平成２９年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２８年８月１８日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認めらない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認めらない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，
   １枚に１題だけ を解答すること。
   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$

(1) A, B をそれぞれ空でない集合とする．A から B への写像 f が単射であることと，以下の条件が同値であることを示せ．

> 任意の集合 K に対して，K から A への任意の写像 ϕ_1, ϕ_2 が $f \circ \phi_1 = f \circ \phi_2$ を満たせば $\phi_1 = \phi_2$ である．

(2) $\mathbb{N}$ を正整数全体の集合，$A_1, A_2, A_3, \ldots$ を $\mathbb{N}$ の部分集合とする．次にあげる命題が正しければ証明を与え，誤っていれば反例をあげて説明せよ．

> $A_n \cup X \neq \mathbb{N}$ が各 n と任意の有限部分集合 $X \subset \mathbb{N}$ に対して成り立つならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \mathbb{N}$ である．

$\boxed{\textbf{A1}}$　d 次 $(d \geq 2)$ の実正方行列 A はべき零 (つまり, ある正整数 k に対して $A^k = O$) で, $A \neq O$ とする. 線形変換 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式 $p(X)$ が X^d であることを示せ.

(2) A は対角化できないことを示せ.

(3) $a_n = \mathrm{rank}(A^n)$ とおくとき, $d = a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_d = 0$ を示せ.

(4) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ および A のジョルダン標準形を求めよ.

$\boxed{\textbf{A2}}$　$-1 < x < 1$ に対し, 関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{t^4 - 1}$ および関数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ を考える.

(1) $f(x)$ を計算せよ.

(2) $F(x)$ を計算せよ.

(3) $F(x)$ の原点における Taylor 展開およびその収束半径を求めよ.

(4) 領域 $D : x^2 + y^2 < \dfrac{1}{2}$ において, 2 変数の関数 $\varphi(x, y) = f(x^2 + y^2)$ の極値を求めよ.

A3 $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする．$\mathbb{C}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}$ を次で定める:

$$A \in \mathcal{O} \Longleftrightarrow A = \emptyset \text{ または } A \text{ の補集合は有限集合}$$

$\mathbb{C}$ には $\mathcal{O}$ を開集合系とする位相が与えられているものとして，以下の問いに答えよ．

(1) $f(z) = z^2$ で与えられる写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は連続になることを示せ．

(2) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ がコンパクトかどうかを理由とともに答えよ．

(3) $\mathbb{Z}^2 = \left\{ n + m\sqrt{-1} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ が連結かどうかを理由とともに答えよ．

A4 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で与えられる．次の問に答えよ．

(1) 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ が標準正規分布に従うことを証明せよ．

(2) a_1, a_2 を実数とする．確率変数 X_1 と X_2 が独立で，それぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき，$Y = a_1X_1 + a_2X_2$ の確率分布を求めよ．

(3) n を 2 以上の整数とする．確率変数 X_k $(k = 1, \ldots, n)$ が独立で同一の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，$W = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ が従う確率分布を求めよ．

A5 以下の通り定められる Pascal プログラム (の断片) について答えよ．

```
const n = max;
var a : array [1..n] of integer;
    p, c : integer;
function src(t : integer) : boolean;
  var b, e, m : integer;
begin
  if t <= 0 then begin src := false; p := 0; c := 0 end
  else begin
    b := 1; e := n; c := 1;
    while b <= e do begin
      m := (b + e) div 2; c := c + 1;
      if t < a[m] then e := m − 1 else b := m + 1
    end;
    p := e;
    { * }
    src := (t = a[e])
  end
end;
```

(1) 定数 max について $max = 8$ とし，a[1] から a[n] の値をそれぞれ $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ とする．src(10) を実行したときの返り値および実行後の p の値を示せ．

(2) 定数 max，および，a[1] から a[n] の値は (1) と同様とする．このとき，ある整数値 m に対して src(m) を実行するとエラーが起こりうる．この m の値を示せ．

(3) (2) で述べたエラーが発生しないよう，{ ∗ } 以降の行を修正せよ．

(4) 任意の整数 max，t，および $a[1] < a[2] < \cdots < a[n]$ となる任意の配列 a に対して，関数 src(t) を計算した後の c の値は $O(\log max)$ となることを示せ．ただし整数演算においてあふれは起こらないものとする．

$\boxed{\textbf{B1}}$ $G = A_7$（7次交代群）とする．$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$（$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(7) = 1$ をみたす巡回置換）とし，$S = \langle \sigma \rangle$ とおく．さらに，G の部分群 X に対し，

$$N_G(X) = \{\ g \in G \mid gX = Xg\ \}$$
$$C_G(X) = \{\ g \in G \mid gx = xg\ (\forall x \in X)\ \}$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $C_G(S)$ は $N_G(S)$ の正規部分群であることを証明せよ．

(2) $N_G(S)$ の位数を求めよ．

(3) $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma^2$ をみたす $\rho\ (\in G)$ をひとつ求めよ．また，そのような ρ の個数は，$C_G(S)$ の位数に等しいことを示せ．

(4) $\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma^m\ (1 \leqq m \leqq 7)$ をみたす $\rho\ (\in G)$ が存在するような m の値をすべて求めよ．

(5) $N_G(N_G(S)) = N_G(S)$ を証明せよ．

$\boxed{\textbf{B2}}$ 体を $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) K が $\mathbb{Q}$ のガロワ拡大でないことを示せ.

(2) K を含む $\mathbb{Q}$ のガロワ拡大で最小のもの L を求めよ.

(3) ガロワ群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が位数 8 の二面体群と同型であることを示せ.

(4) L の部分体をすべて求めよ.

B3 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1$ で定める．

(1) $f^{-1}(0)$ の各点での f のヤコビ行列 $J(f) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}, \dfrac{\partial f}{\partial w}\right)$ の階数を求めよ．

(2) $M = f^{-1}(0)$ が可微分多様体であることを簡潔に示し，その次元を求めよ．

$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(x, y, z, w) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1,\ x^2 + y^2 - z^2 - w^2\right)$$

で定め，$M = F^{-1}(\mathbf{0})$ とおく．

(3) M の各点での F のヤコビ行列 $J(F)$ の階数を求めよ．

(4) M が可微分多様体であることを示し，その次元を求めよ．

(5) $\varphi : M \to \mathbb{R}$ を $\varphi(x, y, z, w) = x + y + z + w$ で定める．φ の臨界点とそのときの φ の値を求めよ．ただし，臨界点とは，M の局所座標を ξ_i としたとき $\partial\varphi/\partial\xi_i = 0$ $(\forall i)$ となる点のことである．

B4 $\mathbb{R}^3$ 内の図形 A, B, S を

$$A = \left\{(x, 0, 0) \;\middle|\; |x| \leqq 1\right\} \quad B = \left\{(x, y, 0) \;\middle|\; |x| + |y| \leqq 1\right\} \quad S = \left\{(x, y, z) \;\middle|\; |x| + |y| + |z| = 1\right\}$$

によって定め，$X = A \cup S$, $Y = B \cup S$ とおく．

(1) X と Y を図示せよ．

(2) 整数係数ホモロジー群 $H_q(X; \mathbb{Z})$, $H_q(Y; \mathbb{Z})$ $(q = 0, 1, 2)$ を求めよ．

(3) 包含写像 $i : X \to Y$ が誘導する準同型写像 $i_* : H_q(X; \mathbb{Z}) \to H_q(Y; \mathbb{Z})$ の像 $i_*(H_q(X; \mathbb{Z}))$ $(q = 0, 1, 2)$ を求めよ．

B5 以下の条件を満たす $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ をそれぞれの場合について決定せよ.

(1) $|f(z)| \leq |z|$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ.

(2) ある正整数 k と正の定数 M が存在して $|f(z)| \leq M|z|^k$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ.

(3) ある正整数 k と正の定数 M が存在して $|f(z)| \leq M|z|^k$ が $|z| > 1$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して成り立つ.

(4) $f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ かつ任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して $|f'(z)| \leq 2|z|$ が成り立つ.

B6 $f \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1]$ によって閉区間 $[0,1]$ 上の 1 回連続的微分可能な実数値関数を表すものとする (両端点では片側微分係数を用いる).

$$H = \{f \in C^1_{\mathbb{R}}[0,1] : f(0) = 0\}$$

とし, $f, g \in H$ に対し

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

によって内積を定義し, ノルム $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ を考える. このとき

(1) 任意の $f \in H$ と $x \in [0,1]$ に対して

$$|f(x)| \leq \|f\|\sqrt{x}$$

が成立することを示せ.

(2) $\{f_n\}$ が H の Cauchy 列であるとき, 2 乗可積分関数 h が存在して $\{f_n\}$ は, 連続関数

$$g(x) = \int_0^x h(t)dt \qquad (x \in [0,1])$$

に各点収束することを示せ.

B7 $p(x)$, $q(x)$ を開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で連続な実数値関数として，2 階同次線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{E}$$

を考える．(E) の解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対して，そのロンスキアン $W_{(y_1,y_2)}(x)$ は

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

で定義される．

(1) $y_1(x)$, $y_2(x)$ が (E) の線形従属な解であれば，I において恒等的に

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

であることを示せ．

(2) $y_1(x)$, $y_2(x)$ が (E) の線形独立な解であれば，$W_{(y_1,y_2)}(x)$ は I において，常に正であるか常に負であるかのいずれかであることを証明せよ．

(3) $y = y(x)$ は (E) の非自明な解とし，$a, b \in I$ $(a < b)$ は $y(x)$ の隣り合う零点，すなわち

$$y(a) = y(b) = 0 \text{　かつ　} y(x) \neq 0 \ (a < x < b).$$

を満たすものとする．このとき

$$y'(a)y'(b) < 0$$

が成り立つことを証明せよ．

(4) $y_1(x)$, $y_2(x)$ は (E) の線形独立な解とする．このとき，$y_1(x)$ の任意の隣り合う零点の間に，必ず $y_2(x)$ の零点があることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B8}}$ $X_1, X_2, \ldots$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立同分布確率変数列とし, その分布が離散確率密度関数 $p(x)$ $(x \in \mathbb{Z})$ で与えられているものとする. さらに, $p(x) = p(-x)$ $(x \in \mathbb{Z})$ であることを仮定する. 次の問に答えよ.

(1) $X_1 + X_2$ の分布を $p(x)$ $(x \in \mathbb{Z})$ を用いて表せ.

(2) 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$P(X_1 + X_2 = 0) \geq P(X_1 + X_2 = x)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 任意の正整数 n と $x \in \mathbb{Z}$ に対して

$$P\left(\sum_{j=1}^{2n} X_j = 0\right) \geq P\left(\sum_{j=1}^{2n} X_j = x\right)$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\textbf{B9}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を, 平均 μ, 分散 σ^2 をもつ分布 $\mathcal{D}$ に従う互いに独立な確率変数の列とする．ただし，μ は実数, $\sigma^2 > 0$ で，また $n \geq 2$ は自然数である．

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,\ S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

として，以下の問に答えよ．

(1) $\overline{X}$ の原点周りの 2 次のモーメント $E[\overline{X}^2]$ を求めよ．

(2) S^2 は分散 σ^2 の不偏推定量であることを示せ．

(3) $\mathcal{D}$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ のとき，$\overline{X}$ の平均周りの k 次のモーメント $E[(\overline{X} - \mu)^k]$ を求めよ．ただし，k は自然数である．

$\boxed{\textbf{B10}}$ 次の式によってアッカーマン関数 $A : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N}$ (ただし N は 0 以上の整数全体を表す) を定義する．

$$
\begin{aligned}
A(0, y) &= y + 1 \\
A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\
A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y))
\end{aligned}
$$

(1) 以下の関数 $\sigma : \mathsf{N}^3 \to \mathsf{N}$

$$
\sigma(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{if } A(x, y) = z \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

は原始帰納的であることを示せ．ただし A に関する以下の性質は証明なしに使ってよい．

$$
\begin{aligned}
A(x, y) &> x + y \\
A(x, y) &< A(x, y + 1) \\
A(x, y) &< A(x + 1, y)
\end{aligned}
$$

(2) 以下の性質を満たす原始帰納的関数 $B : \mathsf{N} \to \mathsf{N}$ が存在することを示せ．

$$
B(A(x, y)) = p(x', y') \ \text{ ならば } \ A(x, y) = A(x', y')
$$

ただし $p : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N}$ は全単射である原始帰納的関数で，$p_1(p(x, y)) = x$, $p_2(p(x, y)) = y$ を満たす原始帰納的関数 p_1, p_2 が存在するものとする．

$\boxed{\textbf{B11}}$ 相異なる奇素数 p, q に対して $n = pq$ とし，e_1, e_2 を共に $\varphi(n)$ と互いに素な，相異なる素数とする．また，関数 f を $f(x, e) = x^e \bmod n$ で定める．m を n より小さく n と互いに素な自然数とするとき，$n, e_1, e_2, f(m, e_1), f(m, e_2)$ を入力として，m を出力する多項式時間アルゴリズムが存在することを示せ．ただし，φ はオイラー関数とし，また，互いに素な自然数 x, y に対して $xz \equiv 1 \bmod y$ となる自然数 z を計算する関数 I は多項式時間で計算できることを利用してもよい．

B12 以下の Scheme のプログラムについて次の問に答えよ．

```
(define (enumerate-tree tree)
  (cond ((null? tree) '())
        ((not (pair? tree)) (list tree))
        (else (append (enumerate-tree (car tree))
                      (enumerate-tree (cdr tree))))))

(define t0 (list 1 (list 2 (list 3 4) 5)))
```

(1) 式 `(enumerate-tree t0)` を評価して得られる値を書け．理由は述べなくてよい．

(2) 式 `(enumerate-tree t0)` を評価する際に呼び出される手続き `cons` の回数を，以下のそれぞれについて簡潔に理由をつけて述べよ．

  (a) `enumerate-tree` 中で使用されている手続き `list` を経由して `cons` が呼び出される回数

  (b) `enumerate-tree` 中で使用されている手続き `append` を経由して `cons` が呼び出される回数

  なお，手続き `list` の呼び出しでは引数の個数だけ，手続き `append` の呼び出しでは第 1 引数のリストの長さだけ `cons` が呼び出されるものとする．

(3) t を数値と空リストと対 (ペア) から作られるデータ，l を数値を要素とするリストとする．次の性質を全て満たす手続き `prepend-leaves` を定義せよ．

- 式 `(equal? (append (enumerate-tree` t`)` l`) (prepend-leaves` t l`))` を評価した結果が `#t` になる．
- 式 `(prepend-leaves` t `'())` を評価する際に呼び出される手続き `cons` の総回数は，式 `(enumerate-tree` t`)` を評価する際に手続き `list` を経由して手続き `cons` が呼び出される回数に一致する．
- `prepend-leaves` の呼び出しにおいて，`set-car!` や `set-cdr!` のような，対を変更するような手続きは呼び出されない．