平成３０年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２９年８月１７日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある。

A0 は全員が解答すること。

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで 解答すること。
（２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてに コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

１枚に１題だけ を解答すること。

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ A, B を整数の集合 $\mathbb{Z}$ の空でない部分集合とする。$\mathbb{Z}$ 上の関係 $\sim$ を、$m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$m \sim n \iff m, n \in A \quad \text{または} \quad m, n \in B \quad \text{または} \quad m{=}n$$

によって定める。

(1) $\sim$ が同値関係とはならないような A, B の例をあげよ。

(2) $A \cap B = \emptyset$ ならば、$\sim$ は同値関係となることを示せ。

以降、$A \cap B = \emptyset$ であるとし、商集合 $\mathbb{Z}/{\sim}$ への自然な写像を $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/{\sim}$ と書く。

(3) A を正の整数の集合とし、B を負の整数の集合とするとき、$\mathbb{Z}/{\sim}$ の濃度を求めよ。

(4) $\mathbb{Z}/{\sim}$ が有限集合となるための、A, B に関する必要十分条件を求めよ。

(5) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(n) = |n|$ で定める。$f = g \circ \pi$ を満たす写像 $g : \mathbb{Z}/{\sim} \to \mathbb{Z}$ が存在するような、A, B の例をあげよ。

(6) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(n) = |n|$ で定める。$\pi = h \circ f$ を満たす写像 $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/{\sim}$ が存在するならば、$\mathbb{Z}/{\sim}$ は有限集合であることを示せ。

A1 $\mathbb{C}$ を複素数体, $V = M_3(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする 3 次の正方行列全体とし, V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす。$A \in M_3(\mathbb{C})$ に対し, V の線形変換 $f_A : V \to V$ を

$$f_A(X) = AX + XA$$

で定義する。

(1) $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $f_{A-\alpha I} = f_A - 2\alpha$ であることを示せ。ただし，I は単位行列を表し，$f_A - 2\alpha$ における 2α は V の元を 2α 倍する変換を表すものとする。

(2) $A, B \in M_3(\mathbb{C})$ が相似, つまりある正則行列 P で $B = P^{-1}AP$ なるものが存在するならば, ある同型写像 $\varphi : V \to V$ で $f_B = \varphi \circ f_A \circ \varphi^{-1}$ なるものが存在することを示せ。

(3) 次の行列 T のジョルダン標準形 J を求めよ。

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

なお変換行列, 即ち $P^{-1}TP = J$ なる行列 P を求める必要はない。

(4) (3) の行列 T に対し, 線形変換 $f_T : V \to V$ のジョルダン標準形を求めよ。

A2 $a > 0$ に対して

$$f_a(x) = \begin{cases} ax + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

と定める.

(1) $f_a(x)$ の原点での微分係数を求めよ.

(2) $f_a(x)$ は C^1-級でないことを示せ.

(3) $a > 1$ とする. このとき, f_a が狭義単調増大となる 0 を含む開区間が存在することを示せ.

(4) $0 < a \leq 1$ とする. このとき, 0 を含む任意の開区間で f_a は狭義単調増大でないことを示せ.

A3 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(t) = \left(\frac{4t}{3+t^4}, \frac{4t^2}{3+t^4} \right)$$

で定める．f は単射である（証明は不要）．$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ には通常の位相を入れておく．

以下の問いに理由をつけて答えよ．

(1) 開区間 $(1, \infty) \subset \mathbb{R}$ の f による像 $f(1, \infty)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合か，閉集合か，いずれでもないか答えよ．

(2) f による $\mathbb{R}$ 全体の像 $f(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合か，閉集合か，いずれでもないか答えよ．

(3) f は連続写像であるかどうかを答えよ．

(4) f を写像 $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ とみなしたときの逆写像 $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は連続写像であるかを答えよ．ただし $f(\mathbb{R})$ には，$\mathbb{R}^2$ の部分集合としての相対位相を入れる．

A4 m を正の整数とする．X_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ を母数 1 の指数分布に従う独立確率変数とする．(つまり, $x > 0$ に対して $P(X_k \geq x) = e^{-x}$ を満たす.)

(1) $0 < a < b$ とする．$X_1 > a$ であるという条件のもとで $X_1 > b$ となる条件つき確率を求めよ．

(2) $S_m \equiv \sum_{k=1}^{m} X_k$ の確率密度関数を求めよ．

(3) λ を正の実数とする．S_m が λ 以下である確率を求めよ．

A5 次の通り定められる Pascal プログラム (の断片) を読み，以下の問いにそれぞれ答えよ.

```
function f(n: integer; a, b, c: boolean) : boolean;
  var ta, tb, tc : boolean;
  var r : integer;
begin
  ta := false; tb := false; tc := false;
  r := n mod 4; n := n div 4;
  if c and (r = 1) then tc := true;
  if b then begin
    case r of
      1 : tc := true;
      2 : begin tb := true; tc := true; end
    end
  end;
  if a then begin
    case r of
      1 : tc := true;
      2 : begin tc := true; tb := true; end;
      3 : begin ta := true; tb := true; tc := true; end
    end
  end;
  if (n > 0) then f := f(n, ta, tb, tc)
    else if (r = 0) then f := true else f := tc;
end;
```

(1) f(22, false, true, true) の返り値と，f(22, false, false, true) の返り値を求めよ。

(2) x を integer 型の変数とし，その値を $x \geq 0$ とする。このとき，関数 f(x, true, true, true) の返り値が true である x を特徴づけよ。

$\boxed{\textbf{B1}}$ $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を位数が3の有限体とする。$\mathbb{F}_3$ 上の2次の一般線形群 $GL_2(\mathbb{F}_3)$ および特殊線形群 $SL_2(\mathbb{F}_3)$ を次のように定義する。

$$GL_2(\mathbb{F}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{F}_3,\ \det(A) \neq 0 \right\}$$

$$SL_2(\mathbb{F}_3) = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{F}_3) \;\middle|\; \det(A) = 1 \right\}$$

(1) $GL_2(\mathbb{F}_3)$, および $SL_2(\mathbb{F}_3)$ の位数を，それぞれ求めよ。

以下，$G = SL_2(\mathbb{F}_3)$ とし，G の元 S, T, U を

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。

(2) S, T が生成する部分群の位数を求めよ。

(3) G が S, T, U で生成されることを示せ。

(4) G のシロー (Sylow) 3部分群の個数を求めよ。

(5) G の交換子群 $D(G)$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B2}}$ 単位元 1_R をもつ可換環 R において 2 つのイデアル I, J をとり，R-加群としての直和

$$M = (R/I) \oplus (R/J) = \{(a+I, b+J) \mid a, b \in R\}$$

を考える．$f : R/I \to M$, $g : R/J \to M$ および $\varphi : R \to M$ はそれぞれ

$$f(1_R + I) = (1_R + I, J), \quad g(1_R + J) = (I, 1_R + J), \quad \varphi(1_R) = (1_R + I, 1_R + J)$$

なる R-加群の準同型写像とする．さらに，$\sigma : R/I \to R/(I+J)$ と $\tau : R/J \to R/(I+J)$ はそれぞれ

$$\sigma(1_R + I) = 1_R + (I+J), \quad \tau(1_R + J) = -1_R + (I+J)$$

なる R-加群の準同型写像とする．次の問いに答えよ．

(1) $\psi : M \to R/(I+J)$ は $\psi \circ f = \sigma$ かつ $\psi \circ g = \tau$ なる R-加群の準同型写像とする．$a, b \in R$ に対して ψ による $(a+I, b+J) \in M$ の像を求めよ．

(2) 上記の ψ に対して $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$ を示せ．

(3) $a \in R$ とする．$a + (I \cap J)$ と $a + (I+J)$ がそれぞれ $R/(I \cap J)$ と $R/(I+J)$ の非零因子ならば，$a + I$ と $a + J$ はそれぞれ R/I と R/J の非零因子であることを示せ．ただし，可換環 S の元 x が非零因子であるとは，任意の $y \in S$ に対して

$$xy = 0 \ \Rightarrow \ y = 0$$

が成り立つ事を言う．

$\boxed{\textbf{B3}}$ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ で定め, 実数 q に対し $M_q = F^{-1}(q)$ とおく.

(1) M_q が可微分多様体になるための必要十分条件は $q \neq 0$ であることを示せ.

以下 $q \neq 0$ とする.

(2) M_q の点 $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M_q$ における接平面は

$$\{(x,y,z) \mid x_0 x + y_0 y - z_0 z = q\}$$

となることを示せ.

(3) a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とし, $h : M_q \to \mathbb{R}$ を $h(x,y,z) = ax + by + cz$ で定義する. h が臨界点を持つために a, b, c が満たすべき条件を求めよ. ただし, h の臨界点とは, 局所座標を (ξ, η) としたとき $\partial h/\partial \xi = \partial h/\partial \eta = 0$ となる点のことをいう.

(4) $\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \to M_1$ を

$$\varphi(t, \theta) = (\cosh t \cos \theta,\ \cosh t \sin \theta,\ \sinh t)$$

で定める. M_1 上の 2 次微分形式

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx - z dx \wedge dy$$

の φ による引き戻し $\varphi^* \omega$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B4}}$ $\mathbb{R}^3$ 内の位相空間 X, Y を

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1/4\} \cup \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1/2 \leq |z| \leq 1\}$$

と定め,

$$Z = X \cup Y$$

とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 2 次元球面 X の整係数ホモロジー $H_0(X;\mathbb{Z}), H_1(X;\mathbb{Z}), H_2(X;\mathbb{Z})$ を求めよ. 答のみでよい.

(2) Y の整係数ホモロジー $H_0(Y;\mathbb{Z}), H_1(Y;\mathbb{Z}), H_2(Y;\mathbb{Z})$ を求めよ. 答と簡単な理由のみでよい.

(3) Z のゼロ次の整係数ホモロジー $H_0(Z;\mathbb{Z})$ を求めよ. 答と簡単な理由のみでよい.

(4) Z の整係数ホモロジー $H_1(Z;\mathbb{Z}), H_2(Z;\mathbb{Z})$ を求めよ. あるいは実係数ホモロジー $H_1(Z;\mathbb{R}), H_2(Z;\mathbb{R})$ を答えてもよい.

B5 複素平面 $\mathbb{C}$ の原点を中心とする半径 r の開円板を $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ とし, $\mathbb{D}_1$ 上の正則関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$$

と定める. ただし, $f(0) = 0$ となる分枝をとるものとする. また, 複素数 w に対してその虚部を $\operatorname{Im} w$ と書く.

(1) $f(z)$ の $z = 0$ のまわりのベキ級数展開と, その収束半径を求めよ.

(2) $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{C}$ は単射であることを示し, その像 $\Omega = f(\mathbb{D}_1)$ を求めよ.

(3) $0 < r < 1$ のとき, $\displaystyle\sup_{z\in\mathbb{D}_r}|\operatorname{Im} f(z)|$ を求めよ.

(4) $g(z)$ は $\mathbb{D}_1$ 上の正則関数で $g(0) = 0$, $g(\mathbb{D}_1) \subset \Omega$ をみたすものとするとき,

$$|g'(0)| \leq 1$$

であることを示せ.

B6 $y(x)$ を $x \geq 0$ で定義された関数とする.

(1) 微分方程式の初期値問題

$$(y'(x))^2 = \frac{1}{2}y(x)^4 - y(x)^2 + \frac{1}{2}, \quad y(0) = 2$$

の解のうち, 次の性質を満たすものを求めよ.

- 任意の $x \geq 0$ で $y(x) > 1$ と $y'(x) \leq 0$ が成り立つ.

(2) 微分方程式の初期値問題

$$y''(x) = y(x)^3 - y(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

の解を求めよ.

B7 閉区間 $[0,1]$ 上のルベーグ測度を μ とし、二乗可積分な複素数値可測関数のなす空間を H とする。ただし、ほとんど至るところ一致している 2 つの関数は同一視する。H は

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$$

という内積によって、ヒルベルト空間となる。線形作用素 $T : H \to H$ を

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\, d\mu(y)$$

と定める。

(1) T は連続であることを示せ。

(2) $n = 1, 2, \ldots$ と任意の $f \in H$ に対して

$$(T^{n+1}f)(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-y)^n f(y)\, d\mu(y)$$

となることを示せ。

(3) $n = 1, 2, \ldots$ に対して、$\|T^{n+1}\| \leq 1/n!$ を示せ。

(4) T は 0 でない固有値を持たないことを示せ。

(5) T の共役作用素を T^* とするとき

$$(Tf + T^*f)(x) = \int_0^1 f(y)\, d\mu(y)$$

となることを示せ。

$\boxed{\textbf{B8}}$ $X_j,\ j \in \{1, 2, \ldots\}$ を母数 p のベルヌーイ分布に従う独立な確率変数列とする. (つまり，各 j に対して $P(X_j = 1) = p,\ P(X_j = 0) = 1 - p\ (p \in (0, 1))$ を満たす.) また $m \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して $Y_m^+,\ Y_m^-,\ Z_m$ を

$$Y_m^+ = \sum_{j=1}^{m} X_j,\ Y_m^- = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} X_j,\ Z_m = \min\{n \mid Y_n^+ \geq m\}$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) Y_m^+ と Y_m^- の平均, 分散をそれぞれ求めよ.

(2) $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して共分散 $\mathrm{Cov}(Y_m^+, Y_n^-)$ を求めよ.

(3) $k \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して $P(Z_1 = k) = (1 - p)^{k-1} p$ となることを示せ.

(4) $k, m \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して $P(Z_m = k)$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B9}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) (X, Y) を連続型確率ベクトルとして，$\mathbb{E}[X]$ を X の期待値，$\mathbb{E}[X|Y]$ を Y を条件とする X の条件付き期待値とする. このとき

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|Y]\right] = \mathbb{E}[X]$$

を示せ.

(2) S, T を連続型確率変数として，$U = \mathbb{E}[T|S]$ とする. 実数 θ は未知のパラメータで，推定量 W の平均 2 乗誤差を $\mathrm{MSE}(W) = \mathbb{E}[(W - \theta)^2]$ で定める.

(i) $\mathrm{MSE}(U) \leq \mathrm{MSE}(T)$ を示せ.

(ii) $L(\cdot)$ を θ の任意の凸損失関数として，$\mathbb{E}[L(U)] \leq \mathbb{E}[L(T)]$ を示せ.

B10 等号つきの一階古典述語論理を考える. $\models \varphi$ は論理式 φ が論理的に正しい (logically valid) ことを表す.

(1) R と Q をそれぞれ 2 変数と 1 変数の関係記号（述語記号）とする. 論理式

$$\varphi \equiv (\exists x \forall y\, R(x,y) \to \forall z\, Q(z))$$

と論理的に同値な冠頭標準形 (prenex normal form) の論理式 θ をひとつ求めよ. すなわち θ は $\models \varphi \leftrightarrow \theta$ となっていて, 量化記号 (quantifier) $Q_i = \exists, \forall$ と量化記号の無い論理式 θ_0 により $\theta \equiv (Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, \theta_0)\,(n = 0, 1, \ldots)$ となっている.

(2) 量化記号の無い論理式 $\varphi(x,y)$ に対して

$$\models \exists x \forall y \varphi(x,y) \Longleftrightarrow \models \exists x \theta(x)$$

となる量化記号の無い論理式 $\theta(x)$ を求めよ.

(3) 以下では $\mathcal{L}$ を 2 変数の関数記号をひとつは含む可算言語とする. 言語 $\mathcal{L}$ の論理式 φ に量化記号の無い論理式 $F(\varphi)$ を対応させる写像 F は, 任意の論理式 φ について

$$\models \varphi \Longleftrightarrow \models F(\varphi)$$

を充たすとする. このような写像 F は計算可能ではないことを示せ. なお, 必要ならチャーチの定理（上記のような $\mathcal{L}$-論理式の論理的な正しさを判定する問題は決定不可能）を用いてよい.

B11 二元体 $\mathbb{F}_2$ 上の多項式環 $\mathbb{F}_2[X]$ の部分集合として，符号長 15 の符号 C を次で定める。

$$C = \{f(X) \in \mathbb{F}_2[X] \mid f(\alpha^6) = f(\alpha^7) = 0, \deg f < 15\}$$

ただし，$\deg f$ により多項式 f の次数を表し，α を原始既約多項式 $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ の根とする。以下の問いに答えよ。

(1) C は $\mathbb{F}_2$ 上の線形符号であることを示せ。

(2) C の最小距離は 5 以上であることを示せ。ただし C の元 $f(X) = \sum_{0 \le i \le 14} f_i X^i$, $g(X) = \sum_{0 \le i \le 14} g_i X^i$ 間の距離は

$$\mathrm{d}(f(X), g(X)) = \#\{0 \le i \le 14 \mid f_i \ne g_i\}$$

とする。

(3) C は $[15, 7]$ 符号であること，つまり情報数 7 であることを示せ。

B12 次の Scheme のプログラムについて、以下の問いに答えよ。

```scheme
(define (concat ll)
  (if (null? ll) '()
      (append (car ll) (concat (cdr ll)))))

(define (substr s l h) (list s l h))
(define (str s) (car s))
(define (low s) (cadr s))
(define (high s) (caddr s))
(define (len s) (- (high s) (low s)))
(define (inclow n s) (substr (str s) (+ (low s) n) (high s)))
(define (inchigh n s) (substr (str s) (low s) (+ (high s) n)))
(define (dechigh n s) (substr (str s) (low s) (- (high s) n)))

(define (output r s) (cons r s))
(define (result o) (car o))
(define (next o) (cdr o))

(define (rfun1 r) 1)
(define (rfun2 r1 r2) (+ r1 r2))

(define (a lit)
  (lambda (s)
    (let ((n (string-length lit)))
      (if (and (<= n (len s))
               (string=? (substring (str s) (low s) (+ (low s) n)) lit))
          (list (output (rfun1 lit) (inclow n s)))
          '()))))

(define (seq p1 p2)
  (lambda (s)
    (let ((f (lambda (rs1)
               (map (lambda (rs2) (output (rfun2 (result rs1) (result rs2))
                                          (next rs2)))
                    (p2 (next rs1))))))
      (concat (map f (p1 s))))))

(define (alt p1 p2)
  (lambda (s) (append (p1 s) (p2 s))))
```

```
(define (pE s)
  ((alt (seq (a "+") (seq pE pE))
        (a "")) s))

(define (run p s)
  (filter (lambda (rs) (= (low (next rs)) (high (next rs))))
          (p (list s 0 (string-length s)))))
```

注: Scheme では、文字列は `"` で囲まれた 0 個以上の文字で表現され、その長さ (すなわち文字の個数) は `string-length` という手続きで得ることができる。また 2 つの文字列が同じであるかどうかは `string=?` で判定できる。このプログラムでは、文字列 s の ℓ 番目の文字から $h{-}1$ 番目までの文字からなる部分文字列を `(`$s\ \ell\ h$`)` という形のリストで表現している。(ただし、最初の文字を 0 番目と数える。) そしてこのとき `(substring` $s\ \ell\ h$`)` を評価することによって、その部分文字列を Scheme の文字列として得ることができる。

(1) `((a "1") '("12" 0 2))` の評価結果を記せ。

(2) `((seq (a "1") (a "2")) '("12" 0 2))` の評価結果を記せ。

(3) `(run pE "++")` の評価結果を記せ。

(4) n を非負整数とし、s_n を文字 `'+'` が n 個連続する文字列とする。`(length (run pE` s_n`))` の評価結果を a_n としたとき、a_n を a_i $(0 \leq i \leq n-1)$ を使って表し、その理由を述べよ。