．

もし，$\dim \Gamma = 2$ ならば，定理 7.2.4 より $(C^2)_S < 0$ となり矛盾する．したがって，$\dim \Gamma = 1$ である．定理 5.1.12 より α の一般ファイバー $F_0 = \alpha^{-1}(Q)$ は非特異である．$f(C)$ は 1 点であるので，C は f のあるファイバー $f^{-1}(P)$ に含まれる．$F = f^* P$ (因子として) とする．

もし，F が 2 本以上の既約成分を持つとすると，$(C \cdot F)_S = (C \cdot F_0)_S = 0$ より，$(C^2)_S < 0$ となり矛盾する．よって，$F \sim mC$ $(\exists m \in \mathbb{N})$ である．$-2 = \deg K_C = ((K_S + C) \cdot C)_S = (K_S \cdot C)_S$ である．同様に，非特異曲線 F_0 についても，

$$-2 \leqq \deg K_{F_0} = (K_S \cdot F_0)_S = (K_S \cdot F)_S = m(K_S \cdot C)_S = -2m$$

となり，$m = 1$ となる．よって，f の一般ファイバー F_0 は $F_0 \cong \mathbb{P}^1$ であり，$f \colon S \to \Gamma$ は線織面である．

(2)　$m = (C^2)_S > 0$ とし，S を C 上の相異なる m 個の点 $P_1, \ldots, P_m$ でブロー・アップし，$\pi \colon \tilde{S} \to S$ を作る．$\tilde{C}$ を π による C の強変換とすると，$(\tilde{C}^2)_{\tilde{S}} = (C^2)_S - m = 0$，$\tilde{C} \cong \mathbb{P}^1$ なので，(1) より $\tilde{S}$ は線織面 $f \colon \tilde{S} \to \Gamma$ で，$Q = \pi(\tilde{C})$ とするとき $\tilde{C} = f^{-1}(Q)$ である．$E_i = \pi^{-1}(P_i)$ とするとき，$\tilde{C} = f^{-1}(Q)$ より，$f(E_i)$ は 1 点でない．よって，$f(E_i) = \Gamma$ で $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ である．よって，$\tilde{S}$ は有理曲面である．したがって，S も有理曲面である．　□

● 初版 p.398, 新装版 p.400. 定理 7.4.6 の証明の Claim 2 の Case 2 の 6 行目

旧: $0 \geqq \chi(\mathcal{O}_S(-C_i)) = \dfrac{1}{2}(C_i \cdot (C_i + K_S))_S + \chi(\mathcal{O}_S)$

新: $0 \geqq -h^1(\mathcal{O}_S(-C_i)) = \chi(\mathcal{O}_S(-C_i)) = \dfrac{1}{2}(C_i \cdot (C_i + K_S))_S + \chi(\mathcal{O}_S)$

● 初版 p.398, 新装版 p.400. 定理 7.4.6 の証明の Claim 2 の Case 2 の 7 行目

誤: $\chi(\mathcal{O}_S) = 0$ なので，

正: $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$ なので，

● 初版 p.400, 新装版 p.402. 定理 7.4.6 の証明の最後の段落.

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

Claim 2 と前定理より，S は有理曲面であるか，線織面 $f\colon S\to\Gamma$ である．後者の場合，命題 7.3.10 より $g(\Gamma)=q(S)=0$ なので $\Gamma\cong\mathbb{P}^1$ で，S はヒルツェブルフ曲面になる． □

● 初版 p.400, 新装版 p.402. 定義 7.5.1 の最後の行.

誤: $f^{-1}(P)$ は**相対的極小** (relatively minimal) であるという.

正: $f\colon S\to C$ は**相対的極小** (relatively minimal) であるという.

● 初版 p.401, 新装版 p.403. 補題 7.5.3 の証明

下記の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

証明. $F=f^*P$ を非特異ファイバーとする．F は楕円曲線なので，命題 3.6.1b より $\mathcal{O}_F(K_F)\cong\mathcal{O}_F$ である．これと，命題 7.3.3a(3) より，$\mathcal{O}_F\cong\mathcal{O}_F(K_F-F)\cong\mathcal{O}_F(K_S)$, $\mathcal{O}_F(f^*K_C)\cong\mathcal{O}_F$ である．これより，$\mathcal{O}_F(K_{S/C})\cong\mathcal{O}_F$ である．したがって，$h^0(\mathcal{O}_F(K_{S/C}))=h^0(\mathcal{O}_F)=1$ で，系 6.9.11(2) より $f_*\mathcal{O}_S(K_{S/C})$ は C 上の可逆層である．練習問題 4.2 より，ある因子 D_C により $f_*\mathcal{O}_S(K_{S/C})=\mathcal{O}_C(D_C)$ と書け，命題 6.2.6c(1), (2) より，

$$f_*\mathcal{O}_S(K_S)\cong f_*\mathcal{O}_S(K_{S/C})\otimes_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}_C(K_C)=\mathcal{O}_C(D_C+K_C)$$

となる．$D_S=K_S-f^*(D_C+K_C)$ とする．命題 6.2.6c(3) より，自然な写像 $f^*(f_*\mathcal{O}_S(K_S))\longrightarrow\mathcal{O}_S(K_S)$ は単射なので，$f^*(D_C+K_C)\leqq K_S$, $D_S\geqq 0$ と仮定してよい．

f^*P $(P\in C)$ が非特異ファイバーのとき，P の近傍 W での C の局所座標系 x' をとり，$x=f^*x'$ とおく．各点 $Q\in f^{-1}(P)$ に対し，$(x,\,y)$ が点 $Q\in S$ の近傍 U での局所座標系になるように y をとることができる．W 上で $K_C|_W=\mathrm{div}(h(x)\,dx)$ であるとする．$\mathcal{O}_F(K_S)=\mathcal{O}_F=\mathcal{O}_F(f^*K_C)$ であったので，U 上では $K_S|_U=\mathrm{div}\left(h(f(x,y))\,dx\wedge dy\right)$ であると仮定できる．$f(x,\,y)=x$ なので，$K_S|_U=(f^*K_C)|_U$ であって，$D_C|_W=0$, $D_S|_U=0$ である．特に，D_S の各成分は f の特異ファイバーに含まれる．したがって，$(D_S\cdot f^*P)_S=0$ であり，$(K_S\cdot f^*P)_S=0$ が得られる． □

● 初版 p.401, 新装版 p.403. 定理 7.5.4 の 4 行目.

誤: 多重ファーバー

正: 多重ファイバー

● 初版 p.403, 新装版 p.405. 定理 7.5.4 の証明の 6 行目.

誤: $(C_i \cdot C_j)_S > 1$ となるものがある.

正: $(C_i \cdot C_j)_S \geqq 1$ となるものがある.

● 初版 p.403, 新装版 p.405. 定理 7.5.4 の証明の第 6 段落の 2 行目.

誤: $Y = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ の双対グラフ G は木 (tree) になる.

正: $Y = C_1 \cup \cdots \cup C_r$ の双対グラフ G が構成できる.

● 初版 p.404, 新装版 p.406. 定理 7.5.4 の証明の第 6 段落から最後まで.

証明中で E という記号は定理の E と混同してよくないので，E を全部 F_0 に変更して下さい．8 ケ所あります.

● 初版 p.404, 新装版 p.406. 定理 7.5.4 の証明の最後から 6 〜 7 行目.

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が複素トーラス $\mathrm{Pic}^0(U)$ の m 等分点であることが理解しにくいようなので，すこし書き直します.

旧: したがって，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset H^1(U, \mathcal{O}_U^\times)$ は $H^1(U, \mathcal{O}_U)/H^1(U, \mathbb{Z})$ の像の一部として得られる.

新: したがって，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset \mathrm{Pic}^0(U) \subset H^1(U, \mathcal{O}_U^\times)$ であり，$0 \neq \mathrm{Pic}^0(U) \cong H^1(U, \mathcal{O}_U)/H^1(U, \mathbb{Z})$ である.

● 初版 p.405 〜 406, 新装版 p.407 〜 408. 定理 7.5.5

下記の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

定理 7.5.5. $f\colon S \to C$ は相対的極小楕円曲面で，その多重ファイバー全体を，$f^*P_1 = m_1F_1, \ldots, f^*P_k = m_kF_k$ とする．また，D_C は，$f_*\mathcal{O}_S(K_{S/C}) = \mathcal{O}_C(D_C)$ を満たす C 上の因子とする．すると，

$$K_S \sim f^*(D_C + K_C) + \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)F_i$$

である．また，$\mathcal{O}_C(D_C) \cong (R^1 f_*\mathcal{O}_S)^\vee$ である.

証明. 補題 7.5.3 より，$D_S \in \left|K_S - f^*(D_C + K_C)\right|$ をうまく選ぶと，D_S の各成分は f の特異ファイバーに含まれる．特異ファイバー f^*P を，$f^*P = a_1C_1 + \cdots + a_rC_r$ と既約成分に分解する．$D_S = b_1C_1 + \cdots + b_rC_r + D_S''$, $\mathrm{Supp}\, D_S'' \cap f^{-1}(P) = \phi$ とし，

$D'_S = \sum_{i=1}^{r} b_i C_i$ とする．補題 7.5.2 の証明で述べたように，$f_* \mathcal{O}_S(K_S) = \mathcal{O}_C(D_C + K_C)$ である．

点 $Q \in C_i$ を Q が $f^{-1}(P)$ の非特異点であるようにとる．点 Q の座標開近傍 $U \subset S$ を $W = f(U)$ が C の座標開近傍になるようにとる．また，x を W の局所座標系とし，(g, y) を U の局所座標系とする．U を十分小さく選んで $f^* x = g^{a_i}$ であると仮定してよい．

$$\begin{aligned} a_i g^{a_i - 1} dg \wedge dy &= d(f^* x) \wedge dy \in (\mathcal{O}_S(K_S))(f^{-1}(W)) = (f^* f_* \mathcal{O}_S(K_S))(U) \\ &= (\mathcal{O}_S(K_S - D_S))(U) = (\Omega_S^2(-D_S))(U) \end{aligned}$$

であって，$(\Omega_S^2(-D_S))|_U = (\Omega_S^2(-bC_i))|_U = \mathcal{O}_U \cdot g^{b_i}\ dg \wedge dy$ である．よって，$a_i - 1 \geqq b_i$ である．

小平の定理の特異ファイバーの分類結果から，$(K_S \cdot C_i)_S = 0$ である．よって，

$$(D'_S \cdot C)_S = (D_S \cdot C_i)_S = ((K_S - f^*(K_C + D_C)) \cdot C_i)_S = 0$$

であり，$(D'^2_S)_S = 0$ がわかる．

$m = \mathrm{GCD}(a_1, \ldots, a_r)$, $f^* P = mF_0$ と表すとき，ザリスキーの補題から，ある非負整数 n が存在して，$D'_S = nF_0$ と書ける．$b_i < a_i$ より $0 \leqq n < m$ であり，特に $f^* P$ が多重ファイバーでない場合は $D'_S = 0$ となる．

さて，f の多重ファイバー全体を，$f^* P_1 = m_1 F_1, \ldots, f^* P_k = m_k F_k$ とし，$D_S = n_1 F_1 + \cdots + n_k F_k$ $(1 \leqq n_i < m_i)$ とする．各 F_i は (I_b) 型 $(b \geqq 0)$ であるから，

$$\mathcal{O}_{F_i} \cong \mathcal{O}_{F_i}(K_S + F_i) \cong \mathcal{O}_{F_i}(D_S + F_i) \cong \mathcal{O}_{F_i}((n_i + 1) F_i)$$

である．ところで，前定理の証明の中で示したように，F_i は $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \subset \mathrm{Pic}^0(U)$ を生成する．したがって，$\mathcal{O}_{F_i}(kF_i) \cong \mathcal{O}_{F_i}$ を満たす最小の自然数 k は m_i である．よって，$n_i + 1 = m_i$ である．したがって，$K_S \sim f^*(K_C + D_C) + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) F_i$ である．

$\mathcal{O}_C(D_C) \cong (R^1 f_* \mathcal{O}_S)^\vee$ は，定理 7.3.7 よりわかる． □

● 初版 p.406. 定理 7.5.6 の証明の 4 行目. (新装版では修正済み)

誤: $H^2(C, f_* \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^3(C, f_* \mathcal{O})$

正: $H^2(C, f_* \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^3(C, f_* \mathcal{O}_S)$

● 初版 p.407, 新装版 p.409. 定理 7.5.8 の 4 行目

誤: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で，G 生成元 g の

正: $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で，G の生成元 g の

● 初版 p.407, 新装版 p.409. 定理 7.5.8(5) の 1 行目

誤: $F = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \omega\sqrt{-1}\mathbb{Z})$ で,

正: $F = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ で,

● 初版 p.407, 新装版 p.409. 定理 7.5.8(6) の 1 行目

誤: $F = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \omega\mathbb{Z})$ で,

正: $F = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-1}\mathbb{Z})$ で,

● 初版 p.407, 新装版 p.409. 定理 7.5.8 の証明の 1 行目

誤: 定理 3.6.17 より，F を加法群を考えたとき,

正: 定理 3.6.17 より，F を加法群と考えたとき,

● 初版 p.408, 新装版 p.410. 系 7.5.9 の証明

下記の原稿と差し替えて下さい．大幅に丁寧になっています.

[差し替え原稿]

証明. 前定理の証明の記号を用い，$X = E \times F$, $Y = X/G_1$, $Z = (E/G_1) \times (F/G_1)$ とおく．$S \cong Y/G_2$ である．$\pi_1{:}\, X \to Y$, $\pi_2{:}\, Y \to S$，$\pi_3{:}\, Y \to Z$, $\pi_E{:}\, X \to E$, $\pi_F{:}\, X \to F$ を自然な全射とする.

$K_E \sim 0$, $K_F \sim 0$ なので，演習問題 4.7 より，$K_X \sim \pi_E^* K_E + \pi_F^* K_F \sim 0$ である．G_1 の元は E, F に平行移動して作用するので，E/G_1, F/G_1 は楕円曲線であり，Z は非特異で，上と同様に $K_Z \sim 0$ である.

G_2 の元の Y への作用は個定点を持たないので，Y の解析的開集合 U を十分小さく選べば $U \cong \pi_2(U)$ となり，$\pi_2(U)$ の局所座標系 (x, y) の引き戻し $(\pi_2^* x, \pi_2^* y)$ が U の局所座標系になる．よって Y は非特異である．$dx \wedge dy$ が K_S を定めるとき $d(\pi_2^* x) \wedge d(\pi_2^* y)$ が K_Y を定めると考えてよいので，$\pi_2^* K_S \sim K_Y$ が成り立つ．同様に，$\pi_1^* K_Y \sim K_X \sim 0$, $0 \sim \pi_3^* K_Z \sim K_Y$ である.

$\pi_2^* K_S \sim K_Y \sim 0$ なので，$\pi_2^* K_S = \mathrm{div}(h)$ を満たす $h \in \mathrm{Rat}(Y)$ が存在する．$\tilde{h} = \displaystyle\prod_{\sigma \in G_2} \sigma^*(h)$ とおく．$\sigma \in G_2$ に対し $\sigma^*(\tilde{h}) = \tilde{h}$ だから，$0 \neq \tilde{h} \in \mathrm{Rat}(S)$ である．$\pi_2^* K_S = \sigma^* \pi_2^* K_S = \mathrm{div}(\sigma^* g)$ に注意すると，$m = \#G_2$ とするとき,

$$mK_S = \sum_{\sigma \in G_2} \sigma^* K_S = \mathrm{div}(\tilde{h})$$

なので，$mK_S \sim 0$ が得られる.

よって，前定理において，(1), (2) の場合 $2K_S \sim 0$, (3), (4) の場合 $3K_S \sim 0$, (5), (6) の場合 $4K_S \sim 0$, (7) の場合 $6K_S \sim 0$ であり，いずれの場合も $12K_S \sim 0$ で

$P_{12}(S)=1$ となる． □

● 初版 p.409 〜 410, 新装版 p.411 〜 412. 定理 7.5.12

以下の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

定理 7.5.12a. S は代数曲面，B は楕円曲線で，局所自明な楕円曲面 $\varphi\colon S\to B$ が Principal ならば，S はアーベル曲面である．

証明. $\varphi\colon S\to B$ が Principal ならば，上の記号で，ある $\{g_{ij}\}\in H^1(B,\mathcal{E}_B)$ で，$i^1(\{g_{ij}\})=\{f_{ij}\}$ を満たすものが存在する．つまり，f_{ij} は各ファイバー $\varphi^{-1}(P)$ に平行移動として作用する．i^1 は単射なので，以下 $f_{ij}=g_{ij}$ と考える．完全系列

$$H^1(B,\mathbb{Z}^2)\longrightarrow H^1(B,\mathcal{O}_B)\xrightarrow{p^1}H^1(B,\mathcal{E}_B)\xrightarrow{\delta}H^2(B,\mathbb{Z}^2)$$

を考える．$H^2(B,\mathbb{Z}^2)\cong\mathbb{Z}^2\cong L$ の基底 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ を $\delta(\{g_{ij}\})\in\mathbb{Z}\mathbf{e}_1$ となるように選んでおき，$\iota\colon\mathbb{Z}\to L$ を $\iota(m)=m\mathbf{e}_1$ で定める．可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \| & & \big\downarrow{\scriptstyle\log} & & \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

に対応して，可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_B & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}_B^\times & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \| & & \big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (\mathbb{Z}^2)_B & \longrightarrow & \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \mathcal{E}_B & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が存在する．これより，コホモロジー完全系列の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(\mathcal{O}_B) & \xrightarrow{q^1} & \mathrm{Pic}(B) & \xrightarrow{\deg} & H^2(B,\mathbb{Z})\\
\| & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\iota^2}\\
H^1(\mathcal{O}_B) & \xrightarrow{p^1} & H^1(B,\mathcal{E}_B) & \xrightarrow{\delta} & H^2(B,\mathbb{Z}^2)
\end{array}$$

が得られる．$\iota^2(m)=\delta(\{f_{ij}\})$ となる $m\in H^2(B,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$ をとり，$\deg D'=m$ となる $D'\in\mathrm{Pic}(B)$ をとる．$\{f_{ij}\}-\psi(D')=p^1(\{h_{ij}\})$ を満たす $\{h_{ij}\}\in H^1(\mathcal{O}_B)$ をとり，$D=q^1(\{h_{ij}\})+D'\in\mathrm{Pic}(B)$ とおけば，$\psi(D)=\{f_{ij}\}$ を満たす．

Case 1. $\delta(\{g_{ij}\})=0$ の場合.

$\deg D=0$ なので，ある $n\in\mathbb{N}$ が存在して $nD\sim 0$ となる．つまり，各 i に対して $f_i\in\mathcal{E}_B(U_i)$ を適当に選べば，任意の i,j に対して $n(f_{ij}-f_i+f_j)=0$ となる．つまり，S は $E\times U_i$ 達を E の n 等分点による平行移動によって貼り合わせたものとみなすことができる．

$E \times U_i$ の座標開集合上での局所座標系 (x, y) を，$y = 0$ が E を定め，$x = 0$ が U_i を定めるように選んでおく．$E \times U_i$ の張り合わせは E 方向の局所定数関数によるので，dx, dy は S 全体に正則に延長できる．$dx, dy \in H^0(S, \Omega^1_S)$ が $\mathbb{C}$ 上 1 次独立なので，$q(S) \geqq 2$ である．

$nD \sim 0$ となる最小の自然数 n をとる．$D, \varphi^* D$ に対して定理 6.8.12 を適用すると，不分岐 n 次巡回被覆 $\pi_E\colon \tilde{B} \to B$, 及び，$\pi\colon \tilde{S} \longrightarrow S$ が存在し，不分岐 n 次巡回被覆の構成法から，φ から構成される全射 $\tilde{\varphi}\colon \tilde{S} \to \tilde{B}$ が存在する．$\pi_E^* D \sim 0$ なので，$\tilde{S}$ の貼り合わせ関数に対応する $\{f_{ij}\}$ は $H^1(\tilde{B}, \mathcal{E}_{\tilde{B}})$ の中でゼロである．よって，$\tilde{S} \cong E \times \tilde{B}$ である．π_E は不分岐なので，フルビッツの定理より $\tilde{B}$ は楕円曲線である．定理 6.1.12, 定理 6.1.18 より $b_1(\tilde{S}) = b_1(E) + b_1(\tilde{B}) = 4$ なので，$q(\tilde{S}) = b_1(\tilde{S})/2 = 2$ である．$\pi^*\colon H^0(S, \Omega^1_S) \longrightarrow H^0(\tilde{S}, \Omega^1_{\tilde{S}})$ は単射なので，$2 \leqq q(S) \leqq q(\tilde{S}) = 2$ となり，$q(S) = 2$ を得る．

アルバネーゼ写像 $\alpha\colon S \to \mathrm{Alb}(S)$ のシュタイン分解 $S \xrightarrow{\alpha'} Y \longrightarrow \alpha(S)$ をとる．$\dim Y = 1$ とすると，命題 7.1.9 より $g(B) = q(S) = 2$ である．しかし，2 つの楕円曲線 $E, \tilde{B} \subset \tilde{S}$ の少なくとも一方の $\alpha' \circ \pi$ による像が，種数 2 の Y になるので，フルビッツの定理と矛盾する．したがって，$\dim Y = 2$ で，$\alpha(S) = \mathrm{Alb}(S)$ となる．

定理 7.5.5 より，$K_S \sim \varphi^* K_B \sim 0$ である．$K_S = 0 = \alpha^* K_{\mathrm{Alb}(S)}$ より，α は不分岐である．命題 6.8.13j より，S はアーベル曲面である．

Case 2.　$\delta(\{g_{ij}\}) \neq 0$ の場合.

直和分解 $L = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2$ に対応して，$E \approx C_1 \times C_2$ ($C_1, C_2 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) と位相的に分解する．正射影 $E \times U_{ij} \to C_1 \times U_{ij}$, $C_1 \times U_{ij} \to U_{ij}$ から，位相的な C_2-束 $\gamma\colon S \to M$ と，C_1-束 $\beta\colon M \to B$ が誘導される．

$\{g_{ij}\}$ の $H^1(B, \mathbb{Z}\mathbf{e}_2)$ での像は 0 なので，$\{f_{ij}\}$ は M の開集合の貼り合わせ関数から得られる．したがって，$E \approx M \times C_2$ (同相) である．

$\beta\colon M \to B$ から得られる Gysin の完全系列 ([M-H] 定理 12.2 を見よ)

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow H^1(B, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\eta} H^1(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(B, \mathbb{Z})& \\
\xrightarrow{\cup[D]} H^2(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0&
\end{aligned}
$$

が存在する．$[D] \neq 0$ より $H^0(B, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(B, \mathbb{Z})$ はゼロ写像でない．$H^0(B, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ だから，η は同型写像で，$b_1(B) = b_1(M)$ となる．よって，

$$b_1(S) = b_1(M) + b_1(C_2) = b_1(B) + 1 = 2g(B_1) + 1$$

となり，S はケーラー曲面でない複素多様体となる (ケーラー曲面なら $b_1(S)$ は偶数である．じつは，S は小平曲面とよばれる複素曲面になる).　□

● 初版 p.411, 新装版 p.413. 定理 7.5.13 の証明

以下の原稿と差し替えて下さい

[差し替え原稿]

証明. 今までの記号で，$j^1(\{f_{ij}\}) \neq 0 \in H^1(B, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ である．ここで，$\{f_{ij}\}$ は $\{\varphi^{-1}(U_i)\}$ の貼り合わせ関数である．n の約数 m と不分岐 m 重被覆 $\pi\colon B' \to B$ をうまく選ぶと，自然に誘導される準同型写像 $\pi^*\colon H^1(B, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(B', \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ によって，$\pi^* j^1(\{f_{ij}\}) = 0$ となる．

$S' = S \times_B B'$ とし，$\psi\colon S' \to B'$, $\rho\colon S' \to S$ を正射影とする．勝手な点 $P \in S'$ をとり，$Q = \varphi(\rho(P)) \in B$, $E = \varphi^{-1}(Q)$ とする．Q はある U_i に含まれる．$\pi^{-1}(U_i) = W_{i,1} \cup \cdots \cup W_{i,r} \subset B'$ ($j \neq k$ のとき $W_{i,j} \cap W_{i,k} = \phi$, $r = \deg \pi$) と連結成分に分解するとき，各 $j = 1,\ldots,r$ に対し $U_i \cong W_{i,j}$, $\varphi^{-1}(U_i) \cong \psi^{-1}(W_{i,j}) \cong U_i \times E$ となる．P はある $\psi^{-1}(W_{i,j})$ に含まれ，$\varphi^{-1}(U_i) = U_i \times E$ は非特異だから，S' は非特異曲面である．

上の議論から，$Q' = \psi(P) \in B'$ に対し，$\psi^{-1}(Q') \cong \varphi^{-1}(\pi(Q')) \cong E$ である．$\pi^* j^1(\{f_{ij}\}) = 0$ なので，$\psi\colon S' \to B'$ は Principal で，S' はアーベル曲面である．そこで，単位元 $0_{B'}$, $0_{S'}$ を適当に選べば，$E = \psi^{-1}(0_{B'}) \subset S'$ が S' の部分群であるようにできる．すると，群として $B' \cong S'/E$ であり，この同型写像は ψ から得られる．

さて，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathrm{Aut}(B'/B) \subset \mathrm{Aut}(S'/S)$ であるが，$\sigma \in \mathrm{Aut}(S'/S)$ を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の生成元になるように選ぶ．σ に対応する元を $\tau \in \mathrm{Aut}(B'/B)$ とする．$\psi(\sigma(x)) = \tau(\psi(x))$ $(x \in S')$ が成り立つ．τ は平行移動だから，ある $t \in S'$ が存在し，$\psi(x+t) = \tau(\psi(x))$ $(\forall x \in S')$ と書ける．$h(x) = \sigma(x) - t$ によって $h\colon S' \to S'$ を定義すると，

$$\tau(\psi(x)) = \psi(\sigma(x) - t + t) = \tau(\psi(\sigma(x) - t)) = \tau(\psi(h(x)))$$

なので，$\psi(h(x)) = \psi(x)$ が選られ，$h \in \mathrm{Aut}(S'/B')$ となる．h の定め方から，$h|_E\colon E \to E$ の $\mathrm{Aut}(E) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ による像は $j^1(\{f_{ij}\})$ に対応していて 0 ではない．つまり，$h|_E$ は平行移動ではなく，固定点を持つ．そこで，

$$\Gamma = \left\{ x \in S' \;\middle|\; h(x) = x \right\}$$

とおくと，$\Gamma \cap E$ は 1 個以上の有限個の点で，Γ は 1 本以上の曲線の和集合になり，Γ の既約成分は互いに交わらない．

C を Γ の既約成分の 1 つとする．ψ から定まる正射影 $\beta\colon C \to B'$ は不分岐だから，C は楕円曲線である．また，$S'' = S' \times_{B'} C$ とおくと，$\psi'\colon S'' \to C$ には切断 $s\colon C \to S''$ が存在して，$S'' \to S'$ による $s(C)$ の像は $C \subset \Gamma$ となる．上の議論と同様に，S'' は非特異曲面である．

$\{f_{ij}\}$ の $H^1(C, \boldsymbol{A}_C)$ への引き戻し $\{g_{ji}\} = \beta^*\pi^*\{f_{ij}\}$ は，$(\pi \circ \beta \circ \psi')^{-1}(U_i) \cong E \times (\pi \circ \beta)^{-1}(U_i)$ の貼り合わせを定め，$0 = j^1(\{g_{ij}\}) \in H^1(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ なので，この貼り合わせは E 方向への局所定数関数による平行移動から定まる．ところが，切断 $s: C \to S''$ が存在するので，その平行移動は自明であり，$S'' \cong E \times C$ である．

$G = \mathrm{Aut}(S''/S)$ とすれば，$S = (E \times C)/G$ である．G は C には平行移動として作用し，$C/G = B$ である．他方，G の E への作用は $s(C) \cap E$ を固定点に持つから平行移動ではなく，$E/G \cong \mathbb{P}^1$ となる．したがって，S は超楕円曲面である． □

● 初版 p.412, 新装版 p.414. 定理 7.6.1 の 2 行目

旧: $p_g(S) = 0$ かつ $P_4(S) = P_6(S) = 0$ ならば，S は線織面である．

新: $P_4(S) = P_6(S) = 0$ ならば，S は線織面である．

● 初版 p.412, 新装版 p.414. 命題 7.6.3 の証明の第 1 段落

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. アルバネーゼ写像 $\alpha': S \to \mathrm{Alb}(S)$ のシュタイン分解 $S \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \alpha'(S) \subset \mathrm{Alb}(S)$ を考える．もし，$\dim B = 2$ ならば，$\mathbb{C}$ 上 1 次独立な $\omega_1, \omega_2 \in H^0(S, \Omega_S^1)$ が存在する．すると，$0 \neq \omega_1 \wedge \omega_2 \in H^0(S, \Omega_S^2)$ なので，$p_g(S) \geqq 1$ となり，$p_g(S) = 0$ と矛盾する．したがって，B は正規 (したがって，非特異) 代数曲線で，命題 7.1.9 より $g(B) = q(S)$ が成り立つ．また，各点 $Q \in B$ に対し，$\alpha^{-1}(Q)$ は連結である．

● 初版 p.414, 新装版 p.416. 命題 7.6.6 の証明の Case 2 の 7 行目

誤: $|aC + bK_S| \neq 0$,

正: $|aC + bK_S| \neq \phi$,

● 初版 p.414, 新装版 p.416. 定理 7.6.4 の証明の 4 行目

「アルバネーゼ写像 $\alpha': S \to \mathrm{Alb}(S)$ のシュタイン分解によって得られる写像とする．」の後に，次の文を追加して下さい．

B は非特異曲線である．

● 初版 p.414, 新装版 p.416. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 3 行目

旧: で，$q(S) = g(B) \leqq g(C)$ だから，

新: で，命題 7.1.9 とフルビッツの定理より $q(S) = g(B) \leqq g(C)$ だから，$q(S) = g(B) = g(C) \geqq 1$ である．よって，

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 7 行目

旧: このとき，$g(C_i) \geqq g(B) = q(S)$ である．

新: C_i は C と同じ条件を満たすから，$g(C_i) = g(B) = q(S)$ である．

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 12 行目

誤: $> 2(2g(C_i) - 1) + 1 - q(S) \geqq 0$

正: $> 2(2g(C_i) - 2) + 1 - q(S) \geqq 0$

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 14 行目

旧: $((K_S + C_i) \cdot C_i)_S = \deg K_{C_i} \geqq 2g(C_i) - 2 \geqq 2q(S) - 2,$

新: $((K_S + C_i) \cdot C_i)_S = \deg K_{C_i} = 2g(C_i) - 2 = 2q(S) - 2,$

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 21 行目

旧: $\geqq h^1(\mathcal{O}_S(K_S + C_1 + C_2)) + (C_1 \cdot C_2)_S + q(S) - 1$

新: $= h^1(\mathcal{O}_S(K_S + C_1 + C_2)) + (C_1 \cdot C_2)_S + q(S) - 1$

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の 22 〜 24 行目

旧: しかし，このとき $\mathbb{C} \cong H^0(\mathcal{O}_S) \to H^0(\mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2}) \cong \mathbb{C}^2$ は全射でないので，$H^1(\mathcal{O}_S(K_S + C_1 + C_2)) \neq 0$ となり矛盾する．

新: 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C_1 - C_2) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \longrightarrow 0$$

において，$H^0(S, \mathcal{O}_S(-C_1 - C_2)) = 0$, $H^1(S, \mathcal{O}_S(-C_1 - C_2)) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(K_S + C_1 + C_2)) = 0$ だから，$\mathbb{C} \cong H^0(\mathcal{O}_S) \cong H^0(\mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2}) \cong \mathbb{C}^2$ となり矛盾する．

● 初版 p.415, 新装版 p.417. 定理 7.6.4 の証明の Case 2 の最後

以下の文を追加して下さい．

$(K_C \cdot C)_S \leqq -2$ に注意する．

● 初版 p.416, 新装版 p.418. 定理 7.6.4 の証明の Case 2-2

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

Case 2-2. $\alpha\colon C \to B$ が同型写像でない場合を考える．

C, B は楕円曲線である．$\alpha\colon S \to B$ と区別するため，$\alpha_C = \alpha|_C\colon C \to B$ と書く．$S' = S \times_B C$ とし，$\pi\colon S' \to S$, $\beta\colon S' \to C$ は正射影とする．命題 7.5.13 の証明の議

論のように，S' は非特異曲面である．$C \subset S$ から定まる自然な切断 $\iota: C \to S'$ が存在する．

もし S' が第 1 種例外曲線 $\varGamma$ を含んだとすると，$0 = g(\varGamma) < g(C)$ なので $\beta(\varGamma)$ は 1 点である．点 P を $P \in \varGamma$ と選んでおけば，ある i に対して $\varGamma \subset \beta^{-1}(U_i)$ であり，$-1 = (\varGamma^2)_{S'} = (\pi(\varGamma)^2)_S$ となる．これは，S が第 1 種例外曲線を含まないことに矛盾する．よって，S' は極小曲面である．

$0 \neq \omega \in H^0(S, \Omega_S^1)$ をとるとき，$0 \neq \pi^*\omega \in H^0(S', \Omega_{S'}^1)$ なので，$q(S') \geqq 1$ である．また，上の考察から，$K_{S'} = \pi^* K_S$ が容易にわかる．

$$(K_{S'} \cdot \iota(C))_{S'} = \deg \iota^* K_{S'} = \deg K_S|_C = (K_S \cdot C)_S \leqq -2$$

である．$(K_{S'}^2)_{S'} = (\deg \pi) \cdot (K_S^2)_S < 0$ である．

勝手な点 $P \in S'$ をとり，$Q = \alpha(\pi(P)) \in B$ とする．Q の開近傍 $U \subset B$ を十分小さくとれば，$\alpha_C^{-1}(U) = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ ($i \neq j$ のとき $U_i \cap U_j = \phi$) と連結成分に分解するとき，各 $i = 1, \ldots, r$ に対し $U \cong U_i$, $\alpha^{-1}(U) \cong \beta^{-1}(U_i)$ となる．P はある $\beta^{-1}(U_i)$ に含まれ，$\alpha^{-1}(U)$ は非特異だから，S' は非特異曲面である．

もし，$|K_{S'}| \neq \phi$ ならば，$D \in |K_{S'}|$ をとると，$-2 \geqq (D \cdot \iota(C))_{S'}$ なので，$\iota(C) \subset \operatorname{Supp} D$, $(\iota(C)^2)_{S'} < 0$ となる．すると，$\iota(C)$ は第 1 種例外曲線となり矛盾する．よって，$H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(K_{S'})) = 0$ で，$p_g(S') = 0$ である．

すると，上の結果から，$\beta: S' \to C$ は幾何学的線織面である．$Q \in C$, $F = \beta^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^1$ とすると，$\alpha(\pi(F))$ は 1 点で，$\pi(F) \cong \mathbb{P}^1$ である．また，$((\pi(F)^2)_S = (F^2)_S = 0$ だから，定理 7.4.5 により，$\alpha: S \to B$ は幾何学的線織面である．□

● 初版 p.416 〜 420, 新装版 p.418 〜 422．定理 7.6.5

第 7.6.3 項の最初から注意 7.6.6 の直前まで (定理 7.6.5 とその証明) を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

補題 7.6.6b. X, Y は非特異射影多様体, $G \subset \operatorname{Aut}(X)$ は有限群で，$Y = X/G$ であるとする．$\pi: X \to Y$ を自然な全射とする．このとき，以下が成り立つ．

(1) もし，$\omega \in H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes n})$ が G-不変ならば，ある $\eta \in (\Omega_{\mathrm{Rat}(Y)}^p)^{\otimes n}$ が存在して，$\omega = \pi^*\eta$ と表せる．

(2) もし π が不分岐ならば，$\pi^*: H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes n}) \longrightarrow \big(H^0(X, (\Omega_X^p)^{\otimes n})\big)^G$ は同型写像である．

証明. (1) $\pi^*: \varOmega_{\mathrm{Rat}(Y)}^1 \longrightarrow (\varOmega_{\mathrm{Rat}(X)}^1)^G$ が同型であることを示す．

$\mathrm{Rat}(Y)$-ベクトル空間としての $\Omega^1_{\mathrm{Rat}(Y)}$ の基底 $dy_1, \ldots, dy_m$ をとる．すると，$\pi^* dy_1, \ldots, \pi^* dy_m$ は $\mathrm{Rat}(X)$-ベクトル空間 $\Omega^1_{\mathrm{Rat}(X)}$ の基底になる．$\pi^* dy$ は G-不変だから，$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i \pi^* dy_i$ が G-不変であるための必要十分条件は，すべての f_i が G-不変であることである．すなわち，$g_i \in \mathrm{Rat}(Y)$ により，$f_i = \pi^* g_i$ と表せることである．よって，$\Omega^1_{\mathrm{Rat}(Y)} \cong (\Omega^1_{\mathrm{Rat}(X)})^G$ である．

$p \geqq 1$, $n \geqq 1$ の場合は，これより容易に導かれる．

(2)　π が不分岐ならば，上の証明において $\eta \in H^0(Y, \Omega^1_Y)$ となるから，結論を得る． □

補題 7.6.6c.　X, Y は非特異射影曲線, $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ は有限群で，$Y = X/G$ であるとする．$\pi\colon X \to Y$ を自然な全射とする．π の分岐点全体の集合を $B \subset Y$ とする．$P \in B$ に対し，$\pi^{-1} = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ とすると，$e(Q_1) = \cdots = e(Q_m)$ が成り立つ．そこで，$e(P) = e(Q_i)$ と定める．$n \in \mathbb{N}$ に対し，Y 上の因子 L_n を

$$L_n = \sum_{P \in B} \left\lfloor n\left(1 - \frac{1}{e(P)}\right)\right\rfloor P$$

で定める．このとき，以下が成り立つ．

(1) $\pi^*\colon H^0(Y, \mathcal{O}_Y(nK_Y + L_n)) \longrightarrow \big(H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X))\big)^G$ は同型写像である．

(2) $2g(X) - 2 = (\deg \pi) \cdot \left(2g(Y) - 2 + \sum_{P \in B}\left(1 - \frac{1}{e(P)}\right)\right)$

証明. (1)　$\omega \in H^0(X, \mathcal{O}_X(nK_S))^G = H^0(X, (\Omega^1_X)^{\otimes n})^G$ をとると，前補題より，ある $\eta \in (\Omega^1_{\mathrm{Rat}(Y)})^{\otimes n}$ が存在して，$\omega = \pi^* \eta$ と表せる．

$P \in B$, $\pi^{-1}(P) = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ とする．任意の $Q_j, Q_k \in \pi^{-1}(P)$ に対し，ある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(Q_j) = Q_k$ となるから，$e(Q_j) = e_(Q_k)$ が成り立つ．よって，$e(Q_1) = \cdots = e(Q_m)$ である．

$e = e(P) = e(Q_i)$ とおく．$em = \deg \pi$ である．点 Q_i の十分小さい座標開近傍 (U, y) と，P の十分小さい座標開近傍 (W, x) を適当に選べば，$\pi^* y = x^e$ と表せる．$f(P) \neq 0$ を満たすある $f \in \mathcal{O}_{Y,P}$ とある $r \in \mathbb{Z}$ により，$\eta = f(y) \cdot y^{-r} \cdot (dy)^k$ と表せる．$g(x) = e^k f(x^e)$ とおけば，

$$(\pi^* \eta)|_U = f(x^e) x^{-er} (e x^{e-1}\, dx)^k = g(x) x^{-er + k(e-1)} (dx)^k$$

であり，$g(Q_i) \neq 0$ である．$\pi^* \eta$ が正則微分形式になるための必要十分条件は，各

$P \in B$ において，$-er + k(e-1) \geqq 0$ が成り立つことである．つまり，$r \leqq \left\lfloor k - \dfrac{1}{e} \right\rfloor$ が成り立つことである．これより結論を得る．

(2)　フルビッツの公式よりすぐわかる． □

定理 7.6.5.　S が極小な非特異射影曲面で幾何学的線織面ではなく，$p_g(S) = 0$, $q(S) = 1$, $b_2(S) = 2$, $(K_S)^2_S = 0$, $P_{12}(S) \leqq 1$ であるならば，S は超楕円曲面である．

証明. $\alpha\colon S \to B$ は，命題 7.6.3 の証明の通り，アルバネーゼ写像 $S \to \mathrm{Alb}(S)$ のシュタイン分解によって得られる写像とする．B は楕円曲線である．

もし, $\alpha\colon S \to B$ のファイバー $\alpha^{-1}(Q)$ が可約ならば, その既約成分を $C_1, \ldots, C_r$ とする．S 上に $\alpha(C_0) = B$ を満たす曲線 C_0 が存在する．$C_0, \ldots, C_r$ の $H_2(S, \mathbb{Z})$ における同値類は独立だから，$(r+1) \leqq b_2(S) = 2$ である．したがって，任意のファイバー $F_Q = \alpha^{-1}(Q)$ は既約である．

非特異ファイバー F_Q の種数 $g(F_Q)$ の最小値を g とする．系 6.9.11a より，任意の非特異ファイバー F に対し $g(F) = g$ である．

もし，$g = 0$ ならば，$(F^2)_S = 0$, $F \cong \mathbb{P}^1$ より，定理 7.4.5 から，S は幾何学的線織面である．したがって，$g \geqq 1$ である．

$b_3(S) = b_1(S) = 2q(S) = 2$, $b_2(S) = 2$ より，$e(S) = 0$ である．$e(B) = 0$ だから，定理 7.3.8 より，$\displaystyle\sum_{Q \in \Sigma} \bigl(e(\alpha^{-1}(Q)) - e(F)\bigr) = 0$ である．ここで，Σ は $\alpha^{-1}(Q)$ が特異ファイバーあるいは多重ファイバーとなるような点 $Q \in B$ 全体の集合である．この等式より，任意の $Q \in B$ に対し $e(\alpha^{-1}(Q)) = e(F) = 2 - 2g(F)$ である．

あるファイバー $F_Q = \alpha^{-1}(Q)$ が特異点を持ったと仮定する．$\pi'\colon F'_Q \to F_Q$ を正規化とすると，命題 5.5.8 より $p_a(F_Q) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(F_Q, \mathcal{O}_{F_Q}) > g(F'_Q)$ が成り立つ．また，$\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in H_1(F_Q, \mathbb{C})$ が 1 次独立ならば，$\pi'^*\gamma_1, \ldots, \pi'^*\gamma_r \in H_1(F'_Q, \mathbb{C})$ も 1 次独立なので，$b_1(F_Q) \leqq b_1(F'_Q)$ である．

$$2 - 2g(F'_Q) = e(F'_Q) = 2 - b_1(F'_Q) \leqq 2 - b_1(F_Q) = e(F_Q) = e(F) = 2 - 2g$$

なので，$g(F'_Q) \geqq g$ である．ところが，系 6.9.11a より $g = p_a(F_Q) > g(F'_Q) \geqq g$ となり，矛盾する．よって，すべての $F_Q = \alpha^{-1}(Q) = \mathrm{Supp}\,\alpha^*Q$ は非特異曲線である．

ここで，(I)「$g = 1$ で $\alpha\colon S \to B$ が多重ファイバーを持たない場合」，(II)「$g = 1$ で $\alpha\colon S \to B$ が多重ファイバーを持つ場合」，(III)「$g \geqq 2$ の場合」に分けて考える．

Case (I)　$g = 1$ で $\alpha\colon S \to B$ が多重ファイバーを持たない場合．

$Q \in B$ に対し，$F = \alpha^{-1}(Q)$ の j-不変量 $j(F) \in \mathbb{C}$ を対応させる写像 $j'\colon B \to \mathbb{C}$ は代数多様体の正則写像であるが，B は射影代数曲線なので，$j'(B)$ は 1 点となる．

つまり，$\alpha\colon S\to B$ は局所自明な楕円曲面である．定理 7.5.12a，定理 7.5.13 より，S は Abel 曲面か超楕円曲面である．しかし，S が Abel 曲面だと $q(S)=2$ であるので，S は超楕円曲面である．

Case (II)　$g=1$ で，α が多重ファイバーを持つ場合を考える．

$P_1,\dots, P_r\in B$ を多重ファイバー $\alpha^*P_i=e_iF_i$ $(e_i\geqq 2)$ を持つような点全体とする．定理 6.8.13b より，P_i において分岐指数 e_i を持つような有限被覆 $\pi\colon B'\to B$ が存在する．$S'=S\times_B B'$ とし，$\beta\colon S'\to B'$, $\rho\colon S'\to S$ を正射影とする．$P=P_i$ の開近傍 $U\subset B$ を十分小さく選び，U の局所座標系 x を，$x(P)=0$ となるようにとる．$\pi(Q)=P$ を満たす点 $Q\in B'$ の近傍における適当な局所座標系 y を選ぶと，$\pi^*x=y^e$ と書ける．

楕円曲線 $F=\alpha^{-1}(P)$ の標準座標系 z をとる．座標開集合 $W\subset\alpha^{-1}(U)\cong U\times F$ を十分小さく選べば，W における $F\cap W$ の定義方程式 h を適当に選べば，$(h,\,z)$ を W の局所座標系として選べ，$\alpha^*P=eF$ なので $\alpha^*x=h^e$ であると仮定してよい．$F'=\rho^{-1}(F)$ とおくとき，$\rho|_{F'}\colon F'\to F$ は同型写像で，$P'=\pi^{-1}P$ とするとき，$\beta^*P'=F'$ である．よって，$\beta\colon S'\to B'$ の任意のファイバーは楕円曲線で，特異ファイバーも多重ファイバーを持たない．フルビッツの定理より $g(B')\geqq 2$ である．

$Q'\in B'$ に対し，$F=\beta^{-1}(Q')$ の j-不変量 $j(F)\in\mathbb{C}$ を対応させる写像 $j'\colon B'\to\mathbb{C}$ は定数写像になる．よって，U を十分小さく選べば，$\alpha^{-1}(U)\cong U\times F$, $\beta^{-1}(\pi^{-1}(U))\cong\pi^{-1}(U)\times F$ となり，$\beta\colon S'\to B'$ は局所自明な楕円曲面になる．特に S' は非特異射影曲面である．

$E=\beta^{-1}(Q')$ $(Q'\in B')$ とし，定義 7.5.10 の下の説明のように，完全系列

$$0\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{E}}_{B'}\longrightarrow\boldsymbol{\mathcal{A}}_{B'}\longrightarrow(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{B'}\longrightarrow 0$$

を構成する．ここで，$\mathrm{Aut}(E,\,0)\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n=2,\,4,\,6)$ である．$\sigma\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $\sigma(z)=\zeta z$ (ζ は 1 の n 乗根で，z は E の標準座標系) によって E に作用するので，$\sigma(dz^{\otimes n})=dz^{\otimes n}$ であり，$k\in\mathbb{N}$ に対し，$0\neq\omega_E^{\otimes kn}\in H^0(E,\,(\Omega_E^1)^{\otimes kn})$ は群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元の作用で不変である．よって，$\omega_E^{\otimes kn}$ は S' 全体に延長することができ，

$$H^0(S',\,(\Omega_{S'}^1)^{\otimes kn})\longrightarrow H^0(E,\,(\Omega_E^1)^{\otimes kn})$$

は全射である．$\omega_E^{\otimes kn}$ の S' への延長は $\mathrm{Aut}(B'/B)$ の作用で不変なので，

$$\nu\colon H^0(S,\,(\Omega_S^1)^{\otimes kn})\longrightarrow H^0(E,\,(\Omega_E^1)^{\otimes kn})$$

は全射である．特に，$kn=12$ と選ぶと，$\nu(\eta)=\omega_E^{\otimes 12}$ となる元 $\eta\in H^0(S,\,(\Omega_S^1)^{\otimes 12})$ が存在する．特に，分岐点 $P=P_i$ の近傍では，

$$\pi^*(x^{-2}(dx)^{\otimes 12})=e^{12}y^{10e-12}(dy)^{\otimes 12}$$

であり，これは $Q \in B'$ の近傍で正則である．したがって，任意の有理微分形式 $\omega_B \in H^0(B, \mathcal{O}_B(12K_B+2P))$ に対し，$\pi^*\omega_B$ は B' 上の正則微分形式である．$\beta^*(\pi^*\omega_B)$ は $\mathrm{Aut}(B'/B)$ の作用で不変なので，$\alpha^*\omega_B$ は S 上の正則微分となる．

$h^0(B, \mathcal{O}_B(12K_B+2P)) = h^0(B, \mathcal{O}_B(2P)) = 2$ なので，ここから，1 次独立な元 $\omega_{B,1}, \omega_{B,2}$ を選べる．このとき，$(\pi^*\omega_{B,1}) \wedge \omega_E$, $(\pi^*\omega_{B,2}) \wedge \omega_E$ は 1 次独立な $H^0(S, \mathcal{O}_S(12K_S))$ の元であり，$P_{12}(S) \geqq 2$ となる．

Case (III)　$g \geqq 2$ の場合．

まず，α が多重ファイバーを持たないことを示す．$Q \in B$, $\alpha^*Q = nF_Q$，F は非特異ファイバーとする．

$$\begin{aligned} 2g-2 = \deg K_F &= ((K_S+F)\cdot F)_S = n((K_S+nF_Q)\cdot F_Q)_S \\ &= n((K_S+F_Q)\cdot F_Q)_S = n(2g(F_Q)-2) = n(2g-2) \end{aligned}$$

であるから，$n=1$ である．すなわち，$\alpha\colon S \to B$ は多重ファイバーを持たない．

$\mathfrak{M}_g$ を種数 g の射影曲線のモジュライとする．定理 6.9.15 より，$P \in B$ に対し $\alpha^{-1}(P)$ の同型類を対応させる写像 $B \to \mathfrak{M}_g$ は定数写像である．したがって，$\alpha\colon S \to B$ の任意のファイバーは互いに同型である．

定理 3.7.1 より $\mathrm{Aut}(F)$ は有限群で，$\mathrm{Aut}(F)$ は自然に S に作用する．$\overline{S} = S/\mathrm{Aut}(F)$ は (正規でない特異点を持つかもしれない) 代数曲面で，α から自然に $\overline{\alpha}\colon \overline{S} \to B$ が誘導される．$\overline{F} = F/\mathrm{Aut}(F)$ の非特異点 x を 1 点固定する．$F_P = \alpha^{-1}(P)$, $\overline{F}_P = F_P/\mathrm{Aut}(F_P)$ とするとき，$\mathrm{Aut}(\overline{F}) = \{\mathrm{id}\}$ だから，同型写像 $\theta_P\colon \overline{F} \to \overline{F}_P$ は一意的に存在する．そこで，$x_P = \theta(x) \in \overline{F}_P \subset \overline{S}$ とおく．切断 $\overline{\sigma}\colon B \to \overline{S}$ を $\sigma(P) = x_P$ で定める．自然な全射 $S \to \overline{S}$ による $\overline{\sigma}(B)$ の引き戻しの既約成分のひとつを C_x とする．開集合 $x \in U_F \subset \overline{F}$ を十分小さく選べば，x が U_F 上を動くとき，C_x も x につれて連続的に動くように，各 $x \in U_F$ に対して C_x を選ぶことができる．このとき，$x \neq y \in U_F$ ならば $C_x \cap C_y = \phi$ である．よって，$(C_x^2)_S = (C_x \cdot C_y)_S = 0$ である．

$C = C_x$ とし，$\pi = \alpha|_C\colon C \to B$ とする．$\pi\colon C \to B$ は不分岐だから，C は非特異な楕円曲線である．$S' = S \times_B C$ とし，$\beta\colon S' \to C$, $\rho\colon S' \to S$ を正射影とする．命題 7.5.13 の証明の議論のように，S' は非特異曲面で，$\beta\colon S' \to C$ のすべてのファイバーは F と同型である．また，切断 $\sigma\colon C \to S'$ を持ち，$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_C$, $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_C$ を満たす．

$C_x \cap C_y = \phi$ より，$n \gg 0$ のとき $\mathrm{Bs}\,|n\sigma(C)| = \phi$ である．よって，正射影 $\varphi = \Phi_{|n\sigma(C)|}\colon S' \to F$ が存在し，$S' \cong C \times F$ となる．

$G = \mathrm{Aut}(C/B)$ とすると，G は S' にも自然に作用し，$S = (C \times F)/G$ である．$K_C = 0$ より，$K_{S'} = \varphi^* K_F$ である．

$\mathit{\Gamma} = F/G$ とし，自然な全射を $\psi\colon F \to \mathit{\Gamma}$ とする．補題 7.6.6b(2) より，

$$\begin{aligned} H^0(S, \Omega_S^1) &\cong H^0(S', \Omega_{S'}^1)^G \cong H^0(C, \Omega_C^1)^G \oplus H^0(F, \Omega_F^1)^G \\ &\cong H^0(B, \Omega_B^1) \oplus H^0(\mathit{\Gamma}, \Omega_{\mathit{\Gamma}}^1) \end{aligned}$$

である．$q(S) = 1$, $g(B) = 1$ だから，$H^0(\mathit{\Gamma}, \Omega_{\mathit{\Gamma}}^1) = 0$ で，$g(\mathit{\Gamma}) = 0$, $\mathit{\Gamma} \cong \mathbb{P}^1$ である．

$\psi\colon F \to \mathit{\Gamma}$ に対して，分岐点全体の集合を $\{P_1, \ldots, P_r\} \subset \mathit{\Gamma}$ とし，

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{O}_{\mathit{\Gamma}}\left(kK_{\mathit{\Gamma}} + \sum_{i=1}^r \left\lfloor k\left(1 - \frac{1}{e(P_i)}\right)\right\rfloor P_i\right)$$

とおく．系 6.9.11a より $\varphi_* \mathcal{O}_{S'} = \mathcal{O}_F$ なので，命題 6.2.6b より，

$$\varphi_* \mathcal{O}_{S'}(kK_{S'}) \cong \varphi_* \mathcal{O}_{S'}(\varphi^*(kK_F)) \cong \mathcal{O}_F(kK_F)$$

となる．補題 7.6.6b(2) より，$H^0(\mathcal{O}_S(kK_S)) = H^0(\mathcal{O}_{S'}(kK_{S'})^G$ なので，補題 7.6.6c (1) より，

$$\begin{aligned} P_k(S) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S(kK_S)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S', \mathcal{O}_{S'}(kK_{S'}))^G \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(F, \varphi_* \mathcal{O}_{S'}(kK_{S'}))^G = \dim_{\mathbb{C}} H^0(F, \mathcal{O}_F(kK_F))^G \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(F/G, \mathcal{L}_k) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathit{\Gamma}, \mathcal{L}_k) \\ &\geqq \deg \mathcal{L}_k + 1 - g(\mathit{\Gamma}) = \deg \mathcal{L}_k + 1 \end{aligned}$$

を得る．補題 7.6.6c(2) を用いると，

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{L}_k &= -2k + \sum_{i=1}^r \left\lfloor k\left(1 - \frac{1}{e_i}\right)\right\rfloor \geqq -2k + \sum_{i=1}^r \left(k\left(1 - \frac{1}{e_i}\right) - 1\right) \\ &= k \cdot \frac{2g(F) - 2}{\deg \psi} - r \end{aligned}$$

が得られる．特に，$k \geqq 2$ のとき，$h^2(S, \mathcal{O}_S(kK_S)) = h^0(S, \mathcal{O}_S((1-k)K_S)) = 0$ である．よって，$k \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2}(K_S^2)_S + \chi(\mathcal{O}_S) &= \chi(\mathcal{O}_S(kK_S) \geqq P_k(S) \geqq \deg \mathcal{L}_k + 1 \\ &\geqq k \cdot \frac{2g(F) - 2}{\deg \psi} - r \end{aligned}$$

となる．$g(F) \geqq 2$ だから $k \to +\infty$ としてみると，$(K_S^2)_S > 0$ でなければならない．

□

● 初版 p.420 〜 422, 新装版 p.422 〜 424. 定理 7.7.2(I), (II) の証明

定理 7.7.2(I), (II) の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. (I) $\kappa(S)=0$ だから，任意の $m\in\mathbb{N}$ に対し $P_m(S)\leqq 1$ で，ある $m_0\in\mathbb{N}$ に対し $P_{m_0}(S)=1$ となる．特に，$p_g(S)\leqq 1$ である．

Case 1.　$q(S)=0$ の場合.

もし，$P_2(S)=0$ だと，カステルヌオーヴォの定理により S は有理曲面で，$\kappa(S)=-\infty$ となるから，$P_2(S)=1$ である．もし，$K_S\sim 0$ ならば，定義から S は K3 曲面である．

以下，$K_S\not\sim 0$, つまり $p_g(S)=0$ の場合を考える．$D\in|2K_S|\neq\phi$ をとる．$D>0$ と仮定して矛盾を導く．$D>0$ より $|-nK_S|=\phi$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ であることが，背理法で容易に証明できる．よって，$n\geqq 2$ のとき，$h^2(S,\mathcal{O}_S(nK_S))=h^0(S,\mathcal{O}_S((1-n)K_S))=0$ なので，リーマン・ロッホの定理より，

$$1\geqq P_n(S)\geqq\chi(\mathcal{O}_S(nK_S))=\frac{n(n-1)}{2}(K_S)_S^2+\chi(\mathcal{O}_S)=\frac{n(n-1)}{2}(K_S)_S^2+1$$

となり，$P_n(S)=1$, $(K_S)_S^2=0$ となる．そこで，$D'\in|3K_S|$ をとる．$P_6(S)=1$ より $3D=2D'$ である．これは，ある $D''\in|K_S|$ が存在して，$D=2D''$, $D'=3D''$ となることを意味し，$p_g(S)=0$ と矛盾する．したがって，$2K_S\sim 0$ である．よって，$K_S\not\sim 0$ ならば，S はエンリッケス曲面である．

Case 2.　$q(S)\geqq 1$ の場合.

$\alpha\colon S\to\mathrm{Alb}(S)$ をアルバネーゼ写像とし，$A=\mathrm{Alb}(S)$, $Z=\alpha(S)$ とおく．また，α のシュタイン分解 $S\xrightarrow{\beta}Y\xrightarrow{\gamma}Z\subset A$ をとる．

Case 2-1.　$\dim Y=1$ の場合.

$0\neq q(S)\leqq\dim Y=1$ より，$q(S)=1$ である．$p_g(S)\neq 1$ を示す．

もし，$p_g(S)=1$ とすると，完全系列 $0\to\mathrm{Pic}^0(S)\to\mathrm{Pic}(S)\to NS(S)\to 0$ において，$\mathrm{Pic}^0(S)\neq 0$ だから，$\mathrm{Pic}(S)$ 内に，$D\not\sim 0$, $2D\sim 0$ を満たす因子 D が存在する．リーマン・ロッホの定理から，$\dim\boldsymbol{L}_S(D)+\dim\boldsymbol{L}_S(K_S-D)\geqq 1$ であるが，$\boldsymbol{L}_S(D)=0$ より，ある $E\in|K_S-D|$ が存在する．$K_S\sim 0$ より，$-D\sim E\geqq 0$ で，$-D\sim 0$ となり矛盾する．したがって，$p_g(S)=0$ である．

もし，$P_{12}(S)=0$ ならばエンリッケスの定理 (定理 7.6.1) より S は線織面で，$\kappa(S)=-\infty$ となる．したがって，$P_{12}(S)\neq 0$ で，定理 7.6.2 より S は超楕円曲面である．

Case 2-2.　$\dim Y=2$ の場合.

命題 7.3.2(2) より，$0=\kappa(S)\geqq\kappa(Z)\geqq 0$ だから，Z は $\mathrm{Alb}(S)$ の部分トーラスで，命題 6.8.7 より $Z=A$ となる．よって，$q(S)=2$ で，$\gamma\colon Y\to S$ は全射有限写

像である．

$x,\ y$ を複素トーラス A の標準座標系とするとき，$\alpha^*(dx \wedge dy) \neq 0$ なので，$1 \geqq p_g(S) = h^0(S,\, \Omega_S^2) \geqq 1$ であり，$p_g(S) = 1$ を得る．また，Case 1 と同様な議論で，$(K_S)_S^2 = 0$ が得られる．ネーターの公式 $(K_S^2)_S + e(S) = 12(p_g(S) - q(S) + 1) = 0$ より，$e(S) = 0$ である．$e(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S) = 2 - 4q(S) + b_2(S)$ より $b_2(S) = 6$ である．他方，命題 7.3.1 より $b_2(A) = 6$ なので，自然な単射 $\alpha^*\colon H^2(A, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(S, \mathbb{R})$ は同型写像である．よって，$\alpha(C)$ が 1 点となるような曲線 $C \subset S$ は存在せず，$\alpha\colon S \to A$ は有限写像で，$S = Y$ である．特に，命題 7.3.2 より S は有理曲線を含まない．

$p_g(S) = 1$ だから $|K_S|$ はただ 1 つの因子 $K_S \geqq 0$ のみからなる集合である．もし，$K_S = 0$ ならば，$K_S = \alpha^* K_A$ より，α は不分岐である．命題 6.9.24 より，S はアーベル曲面である．

$K_S > 0$ の場合を考える．$K_S = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i C_i$ (C_i は有理曲線でない既約曲線) と書ける．もし，S 上の曲線 C が $(K_S \cdot C)_S < 0$ を満たせば，$C = C_i$ となる i が存在し，$j \neq i$ のとき $(C_j \cdot C)_S \geqq 0$ だから，$(C^2)_S < 0$ となる．よって，C は第 1 種例外曲線となり矛盾する．よって，S 上の任意の曲線 C に対して $(K_S \cdot C)_S \geqq 0$ である．特に，$(K_S \cdot C_i)_S = 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq r)$ である．

定理 5.5.9 より $2p_a(C) - 2 = (K_S + C_i \cdot C_i) \leqq 0$ だから，すべての C_i は楕円曲線である．$E = \alpha(C_1)$ とおく．E は有理曲線でなく $p_a(E) \leqq g(C_1) = 1$ だから E は非特異楕円曲線である．命題 7.3.2(2) より，アーベル曲面 A の原点を適当に取り替えれば，E は A の部分トーラスであると仮定してよい．A の閉部分群による商群 $B = A/E$ は楕円曲線になる．$\psi\colon S \xrightarrow{\alpha} A \to B,\ P = \psi(C_1) \in B$ とする．$n \gg 0$ のとき $h^0(B,\, \mathcal{O}_B(nP)) \geqq 2$ なので，$2 \leqq h^0(S,\, \mathcal{O}_S(nC_1)) \leqq h^0(S,\, \mathcal{O}_S(nK_S)) \leqq 1$ となって矛盾する．

(II) $\kappa(S) = -\infty$ の場合を考える．

小平次元の定義から，$p_g(S) = 0,\ P_{12}(S) = 0$ である．したがって，定理 7.6.1 より，S は線織面であり，ある非特異曲線 Γ と双有理写像 $f\colon S \cdots \to \mathbb{P}^1 \times \Gamma$ が存在する．定理 7.2.1(III) より，f の不確定点解消 $\tilde{\psi}\colon X \to S,\ g\colon X \to \mathbb{P}^1 \times \Gamma$ が存在する．系 5.4.8 より，$\tilde{\psi},\ g$ は 1 点を中心としたブロー・アップの合成である．いま，正射影 $\mathbb{P}^1 \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$ と g の合成写像を $\tilde{\varphi}\colon X \to \Gamma$ とする．もし，$\tilde{\varphi}$ のファイバーに第 1 種例外曲線が含まれれば，そのコントラクション $h_1\colon X \to X_1$ を行う．第 1 種例外曲線のコントラクションを有限回繰り返し $h\colon X \xrightarrow{h_1} X_1 \xrightarrow{h_1} X_2 \xrightarrow{h_3} \cdots \xrightarrow{h_{n-1}} X_n = Y$

を作ると，ファイバーに第 1 種例外曲線が含まないようなファイバー曲面 $\varphi: Y \to \Gamma$ と正則写像 $\psi: Y \to S$ で，$\tilde{\varphi} = \varphi \circ h$, $\tilde{\psi} = \psi \circ h$ を満たすものが得られる．また定理 7.4.5(1) の証明で示されているように，$\varphi: Y \to \Gamma$ は特異ファイバーを持たず，

ここで，ψ は 1 点を中心としたブロー・アップの合成である．

もし，Y が第 1 種例外曲線を含まないなら，$\psi: Y \xrightarrow{\cong} S$ で，定理 7.3.13a(2) より，$\varphi: S = Y \longrightarrow \Gamma$ は幾何学的線織面である．

もし，Y が第 1 種例外曲線 C を含めば，$\varphi(C) = \Gamma$ となるので，$\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ である．S は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と双有理同値だから有理曲面である．S は極小な有理曲面なので，定理 7.4.2 より，S は $\mathbb{P}^2$ か Σ_n (これは幾何学的線織面) である．

● 初版 p.423, 新装版 p.425. 定義 7.7.3 の 18 行目

誤: 2 **次形式はユニモジラーであると仮定する**.

正: 2 **次形式はユニモジュラーであると仮定する**.

● 初版 p.423, 新装版 p.425. 定義 7.7.3 の 21 行目

誤: (poositive definite)

正: (positive definite)

● 初版 p.423 〜 424, 新装版 p.425 〜 426. 系 7.7.5 と系 7.7.6

系 7.7.5 を削除し，系 7.7.6 の証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. 定義 7.7.3 の記号を持ちいる．L の基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を $V = \mathbb{R}^n$ の基底に選んでおき，$L = \mathbb{Z}^n \subset V$ としておく．$J = A$ は対称行列だから，ある直交行列 P により，

$$ {}^tPJP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} $$

と対角化できる．ここで，P は回転を表す行列であるように選べる．$r = \dfrac{2}{\sqrt[n]{\omega_n}}$ とし，

$$ K' = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; |\lambda_1| x_1^2 + \cdots + |\lambda_n| x_n^2 \leqq r^2 \right\} $$

とおくと，$|\lambda_1 \cdots \lambda_n| = |\det J| = 1$ より，K' の測度は 2^n である．${}^tP$ で K' を回転して得られる超楕円体を K とする．ミンコフスキーの定理より $\mathbf{x} = K \cap (L - \{\mathbf{0}\})$

が存在する．

$$({}^tP)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$(\mathbf{x},\,\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}J\mathbf{x} = {}^t({}^tP\mathbf{x})\Lambda({}^tP\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

なので，

$$\bigl|(\mathbf{x},\,\mathbf{x})\bigr| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| x_i^2 \leqq r^2 = \frac{4}{\sqrt[n]{\omega_n^2}}$$

となる． □

● 初版 p.424 〜 425, 新装版 p.426 〜 426．補題 7.7.7

補題 7.7.7 とその証明を下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

補題 7.7.7. M は L の部分格子で，$r = \operatorname{rank} M$ とする．M のある元 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ が存在し，$(\mathbf{x}_i,\,\mathbf{x}_j)$ を $(i,\,j)$-成分とする r 次正方行列 J' が正定値または負定値であって，$|\det J'| = 1$ を満たせば，$L = M \oplus M^{\perp}$ である．(このような分解を**直交分解**という.)

証明. $\mathbf{x} \in M \cap M^{\perp}$ をとると，$(\mathbf{x},\,\mathbf{x}) = 0$ であるが，J' は正または負定値だから，$\mathbf{x} = \mathbf{0}$ である．したがって，$M \cap M^{\perp} = 0$ である．

勝手な $\mathbf{y} \in L$ をとる．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = J'^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{y}, \mathbf{x}_r) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbf{x}_i \in M$$

で $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ と $\mathbf{y}_1$ を定めれば，

$$(\mathbf{y},\,\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i(\mathbf{x}_i,\,\mathbf{x}_j) = (\mathbf{y}_1,\,\mathbf{x}_j)$$

となる．$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y} - \mathbf{y}_1$ とおけば，任意の $\mathbf{x} \in M$ に対し，$(\mathbf{y}_2,\,\mathbf{x}) = 0$ を満たすので，$\mathbf{y}_2 \in M^{\perp}$ である．したがって，$L = M + M^{\perp}$ であり，$L = M \oplus M^{\perp}$ である． □

● 初版 p.425, 新装版 p.427．定理 7.7.9 の 4 行目

誤: 自明ない有理数解

正: 自明でない有理数解

● 初版 p.425, 新装版 p.427. 定理 7.7.9 の最後の行 (10 行目)
誤: 方程式 (7.1) は自明でない解を持つ.
正: 方程式 (7.1) は自明でない整数解を持つ.

● 初版 p.426, 新装版 p.428. 定理 7.7.11
以下の原稿と差し替えて下さい.
[差し替え原稿]

命題 7.7.10b. L はユニモジュラー格子とする.

(1) $f\colon L \to \mathbb{Z}$ は加群の準同型写像とすると，ある $\mathbf{a} \in L$ が存在して，任意の $\mathbf{x} \in L$ に対して $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ となる.

(2) $\mathbf{b} \in L$ が，任意の $\mathbf{x} \in L$ に対して $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$ を満たせば，$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である.

証明. (1)　定義 7.7.3 の記号を持ちいる．$L = \mathbb{Z}^n$ と仮定してよい.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} f(\mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n) \end{pmatrix}$$

で $\mathbf{a}$ を定める．J の (i, j)-成分を $c_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ とするとき，

$$f(\mathbf{e}_j) = (J\mathbf{a} \text{ の } j \text{ 行目}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} a_i = {}^t\mathbf{a} J \mathbf{e}_j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j)$$

であるので，$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ $(\forall \mathbf{x} \in L)$ が成り立つ.

(2)　J^{-1} の第 j 列を $\mathbf{c}_j$ とする．$(\mathbf{c}_j, \mathbf{b}) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ だから，$J^{-1}J\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である．よって，$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である.　□

定理 7.7.11. L が非定値な奇ユニモジュラー格子であれば，

$$L = \Gamma_+ \oplus \cdots \oplus \Gamma_+ \oplus \Gamma_- \oplus \cdots \oplus \Gamma_-$$

と直交分解できる.

証明. $n = \operatorname{rank} L$ に関する帰納法で証明する．$n \leqq 4$ のときは，系 7.7.6 で示した.

$n \geqq 5$ とする．$\mathbf{x} \in L$ を $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ となるようにとる．ただし，2 以上の任意の整数 k に対して $\dfrac{1}{k}\mathbf{x} \notin L$ となるように選んでおく.

Claim: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ を満たす $\mathbf{y} \in L$ が存在することを示す.

$f\colon L \to \mathbb{Z}$ を $f(\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, \mathbf{x})$ で定める．ある $k \in \mathbb{N}$ により $\operatorname{Im} f = f(L) = k\mathbb{Z}$ と書ける．$k = 1$ ならば Claim は成り立つので，$k \geqq 2$ と仮定して矛盾を導く．$g\colon L \to \mathbb{Z}$ を $g(z) = \dfrac{1}{k} f(\mathbf{z})$ で定める．L はユニモジュラーだから，前命題から，ある $\mathbf{a} \in L$ が存在して任意の $\mathbf{z} \in L$ に対して $g(\mathbf{z}) = (\mathbf{a}, \mathbf{z})$ を満たす．すると，$\mathbf{x} = k\mathbf{a}$ となり，$\mathbf{x}$ の取り方に矛盾する．

さて，Claim のような $\mathbf{y} \in L$ を 1 つとり固定する．L は奇だから，$(\mathbf{y}', \mathbf{y}')$ が奇数になるような $\mathbf{y}' \in L$ が存在する．もし，$(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ が奇数ならば，$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}$ とおく．$(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ が偶数の場合は，$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}' + \bigl(1 - (\mathbf{x}, \mathbf{y}')\bigr)\mathbf{y}'$ とおく．すると，$(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ を (i, j)-成分をする行列 J' は，

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2m+1 \end{pmatrix} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

という形になる．これは，

$${}^t P J' P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{ただし，} P = \begin{pmatrix} -m & -m-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．つまり L は $M_+ \cong \Gamma_+$, $M_- \cong \Gamma_-$ を部分格子として持つ．

そこで，$\tau(L) \geqq 0$ なら $M = M_+$, $\tau(L) < 0$ なら $M = M_-$ とおき，$L = M \oplus M^\perp$ と直交分解する．$M^\perp$ も非定値であり，$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \{1, -1\}$ を満たす $\mathbf{x} \in M^\perp$ を含むから，帰納法の仮定により $M^\perp = \Gamma_+ \oplus \cdots \oplus \Gamma_-$ である． □

● 初版 p.426, 新装版 p.428. 系 7.7.12 の 1 行目

誤: L, L' がいずれも奇ユニモジュラー格子で，

正: L, L' がいずれも非定値な奇ユニモジュラー格子で，

● 初版 p.427, 新装版 p.429. 定理 7.7.14 の証明の 1 行目

誤: 格子 $M_1 \subset V' = \mathbb{R}^{n+2}$ は奇ユニモジュラー格子であるとし，

正: 格子 $M_1 \subset V' = \mathbb{R}^{n+2}$ は非定値な奇ユニモジュラー格子であるとし，

● 初版 p.427, 新装版 p.429. 定理 7.7.14 の証明の 8 〜 9 行目

誤: とおく．$M_0 \supset M_1 \supset M_2$ で，M_0 上では 2 次形式は $\dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$ に値をとる．また，$M_1 \cong \Gamma_+ \oplus \cdots \oplus \Gamma_-$ なので，$\#(M_0/M_1) = 2$ であることが容易に証明できる．

正: とおく．$M_0 \supset M_1 \supset M_2$ である．$M_1 \cong \Gamma_+ \oplus \cdots \oplus \Gamma_-$ なので，$\Gamma_\pm$ 達の基底を

並べたものを M_1 および V' の基底に選べば，

$$J=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}$$

となる．J の (i,i)-成分を $\varepsilon_i\in\{+1,-1\}$ とし，$\mathbf{a}_1=\varepsilon_1\mathbf{e}_1+\varepsilon_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}_2=\varepsilon_2\mathbf{e}_2+\varepsilon_3\mathbf{e}_3,\ldots$, $\mathbf{a}_{n+1}=\varepsilon_{n+1}\mathbf{e}_{n+1}+\varepsilon_{n+2}\mathbf{e}_{n+2}$, $\mathbf{a}_{n+2}=\varepsilon_{n+2}\mathbf{e}_{n+2}+\varepsilon_1\mathbf{e}_1$ とおけば，$M_2=\bigoplus_{i=1}^{n+2}\mathbb{Z}\mathbf{a}_i$, $M_0=M_1+\dfrac{1}{2}M_2$ である．これより，$\#(M_0/M_1)=2$ であることが容易に証明できる．

● 初版 p.427, 新装版 p.429. 定理 7.7.14 の証明の 14 〜 15 行目

誤: $M_2=\mathbb{Z}\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\oplus\mathbb{Z}\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $M_0=\dfrac{1}{2}M_2$ で，$M_0\supsetneqq M_3\supset M_2$ を満たす M_3 は

正: $M_2=\mathbb{Z}\cdot(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\oplus\mathbb{Z}\cdot(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)$, $M_0=\dfrac{1}{2}M_2$ で，$M_0\supsetneqq M_3\supsetneqq M_2$ を満たす M_3 は

● 初版 p.290, 新装版 p.431. 例 7.8.1 の最後の 2 行

「$\mathbb{P}^n$ 内の $n-2$ 個の超曲面の共通部分として得られる K3 曲面は，(1) 〜 (3) の 3 種類以外に存在しないことが知られている.」

という 2 行を以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

命題 7.8.1b. $\mathbb{P}^n$ 内の $n-2$ 個の 2 次以上の超曲面の共通部分として得られる K3 曲面は，例 7.8.1 の (1), (2), (3) の 3 種類以外に存在しない.

証明. S_i が $\mathbb{P}^n$ 内の d_i 次超曲面 $(d_i\geqq 2)$ で，$S=S_1\cap\cdots\cap S_{n-2}$ が K3 曲面であるとする.

$$0\sim K_S=(K_{\mathbb{P}^n}+S_1+\cdots+S_{n-2})|_S=(n+1-d_1-\cdots-d_{n-2})H|_S$$

であるので，$2(n-2)\leqq d_1+\cdots+d_{n-2}=n+1$ となり，$n\leqq 5$ がわかる．あとは簡単な計算で，(1) 〜 (3) 以外の解がないことがわかる． □

● 初版 p.430, 新装版 p.432. 定理 7.8.3 の証明の 1 行目

誤: $\chi(O_S)$

正: $\chi(\mathcal{O}_S)$

● 初版 p.430, 新装版 p.432. 定理 7.8.3 の証明の 6 〜 7 行目
誤: $\boldsymbol{L}_S(D) = \phi$, $\boldsymbol{L}_S(K_S - D) = \boldsymbol{L}_S(-D) = \phi$ であるが,
正: $\boldsymbol{L}_S(D) = 0$, $\boldsymbol{L}_S(K_S - D) = \boldsymbol{L}_S(-D) = 0$ であるが,

● 初版 p.432 〜 433, 新装版 p.434 〜 435. 第 7.8.2 項

第 7.8.2 項 (クンマー曲面) 全体を下記の原稿と差し替えて下さい．大幅に内容を増加しました．特に，現行の命題 7.8.7 の 2 行前にある式

$$0 = H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} H^2(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$$

は間違いです．お詫び致します.

[差し替え原稿]

7.8.2. クンマー曲面

本題に入る前に，線形代数の補題を用意しておく.

補題 7.8.6b. B は n 次元 $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間で $n \geqq 2$ とする．B から $\mathbb{F}_2$ への写像全体の集合を F とすると，F は $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間の構造を持つ．また，1 次関数 $B \to \mathbb{F}_2$ 全体の集合を F_1 とする．F_1 は F の部分 $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間である．$f \in F$ に対して,

$$\mathrm{Supp}(f) = \bigl\{P \in B \bigm| f(P) = 1\bigr\}, \quad Z(f) = \bigl\{P \in B \bigm| f(P) = 0\bigr\}$$

とおく．B から B への全単射アフィン変換 (線形同型写像と平行移動の合成として表せる写像) 全体のなす群を $\mathrm{Aff}(B)$ とする.

$U \subset F$ は部分 $\mathbb{F}_2$-ベクトル空間で，任意の $\varphi \in \mathrm{Aff}(B)$ と任意の $f \in U$ に対して $f \circ \varphi \in U$ を満たすとする．すると，以下の (1), (2), (3) のいずれが 1 つだけが起きる.

(1) $U \subset \{0, 1\}$ (0, 1 は定数関数)
(2) $U = F_1$
(3) $F_1 \subset U$ で，$\dim_{\mathbb{F}_2} W = n - 2$ を満たす任意のアフィン部分空間 $W \subset F$ に対して，$\mathrm{Supp}(f) = W$ となるような関数 $f \in U$ が存在する.

証明. $U \subset \{0, 1\}$ でないと仮定する．$\varphi \in \mathrm{Aff}(B)$ が与えられたとき，同型写像 $\varphi^*\colon F \to F$ が誘導される.

Step 1. もし U が定数関数でない 1 次関数 $f \in F_1$ を含めば，$F_1 \subset U$ であることを示す.

一般に B の $n-1$ 次元アフィン部分空間を超平面ということにする．$f\in F$ について，「$f\in F_1$」$\Longleftrightarrow$「$Z(f)$ は B の超平面」$\Longleftrightarrow$「$\mathrm{Supp}(f)$ は B の超平面」が成り立つ．

$f\in F_1,\ \varphi\in \mathrm{Aff}(B)$ に対し $Z(f\circ\varphi)=\varphi^{-1}(Z(f))$ だから，$f\circ\varphi\in U\cap F_1$ である．定数関数でない任意の $f,g\in F_1$ はある $\varphi\in\mathrm{Aff}(B)$ により $g=f\circ\varphi$ と書ける．よって，$F_1\subset U$ である．U はベクトル空間だから $0\in U$ である．また，定数関数でない $f\in F_1$ に対して，$1-f\in F_1$ であるので，$1=f+(1-f)\in U$ となり，$F_1\cup\{0,1\}\subset U$ となる．

Step 2.　(3) を示すには，$\mathrm{Supp}(f)$ が B の $n-2$ 次元アフィン部分空間となるような $f\in F$ が存在することを示せばよい．

実際，$W_0=\mathrm{Supp}(f)$ とするとき，勝手な B の $n-2$ 次元アフィン部分空間 W に対して，ある $\varphi\in\mathrm{Aff}(B)$ を取れば $\varphi(W)=W_0$ となり，このとき $W=\mathrm{Supp}(f\circ\varphi)$ である．また，B の勝手な超平面 H に対して，$H=W_1\cup W_2,\ W_1\cap W_2=\phi$ となるような $n-2$ 次元アフィン部分空間 $W_1,W_2\subset B$ が存在し，$W_1=\mathrm{Supp}(f_1)$, $W_2=\mathrm{Supp}(f_2)$ であれば $W=\mathrm{Supp}(f_1+f_2)$ となる．$f_1,f_2\in U$ だから $f_1+f_2\in U$ である．$\mathrm{Supp}(f_1+f_2)$ は B の超平面だから $f_1+f_2\in F_1$ である．Step 1 の結果から $F_1\subset U$ である．

Step 3.　$\exists g\in U-F_1\neq\phi$ の場合に (3) が起きることを，$n=\dim_{\mathbb{F}_2}B$ に関する帰納法で証明する．

$\#\,\mathrm{Supp}(f)$ が $n-2$ 次元アフィン部分空間になるような $f\in U$ が存在することを示せばよい．

Step 3-1.　$n=\dim_{\mathbb{F}_2}B=2$ の場合に，$\#\,\mathrm{Supp}(f)$ が 1 点となるような $f\in U$ が存在することを証明する．

$\#B=4$ であるので，$g\notin F_1$ より $\#\,\mathrm{Supp}(g)=1$ または $\#\,\mathrm{Supp}(g)=3$ である．$\#\,\mathrm{Supp}(g)=1$ なら $f=g$ でよい．$\#\,\mathrm{Supp}(g)=3$ の場合を考える．ある $\varphi\in\mathrm{Aff}(B)$ を取ると，$\#\big(\mathrm{Supp}(g)\cap\mathrm{Supp}(g\circ\varphi)\big)=2$ となる．つまり，$g+g\circ\varphi\in F_1\cap U$ である．Step 1 より $F_1\subset U$ である．$\mathrm{Supp}(f)\subset\mathrm{Supp}(g)$ となるような $f\in F_1$ が存在するが，このとき $f+g\in U$ で $\#\,\mathrm{Supp}(f+g)=1$ となる．

Step 3-2.　$n=\dim_{\mathbb{F}_2}B\geqq 3$ の場合を考える．

Claim.　ある $n-1$ 次元部分ベクトル空間 $H\subset B$ で，$g|_H$ が 1 次関数にならないようなものが存在することを証明する．

g は 1 次関数でないから，ある超平面 $H'\subset B$ を選べば $g(H')=\mathbb{F}_2$ となる．$g|_{H'}$ が 1 次関数でない場合は，$H=H'$ とすればよい．

$g|_{H'}$ が 1 次関数の場合を考える．$W=\{x\in H' \mid g(x)=0\}$ は H' の超平面になる．もし $g(B-W)=\mathbb{F}_2$ ならば，$g(y)=1,\ g(z)=0$ となる $y,\ z\in B-W$ をうまく選べば，$W,\ y,\ z$ を含む B の超平面 H が存在するが，$g|_H$ は 1 次関数にならない．そうでない場合は，$g(B-W)=\{1\}$ である．$W\not\subset H,\ \dim_{\mathbb{F}_2}(W\cap H)\geqq 1$ となるような B の超平面 H を取れば，$g|_H$ は 1 次関数にならない．以上で Claim が証明された．

さて，上の超平面 $H\subset B$ を固定し，$U':=\{f|_H \mid f\in U\}$ とする．帰納法の仮定を H と U' に適用すれば，$\dim_{\mathbb{F}_2} W'=n-3$ を満たすアフィン部分空間 $W'\subset H$ に対して，$\mathrm{Supp}(f')=W'$ となるような関数 $f'\in U'$ が存在する．ここで，$f'=f|_H$ $(\exists f\in U)$ と書ける．$a\in W',\ b\in H-W'$ を取る．ある $\psi\in\mathrm{Aff}(B)$ で $\psi|_{B-H}=\mathrm{id}|_{B-H},\ \psi(a)=b$ を満たすものが存在する．このとき，$\psi|_H$ は $b-a$ による平行移動になり，$\psi\in\mathrm{Aff}(B)$ は一意的に定まる．また，$\psi(W')\cap W'=\phi$ である．よって，$W=W'\cup\psi(W')$ は W' と b を含む最小のアフィン空間であって，$\dim_{\mathbb{F}_2} W=n-2$ である．

$h(x)=f(x)+f(\psi^{-1}(x))$ で $h\in F$ を定める．$f\circ\psi\in U$ だから $h\in U$ である．$x\in H$ のときは $f(\psi^{-1}(x))=f(x)$ だから $h(x)=0$ である．よって，$\mathrm{Supp}(h)=W'\cup\psi(W')=W$ となる．$\square$

本題に入る．$T=\mathbb{C}^2/L$ を 2 次元複素トーラス (L は格子) とする．$\iota(x)=-x$ で $\iota\colon T\to T$ を定義する．$\iota\circ\iota=\mathrm{id}_T$ である．$G=\{\mathrm{id}_T,\ \iota\}\subset\mathrm{Aut}(T)$ とし，$S=T/G$ を考える．$G\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に注意する．$\pi\colon T\to S$ を自然な全射とする．S は解析多様体の構造を持つ．加法群 T の単位元を O_T とし，

$$B=\{P\in T \mid 2P=P+P=O_T\}=\{P\in T \mid \iota(P)=P\}$$

とする．B の元を**二等分点**という．B は $2^4=16$ 個の点からなる集合である．$B=\{P_1,\ldots,P_{16}\}$ とおく．

各点 $Q=\pi(P)\in S$ $(P\in B)$ は (A_1) 型有理 2 重点であることを示そう．$\widehat{\mathcal{O}}_{T,P}=\mathbb{C}[[X_1,\ X_2]]$ に対し，$\iota^*(X_1)=-X_1,\ \iota^*(X_2)=-X_2$ だから，$\widehat{\mathcal{O}}_{S,Q}=\mathbb{C}[[X_1,\ X_2]]^G=\mathbb{C}[[X_1^2,\ X_1X_2,\ X_2^2]]$ となる．$Y_1=X_1^2,\ Y_2=X_1X_2,\ Y_3=X_2^2$ とおけば，

$$\widehat{\mathcal{O}}_{S,Q}=\mathbb{C}[[X_1^2,X_1X_2,X_2^2]]\cong\mathbb{C}[[Y_1,Y_2,Y_3]]/(Y_1Y_3-Y_2^2)$$

である．したがって，Q は (A_1) 型有理 2 重点である．なお，S はこの 16 個の有理 2 重点以外では非特異である．

(A_1) 型特異点は，その点を中心として 1 回ブロー・アップすれば，特異点解消される．そこで，$\pi(B)$ の 16 点で S をブロー・アップして得られる曲面を $\varphi\colon X\to S$

とする．この X を**クンマー曲面** (Kummer surface) という．トーラス T から上のように構成されたクンマー曲面を $X = \mathrm{Km}(T)$ と書くことにする．

命題 7.8.6c. クンマー曲面は K3 曲面である．

証明. $\pi\colon T \to S$ の分岐因子 R_π について $\mathrm{Supp}\, R_\pi \in B$ であるから，$R_\pi = 0$ である．$U = S - \pi(B)$ 上には標準因子 K_U が存在するが，定理 6.8.11d より，$\pi^* K_U = K_T|_{(T-B)} = 0$ を満たすので，$K_U = 0$ であり，S 上の標準因子 $K_S = 0$ に延長できて，$\pi^* K_S = K_T = 0$ を満たす．$Q_i = \pi(P_i) \in S$, $C_i = \varphi^{-1}(Q_i)$ (これは (-2)-曲線) とするとき，ある整数 a_i が存在して $K_X = \varphi^* K_S + \sum_{i=1}^{16} a_i C_i = \sum_{i=1}^{16} a_i C_i$ と書ける．しかし，$(K_X \cdot C_i)_X = 0$, $(C_i^2)_X = -2$ だから，$a_i = 0$ であり，$K_X = 0$ が得られる．

また，$\omega \in H^0(T, \Omega_T^1)$ は $\omega = a\,dx + b\,dy$ $(a, b \in \mathbb{C})$ と書ける．$-\omega = \omega$ であれば $\omega = 0$ である．よって，$H^0(X, \Omega_X^1) = 0$ がわかり，$q(X) = 0$ である．したがって，X は K3 曲面である． □

16 個の二等分点 $P_1, \ldots P_{16} \in T$ でのブロー・アップを $\psi\colon Y \to T$ とし，$E_i = \psi^{-1}(P_i)$ (これは第 1 種例外曲線) とする．このとき，次の図式を可換にする写像 $\rho\colon Y \to X$ が存在する．

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\rho} & X \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ T & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

$E_i = \rho(C_i)$ である．$\iota\colon T \to T$ は自然に $\tilde{\iota}\colon Y \to Y$ に延長でき，$\tilde{G} = \{\mathrm{id}_Y, \tilde{\iota}\}$ とするとき $X = Y/\tilde{G}$ である．P_i の解析的開近傍 U_i を $U_i \subset \mathbb{C}^2$ と考えたとき，P_i を通る U_i 内の直線 ℓ と E_i の点が 1 対 1 に対応する．$\iota(U_i) = U_i$ となるように U_i を選んでおけば $\iota(\ell) = \ell$ が成り立つので，任意の点 $P \in E_i$ に対して $\tilde{\iota}(P) = P$ が成り立つ．つまり，$\tilde{\iota}|_{E_i}\colon E_i \to E_i$ は恒等写像で，$\rho|_{E_i}\colon E_i \to C_i$ は同型写像である．

2 重被覆 $\rho\colon Y \to X$ は準同型写像 $\rho_!\colon H^2(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ を引き起こす．

$$\alpha := \rho_! \circ \psi^*\colon H^2(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$$

とする．$x \in H^2(T, \mathbb{Z})$ に対して $x = \rho^*(z)$ を満たす $z \in H^2(X, \mathbb{Z})$ をとる．$\rho_!(x) = 2z$ である．

交点の幾何学的考察から，$x, y \in H^2(T, \mathbb{Z})$ に対し，$\alpha(x) \cup \alpha(y) = 2x \cup y$ が成り立つことが容易にわかる．

定理 7.8.4 で構造を決定した格子 $L_X := H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{22}$ を考える．L_X の中で $M_1 := \bigoplus_{i=1}^{16} \mathbb{Z} \cdot c_1(C_i)$ を含むランク 16 の格子 M_0 で，L_X/M_0 がトーションを持たないようなものをとる．$2M_0 \subset M_1 \subset M_0$ である．

定理 7.8.6d. 以上の記号のもとに，次が成立する．

$$\alpha\bigl(H^2(Y, \mathbb{Z})\bigr) = M_0^\vee = M_1^\vee$$

また，$\#(M_0/M_1) = 32$ であって，$\dfrac{1}{2}\sum_{i \in I} c_1(C_i) \in M_0$ を満たす空でない部分集合 $I \subset \{1, \ldots, 16\}$ は，$\#I = 8$ または $\#I = 16$ を満たす．そして，8 個の元からなる集合 $I \subset \{1, \ldots, 16\}$ で，$\dfrac{1}{2}\sum_{i \in I} c_1(C_i) \in M_0$ を満たすものが丁度 30 個存在する．

証明. Step 1. $L_0 := \alpha\bigl(H^2(T, \mathbb{Z})\bigr) \subset L_X$ とおく．$H^2(T, \mathbb{Z})$ の元は C_i と交わらない台を持つ因子の像として表せるから，$L_0 \subset M_0^\perp$ である．

一般に L_X の部分格子 L' に対し，L' 上での交点行列の行列式の絶対値を $d(L')$ と書くことにする．

$$d(L_X) = 1, \quad d(M_1) = 2^{16}, \quad d(L_0) = 2^6$$

である．また，$L'^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L', \mathbb{Z})$ とおき，$x \in L'$ に対し $f_x(y) = x \cup y$ で定まる $f_y \in L'^\vee$ を対応させることにより $L' \subset L'^\vee$ と考える．$\#(L'^\vee/L') = d(L')$ である．また，L_X/L' がトーションを持たないとき，$L'^\vee/L' \cong (L'^\perp)^\vee/L'^\perp$ であることは容易に証明できる．これより，$d(M_0^\perp) = d(M_0)$ が得られる．

また，$L'' \subset L' \subset L_X$ が部分格子で $\operatorname{rank} L'' = \operatorname{rank} L'$ のとき，

$$\bigl(\#(L'/L'')\bigr)^2 = d(L'')/d(L') \tag{①}$$

であることも容易に証明できる．

$\overline{M_1} = \bigoplus_{i=1}^{16} \mathbb{F}_2 \cdot c_1(C_i)$ とし，$\dfrac{1}{2} \in \dfrac{1}{2}\mathbb{Z}$ に $1 \in \mathbb{F}_2$ を対応させる加群の準同型写像から $r\colon \dfrac{1}{2}M_1 \longrightarrow \overline{M_1}$ を構成する．$M_0 \subset \dfrac{1}{2}M_1$ であるが，$r(M_0) \cong M_0/M_1$ である．① より，$\bigl(\#r(M_0)\bigr)^2 = d(M_1)/d(M_0) = 2^{16}/d(M_0)$ である．

$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16} \in \{0, 1\}$ に対し，$\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}) \in \mathbb{F}_2^{16}$, $c_{\mathbf{e}} = \sum_{i=1}^{16} \varepsilon_i \cdot c_1(C_i)$ とする．$c_{\mathbf{e}}/2 \in M_0$ となるための必要十分条件は $\mathbf{e} \in r(M_0)$ となることである．

$L_0 \subset M_0^{\perp}$ なので，$2^6 = d(L_0) \geqq d(M_0^{\perp}) = d(M_0)$ である．よって，$\bigl(\#r(M_0)\bigr)^2 = 2^{16}/d(M_0) \geqq 2^{10}$ となり，$\#(M_0/M_1) = \#r(M_0) \geqq 32$ となる．

$\#(M_0/M_1) = 32$ であることは，後で証明することにして，このことを仮定して定理の証明を完結させる．$\bigl(\#r(M_0)\bigr)^2 = 2^{16}/d(M_0) = 2^{10}$ より $d(M_0) = 2^6$ である．①より，

$$\bigl(\#(M_0^{\perp}/L_0)\bigr)^2 = d(L_0)/d(M_0^{\perp}) = 2^6/2^6 = 1$$

なので，$L_0 = M_0^{\perp}$ を得る．ただし，M_0 はユニモジュラーではないから，$L_X \supsetneqq L_0 \oplus M_0^{\perp}$ である．

Step 2. 16 点の集合 $B \subset T$ は自然な方法で $\mathbb{F}_2$ 上の 4 次元ベクトル空間と考えることができる．補題 7.8.6b のように，F, F_1, $\mathrm{Aff}(B)$ を定める．$\#F_1 = 2 \times 2^4 = 32$ である．$f \in F$ に対して

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^{16} f(P_i) \cdot c_1(C_i) \in \overline{M_1}$$

として，写像 $\Psi\colon F \to \overline{M_1}$ を定める．Ψ は全単射である．

$U = \Psi^{-1}(r(M_0))$ とおく．$\#U \geqq 32$ である．$g \in \mathrm{Aff}(B)$ が与えられたとき，写像 $g^*\colon F \to F$ が誘導されることと，$g^*(U) = U$ であることは，次の補題 7.8.6e から導かれるが，これを仮定して話を進める．

$\#U > 2$ だから，補題 7.8.6b の (2) または (3) が起きる．以下，(3) は起きないことを背理法で証明する．(3) の場合であったと仮定する．

$\dim_{\mathbb{F}_2} W_1 = \dim_{\mathbb{F}_2} W_2 = \dim_{\mathbb{F}_2} V - 2$, $W_1 \cap W_2 = \{P_k\}$ (1 点) を満たすアフィン部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ をとる．(3) の結論から，$\mathrm{Supp}(f_1) = W_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) = W_2$ となるような $f_1, f_2 \in U$ が存在する．

$$x_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{16} f_j(P_i) \cdot c_1(C_i) \quad (i = 1,\, 2)$$

とおくと，$x_1, x_2 \in M_0$ である．しかし，交点数 (カップ積) は $x_1 \cup x_2 = \dfrac{1}{4}(P_k^2)_X = -\dfrac{1}{2}$ となり矛盾する．よって，(2) の場合となる． □

補題 7.8.6e. 以上の仮定のもと，$x = P_i \in B$ に対して $e_x := c_1(C_i) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ とおく．すると，各 $f \in \mathrm{Aff}(B)$ に対して，交点数を保つ格子の同型写像 $\varphi_f : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ で，$\varphi_f(e_x) = e_{f(x)}$ ($\forall x \in B$) を満たすものが存在する．このとき，$\varphi_{g \circ f} = \varphi_g \circ \varphi_f$ が成り立つ．

証明. $f \in \mathrm{Aff}(B)$ に対して，複素多様体の同型写像 $\tilde{f}: T \to T$ で，$\tilde{f}|_B = f$，$f \circ \iota = \iota \circ f$ であって，各点 $P \in B \subset T$ の近傍では $\tilde{f}$ は $f(P) - P$ による平行移動になっているようなものが存在する (この事実の証明は省略する)．

$\tilde{f}$ から $\tilde{f}': S \to S$ が誘導され，$\overline{f}: X \to X$ が誘導される．$f(P_i) = P_j \in B$ のとき $\overline{f}(C_i) = C_j$ であることは容易にわかる．これより，$\varphi_f : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ が誘導される．φ_f が所望の性質を持つことは，自然に証明できる． □

$c = c_1(C_1) + \cdots + c_1(C_{16}) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ とする．上で述べたように $c/2 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ である．完全系列

$$0 = H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} H^2(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{C}$$

が存在する．$p(c) = 0$ なので $p(c/2) = 0$ であり，ある $D \in \mathrm{Pic}(X)$ が存在して $c_1(D) = c/2$ となる．このとき，$C_1 + \cdots + C_{16} \in |2D|$ である．

ところで，逆に，このような $C_1, \ldots, C_{16}$ の存在がクンマー曲面を特徴づける．

命題 7.8.7. X が K3 曲面で，16 本の (-2)-曲線 $C_1, \ldots, C_{16} \subset X$ を持ち，この 16 本の曲線はどの 2 本も交わらず，かつ，ある因子 D が存在して，$\mathcal{O}_X(C_1 + \cdots + C_{16}) \cong \mathcal{O}_X(2D)$ を満たせば，X はクンマー曲面である．

証明. $\rho: Y \to X$ を $C_1 \cup \cdots \cup C_{16} \in |2D|$ で分岐する 2 重被覆とする．定理 6.8.12 より Y は非特異で，$E_i = \rho^{-1}(C_i)$ は第 1 種例外曲線になる．そこで，$E_1, \ldots, E_{16}$ をコントラクトして $\psi: Y \to T$ を作る．

$$K_Y = \rho^*(K_X + D) = \rho^* D = E_1 + \cdots + E_{16}$$

である．定理 5.3.13a(2) より，$K_T = 0$ が得られる．

また，命題 7.1.5(5) より，

$$\begin{aligned} e(T) &= e(Y) - 16 = 2e(X) + 2(K_X \cdot D)_X + 4(D^2)_X - 16 \\ &= 2 \times 24 + 2 \times \frac{-16}{2} + 4 \times \frac{-16}{4} - 16 = 0 \end{aligned}$$

である．もし $q(T) = 0$ ならば T は K3 曲面であるが，K3 曲面については $e(T) = 24$ であるので，$q(T) \geqq 1$ である．定理 7.7.2 の証明の Case 2 は X がケーラー曲面の場合でもそのまま成立しているので，T は複素トーラスであることがわかる．

また，$\mathrm{Gal}(Y/X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元の T における像 ι' は，T 上の位数 2 の自己同型であり，$\iota(x) = -x$ で定まる写像と一致する．すると，$X = \mathrm{Km}(T)$ となる． □

● 初版 p.434, 新装版 p.436. 定理 7.8.9 の証明の 9 行上

誤: (K, ϕ) を**マーキングされた K3 曲面**という．

正: (S, ϕ) を**マーキングされた K3 曲面**という．

● 初版 p.434, 新装版 p.436．定理 7.8.9

以下のように修正して下さい．

[修正原稿]

定理 7.8.9. (Torelli) $\varphi\colon H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S', \mathbb{Z})$ は，カップ積から定まる 2 次形式を込めた同型写像で，S の有効因子の $H^2(S, \mathbb{Z})$ における同値類は φ により $H^2(S', \mathbb{Z})$ における有効因子の同値類に移ると仮定する．すると，この φ から自然に同型写像 $f\colon S' \to S$ が誘導される．

● 初版 p.435, 新装版 p.437．8 行目

誤: モジライの存在の帰結として，

正: モジュライの存在の帰結として，

● 初版 p.435, 新装版 p.437．10 行目

誤: の中で調密である．

正: の中で稠密である．

● 初版 p.435, 新装版 p.437．17 行目

誤: 加算無限個の 19 次元部分多様体の合併集合になる．

正: 可算無限個の 19 次元部分多様体の合併集合になる．

● 初版 p.435 〜 437, 新装版 p.437 〜 439．定理 7.9.1

定理 7.9.1 を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 7.9.1. S がエンリッケス曲面ならば，以下が成り立つ．

(1) $p_g(S) = 0$, $e(S) = 12$, $H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$.

(2) S 上の因子 D が $(D^2)_S \geqq 0$ を満たせば，$\boldsymbol{L}_S(D) \neq 0$ または $\boldsymbol{L}_S(-D) \neq 0$ または $D \sim K_S$ である．

(3) $\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{10} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である．また，$H^2(S, \mathbb{Z})$ の自由部分 $H^2(S, \mathbb{Z})_{free} \cong \mathbb{Z}^{10}$ に 2 次形式を交点数 (カップ積) によって定めて格子とみなすと，

$$H^2(S, \mathbb{Z})_{free} \cong \Gamma_8 \oplus \Gamma_H$$

である．

(4) S は射影曲面である．

(5) 不分岐 2 重被覆 $\pi{:}\, Y \to S$ で，Y が K3 曲面であるようなものが存在する．

証明. (1)　$K_S \not\sim 0$, $2K_S \sim 0$ なので，命題 4.2.18c より $H^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = \boldsymbol{L}_S(K_S) = 0$ であり，$p_g(S) = 0$ である．ネーターの公式により，

$$e(S) = (K_S^2)_S + e(S) = 12\chi(\mathcal{O}_S) = 12(1 - q(S) + p_g(S)) = 12$$

である．また，$q(S) = 0$ より，$H^1(S, \mathbb{C}) = 0$ である．定理 6.1.18(3) より，$H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$ である．

(2)　$(D^2)_S \geqq 0$ とする．$K_S \equiv 0$ (算術的同値) で，$K_S - (D - K_S) \sim -D$ であることに注意すると，リーマン・ロッホの定理から，

$$h^0(\mathcal{O}_S(D)) + h^0(\mathcal{O}_S(K_S - D)) \geqq \frac{1}{2}(D^2)_S + 1 \geqq 1$$

$$h^0(\mathcal{O}_S(D - K_S)) + h^0(\mathcal{O}_S(-D)) \geqq \frac{1}{2}(D^2)_S + 1 \geqq 1$$

となる．もし，$\boldsymbol{L}_S(D) = 0$ かつ $\boldsymbol{L}_S(-D) = 0$ ならば，$|K_S - D| \neq \phi$ かつ $|D - K_S| \neq \phi$ だから，命題 4.2.18b より $K_S - D \sim 0$ である．

(3)　指数関数完全系列から得られる完全系列

$$0 = H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow \mathrm{Pic}(S) = H^1(S, \mathcal{O}_S^{\times}) \longrightarrow H^2(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$$

により，$\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ がわかる．

$H^3(S, \mathbb{C}) = 0$ である．したがって，$b_2(S) = e(S) - 2 = 10$ である．

今，$H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Pic}(S)$ のトーション元 $D \not\sim 0$, $mD \sim 0$ をとる．命題 4.2.18c より $\boldsymbol{L}_S(D) = 0$, $\boldsymbol{L}_S(-D) = 0$ なので，(2) の結果から $D \sim K_S$ となる．したがって，$H^2(S, \mathbb{Z})$ のトーション部分は K_S で生成され，$H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{10} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ である．

トム・ヒルツェブルフの指数定理 (定理 6.10.5) により，$H^2(S, \mathbb{R})$ 上のカップ積が定める 2 次形式の指数は，

$$\tau(S) = \frac{1}{3}((K_S^2)_S - 2e(S)) = -8$$

であることがわかる．ポアンカレーの双対定理により，この 2 次形式はユニモジュラーである．

任意の $d \in H^2(S, \mathbb{Z})_{feee}$ に対し，対応する因子 $D \in \mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ をとると，リーマン・ロッホの定理より，

$$d \cup d = (D^2)_S = 2\big(\chi(\mathcal{O}_S(D)) - \chi(\mathcal{O}_S)\big) \in 2\mathbb{Z}$$

となる．よって，2 次形式は偶で，系 7.7.16(II) より，$H^2(S, \mathbb{Z})_{feee} \cong \Gamma_8 \oplus \Gamma_H$ である．

(4)　上の結果から，交点数が定める 2 次形式の正の固有値に対応する因子が存在し，それはアンプルである．よって，S は射影代数多様体である．

(5)　定理 6.8.12(2) を $D = K_S$ として適用すると，不分岐 2 重被覆 $\pi\colon Y \to S$ が存在し，$K_Y \sim 2\pi^* K_S \sim 0$ となる．Y は非特異である．π は不分岐なので，$\chi(\mathcal{O}_Y) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$ で，$p_g(Y) = 1$ なので，$q(Y) = 0$ であり，Y は K3 曲面である． □

● 初版 p.437 〜 439, 新装版 p.439 〜 441．定理 7.9.2

定理 7.9.2 を以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 7.9.2.　エンリッケス曲面 S は楕円曲面 $f\colon S \to \mathbb{P}^1$ の構造を持つ．この f はちょうど 2 個の多重ファイバーを持ち，それは，$f^*P_1 = 2F_1$, $f^*P_2 = 2F_2$ (F_1, F_2 は楕円曲線) と書ける．さらに，$K_S \sim F_1 - F_2 \sim F_2 - F_1$ である．f は F_1, F_2 以外に特異ファイバーを持つかもしれないが，それは多重ファイバーではない．

証明.　今，S 上の既約曲線 C が，$(C^2)_S < 0$ を満たすとする．リーマン・ロッホの定理より $\chi(\mathcal{O}_S(C)) = \dfrac{1}{2}(C^2)_S + \chi(\mathcal{O}_S)$ なので，$(C^2)_S$ は偶数である．$-2 \leqq \deg K_C = ((K_S + C) \cdot C)_S = (C^2)_S < 0$ なので，$(C^2)_S = -2$ である．$(K_S \cdot C)_S = 0$ より，$C \cong \mathbb{P}^1$ である．つまり，C は (-2)-曲線である．

$\mathrm{Pic}(S)_{free} \cong \Gamma_8 \oplus \Gamma_H \supset \Gamma_H$ より，$(D_1^2)_S = 0$ を満たす S 上の因子 $D_1 \in \Gamma_H$ が存在する．定理 7.9.1(2) より $|D_1| \neq \phi$ または $|-D_1| \neq \phi$ なので，最初から $D_1 > 0$ であると仮定してよい．

Claim. S 上のネフな因子 $F > 0$ で $(F^2)_S = 0$ を満たすものが存在することを示す．

上の考察から $F > 0$ のとき $(F \cdot C)_S < 0$ を満たす曲線 C は (-2)-曲線であるので，任意の (-2)-曲線 C に対し $(F \cdot C)_S \geqq 0$ が成立てば F はネフである．

$(D_1 \cdot C)_S = -k < 0$ を満たす (-2)-曲線 C が存在しなければ，$F = D_1$ とすればよい．このような C が存在したら，$D_2 = D_1 - kC$ とおく．すると，$(D_2^2)_S = 0$, $(D_2 \cdot C)_S = k > 0$ となる．$(K_S \cdot C)_S = 0$ より $K_S \not\sim D_2$ なので，定理 7.9.1(2) より $|D_2| \neq \phi$ または $|-D_2| \neq \phi$ である．しかし，$\exists D' \in |-D_2| = |kC - D_1| \neq \phi$ と仮定すると，$|mC| = \{mC\}$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ より $\mathrm{Supp}\, D' \subset C$ となり，$(D'^2)_S < 0$ が導かれて矛盾する．よって，$|D_2| \neq \phi$ である．そこで，$|D_2|$ の元を改めて D_2 とおき，$D_2 > 0$ と仮定してよい．

再び，$(D_2 \cdot C')_S = -k' < 0$ を満たす (-2)-曲線 C' が存在したら，$D_3 \in |D_2 - k'C'|$

をとる．D_1 に含まれる (-2)-曲線は有限本しか存在しないから，このような操作を何回か繰り返すと，$(D_r^2)_S = 0$, $D_r > 0$, かつ，任意の (-2)-曲線 C に対し $(D_r \cdot C)_S \geqq 0$ を満たす D_r が得られるので，$F = D_r$ とすればよい．以上で Claim が示された．

$F = F_1 + \cdots + F_k$ (各 F_i は $\mathrm{Supp}\, F_i$ が連結な因子で，$F_i > 0$ であり，$i \neq j$ のとき $\mathrm{Supp}\, F_i \cap \mathrm{Supp}\, F_j = \phi$) と F を連結成分に分解する．F はネフだから各 F_i もネフであり，$(F^2)_S = 0$ より $(F_i^2)_S = 0$ である．そこで改めて $F = F_1$ とおき，$\mathrm{Supp}\, F$ は連結であると仮定してよい．

$F = a_1 C_1 + \cdots + a_r C_r$ (C_i は既約曲線で，$a_i > 0$) とする．F はネフだから，$(F \cdot C_i)_S \geqq 0$ で，$0 = (F^2)_S = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i (F \cdot C_i)_S$ より $(F \cdot C_i)_S = 0$ $(1 \leqq \forall i \leqq r)$ が得られる．

ところで，$2F \in \mathrm{Pic}(S)$ はトーション部分を持たず，$(F^2)_S = 0$ なので，$\mathcal{O}_{2F}(2F) = \mathcal{O}_{2F}$ である．完全系列 $0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(2F) \to \mathcal{O}_{2F}(2F) \to 0$ と，$H^1(\mathcal{O}_S) = 0$ を使うと，$h^0(\mathcal{O}_S(2F)) \geqq 2$ が得られる．$2F$ と異なる $D' \in |2F|$ をとるとき，$(F^2)_S = 0$ より $\mathrm{Supp}\, D' \cap \mathrm{Supp}(2F) = \phi$ となり，$\mathrm{Bs}\, |2F| = \phi$ がわかる．よって，正則写像 $\Phi_{|2F|} \colon S \to \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(2F)^{\vee})$ が定まる．補題 5.5.16b より $\Phi_{|2F|}(S)$ は曲線である．

$\Phi_{|2F|}(S)$ の正規化を $\varGamma$ とすると，$\Phi_{|2F|} \colon S \xrightarrow{f} \varGamma \longrightarrow \mathbb{P}(\boldsymbol{L}_S(2F)^{\vee})$ と分解する．定理 5.1.12 より，一般の点 $P \in \varGamma$ に対し，$E = f^{-1}(P)$ は非特異曲線で，$(E^2)_S = 0$ を満たす．$\deg K_E = ((K_S + E) \cdot E)_S = 0$ より，E は楕円曲線である．したがって，$f \colon S \to \varGamma$ は楕円曲面である．$\mathcal{O}_E(E) \cong \mathcal{O}_E$ と完全系列 $0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(E) \to \mathcal{O}_E(E) \to 0$ を用いると，$h^0(S, \mathcal{O}_S(E)) = 2$ を得る．$E \neq D' \in |E|$ をとるとき，$(E^2)_S = 0$ より $\mathrm{Supp}\, D' \cap E = \phi$ となり，$\mathrm{Bs}\, |E| = \phi$ がわかる．よって,，正則写像 $\Phi_E \colon S \to \mathbb{P}^1$ が得られる．命題 4.2.24 より，全射 $g \colon \varGamma \to \mathbb{P}^1$ が存在するが，$Q \in \mathbb{P}^1$ に対し，$f(\Phi_E^{-1}(Q))$ は $\varGamma$ 上の 1 点なので，定理 2.5.15 より，g は同型写像である．そこで，f と Φ_E を同一視し，$f \colon S \to \mathbb{P}^1$ と考える．

楕円曲面 $f \colon S \to \mathbb{P}^1$ の多重ファイバー全体を $f^* P_1 = m_1 F_1, \ldots, f^* P_k = m_k F_k$ とする．このとき，定理 7.5.5, 定理 7.5.6 より，$F = f^{-1}(P) = f^* P$ を非特異ファイバーとするとき，

$$K_S \sim -F + \sum_{i=1}^{k} (m_i - 1) F_i$$

である．$2K_S \sim 0$ より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2(m_i - 1) F_i \sim 2F$ である．したがって，$k \leqq 2$ である．しかし，$k = 1$ とすると $2(m_1 - 1) F_1 \sim 2F \sim 2 m_1 F_1$ となり矛盾する．した

がって，$k=2$ である．$m_iF_i \sim F$ より，$(m_1-2)F_1+(m_2-2)F_2 \sim 0$ が得られ，$m_1=m_2=2$ となる．以上より，

$$K_S \sim F_1+F_2-F \sim F_1-F_2 \sim F_2-F_1$$

が得られる． □

● 初版 p.440. 新装版 p.442. 4 行目.

誤: $\rho(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)=\rho(x_2, x_1, -y_1, y_3, y_2)$

正: $\rho(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)=(x_2, x_1, -y_1, y_3, y_2)$

● 初版 p.440. 新装版 p.442. 8 〜 13 行目.

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

の自己同型写像は ρ に一致する．つまり，$\phi\circ\iota^*=\rho\circ\phi$ を満たす．ここで，

$$L^+=\{x\in L \mid \rho(x)=x\},\quad L^-=\{x\in L \mid \rho(x)=-x\}$$

とおく．$\dfrac{1}{2}L^+\cong\Gamma_8\oplus\Gamma_H$ であり，これが $H^2(S,\mathbb{Z})_{free}$ に対応する．そこで，このような ϕ をエンリッケス曲面 S の**マーキング**とよび，(S,ϕ) を**マーキングされたエンリッケス曲面**という.

● 初版 p.440. 新装版 p.442. 18 行目.

誤: $\phi(\omega)\in\Omega^-$ となる.

正: $[\phi(\omega_Y)]\in\Omega^-$ となる.

● 初版 p.442. 新装版 p.444. 第 7.10.1 項の最後.

以下の原稿を追加して下さい.

[追加原稿]

命題 7.10.1b. S は極小な一般型非特異射影曲面とする．このとき，S 内の (-2)-曲線は高々有限個しか存在しない.

証明. S 内の (-2)-曲線 $C_1,\ldots, C_n$ は $H^2(S,\mathbb{R})$ 内で 1 次独立であることを証明すればよい．1 次従属であると仮定する．適当に添え字を付け替えて，

$$\sum_{i=1}^{k}a_iC_i=\sum_{i=k+1}^{n}a_iC_i\in H^2(S,\mathbb{R})$$

$(\forall a_i > 0)$ であると仮定してよい．$i \neq j$ のとき $(C_i \cdot C_j)_S \geqq 0$ だから，

$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i C_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i C_i\right)\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i C_i\right) \geqq 0$$

である．$(K_S^2)_S > 0$, $(K_S \cdot C_i)_S = 0$ だから，ホッジの指数定理より $C_1,\ldots, C_n$ の交点行列は負定値であり，矛盾する． □

● 初版 p.442 〜, 新装版 p.444 〜. 定理 7.10.2.

定理 7.10.2 を再び，以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定理 7.10.2. S は極小な一般型非特異射影曲面とし，$|nK_S| \neq \phi$ のとき，$\Phi_{|nK_S|}: S \cdots \longrightarrow \mathbb{P}^N$ による S の像を Y_n とし，$\Phi_{|nK_S|}$ の終域を Y_n に制限した有理写像を，$\varphi_n: S \cdots \longrightarrow Y_n$ とする．このとき，ある自然数 n_0 が存在し，任意の整数 $n \geqq n_0$ に対し，$\mathrm{Bs}\,|nK_S| = \phi$ で $\varphi_n: S \longrightarrow Y_n$ は双有理正則写像になる．

証明. Step 1. $n \geqq 3$ に対し $|nK_S| \neq \phi$ であることを示す．$a = (K_S^2)_S > 0$, $b = \chi(\mathcal{O}_S)$, $P(n) = a\dfrac{n(n-1)}{2} + b$ とおく．$n \geqq 2$ のとき，$P(n) = h^0(\mathcal{O}_S(nK_S)) \geqq 0$ である．$P(2) = a + b \geqq 0$ より，$P(3) = 3a + b = 2a + (a + b) \geqq 2a \geqq 2$ である．同様に，$n \geqq 4$ のとき $P(n) \geqq a\dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$ がわかる．

Step 2. $n \gg 0$ のとき $\mathrm{Bs}\,|nK_S| = \phi$ を示す．

$|n_1K_S| \neq \phi$ となる自然数 n_1 をとり，$H \in |n_1K_S|$, $\mathrm{Bs}\,|H| \neq \phi$ と仮定する．もし，このような任意の n_1 に対して，$\mathrm{Bs}\,|nH| \subsetneqq \mathrm{Bs}\,|H|$ を満たす n が存在すれば，$n \gg 0$ のとき $\mathrm{Bs}\,|nK_S| = \phi$ であることがわかる．そこで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{Bs}\,|nH| = \mathrm{Bs}\,|H|$ であると仮定して矛盾を導く．

曲線 C が $(H \cdot C)_S \leqq 0$ を満たせば C は (-2)-曲線なので，S 内の (-2)-曲線全体の集合を $\{C_1,\ldots, C_l\}$ とする．

有理写像 $\Phi_H: S \cdots \to Y_n$ の不確定点除去 $\pi: X \to S$ をとる．π は 1 点を中心とするブロー・アップの合成で書ける．π の例外集合と，$|H|$ の固定成分の強変換と，C_i $(1 \leqq i \leqq l)$ の強変換をすべてあわせて $E_0, E_1,\ldots, E_k$ (これらは X 上の既約曲線) とする．必要ならさらにブロー・アップして，$(E_i^2)_X < 0$ $(0 \leqq \forall i \leqq k)$ と仮定してよい．また，$E_0 \cup \cdots \cup E_k$ は単純正規交叉であると仮定してよい．

π^*H はネフであって，$(\pi^*H \cdot C)_X = 0$ を満たす X 内の曲線 C はいずれかの E_i と一致する．よって，中井の判定法から，非負有理数 $0 < p_j \ll 1$ に対し，

$\pi^*H - \sum_{j=0}^{k} p_j E_j$ は $\mathbb{Q}$-アンプルになる．

また，不確定点除去の構成法から，ある非負整数 r_j が存在し，$L = \pi^*H - \sum_{j=0}^{k} r_j E_j$ とおくとき，$\mathrm{Bs}\,|L| = \phi$ で，$\Phi_L \circ \pi = \Phi_H$ を満たす．また，$r_j > 0$ ならば $\pi(E_j) \in \mathrm{Bs}\,|H|$ である．さらに，$\mathrm{Bs}\,|H| \neq \phi$ だから，ある j を選ぶと $r_j > 0$ である．$\mathrm{Bs}\,|L| = \phi$ より L はネフである．

$$K_X = \pi^*K_S + \sum_{j=0}^{k} a_j E_j \quad (a_j \geqq 0)$$

と書ける．ここで，$a_j > 0$ となるのは $\pi(E_j)$ が 1 点の場合に限る．必要なら添え字を付けなおし，ある有理数 $c > 0$ を適当に選んで，$-cr_0 + a_0 - p_0 = -1$, かつ，$1 \leqq j \leqq k$ について $-cr_j + a_j - p_j > -1$ となるようにできる．$B = E_0$, $A = \sum_{j=1}^{k} \lceil -cr_j + a_j - p_j \rceil E_j$ とおくと，

$$\sum_{j=0}^{k} \lceil -cr_j + a_j - p_j \rceil E_j = A - B$$

となる．$r_0 > 0$ なので，$\pi(B) \in \mathrm{Bs}\,|H|$ である．また, $A \geqq 0$ である．

$t \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned} N_t &= t\pi^*H + \sum_{j=0}^{k} (-cr_j + a_j - p_j) E_j - K_X \\ &\equiv cL + \pi^*\big((t - c - 1)H - K_S\big) + \left(\pi^*H - \sum_{j=0}^{k} p_j E_j\right) \end{aligned}$$

とおく．中井の判定法により $t - c - 1 > 1/n_1$ のとき N_t は $\mathbb{Q}$-アンプルである．また，N_t の小数部分は単純正規交叉である．よって，川又-フィーベックの消滅定理 (定理 8.8.20) により，$i > 0$ に対し，

$$H^i(X,\ \mathcal{O}_X(t\pi^*H + A - B)) = H^i(X,\ \mathcal{O}_X(\lceil N_t \rceil + K_X)) = 0$$

となる．よって，$H^0(X, \mathcal{O}_X(t\pi^*H + A)) \twoheadrightarrow H^0(B, \mathcal{O}_B(t\pi^*H + A))$ は全射である．

Step 2-1. $H^0(B, \mathcal{O}_B(t\pi^*H + A)) \neq 0$ を示す．

$\pi(B)$ が 1 点の場合には，$B \cong \mathbb{P}^1$ であって $\deg A|_B \geqq 0$ だから，任意の整数 t に対し

$$H^0(B,\ \mathcal{O}_B(t\pi^*H + A)) \cong H^0(B,\ \mathcal{O}_B(A)) \neq 0$$

となる．

$\pi(B)$ が曲線のときは，

$$h^0(B,\ \mathcal{O}_B(t\pi^*H+A)) \geqq \chi(\mathcal{O}_B(t\pi^*H+A)) = t(B\cdot\pi^*H)_X + \chi(\mathcal{O}_B(A))$$

である．$(B\cdot\pi^*H)_X \neq 0$ のときは，$t \gg 0$ のとき上式の右辺は正である．

$(B\cdot\pi^*H)_X = 0$ のときは，$(\pi(B)\cdot H)_S = 0$ なので，$\pi(B)$ は (-2)-曲線であり $B \cong \mathbb{P}^1$ である．すると，

$$h^0(B,\ \mathcal{O}_B(t\pi^*H+A)) = \chi(\mathcal{O}_B(t\pi^*H+A)) = (A\cdot B)_X + 1 \geqq 1$$

となる．

Step 2-2. $H^0(X,\ \mathcal{O}_X(t\pi^*H)) = H^0(X,\ \mathcal{O}_X(t\pi^*H+A))$ であることを示す．

$\lceil -cr_j + a_j - p_j \rceil > 0$ となるのは $a_j > 0$ の場合のみであり，それは E_j が π の例外曲線の場合に限る．つまり，A の既約成分は π の例外曲線のみである．π はブロー・アップの合成であるから，命題 5.3.17 より，

$$H^0(X,\mathcal{O}_X(t\pi^*H+A)) \cong H^0(S,\mathcal{O}_S(tH)) \cong H^0(X,\mathcal{O}_X(t\pi^*H))$$

となる．

完全系列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{L}_X(t\pi^*H+A-B) \longrightarrow \boldsymbol{L}_X(t\pi^*H+A) \twoheadrightarrow \boldsymbol{L}_B\big((t\pi^*H+A)|_B\big) \neq 0$$

より，

$$\boldsymbol{L}_X(t\pi^*H-B) \subset \boldsymbol{L}_X(t\pi^*H+A-B)) \subsetneqq \boldsymbol{L}_X(t\pi^*H+A) = \boldsymbol{L}_X(t\pi^*H)$$

となるから，B は $t\pi^*H$ の固定成分ではなく，$\pi(B) \not\subset \mathrm{Bs}\,|tH| = \mathrm{Bs}\,|H|$ となる．これは背理法の仮定に矛盾する．

Step 3. φ_n が双有理写像であることを示す．Step 2 の記号は破棄して，新たな記号の設定をする．

$x_1 \neq x_2 \in S$ で，x_1 を通る (-2)-曲線も，x_2 を通る (-2)-曲線も存在しないと仮定する．$\pi\colon X \to S$ を 2 点 x_1, x_2 でのブロー・アップとし，$E_i = \pi^{-1}(x_i)$ とする．

$n \geqq 2n_1 + 1$ のとき $D = n\pi^*K_S - K_X - E_1 - E_2 = 2(n_1\pi^*K_S - E_1 - E_2) + (n - 2n_1 - 1)\pi^*K_S$ はネフであることを示す．$(D\cdot C)_X < 0$ となる曲線 C があると仮定する．$m_i = (E_i\cdot C)_X = \mathrm{mult}_{x_i}\pi(C)$ とすると，$m_1 > 0$ または $m_2 > 0$ である．$\pi(C)$ は (-2)-曲線でないから $(K_S\cdot\pi(C))_S > 0$ で，x_1, x_2 を通る $\Gamma \in |n_1K_S|$ をとれば，$I_{x_i}(\Gamma,\ \pi(C)) \geqq \mathrm{mult}_{x_i}\pi(C) = m_i$ である．したがって，$(D\cdot C)_X \geqq 2((n_1\pi^*K_S - E_1 - E_2)\cdot C)_X \geqq 0$ となり矛盾する．

D はネフかつ巨大だから川又・フィーベックの消滅定理 (定理 6.8.24) により，

$$H^1(\mathcal{O}_X(n\pi^*K_S - E_1 - E_2)) = 0$$

である．したがって，

$$H^0(\mathcal{O}_X(n\pi^*K_S)) \to H^0(\mathcal{O}_{E_1\cup E_2}(n\pi^*K_S)) \cong H^0(\mathcal{O}_{E_1}) \oplus H^0(\mathcal{O}_{E_2}) \cong \mathbb{C}^2$$

は全射である．前と同じ議論で，$g(x_1) \neq g(x_2)$ を満たす $g \in H^0(\mathcal{O}_S(nK_S))$ が存在するので，$\Phi_{|nK_S|}(x_1) \neq \Phi_{|nK_S|}(x_2)$ となる．したがって，$\varphi_n = \Phi_{|nK_S|}$ は双有理である． □

注意. 実際には，$n \geqq 5$ のとき $\mathrm{Bs}\,|nK_S| = \phi$ で，$\Phi_{|nK_S|}$ は双有理正則写像であることが知られている ([BPV] Theorem 5.1 参照).

● 初版第 1 刷 p.443. 定理 7.10.2 の後. (初版第 2 刷以降では修正済み)

直前の修正原稿に続けて，以下の原稿を追加して下さい.

[追加原稿]

C が S 上の (-2)-曲線のとき，$(nK_S \cdot C)_S = 0$ だから，$\varphi_n(C)$ は 1 点である．逆に，$n \geqq 2n_1 + 1$ のとき，φ_n は (-2)-曲線の外では単射だから，$\varphi(C)$ が 1 点になるような曲線 C は (-2)-曲線しか存在しない．つまり，φ_n は S 上のすべての (-2)-曲線を 1 点にコントラクトする正則写像である.

● 初版第 2 刷以降 p.445. 新装版 p.457. 定理 7.10.3 の直前

初版第 1 刷のみ正しいのですが，定理 7.10.3 の直前に，以下の項見出しを追加して下さい.

7.10.3.　標準モデル

● 初版第 1 刷 p.443. 定理 7.10.3. (初版第 2 刷以降では修正済み)

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

定理 7.10.3. S は極小な一般型非特異射影曲面とし，$n \gg 0$，$Y = \Phi_{|nK_S|}(S)$ とする．すると，Y は，有理 2 重点以外の特異点を持たない正規代数曲面である.

● 初版第 1 刷 p.444. 初版第 2 刷 p.445. 新装版 p.447. 定理 7.10.3 の証明の 20 行目.

誤: $\mathfrak{m}'^k/\mathfrak{m}'^{k+1} \cong \mathcal{O}_Z(-kZ)$ である.

正: $\mathfrak{m}'^k/\mathfrak{m}'^{k+1} \cong H^0(\mathcal{O}_Z(-kZ))$ である.

● 初版第 1 刷 p.445. 初版第 2 刷 p.447. 新装版 p.448. 系 7.10.5.

以下の原稿と差し替えて下さい．(2) は命題 7.10.1b として前に移動しました．

[差し替え原稿]

系 7.10.4a. S は極小な一般型非特異射影曲面とし，$\varphi_n: S \to Y_n$ は定理 7.10.2 と同じとする．このとき，$m \geqq n \gg 0$ ならば，$Y_m \cong Y_n$ である．

証明. $|kK_S| \neq \phi$ のとき，命題 4.2.24 より，正則写像 $\psi: Y_{n+k} \to Y_n$ で，$\varphi_n = \psi \circ \varphi_{n+k}$ を満たすものが存在する．

φ_n, φ_{n+k} は，いずれも S 上のすべての (-2)-曲線のコントラクションであるから，ψ は全単射である．前定理より，Y_n, Y_{n+k} は正規なので，$\mathrm{Rat}(Y_{n+k})$ 内における Y_n の正規化は Y_{n+k} と一致し，$\psi: Y_{n+k} \to Y_n$ は同型写像である．n を固定するとき，$k \gg 0$ ならば $Y_{n+k} \cong Y_n$ であるので，結論を得る． □

● 初版第 1 刷 p.445. 15 〜 16 行目. 定義 7.10.5. (初版第 2 刷以降では修正済み)

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

定義 7.10.5 X は一般型非特異射影曲面とし，X の極小モデルのひとつを S とする．$\varphi_n: S \to Y_n$ は定理 7.10.2 と同じとする．この Y_n は $n \gg 0$ の値によらず，S に対して同型を除いて一意的に定まる．$Y = Y_n$ $(n \gg 0)$ を X の**標準モデル** (canonical model) という．

● 初版第 1 刷 p.446. 初版第 2 刷 p.448. 新装版 p.449. 定理 7.10.7.

以下の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

命題 7.10.6b. X は非特異射影多様体，$D \geqq 0$ は X 上の因子で，$\mathrm{Bs}\,|D| = \phi$ とする．また $\Phi_D: X \to \mathbb{P}^N$ による X の像を $Y = \Phi_D(X)$ とする．射影多様体 $Y \subset \mathbb{P}^N$ の座標環を S とするとき，

$$S \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$$

が成り立つ．

証明. Φ_D の終域 (値域) を Y に制限した写像を $\varphi: X \to Y$ とする．H を $\mathbb{P}^N$ の超平面とするとき，$\mathcal{O}_X(D) \cong \varphi^*\mathcal{O}_Y(H)$ である．したがって，$\mathcal{O}_X(nD) \cong \varphi^*\mathcal{O}_Y(mH)$

である．よって，

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(nH)) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(n)) = S$$

である． □

補題 7.10.6c. X は射影多様体でその座標環を $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$ とする．自然数 n を固定し，$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_{nd}$ とし，S を座標環とする射影多様体を Y とする．包含写像 $S \subset R$ から誘導される正則写像を $\varphi: X \to Y$ とする．このとき，φ は同型写像である．

証明. Y のアフィン開集合 $W = D_{+,Y}(g)$ $(g \in R_{nd} \subset S)$ をとる．$U = \varphi^{-1}(W)$ とおくと $U = D_{+,X}(g)$ である．W, U の座標環はそれぞれ $S_W = (S[1/g])_0$, $R_U = (R[1/g])_0$ である．$S \subset R$ だから $S_W \subset R_U$ である．R_U は x/g^m $(m \in \mathbb{N}$, $x \in R_{mnd})$ という形の元で生成される．ところが $x/g^m \in (S[1/g])_0$ だから $S_W = R_U$ である．よって，$\varphi|_U: U \to Y$ は同型写像で，φ は同型写像である． □

定理 7.10.7. X が (極小とは限らない) 一般型非特異射影曲面ならば，$R(X)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な環で，$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} R(X) = 3$ である．さらに，Y を X のひとつの標準モデルとすると，$R(X)$ は射影多様体 Y の (斉次) 座標環になる．したがって，X の標準モデルと極小モデルは同型を除いて一意的に定まる．

証明. $\psi: X \to S$ を X の 1 つの極小モデルとし，$\varphi = \Phi_{|n_0 K_S|}: S \to Y \subset \mathbb{P}^N$ を S の標準モデルとする．ただし, n_0 は定理 7.10.2 のように定める．

H を $\mathbb{P}^N$ の超平面とするとき，$\mathcal{O}_S(n_0 m K_S) \cong \varphi^* \mathcal{O}_Y(mH)$ である．$d = n_0 m + i$ $(0 \le r < m)$ に対して $\mathcal{F}_d = \mathcal{O}_Y(mH) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \varphi_* \mathcal{O}_X(rK_S)$ とおけば，定理 5.3.14 と射影公式 (命題 6.2.6b) より

$$R(S) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} H^0(\mathcal{O}_S(dK_S)) \cong \bigoplus_{d=0}^{\infty} H^0(\mathcal{F}_d)$$

となる．Y の座標環 $R_Y = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(\mathcal{O}_Y(mH)) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(\mathcal{F}_{n_0 m})$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成な多元環で $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} R_Y = 3$ である．前の補題より R_Y を座標環とする射影多様体と $R(S)$ を座標環とする射影多様体は同型である．よって，$R(S) \cong R(X)$ も $\mathbb{C}$ 上有限生成で，多元環で $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{C}} R(X) = 3$ である．

Y は座標環 $R(X) \cong R(S)$ を持つ射影代数多様体として特徴づけられるので，X に対し同型を除いて一意的に定まる．また，S は Y の最小特異点解消として定まるので，S も同型を除いて一意的に定まる． □

● 初版第 2 刷以降 p.447. 新装版 p.449. 定理 7.10.8 の直前

誤: 7.10.3　ネーターの不等式

正: 7.10.4　ネーターの不等式

● 初版第 1 刷 p.447. 初版第 2 刷 p.448. 新装版 p.450. 定理 7.10.8 の証明の Case 1 の 11 〜 13 行目.

誤: $2\mathbb{Z}$ なので，$(D_i^2)_S = 1$ $(\forall i)$ である．D_i と D_j は S 上で算術的同値なので，$(D_i \cdot D_j)_S = 1$ である．

$$1 = (K_S \cdot D_i)_S = (F \cdot D_i)_S + \sum_{j=1}^{r}(D_j \cdot D_i)_S = (F \cdot D_i)_S + r \geqq r$$

正: $2\mathbb{Z}$ なので，$(D_i^2)_S \geqq 1$ $(\forall i)$ である．D_i と D_j は S 上で算術的同値なので，$(D_i \cdot D_j)_S \geqq 1$ である．

$$1 = (K_S \cdot D_i)_S = (F \cdot D_i)_S + \sum_{j=1}^{r}(D_j \cdot D_i)_S \geqq \frac{1}{r}(F \cdot M)_S + r \geqq r$$

● 初版第 1 刷 p.447. 初版第 2 刷 p.448. 新装版 p.450. 定理 7.10.8 の証明の Case 2.

以下の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

Case 2.　T が曲面の場合.

M はネフかつ巨大である．$\mathbb{P}^N$ の超平面 H をうまく選べば，ψ^*H が非特異既約曲線になるようにできる．そこで，M は非特異既約曲線であると仮定してよい．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(K_S) \longrightarrow \mathcal{O}_S(K_S + M) \longrightarrow \mathcal{O}_M(K_S + M) \longrightarrow 0$$

から得られるコホモロジー完全系列を考える．

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_M(K_S + M)) &= \chi(\mathcal{O}_S(K_S + M)) - \chi(\mathcal{O}_S(K_S)) \\ &= \frac{1}{2}((K_S + M) \cdot M)_S \leqq (K_S^2)_S\end{aligned}$$

である．また $h^1(\mathcal{O}_M(K_S{+}M)) = h^1(\mathcal{O}_M(K_M)) = h^0(\mathcal{O}_M) = 1$ なので，$h^0(\mathcal{O}_M(K_S + M)) \leqq 1 + (K_S^2)_S$ である．

$1, x_1, \ldots, x_m$ が $H^0(\mathcal{O}_M(M))$ の基底ならば，$1, x_1, \ldots, x_m, x_1^2, \ldots, x_m^2, x_i x_j\ (i<j)$ の中から 1 次独立な $2m-1$ 個の $H^0(\mathcal{O}_M(2M))$ 元を選べるから，

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_M(K_S+M)) = h^0(\mathcal{O}_M(2M+F)) &\geqq h^0(\mathcal{O}_M(2M)) \\ &\geqq 2h^0(\mathcal{O}_M(M)) - 1 \end{aligned}$$

である．$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(M) \to \mathcal{O}_M(M) \to 0$ より，

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}_M(M)) \geqq h^0(\mathcal{O}_S(M)) - h^0(\mathcal{O}_S) &= h^0(\mathcal{O}_S(M+F)) - 1 \\ &= h^0(\mathcal{O}_S(K_S)) - 1 = p_g(S) - 1 \end{aligned}$$

なので，定理の不等式を得る． □

● 初版第 2 刷以降 p.449. 新装版 p.451. 項見出しの番号.

誤: 7.10.4 $e(S) > 0$

正: 7.10.5 $e(S) > 0$

● 初版第 1 刷 p.448. 初版第 2 刷 p.450. 新装版 p.452. 命題 7.10.10 の証明の 1 行目.

誤: (1) S の一般の点 P のあるアフィン開近傍 U で広義座標系 (x, y) をとり，

正: (1) S の一般の点 P のある解析的開近傍 U で狭義座標系 (x, y) をとり，

● 初版第 1 刷 p.449. 初版第 2 刷 p.450. 新装版 p.452. 命題 7.10.10 の証明の 7 〜 11 行目.

以下の原稿のように少しだけ書き直します.

[差し替え原稿]

そこで，t を $\mathbb{P}^1$ の局所座標とし，U と座標系 (x, y) を選びなおして，$h^*t = x$, $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ であると仮定してよい．$d\omega_i = 0$ より，$\dfrac{\partial f_i}{\partial y} = \dfrac{\partial g_i}{\partial x}$ であり，$f_1 = f_2 h$, $g_1 = g_2 h$ より，

$$0 = f_2 \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - h\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial x} - h\frac{\partial g_2}{\partial x} = g_2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

となる．これより，U 上で $g_2 = 0$ である．すると，$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{\partial g_2}{\partial x} = 0$ となり，

● 初版第 1 刷 p.450. 初版第 2 刷 p.451. 新装版 p.453. 命題 7.10.10 の証明の (3-1) の 1 行目.

誤: (3-1) $\omega_1, \omega_2 \in H^{1,0}(S)$ が 1 次独立ならば $\omega_1 \wedge \overline{\omega_2} = 0$ であることを示す.

正: (3-1) $\omega_1, \omega_2 \in H^{1,0}(S)$ が 1 次独立ならば $\omega_1 \wedge \overline{\omega_2} \neq 0$ であることを示す.

● 初版第 1 刷 p.450. 初版第 2 刷 p.451. 新装版 p.453. 命題 7.10.10 の証明の (3-1) の 4 行目.

旧: したがって，ω_1 と ω_2 は線形従属である.

新: 背理法の仮定から，ω_1 と ω_2 は線形従属である.

● 初版第 1 刷 p.450. 初版第 2 刷 p.451. 新装版 p.453. 命題 7.10.10 の証明の (3-2) の 5 行目.

誤: また，$V_1 \cap V_2 = \mathbb{C}\cdot(\omega_1 \wedge \overline{\omega_2})$

正: また，$\overline{V_1} \cap V_2 = \mathbb{C}\cdot(\omega_1 \wedge \overline{\omega_2})$

● 初版第 1 刷 p.451. 初版第 2 刷 p.452. 新装版 p.454. 系 7.10.11 の証明の最後から 4 行目.

誤: $2-4q(Y)+2p_g(Y)=e(Y)=n\cdot e(S)\leqq -n$

正: $2-4q(Y)+2p_g(Y)\leqq e(Y)=n\cdot e(S)\leqq -n$

● 初版第 1 刷 p.452, 初版第 2 刷 p.453, 新装版 p.455. 系 7.10.12 の証明.

下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

証明. もし，任意の自然数 n に対し，$h^0(\mathcal{O}_S(nD))\leqq 1$ なら結論は自明だから，ある自然数 n_0 に対し $h^0(\mathcal{O}_S(n_0D))\geqq 2$ である場合を考えればよい.

$B\in|n_0D|$ をとる．十分小さい X の座標開集合 U において，$\mathrm{div}(h)|_U=B|_U$ となるような $h\in H^0(U,\mathcal{O}_S(n_0D))$ をとる．定理 6.8.12(1) の証明と同じように n_0 次巡回被覆 $\pi\colon Y\to S$ を構成する．ただし，B は非特異ではないので，$\pi^{-1}(B)$ 上に Y は特異点を持つ可能性がある．そこで，$\pi_1\colon Y_1\to Y$ を Y の正規化とし，$\pi_2\colon Y_2\to Y_1$ を Y_1 の特異点解消とする．$\psi=\pi\circ\pi_1\circ\pi_2\colon Y_2\to S$ とする．線形独立な $s_1,\,s_2\in H^0(S,\mathcal{O}_S(nD))$ をとる．ただし，必要なら D を線形同値なものに取り替えて，$\mathrm{div}(s_1)$ のゼロ因子が B 以上になるように選んでおく．$\pi^*\mathcal{O}_Y(D)$ は可逆な $\mathcal{O}_Y$-加群で，Y の非特異点の近傍では $\sqrt[n_0]{h}$ で生成されているので，ある $t_1,\,t_2\in H^0(Y,\,\pi^*\mathcal{O}_S(D))$ で，$\pi^*s_i=t_i^{n_0}$ $(i=1,\,2)$ を満たすものが存在することは，定理 6.8.12(1) と同様に証明できる．$u_i=\pi_2^*(\pi_1^*t_i)$ とおけば，$\psi^*s_i=u_i^{n_0}$ $(i=1,\,2)$ を満たす.

$0\neq\omega\in H^0(S,\,\Omega_S^1\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D))$ をとる．$u_i\psi^*\omega\in H^0(Y,\,\Omega_Y^1)$ であることは容易に証明できる．$u_1\psi^*\omega,\,u_2\psi^*\omega$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な正則微分形式で，$u_1\psi^*\omega\wedge u_2\psi^*\omega=0$ であるので，命題 7.10.10(1) のような正則写像 $\varphi\colon Y_2\to C$ (C は非特異射影曲線) が存在する．また C 上の正則 1 次微分形式 $\eta_1,\,\eta_2$ が存在して，$\varphi^*\eta_i=u_i\psi^*\omega$ $(i=1,\,2)$ となる．よって，$\psi^{-1}(B)$ の任意の既約成分 B'_j に対し $\varphi(B'_j)$ は 1 点になる．と

ころで，$\varphi\colon Y_2 \to C$ は $(u_1 : u_2)$ で定まる有理写像 (この場合は正則写像) $\alpha\colon Y_2 \to \mathbb{P}^1$ のシュタイン分解 $Y_2 \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^2$ として構成されていた．

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\pi_1"] & Y \arrow[d, "\pi"] & \\
Y_2 \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\alpha"'] & S \arrow[d, dotted, "\alpha_0"'] \arrow[dr, dotted, "\varphi_0"'] & S_1 \arrow[l, "\rho"'] \arrow[d, "\varphi_1"] \\
C \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{P}^1 & C_0 \arrow[l, "\beta_0"]
\end{tikzcd}$$

今，$(s_1 : s_2)$ で定まる有理写像 $\alpha_0\colon S \cdots \to \mathbb{P}^1$ のシュタイン分解を $S \overset{\varphi_0}{\cdots\to} C_0 \xrightarrow{\beta_0} \mathbb{P}^1$ とする．有理写像として $\alpha_0 \circ \psi = \alpha\colon Y_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が成り立つ．また，β_0 は正則な有限写像である．有理写像 $\varphi_0\colon S \to C_0$ の不確定点除去 $\rho\colon S_1 \to S$ をとる．ρ は 1 点でのブロー・アップの合成として表せる．$\varphi_1 = \varphi_0 \circ \rho\colon S_1 \longrightarrow C_0$ は正則写像である．必要なら，特異点解消 $\pi_2\colon Y_2 \to Y_1$ を取り直して (もう少しブロー・アップを繰り返して)，正則写像 $\psi_0\colon Y_2 \to S_1$ で，$\beta \circ \varphi = \beta_0 \circ \varphi_1 \circ \psi_0$ を満たすものが存在すると仮定してよい．もし φ_0 の不確定点 $P \in S$ で，$\varphi_1(\rho^{-1}(P)) = C_0$ を満たすようなものが存在すれば，$\beta_0(\varphi_1(\rho^{-1}(P))) = \mathbb{P}^1$ だから，ある曲線 $C_1 \subset \psi_0^{-1}(\rho^{-1}(P)) \subset Y_2$ で，$\alpha(C_1) = \mathbb{P}^1$ を満たすものが存在する．しかし，$\psi(C_1) = P$ で $\psi^* s_i = u_i^{n_0}$ だから，C_1 上で u_i は定数であり，$\alpha(C_1)$ は 1 点になる．これは矛盾である．よって，$\varphi_1(\rho^{-1}(P))$ は 1 点であり，P は φ_0 の不確定点でない．これは，有理写像 $\varphi_0\colon S \cdots \to C_0$ が不確定点を持たない正則写像であることを意味する．

$\psi^{-1}(B)$ の任意の既約成分 B'_j に対し $\varphi(B'_j)$ は 1 点であったので，B の各既約成分 B_j に対して $\varphi_0(B_j)$ は 1 点である．一般ファイバー $F = \varphi_0^{-1}(P)$ に対して $\mathcal{O}_F(B) \cong \mathcal{O}_F$ である．$k \gg 0$ のとき $H^0(\mathcal{O}_S(B - kF)) = 0$ となる．そのような k を 1 つ選び固定する．$n \in \mathbb{N}$ に対して相異なる kn 個の一般ファイバー $F_i = \varphi_0^{-1}(P_i)$ $(1 \leqq i \leqq kn)$ をとるとき，$H^0(\mathcal{O}_S(nB - F_1 - \cdots - F_{kn})) = 0$ である．完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(nB - F_1 - \cdots - F_{kn}) \longrightarrow \mathcal{O}_S(nB) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{kn} \mathcal{O}_{F_i} \longrightarrow 0$$

より，$h^0(\mathcal{O}_S(nB)) \leqq \displaystyle\sum_{i=1}^{kn} h^0(\mathcal{O}_{F_i}) = kn$ となる． $\square$

● 初版第 2 刷以降 p.453. 新装版 p.455. 項見出しの番号.

誤: 7.10.5　対称テンソル積

正: 7.10.6　対称テンソル積

● 初版第 1 刷 p.453. 初版第 2 刷 p.454. 新装版 p.456.

誤: $\prod_{i=1}^{n}\Big(1+t\big(iD_1+(n-i)D_2+D\big)\Big)$

正: $\prod_{i=0}^{n}\Big(1+t\big(iD_1+(n-i)D_2+D\big)\Big)$

● 初版第 1 刷 p.453. 初版第 2 刷 p.454. 新装版 p.456.

誤: $c_2(\mathcal{G}_n)=\left(\frac{n^2(n+1)^2}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)c_1(\mathcal{F})^2$

正: $c_2(\mathcal{G}_n)=\left(\frac{n^2(n+1)^2}{8}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\right)c_1(\mathcal{F})^2$

● 初版第 2 刷以降 p.455. 新装版 p.457. 項見出しの番号.

誤: 7.10.6　$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ **再論**

正: 7.10.7　$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ **再論**

● 初版第 1 刷 p.455, 初版第 2 刷 p.456. 新装版 p.458. 命題 7.10.13 の証明の 5 行目.

誤: $\mathcal{E}=\mathcal{O}_X^{\otimes(r+1)}$ であると仮定してよい.

正: $\mathcal{E}=\mathcal{O}_X^{\oplus(r+1)}$ であると仮定してよい.

● 初版第 1 刷 p.456 〜 457, 初版第 2 刷 p.457 〜 458. 新装版 p.459 〜 460. 命題 7.10.15.

下記の原稿と差し替えて下さい.

[差し替え原稿]

補題 7.10.14b.　X は非特異射影多様体, $\mathcal{L}$ は可逆 $\mathcal{O}_X$-加群, $\mathcal{E}$ はランク 2 の局所自由 $\mathcal{O}_X$-加群で，全射 $\varphi\colon\mathcal{E}\to\mathcal{L}$ が存在すると仮定する．$Y=\mathbb{P}(\mathcal{E})$ とし，$\sigma\colon X=\mathbb{P}(\mathcal{L})\longrightarrow Y=\mathbb{P}(\mathcal{E})$ は φ から誘導される中への同型写像とする．このとき，$\mathcal{L}=\sigma^*\mathcal{O}_Y(1)$ が成り立つ．また，$\mathcal{N}:=\operatorname{Ker}\varphi$ とし，$\pi\colon Y\longrightarrow X=\mathbb{P}(\mathcal{N})$ を包含写像 $\mathcal{N}\to\mathcal{E}$ から定まる正則写像とするとき，

$$\mathcal{O}_Y(1)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_Y(-\sigma(X))\cong\pi^*\mathcal{N}$$

が成立する.

証明は [H] 第 V 章命題 2.6 とまったく同じである.

補題 7.10.15. S は非特異代数曲面，$\mathfrak{F}$ はランク 2 の局所自由 $\mathfrak{O}_S$-加群で，$H^0(S, \mathfrak{F}) \neq 0$ とする．さらに，ある $0 \neq s \in H^0(S, \mathfrak{F})$ が存在して，s の零点は高々有限個の孤立点であるとする．すると，$c_2(\mathfrak{F}) \geqq 0$ である．

証明. s 倍写像 $\varphi: \mathfrak{O}_S \longrightarrow \mathfrak{F}$ を作る．$\operatorname{Coker}\varphi$ のトーション部分のサポートは s の零点の上にあるが，それは孤立点である．s の孤立零点 $P_1, \ldots, P_k$ でのブロー・アップを $\psi_1: S_1 \to S$ とし，$C_i = \psi_1^{-1}(P_i)$ とする．$\psi_1^* s$ が C_i 上で m_i 位の零点を持つとして，$D_1 = m_1 C_1 + \cdots + m_k C_k$ とする．$\psi_1^* s$ 倍写像を $\varphi_1: \mathfrak{O}_{S_i}(D_1) \longrightarrow \psi_1^* \mathfrak{F}$ とする．S_1 の各アフィン開集合 U 上である $\alpha_U \in H^0(U, \mathfrak{O}_{S_i}(D_1))$ をとれば，$C_i \cap U$ 上で $\alpha_U \psi_1^* s$ が恒等的に 0 でないようにできる．もし $\alpha_U \psi_1^* s$ が孤立零点を持つなら，再びその点で S_1 をブロー・アップする．このようなブロー・アップを繰り返して $\psi: \tilde{S} \to S$ を作ると，$E = \sum a_i E_i$ (E_i は ψ の例外曲線で，a_i は $\psi^* s$ の E_i での零点の位数) とするとき，$\tilde{S}$ の各アフィン開集合 U 上である $\alpha_U \in H^0(U, \mathfrak{O}_{\tilde{S}}(E))$ をとれば，各 $E_i \cap U$ 上で $\alpha_U \psi^* s$ が恒等的に 0 でなく，かつ，孤立零点も持たないようにできる．よって，$\tilde{\varphi}: \mathfrak{O}_{\tilde{S}}(E) \longrightarrow \psi^* \mathfrak{F}$ を $\psi^* s$ 倍写像とするとき，$\mathfrak{G} := \operatorname{Coker}\tilde{\varphi}$ はトーションを持たないランク 1 の局所自由層 (つまり可逆層) になる．

全射 $\psi^* \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ より切断 $\sigma: \tilde{S} \cong \mathbb{P}(\mathfrak{G}) \longrightarrow \mathbb{P}(\psi^* \mathfrak{F})$ が誘導され，前補題より $\mathfrak{G} = \sigma^* \mathfrak{O}_{\mathbb{P}(\psi^* \mathfrak{F})}(1)$ となる．$\tilde{X} = \mathbb{P}(\psi^* \mathfrak{F})$, 自然な全射を $\tilde{\pi}: \tilde{X} \to \tilde{S}$ とし，H は $\mathfrak{O}_{\tilde{X}}(H) \cong \mathfrak{O}_{\mathbb{P}(\psi^* \mathfrak{F})}(1)$ を満たす $\tilde{X}$ 上の因子とする．$\operatorname{Ker}(\psi^* \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}) = \mathfrak{O}_{\tilde{S}}(E)$ より，

$$\mathfrak{O}_{\tilde{X}}(H - \sigma(\tilde{S})) \cong \tilde{\pi}^* \mathfrak{O}_{\tilde{S}}(E) \cong \mathfrak{O}_{\tilde{X}}(\tilde{\pi}^* E)$$

が成り立つ．つまり，$\tilde{X}$ 上の因子として，$H - \tilde{\pi}^* E \sim \sigma(\tilde{S})$ が成り立つ．$\tilde{\pi} \circ \sigma = \mathrm{id}_{\tilde{S}}$ だから，$\tilde{S} \cong \sigma(\tilde{S})$ である．また，完全系列 $0 \longrightarrow \mathfrak{O}_{\tilde{X}}(E) \longrightarrow \psi^* \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{O}_{\tilde{X}}(\sigma(H)) \longrightarrow 0$ より，$\psi^* c_1(\mathfrak{F}) \sim \sigma^* H + E$ である．定理 6.10.2(5) より

$$0 = (H^3)_{\tilde{X}} - \bigl(H^2 \cdot \tilde{\pi}^* \psi^* c_1(\mathfrak{F})\bigr)_{\tilde{X}} + \bigl(H \cdot \tilde{\pi}^* \psi^* c_2(\mathfrak{F})\bigr)_{\tilde{X}}$$

である．右辺の第 2 項と第 3 項を $\tilde{S}$ に引き戻してみると，

$$\begin{aligned}
\bigl(H \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_2(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} &= \bigl((H - \tilde{\pi}^* E) \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_2(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} = \bigl(\sigma(\tilde{S}) \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_2(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} \\
&= \sigma^*\bigl(\tilde{\pi}^*(\psi^* c_2(\mathfrak{F}))\bigr) = \psi^* c_2(\mathfrak{F}), \\
\bigl(H^2 \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_1(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} &= \bigl((H - \tilde{\pi}^* E) \cdot H \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_1(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} \\
&= \bigl(\sigma(\tilde{S}) \cdot H \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_1(\mathfrak{F}))\bigr)_{\tilde{X}} = \bigl(\sigma^* H \cdot \psi^* c_1(\mathfrak{F})\bigr)_{\tilde{S}} \\
&= \bigl((\psi^* c_1(\mathfrak{F}) - E) \cdot \psi^* c_1(\mathfrak{F})\bigr)_{\tilde{S}} = \bigl(\psi^* c_1(\mathfrak{F})^2\bigr)_{\tilde{S}} = (c_1(\mathfrak{F})^2)_S
\end{aligned}$$

となる．ここで，積はカップ積または交点数である．

$\{E_i\}$ の交点行列は負定値だから,

$$
\begin{aligned}
0 &\geqq \left(\sum a_i E_i\right)^2_{\tilde{S}} = \left(\psi^* c_1(\mathfrak{F}) - \sigma^* H\right)^2_{\tilde{S}} \\
&= \left(\left(\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F}) - H\right)^2 \cdot \sigma(\tilde{S})\right)_{\tilde{X}} = \left(\left(\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F}) - H\right)^2 \cdot \left(H - \tilde{\pi}^* E\right)\right)_{\tilde{X}} \\
&= (H^3)_{\tilde{X}} - \left(H^2 \cdot \left(\tilde{\pi}^* E + 2\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)\right)_{\tilde{X}} + \left(H \cdot (\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F}))^2\right)_{\tilde{X}}
\end{aligned}
$$

となる．これに，上で得られた関係式を代入すると,

$$
\begin{aligned}
0 &\geqq (H^3)_{\tilde{X}} - \left(H^2 \cdot \left(\tilde{\pi}^* E + 2\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)\right)_{\tilde{X}} + \left(H \cdot (\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F}))^2\right)_{\tilde{X}} \\
&= \left(H^2 \cdot \tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)_{\tilde{X}} - \left(H \cdot \tilde{\pi}^*\psi^* c_2(\mathfrak{F})\right)_{\tilde{X}} \\
&\qquad - \left(H^2 \cdot \left(\tilde{\pi}^* E + 2\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)\right)_{\tilde{X}} + \left(H \cdot \left(\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)^2\right)_{\tilde{X}} \\
&= -\left(H^2 \cdot \left(\tilde{\pi}^* E + \tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F})\right)\right)_{\tilde{X}} - \left(H \cdot \tilde{\pi}^*(\psi^* c_2(\mathfrak{F}))\right)_{\tilde{X}} \\
&\qquad + \left((\sigma(\tilde{S}) + \tilde{\pi}^* E) \cdot (\tilde{\pi}^*\psi^* c_1(\mathfrak{F}))^2\right)_{\tilde{X}} \\
&= 0 - (c_1(\mathfrak{F})^2)_S - \psi^* c_2(\mathfrak{F}) + (c_1(\mathfrak{F})^2)_S \\
&= -\psi^* c_2(\mathfrak{F})
\end{aligned}
$$

となり，$c_2(\mathfrak{F}) \geqq 0$ を得る．

なお，[Iv] 第 VIII 章・系 6.11 の議論を利用して証明することもできる． □

● 初版第 1 刷 p.457 〜 459, 初版第 2 刷 p.458 〜 460．新装版 p.460 〜 462．補題 7.10.16 の証明．

下記の原稿と差し替えて下さい．

[差し替え原稿]

証明. Step 1. まず，$n = 1$ の場合に証明する．因子 $E \geqq 0$ を適当に選び，ある $0 \neq f_1\,dx + f_2\,dy \in H^0\left(\mathfrak{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D-E)\right)$ をとるとき，f_1, f_2 の零因子が共通因子を持たないようにしておく．前補題より，$c_2\left(\mathfrak{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D-E)\right) \geqq 0$ である．

$$
c_2\left(\mathfrak{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D-E)\right) = c_2(\mathfrak{F}) - (c_1(\mathfrak{F}) \cdot (D+E))_S + ((D+E)^2)_S
$$

である．したがって，もし，$((D+E)^2)_S \leqq 0$ ならば，$c_1(\mathfrak{F})$ はネフなので,

$$
(c_1(\mathfrak{F}) \cdot D)_S \leqq c_2(\mathfrak{F}) - (c_1(\mathfrak{F}) \cdot E)_S \leqq c_2(\mathfrak{F})
$$

を得る．そこで，以下，$((D+E)^2)_S > 0$ の場合を考える．リーマン・ロッホの定理より，ある実数 $a > 0$ が存在して，$m \gg 0$ のとき,

$$
h^0\left(\mathcal{O}_S(m(D+E))\right) + h^0\left(\mathcal{O}_S(K_S - m(D+E))\right) > 2am^2
$$

となる．しかし，$0 \neq H^0\left(\mathfrak{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D-E)\right) \subset H^0\left(\Omega^1_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D-E)\right)$ なので，系 7.10.12 より，$h^0\left(\mathcal{O}_S(m(D+E))\right)$ は m について高々1 次のオーダーでしか

増大しない．したがって，$m \gg 0$ のとき，$h^0\big(\mathcal{O}_S(K_S - m(D+E))\big) > am^2$ である．すると，

$$\big((D+E)\cdot c_1(\mathcal{F})\big)_S \leqq \frac{1}{m}\big(K_S \cdot c_1(\mathcal{F})\big)_S \longrightarrow 0 \quad (m \to \infty)$$

となり，$\big((D+E)\cdot c_1(\mathcal{F})\big)_S \leqq 0$ を得る．これより，$(D \cdot c_1(\mathcal{F}))_S \leqq 0 < c_2(\mathcal{F})$ である．

Step 2. $n \geqq 2$ の場合に証明する．$X = \mathbb{P}(\mathcal{F})$ とし，$\pi\colon X \to S$ を自然な全射とする．X は 3 次元非特異射影代数多様体である．可逆層 $\mathcal{O}_X(1)$ は，ある X 上の因子 H により，$\mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_X(H)$ と表せる．また命題 6.10.1b より，全射 $\pi^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(H)$ が存在する．仮定から，$H^0\big(S^n(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D)\big) \neq 0$ である．命題 7.10.13 より，$H^0\big(S, \pi^*(S^n(\mathcal{F}))\big) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(nH))$ であるので，

$$0 \neq H^0\big(S, S^n(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S(-D)\big) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(nH - \pi^*D))$$

が成り立つ．よって，$G \in |nH - \pi^*D|$ が存在する．

$X_0 = X$, $S_0 = S$, $G_0 = G$, $\pi_0 = \pi$ とし，G_0' を G_0 のひとつの既約成分で，$\pi_0(G_0') = S_0$ となるものとする．S_1 を G_0' の正規化とし，$S_1 \to G_0' \subset X \xrightarrow{\pi} S$ の合成写像を $p_1\colon S_1 \to S_0$ とする．$X_1 = \mathbb{P}(p_1^*\mathcal{F})$ とし，自然な全射を $\pi_1\colon X_1 \to S_1$ とする．全射 $g_1\colon X_1 \longrightarrow X_0$ で，$\pi \circ g_1 = p_1 \circ \pi_1$ を満たすものが自然に存在する．また，全射 $g_1^*\pi^*\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X_1}(g_1^*H)$ が存在する．

X_1 は $X \times_S S_1$ の既約成分とも考えられるので，切断 $\rho_1\colon S_1 \to X_1$ が存在し，$g_1(\rho_1(S_1)) = G_0' \subset X_0$ を満たす．$\rho_1(S_1) \subset g_1^{-1}(G_0')$ より，$g_1^*G \geqq \rho_1(S_1)$ である．$G_1 \in \big|g_1^*G - \rho_1(S_1)\big|$ をとる．π_1 の一般ファイバーを $F_1 \cong \mathbb{P}^1$ とすると，$\mathcal{O}_{F_1}(g_1^*G) \cong \mathcal{O}_{F_1}(ng_1^*H - g_1^*\pi^*D) \cong \mathcal{O}_{F_1}(ng_1^*H) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ であるので，$\mathcal{O}_{F_1}(G_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-1)$ である．

再び，$\pi_1(G_1') = S_1$ を満たす G_1 の既約成分 G_1' をとり，S_2 を G_1' の正規化とし，$p_2\colon S_2 \to S_1$, $X_2 = \mathbb{P}(p_2^*(p_1^*\mathcal{F}))$, $g_2\colon X_2 \longrightarrow X_1$ を上と同様に構成する．ある切断 $\rho_2\colon S_2 \to X_2$ が存在し，$g_2(\rho_2(S_2)) = G_1' \subset X_1$ を満たす．したがって，$G_2 \in \big|g_2^*G_1 - \rho_2(S_2)\big|$ が存在し，π_2 の一般ファイバーを $F_2 \cong \mathbb{P}^1$ とすると，$\mathcal{O}_{F_2}(G_2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n-2)$ である．

この操作を繰り返し，$\pi_n\colon X_n \to S_n$ を構成する．$g_0 := g_1 \circ \cdots \circ g_n\colon X_n \longrightarrow X$, $p_0 := p_1 \circ \cdots \circ p_n\colon S_n \longrightarrow S$ とするとき，$X_n = \mathbb{P}(p_0^*\mathcal{F})$ である．また，切断 $\rho_n\colon S_n \to X_n$ は $g_n(\rho_n(S_n)) = G_{n-1}' \subset X_{n-1}$ を満たすので，$G_n \in \big|g_n^*G_{n-1} - \rho_n(S_n)\big|$ が存在する．π_n の一般ファイバーを $F_n \cong \mathbb{P}^1$ とすると，$\mathcal{O}_{F_n}(G_n) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ である．よって，ある S_n 上の因子 $\Gamma_n \geqq 0$ が存在し $G_n = \pi_n^*\Gamma_n$ と書ける．$E_i' :=$

$(g_{i+1}\circ\cdots\circ g_n)^{-1}(\rho_i(S_i))$ とおくとき，E'_i は $\rho_i(S_i)$ の X_n への強変換と一致し，$G_n\sim g_n^*G_{n-1}-\rho_n(S_n)=g_n^*G_{n-1}-E'_n\sim\cdots\sim g_0^*G-(E'_1+\cdots+E'_n)$ が成り立つ．

最後に，正規曲面 S_n の最小特異点解消を $\tilde{p}\colon\tilde{S}\to S_n$ とし，$p=p_0\circ\tilde{p}\colon\tilde{S}\longrightarrow S$ とする．また，$\tilde{X}=\mathbb{P}(p^*\mathcal{F})$ とし，$\tilde{\pi}\colon\tilde{X}\to\tilde{S}$ を自然な全射とする．$\tilde{g}\colon\tilde{X}\longrightarrow X_n$ を自然に構成し，$g=g_0\circ\tilde{g}\colon\tilde{X}\longrightarrow X$ とおく．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & X_n & \xrightarrow{g_n} & \cdots & \xrightarrow{g_3} & X_2 & \xrightarrow{g_2} & X_1 & \xrightarrow{g_1} & X_0=\mathbb{P}(\mathcal{F}) \\
{\scriptstyle\tilde{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\
\tilde{S} & \xrightarrow{\tilde{p}} & S_n & \xrightarrow{p_n} & \cdots & \xrightarrow{p_3} & S_2 & \xrightarrow{p_2} & S_1 & \xrightarrow{p_1} & S_0
\end{array}$$

$\mathit{\Gamma}=\tilde{p}^*\mathit{\Gamma}_n\geqq 0$ とし，$\rho_i(S_i)\subset X_i$ の $\tilde{X}$ への強変換を $E_i\subset\tilde{X}$ とすれば，E_i は正規曲面で，因子として $g^*G=E_1+\cdots+E_n+\tilde{\pi}^*\mathit{\Gamma}$ である．$\tilde{\pi}|_{E_i}\colon E_i\to\tilde{S}$ は双有理正則写像なので，$\tilde{\pi}\colon\tilde{X}\to\tilde{S}$ の一般ファイバー $F\cong\mathbb{P}^1$ に対し，$\mathcal{O}_F(E_i)\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ となる．

$\tilde{H}=g^*H$ とおくと，全射 $\tilde{\pi}^*(p^*\mathcal{F})\twoheadrightarrow\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H})$ が存在する．$\tilde{D}_i=\tilde{H}-E_i$ (これは，$\geqq 0$ とは限らない) とおくと，$g^*(\pi^*D)=\tilde{D}_1+\cdots+\tilde{D}_n-\tilde{\pi}^*\mathit{\Gamma}$ である．$E_i\in|\tilde{H}-\tilde{D}_i|$ だから，$H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H}-\tilde{D}_i))\neq 0$ である．$\mathcal{O}_F(\tilde{D}_i)=\mathcal{O}_F$ だから，系 6.9.11(2) より，$\tilde{\pi}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D}_i)$ は $\tilde{S}$ 上の可逆層で，$\tilde{\pi}^*D_i\sim\tilde{D}_i$ を満たす $\tilde{S}$ 上の因子 D_i が存在する．$p^*D=D_1+\cdots+D_n-\mathit{\Gamma}$ である．また，$H^0(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H}-\tilde{D}_i))\neq 0$ で，全射 $\tilde{\pi}^*p^*\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-D_i)\big)\longrightarrow\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H}-\tilde{D}_i))$ から誘導される写像

$$H^0\big(p^*\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-D_i)\big)\longrightarrow H^0(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H}-\tilde{D}_i))$$

は，$\mathcal{F}\cong\pi_*\mathcal{O}_X(H)$ よりゼロ写像ではないから，$H^0\big(p^*\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{O}_{\tilde{S}}(-D_i)\big)\neq 0$ である．$d=\deg p=[\mathrm{Rat}(\tilde{S}):\mathrm{Rat}(S)]$ とおくと，$c_2(p^*\mathcal{F})=d\cdot c_2(\mathcal{F})$ である．$c_1(p^*\mathcal{F})$ はネフなので，$n=1$ の場合の結果から，

$$(c_1(p^*\mathcal{F})\cdot D_i)_{\tilde{S}}\leqq c_2(p^*\mathcal{F})$$

である．これが，各 i について成立するので，

$$\begin{aligned}
d\cdot(c_1(\mathcal{F})\cdot D)_S=(c_1(p^*\mathcal{F})\cdot p^*D)_{\tilde{S}}&=\sum_{i=1}^n(c_1(p^*\mathcal{F})\cdot D_i)_{\tilde{S}}-(c_1(p^*\mathcal{F})\cdot\mathit{\Gamma})_{\tilde{S}}\\
&\leqq\sum_{i=1}^n(c_1(p^*\mathcal{F})\cdot D_i)_{\tilde{S}}\leqq n\cdot c_2(p^*\mathcal{F})=nd\cdot c_2(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

となる． □

● 初版第 2 刷以降 p.460. 新装版 p.462. 項見出しの番号.

誤: 7.10.7　宮岡・ヤウの不等式

正: 7.10.8　**宮岡・ヤウの不等式**

参考文献

● 初版 p.464. 5 行目. 文献 [BPV] の 2 行目. (新装版では修正済み)

誤: Compact Comples Surfaces, Second Enlarged Edition", Springer, (2003)

正: Compact Complex Surfaces, Second Enlarged Edition", Springer, (2003)

● 初版 p.465. 最下行 文献 [Cu]. (新装版では修正済み)

誤: S.Cutkovsky

正: S.Cutkosky