平成２８年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２７年８月１９日（水）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認めらない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，
   １枚に１題だけ を解答すること。
   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$

(I) 集合 A, B のいずれか一方のみに属す要素全体の集合を, A と B の対称差といって, $A \triangle B$ で表す. 以下で A, B, C は集合であるとする.

(a) 集合 $(A \cup C) \triangle (B \cup C)$ はつねに集合 $(A \triangle B) \cup C$ の部分集合であることを示せ.

(b) $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C)$ となるための必要十分条件は C が空集合であることを示せ.

(II) 写像 $f : A_1 \to A_2$ を, 集合 A_1 からその真部分集合 $A_2 \subsetneq A_1$ への全単射とし, $a_1 \in A_1$ を $a_1 \notin A_2$ と取る. A_1 の要素の列 $\{a_n\}_n$ を帰納的に $a_{n+1} = f(a_n)\,(n = 1, 2, \ldots)$ で定める. このとき $g(n) = a_n$ により定まる正整数全体の集合 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ から A_1 への写像 $g : \mathbb{Z}^+ \to A_1$ は単射となることを示せ.

A1 $M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素正方行列全体とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し，線形変換 $\theta_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ を $\theta_A(X) = AXA$ と定める．また，J_d を固有値 0 の d 次ジョルダンブロックとする．たとえば $d = 2, 3$ の場合は，それぞれ次のような行列である．

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $A = J_2$ および $A = J_3$ の場合に, $\theta_A(X) = A$ となる X をそれぞれ一つずつ求めよ．

(2) $J = J_3 \in M_3(\mathbb{C})$ とする．

(a) $\operatorname{Ker}\theta_J$, $\operatorname{Ker}(\theta_J)^2$, $\operatorname{Ker}(\theta_J)^3$ の次元を求めよ．

(b) θ_J の最小多項式 $\psi(t)$ および固有多項式 $\varphi(t)$ を求めよ．

(c) θ_J のジョルダン標準形はどんな行列かを答えよ．

(3) 任意の $A \in M_3(\mathbb{C})$ に対し，$\theta_A(X) = A$ なる X が存在することを示せ．

A2 以下の問に答えよ.

(1) α を正の実数とするとき,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha}e^{-t} = 0$$

が成り立つことを示せ.

(2) n を 2 以上の自然数とするとき, 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^n}dx$ の値を求めよ.

(3) n を 2 以上の自然数とするとき, 広義積分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{\log x}{x}\right)^n dx$ の値を求めよ.

A3 $\mathbb{R}^1$ 上の通常の位相を $\mathfrak{O}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^2$ 上の通常の位相を $\mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2}$ とする．また，写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y) := (x+1)^2 + y^2$$

と定める． f によって $(\mathbb{R},\mathfrak{O}_{\mathbb{R}})$ から誘導される $\mathbb{R}^2$ 上の位相を $\mathfrak{O}_f$ と表す．（つまり $\mathfrak{O}_f := \{f^{-1}(O) \mid O\in\mathfrak{O}_{\mathbb{R}}\}$.）

$\mathbb{R}^2$ の部分集合を

$$A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2+y^2=1\},$$
$$B := \{(1/n,y)\in\mathbb{R}^2 \mid n\in\mathbb{N},\ y\in\mathbb{R}\}$$

と定める．以下の問に答えよ.

(1) $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2})$ の部分空間として A は閉集合であることを証明せよ.

(2) $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{O}_{\mathbb{R}^2})$ の部分空間として B は閉集合であるかどうかを答え，その事実を証明せよ.

(3) $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{O}_f)$ の開集合 O で， $B\subset O$ かつ $A\cap O=\emptyset$ となるものをひとつあげよ.

(4) $(\mathbb{R}^2,\mathfrak{O}_f)$ の部分空間として B は連結かどうかを答え，その事実を証明せよ.

A4 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立でパラメータ θ の指数分布に従う確率変数列とする．また

$$Y = \max_{1\le i\le n} X_i,\ Z = \min_{1\le i\le n} X_i$$

とする．パラメータ θ の指数分布の確率密度関数が $\theta e^{-\theta x}$ であることを用いてつぎの問に答えよ.

(1) X_1 の平均と分散を求めよ.

(2) Y と Z の確率密度関数を求めよ.

(3) Y と Z の同時確率密度関数を求めよ.

(4) $n=2$ の場合の Y と Z の共分散を求めよ.

A5 次の Pascal プログラムの断片をよんで下の (1), (2) に答えよ.

```
関数 rel
function rel(a, b: integer): boolean;
begin
   if a<=0 then rel:= true
   else if (b<=0) or ((a mod 2)>(b mod 2)) then rel:= false
   else rel:=rel(a div 2, b div 2);
end;
```

(1) rel(x,y) = rel(y,x) = false となる integer 型の x, y の例をあげよ.

(2) 「rel(x,y) = rel(y,z) = true ならば rel(x,z) = true 」は真か偽か述べ, 証明せよ.

B1 G は群，N, H は G の正規部分群で，$G = NH$, $N \cap H = \{1\}$ を満たしている．G の元 $g = nh$ $(n \in N,\ h \in H)$ に対し，$\pi_1(g) = n$, $\pi_2(g) = h$ によって準同型写像 $\pi_1 \colon G \to N$, $\pi_2 \colon G \to H$ を定める．

(1) K が G の部分群ならば，$K/((K \cap N)(K \cap H)) \cong \pi_1(K)/(K \cap N)$ が成立することを証明せよ．

(2) $N' \lhd N$, $H' \lhd H$ であり，同型写像 $f \colon N/N' \longrightarrow H/H'$ が存在すると仮定する．すると，G のある部分群 K で，$N = \pi_1(K)$, $H = \pi_2(K)$, $N' = K \cap N$, $H' = K \cap H$ を満たすものが存在することを証明せよ．

B2 $\zeta = \exp(2\pi i/8) \in \mathbb{C}$ とおく．また $A = \mathbb{Z}[X]/(X^4+1)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) ζ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は X^4+1 であることを示せ．

(2) $\mathbb{Q}(\zeta)$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大で，そのガロア群は $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ と同型であることを示せ．

(3) $p = 3$ なら A/pA は 2 つの体の直積と同型であることを示せ．

(4) $p = 17$ のとき，環 A/pA の構造を決定せよ．

$\boxed{\textbf{B3}}$ $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ とする．S^2 は $\mathbb{R}^3$ の相対位相により位相空間とみなす.

(1) C^∞ 級アトラス（座標近傍系）を与えることによって S^2 に 2 次元 C^∞ 多様体の構造を入れよ.

以下では (1) により S^2 は 2 次元 C^∞ 多様体とみなす.

(2) 関数 $f : S^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z) = xy$ で定めるとき，f は C^∞ 関数か？理由を付して答えよ.

(3) f の臨界点（微分 $(f_*)_p : T_p(S^2) \to T_{f(p)}(\mathbb{R})$ が零写像となる点 p）を全て求めよ.

(4) $N = \left\{ (x,y,z) \in S^2 \,\middle|\, xy = \dfrac{1}{3} \right\}$ とするとき，N は S^2 の 1 次元 C^∞ 部分多様体か？理由を付して答えよ.

$\boxed{\textbf{B4}}$ 2 つの単体複体

$$K = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, |\mathrm{AB}|, |\mathrm{AC}|, |\mathrm{BC}|, |\mathrm{AD}|, |\mathrm{AE}|, |\mathrm{ED}|\}$$
$$L = \{\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}, |\mathrm{PQ}|, |\mathrm{PR}|, |\mathrm{QR}|, |\mathrm{QS}|, |\mathrm{RS}|\}$$

を考える.

(1) 多面体 $|K|$, $|L|$ を図示せよ.

(2) 1 次元ホモロジー群 $H_1(K)$, $H_1(L)$ を求めよ.

(3) $|K|$ と $|L|$ は同相でないことを示せ.

(4) 誘導準同型 $\varphi_* : H_1(K) \to H_1(L)$ が同型写像となる単体写像 $\varphi : K \to L$ をひとつ与えよ.

B5 $0 < \lambda < 1$ とする.

(1) 次の積分を求めよ.

$$A := \int_{C_R} \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z} dz.$$

ここで, R は正の定数, C_R は複素平面 $\mathbb{C}$ の 4 点 $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$ を頂点とする長方形の周に通常の向きをつけたものとする.

(2) 次の広義積分を求めよ.

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx.$$

(3) 次の広義積分を求めよ.

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{\lambda x}}{1+e^x} dx.$$

B6

(1) $a > 0$ を定数とする. $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-ax}\, dx$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{c \to 0} \int_0^1 \frac{c(\log y)^2}{e^{c(1-y)} - 1}\, dy$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B7}}$ 次の微分方程式:

$$\frac{d}{dt}x(t) = x(t) + f(t), \tag{1}$$
$$x(0) = x_0,$$

を考える. ただし, $f \in C([0,\infty);\mathbb{R})$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ とする. このとき以下を答えよ.

(a) $f(t) = e^{-t}\sin t$ のとき, (1) の解を求めよ.

(b) 初期値 x_0 を

$$x_0 = -\int_0^\infty e^{-s} f(s)\, ds$$

とするとき, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ を示せ.

(c) 初期値 x_0 を

$$x_0 > -\int_0^\infty e^{-s} f(s)\, ds$$

とするとき, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ を示せ.

$\boxed{\textbf{B8}}$ X を非負値確率過程とする. $\Gamma(s), s > 0$ をガンマ関数とする;

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

このときつぎの問に答えよ.

(1) $r > 0$ のとき

$$E[X^{-r}] = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty t^{r-1} E[e^{-tX}] dt$$

が（左辺が無限大のとき右辺も無限大という意味も含めて）成り立つことを示せ.

(2) $0 < r < 1$ のとき

$$E[X^r] = \frac{r}{\Gamma(1-r)} \int_0^\infty \frac{1 - E(e^{-tX})}{t^{r+1}} dt$$

が成り立つことを示せ.

(3) n は自然数, $n < r < n+1$ とする. $\phi(t) = E[e^{-tX}]$ が n 階連続微分可能であるとき

$$E[X^r] = \frac{r-n}{\Gamma(n+1-r)} \int_0^\infty (-1)^n \frac{\phi^{(n)}(0) - \phi^{(n)}(t)}{t^{r+1-n}} dt$$

が成り立つことを示せ. ただし $\phi^{(n)}(t) = \dfrac{d^n \phi(t)}{dt^n}$ とする.

$\boxed{\textbf{B9}}$ n を正の整数とし, a を実数とする. 確率変数の列 $\Theta, X_1, \cdots, X_n$ を考える. $\Theta = \theta$ を与えたとき, $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で, 正規分布 $N(\theta, 1)$ に従うとする. つぎの問に答えよ.

(1) $Y = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ とする. $\Theta = \theta$ を与えたときの, Y の確率密度関数 $f(y|\theta)$ を求めよ.

(2) Θ の（事前）確率密度関数を $p(\theta)$ とし, Y の（周辺）確率密度関数を $f(y)$ とする. $Y = y$ を与えたときの Θ の条件付き確率密度関数を $p(\theta|y)$ とすると,

$$p(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\,p(\theta)}{f(y)}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 確率変数 Θ が正規分布 $N(a, 1)$ に従うとき, $Y = y$ を与えたときの Θ の条件付き確率密度関数 $p(\theta|y)$ を求めよ.

(4) 確率変数 Θ の確率密度関数 $p(\theta)$ が

$$p(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left\{-\frac{(\theta - a)^2}{2}\right\} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \exp\left\{-\frac{(\theta + a)^2}{2}\right\}$$

のとき, $Y = y$ を与えたときの Θ の条件付き確率密度関数 $p(\theta|y)$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B10}}$ 自然数上の 1 変数部分関数 f, g について, f の定義域を $dom(f)$ で表す. また $f(n) \simeq g(n)$ は,「$n \in dom(f) \cap dom(g)$ かつ $f(n) = g(n)$, または $n \notin dom(f) \cup dom(g)$」を意味するとする.

自然数 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 上の 1 変数計算可能（部分）関数を重複を許してすべて並べた列 $\{\varphi_e : e \in \mathbb{N}\}$ が, 以下の二条件をみたすとする.

- 関数 $f(n) \simeq \varphi_n(n)$ は計算可能である.
- 自然数上の 2 変数計算可能関数 $g(n, m)$ に対し, $dom(S) = \mathbb{N}$ かつ 任意の $m \in \mathbb{N}$ について $\varphi_{S(n)}(m) \simeq g(n, m)$ となる 1 変数計算可能関数 $S(n)$ が存在する.

このとき以下の問に答えよ.

(1) 集合 $D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin dom(\varphi_n)\}$ に対し, $D = dom(\varphi_e)$ となる自然数 e は存在しないことを示せ.

(2) 集合 $A = \{m \in \mathbb{N} : 0 \notin dom(\varphi_m)\}$ に対し, $A = dom(\varphi_e)$ となる自然数 e は存在しないことを示せ.

B11 以下の Scheme の手続き (関数と呼ぶこともある) を定義せよ.

(1) リストを引数にとり, その長さを返す手続き `length` を定義せよ.

例: `(length '())`
$\Rightarrow$ `0`
`(length '(3 1 4 1))`
$\Rightarrow$ `4`

(2) 整数値 x と, 整数値を要素とするリスト l を引数にとり, l 中に整数値 x が含まれていなければ`#f` を, 含まれていれば l 中で最初に現れた x から始まる部分リストを返す手続き `mem=`を定義せよ.

例: `(mem= 5 '(3 1 4 1))`
$\Rightarrow$ `#f`
`(mem= 1 '(3 1 4 1))`
$\Rightarrow$ `(1 4 1)`

(3) f を整数値を引数にとり整数値を返す手続きとし, x を整数値, n を非負整数値とする. また, x に f を i 回適用して得られる整数値を $f^i(x)$ と書くことにする. f, x, n を引数にとり, $f^i(x) = f^j(x)\,(0 \leq i < j \leq n)$ となる i があればそのような最小の i を, 無ければ`#f` を返す手続き `find-loop` を定義せよ. f の評価においては `set!`などの副作用を伴う評価は行われないものとする. 定義中に `length` や `mem=`を用いてよい. また, 補助的な手続きを定義してそれを用いてもよい.

例: `(find-loop (lambda (x) 1) 1 0)`
$\Rightarrow$ `#f`
`(find-loop (lambda (x) 1) 1 1)`
$\Rightarrow$ `0`
`(find-loop (lambda (x) (remainder (* x x) 10)) 2 10)`
$\Rightarrow$ `2`
`(find-loop (lambda (x) (quotient x 2)) 255 8)`
$\Rightarrow$ `#f`
`(find-loop (lambda (x) (quotient x 2)) 255 9)`
$\Rightarrow$ `8`

$\boxed{\textbf{B12}}$ $\mathbb{F}_2$ を二元体とし, 有限体 $\mathbb{F}_{64}$ を $\mathbb{F}_2$ 上の原始既約多項式 X^6+X+1 の根 α を $\mathbb{F}_2$ に添加して得られる体と定める.

集合 C を

$$C := \{a \in \mathbb{F}_{64} \mid f(a) = 0\},$$

と定めたとき, 以下の問に答えよ. ただし

$$f(X) = X^8 + (\alpha^4+\alpha)X^4 + (\alpha^5+\alpha^2+1)X^2 + (\alpha^5+\alpha^3+\alpha^2)X$$

とする.

(1) C が $\mathbb{F}_2$ 上の線形符号であることを示せ.

(2) $\mathbb{F}_{64}$ と 6 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^6$ を次の対応で同一視する：

$$c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_5\alpha^5 \in \mathbb{F}_{64} \leftrightarrow (c_0, c_1, \ldots, c_5) \in \mathbb{F}_2^6.$$

線形符号 C を $\mathbb{F}_2$ 上の $[6, k]$ 符号とかくとき, k を求めよ.

(3) C の生成行列を 1 つ求めよ. ただしそのサイズを k 行 6 列とする.