平成２７年度

千葉大学大学院理学研究科 博士前期課程

学力検査問題

（基盤理学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

平成２６年８月１９日（火）

試験時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある。

   A0 は全員が解答すること。

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで 解答すること。
   （４題以上解答することは認められない。）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで 解答すること。
   （２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は 5 枚あるので，そのすべてに 科目名，コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，
   １枚に１題だけ を解答すること。
   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$ X, Y は集合, $f : X \longrightarrow Y$ は写像とする. A は X の部分集合, B は Y の部分集合とする.

(1) 次の命題 (a),(b),(c),(d) について正しいものには証明を，誤っているものには反例を与えよ.

(a) $f(f^{-1}(B)) = B$.

(b) $f^{-1}(f(A)) = A$.

(c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

(d) $f(A^c) = (f(A))^c$.

ただし, $f^{-1}(B)$ は B の f による逆像, A^c は X における A の補集合, B^c は Y における B の補集合を表すものとする.

(2) f に次のいずれかの条件 (i),(ii) を仮定したとき, 上の (a),(b),(c),(d) の命題が成立するように変化するものがあれば証明を, 成立しないままのものは各仮定を満たす反例を与えよ.

(i) f は単射である.

(ii) f は全射である.

$\boxed{\textbf{A1}}$ n は正整数で A は $n \times (n+1)$ 行列とする．さらに $j = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して A の第 j 列を取り除いて得られる n 次正方行列を A_j とし $d_j = (-1)^{j-1}|A_j|$ とおく．ただし $|A_j|$ は A_j の行列式である．このとき次の問に答えよ．

(1) $\operatorname{rank} A \leqq n-1$ のとき $d_1, d_2, \ldots, d_{n+1}$ を求めよ．

(2) B は次のような $n+1$ 次正方行列とする：

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline & & & \\ & A & & \\ & & & \end{array}\right)$$

このとき B の行列式 $|B|$ を $d_1, d_2, \ldots, d_{n+1}$ を用いて表せ.

(3) $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ が

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすとき，任意の $j = 1, 2, \ldots, n+1$ に対して

$$x_j(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n+1}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1})d_j$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) 関数 $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ をマクローリン展開し, その収束半径を求めよ.

(2) 関数 $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ をマクローリン展開し, その収束半径を求めよ.

(3) 関数 $f(x) = \operatorname{Arcsin} x$ をマクローリン展開し, その収束半径を求めよ.

(4) 等式 $\pi = 3\left\{1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} n!(2n+1)}\right\}$ を示せ．ただし $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$.

A3 $\mathbb{R}^2$ 上の通常の位相を $\mathfrak{O}$ とする．また, 写像 $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$\pi_1(x, y) := x, \qquad \pi_2(x, y) := y$$

で定め, $\mathbb{R}$ の通常の位相の π_1 による誘導位相を $\mathfrak{O}_1$, π_2 による誘導位相を $\mathfrak{O}_2$ と表す．$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$X := \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \frac{1}{x^2 + 1}\right\}$$

を $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{O})$ の部分位相空間とみなしたものを $(X, \mathfrak{O}(X))$ とし, 同様に X を $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{O}_1)$ の部分位相空間とみなしたものを $(X, \mathfrak{O}_1(X))$, $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{O}_2)$ の部分位相空間とみなしたものを $(X, \mathfrak{O}_2(X))$ とする．以下の問に答えよ.

(1) 位相空間 $(X, \mathfrak{O}(X))$ の開集合の例を 3 つあげよ.

(2) 位相空間 $(X, \mathfrak{O}_1(X))$ の開集合の例を 3 つあげよ.

(3) $(X, \mathfrak{O}(X))$, $(X, \mathfrak{O}_1(X))$, $(X, \mathfrak{O}_2(X))$ のうちで連結でないものをすべてあげ, それらが連結でないことを証明せよ.

(4) $(X, \mathfrak{O}(X))$, $(X, \mathfrak{O}_1(X))$, $(X, \mathfrak{O}_2(X))$ のうちでハウスドルフ空間でないものをすべてあげ, それらがハウスドルフ空間でないことを証明せよ.

A4 表の出る確率が p $(0 < p < 1)$ のコインを n 枚同時に投げて表が出た枚数を X とし, 表が出た X 枚のコインをもう一度同時に投げて裏が出た枚数を Y とする．次の問に答えよ.

(1) X と Y の同時確率分布 $P(X = i, Y = j)$ を求めよ.

(2) Y の周辺確率分布が二項分布であることを示せ.

(3) 条件付き期待値 $E(XY \mid X)$ を求めよ.

(4) X と Y の相関係数 $r(X, Y)$ を求めよ.

A5 以下の Pascal プログラムを実行して, 正の整数を入力したとする．このとき下の問に答えよ．

```
program test(input, output);
const MAX = 500;
var a: array[1..MAX] of integer;
    n, i, j: integer;
begin
  readln(n);
  for i := 1 to n do a[i] := 1;
  for i := 2 to n div 2 do
    begin
      j := 2*i;
      while j <= n do begin a[j] := a[j]+i; j := j+i end
    end;
  for i := 1 to n do
    if (i <= a[i]) and (a[i] <= n) then
      if a[a[i]] = i then writeln(i, a[i])
end.
```

(1) 自然数 10 を入力したとき, どのような出力があるか記せ．(答だけでよい．)

(2) 自然数 n(ただし $1 \le n \le 500$) を入力したとき, どのような出力があるのか理由と共に述べよ．

B1 G を 5 次交代群 A_5, P を G のシロー (Sylow) 5-部分群の一つとする．また $N_G(P)$ を P の G における正規化群, つまり

$$N_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$$

とする.

(1) G のシロー 5-部分群 Q で $Q \neq P$ であるものが存在することを示せ.

(2) $N_G(P)$ の G における指数 $|G : N_G(P)|$ の値を求めよ.

(3) 位数が 5 である G の元の個数を求めよ.

(4) 単位元ではない P の元 u, v と G の元 $g \in G$ に対して,

$$v = g^{-1}ug \quad \text{ならば} \quad g \in N_G(P)$$

であることを示せ.

$\boxed{\textbf{B2}}$ R は可換なネータ環（R の任意のイデアルの族は包含関係についての極大元をもつ）とし I は R のイデアルとする．R の元 x に対して $I :_R x = \{ a \in R \mid ax \in I \}$ と定める．次の問に答えよ．

(1) $I :_R x$ は R のイデアルになることを示せ．

(2) n を正整数とする．$I :_R x^n$ と $I :_R x^{n+1}$ の間に包含関係はあるか？

(3) n を十分大きな整数とすると $I :_R x^n = I :_R x^{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(4) $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_r$ と準素分解されているとせよ．任意の $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して

$$P_i = \{ a \in R \mid \text{ある正整数 } m \text{ に対して } a^m \in Q_i \}$$

とおく．$x \in P_1$ かつ $x \notin P_2 \cup \cdots \cup P_r$ のとき，十分大きな正整数 n に対して $I :_R x^n$ の準素分解を与えよ．

注意 R の真のイデアル Q が $a, b \in R$ に対して

$$ab \in Q \text{ かつ } a \notin Q \implies b^m \in Q \text{ なる正整数 } m \text{ が存在する}$$

をみたすとき Q を準素イデアルと言い，与えられたイデアルを有限個の準素イデアルの共通部分として表すことを準素分解と呼ぶ．

$\boxed{\textbf{B3}}$　写像 $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\tilde{f}(x, y, z) := \left(\frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}, \frac{2xy}{1 + z^2}, \frac{2z}{1 + z^2} \right)$$

と定める.

$\mathbb{R}^3$ の C^∞ 部分多様体

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

を考え, 自然な単射を $\iota : S^2 \to \mathbb{R}^3$ と表す.

$\tilde{f}$ の S^2 上への制限は S^2 から S^2 への C^∞ 写像を定める. これを $f : S^2 \to S^2$ と表すことにする.

$U := S^2 \backslash \{(0, 0, 1)\}$ とし, $\phi : U \to \mathbb{R}^2$ を

$$\phi(x, y, z) := \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

と定めると (U, ϕ) は S^2 の局所座標系のひとつをなす. S^2 上の向きとして, この局所座標系が正となるものを入れる.

U の座標を $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ と表すと, 逆写像 ϕ^{-1} は

$$\phi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

となる. $r := \sqrt{u^2 + v^2}$ とし, S^2 上で定義された 2 次微分形式 α で, U 上で

$$g(r) du \wedge dv$$

という形で表されるものを考える. ただし $g(r)$ は r を変数とする関数とする. 以下の問に答えよ.

(1) α の $f : S^2 \to S^2$ による引き戻し $f^*(\alpha)$ は再び S^2 上の 2 次微分形式となる. これを U 上で g を用いて具体的に表せ.

(2) $n = 0, 1, 2, \ldots$ について,

$$I_n := \int_{S^2} (f^*)^n(\alpha)$$

とおく. ただし $(f^*)^0(\alpha) = \alpha$, $(f^*)^1(\alpha) = f^*(\alpha)$, $(f^*)^2(\alpha) = f^*(f^*(\alpha))$ などとする. I_n を I_0 を使って表せ.

(3)

$$g(r) = \frac{1}{(r^2 + 1)^2}$$

のとき, I_n を求めよ.

$\boxed{\textbf{B4}}$ (1) $C_0,\ C_1,\ C_2$ をそれぞれ１つの０単体 σ^0, １つの１単体 σ^1, １つの２単体 σ^2 で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群とし、他の $C_i\ (i \neq 0,1,2)$ をゼロ加群とする。境界作用素 $\partial_i\ :\ C_i \to C_{i-1}\ (i=1,2)$ を図１で指定する。すなわち $\partial_1(\sigma^1)=0,\ \partial_2(\sigma^2)=3\sigma^1$ である。他の $\partial_i : C_i \to C_{i-1}\ (i \neq 1,2)$ はゼロ準同形写像である。これによって $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体

$$C_*\ :\ 0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

を得る。この鎖複体のホモロジー群 $H_i(C_*)\ (i=0,1,2)$ を求めよ。

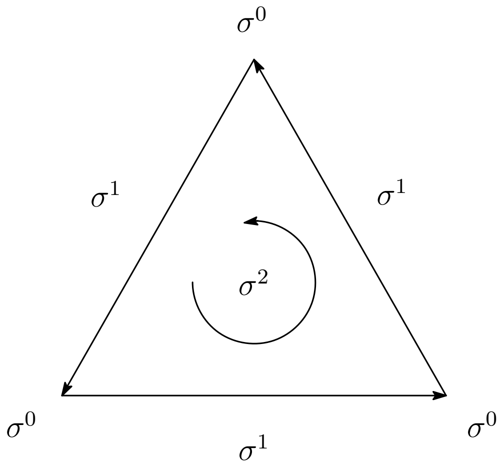

図１

(2) (1) において、境界作用素の指定を図１ではなく、$\partial_2(\sigma^2)$ に現れる σ^1 のひとつを逆向きにした、図２を用いて指定される $\mathbb{Z}$ 加群の鎖複体を C'_* とおくとき、この鎖複体のホモロジー群 $H_i(C'_*)\ (i=0,1,2)$ を求めよ。

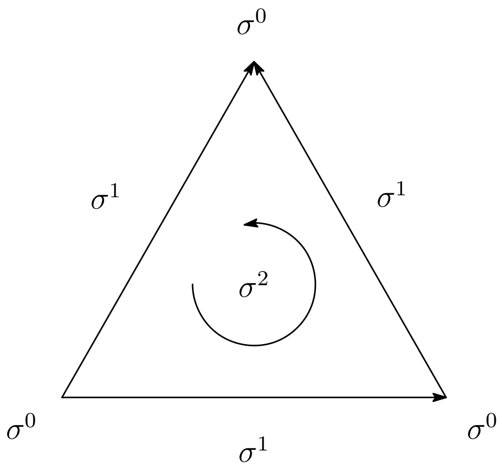

図２

(3) (1) において、各 C_i を $\mathbb{Z}$ 加群ではなく $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 加群として得られる鎖複体を C''_* とおく。とき、この鎖複体のホモロジー群 $H_i(C''_*)\ (i=0,1,2)$ を求めよ。

B5 　複素関数 f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ の近傍で正則であるとする．$|z| < 1$ に対して，次を示せ.

(1)

$$f(z)(1-|z|^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{1-\overline{z}\tau}{\tau - z} f(\tau)d\tau.$$

(2)

$$|f(z)|(1-|z|^2) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|d\theta.$$

B6 　閉区間 $[0,1]$ 上の 1 回連続的微分可能な実数値連続関数の全体を $C^1[0,1]$ と表す. $f \in C^1[a,b]$ に対して

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

と定義すると $\|\cdot\|_\infty$ は $C^1[0,1]$ 上のノルムになる．また $f, g \in C^1[0,1]$ に対して

$$(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

と定義する.

(1) $\|f\|_* = \sqrt{(f,f)}$ も $C^1[0,1]$ 上のノルムであることを示せ.

(2) ノルム空間 $(C^1[0,1], \|\cdot\|_*)$ からノルム空間 $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ への写像

$$(C^1[0,1], \|\cdot\|_*) \ni f \mapsto f \in (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$$

は有界線形作用素であることを示し, その作用素ノルムを求めよ.

(3) n を正の整数とする.

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - n^2(t-\frac{1}{n})^2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

とするとき, ノルム $\|f_n\|_\infty$, $\|f_n\|_*$ を求めよ.

(4) 写像 $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \ni f \mapsto f \in (C^1[0,1], \|\cdot\|_*)$ は連続でないことを示せ.

$\boxed{\textbf{B7}}$ 以下で c は実数とする.

(1) 次の微分方程式を解け:

$$y'' - cy = 0.$$

(2) 次の微分方程式を解け:

$$y'' - cy = e^{\sqrt{c}x}.$$

(3) 次の微分方程式の解の全体は複素ベクトル空間になることを示せ. またその複素ベクトル空間としての次元を求めよ:

$$y''' + (1+x)y'' + xy' + y = 0.$$

$\boxed{\textbf{B8}}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ をボレル可測空間、$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。

(1) X を Ω 上で定義された実数値関数とする。集合族

$$\mathcal{G} = \{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

が Ω 上の σ-加法族であることを示せ。そして、X が 確率変数であるための条件を与えよ。

(2) X と Y が確率変数、a と b が実数であるとき、$aX + bY$ が確率変数であることを示せ。

(3) X が確率変数であるとき

$$\mu(B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

で定義された μ が $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度であることを示せ。

$\boxed{\textbf{B9}}$ n は 4 以上の自然数とする．また，$X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立で，次の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta}, \quad 0 < x < 1$$

を持つ確率変数とする．ただし，$\theta (> 0)$ は未知のパラメータとする．次の問いに答えよ．

(1) $Y = -\dfrac{1}{\theta} \log(X)$ の確率密度関数を求めよ．

(2) 確率変数 Y の期待値および分散を求めよ．

(3) 確率変数 V を次のように定める．

$$V = -\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log(X_i)$$

標本サイズ n が十分大きいとき，V に対して中心極限定理を適用し，θ の 95% 近似信頼区間を求めよ．

$\boxed{\textbf{B10}}$ 次の式によって関数 $f : \mathsf{N}^2 \to \mathsf{N}$ (ただし N は 0 以上の整数全体を表わす) を定義する。

$$\begin{aligned} f(0, y) &= y + 1 \\ f(x+1, 0) &= f(x, 1) \\ f(x+1, y+1) &= f(x, f(x+1, y)) \end{aligned}$$

(1) すべての $x, y \in \mathsf{N}$ に対して $f(x, y)$ の値が唯一つ定義されることを示せ。

(2) $f(2, y) = 2y + 3$ であることを示せ。

(3) $f(3, y)$ を四則と冪 (べき) を使った y の関数として表わせ。

(4) $x + y + 1 \leq f(x, y)$ であることを示せ。

B11 次の Scheme の手続き (関数と呼ぶこともある) について問に答えよ。なお, 整数演算においてあふれは起こらないものとする。

```
(define (bl2n bl)
  (if (null? bl)
      0
      (+ (if (car bl) 1 0)
         (* 2 (bl2n (cdr bl))))))
```

(1) 一般に手続き `bl2n` に真偽値 (すなわち `#t` と `#f`) を要素とするリストを引数として与えたときの値を簡潔に説明せよ。

(2) 次を満たす手続き `n2bl` を作成せよ:

任意の非負整数 n に対し, 式 `(bl2n (n2bl` n`))` を評価した値が n になる。

なお, 整数除算における商と余りの計算には, Scheme の手続き `quotient` と `remainder` をそれぞれ用いよ。どちらも 2 引数の手続きである。

以下の問においては, 上記の手続き `bl2n`, `n2bl`, Scheme の数値および数値に関する演算を一切用いずに答えよ。後の問においてそれより前の問の手続きを用いてよい。また, 補助的な手続きを定義してそれを用いてもよい。

(3) 次を満たす手続き `bli` を作成せよ:

任意の非負整数 n に対し, 式 `(bl2n (bli (n2bl` n`)))` を評価した値が $n+1$ になる。

(4) 次を満たす手続き `bla` を作成せよ:

任意の非負整数 n_1, n_2 に対し, 式 `(bl2n (bla (n2bl` n_1`) (n2bl` n_2`)))` を評価した値が $n_1 + n_2$ になる。

(5) 次を満たす手続き `blm` を作成せよ:

任意の非負整数 n_1, n_2 に対し, 式 `(bl2n (blm (n2bl` n_1`) (n2bl` n_2`)))` を評価した値が $n_1 n_2$ になる。

B12 n, a を自然数 (ただし $a < n$) としたとき，$x^2 \equiv a \pmod{n}$ となる $x \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を，法 n の下での a の平方根という。

(1) p を奇素数とする。法 p の下での 1 の平方根は $1, p-1$ 以外に存在しないことを示せ。

(2) p, q を異なる奇素数とし，$n = pq$ とする。法 n の下では 1 の平方根は 4 つ存在することを示せ。

(3) n は (2) と同様とする。n を入力とし，法 n の下での 1 の平方根 4 つ全てを出力する多項式時間アルゴリズムが存在するならば，n を入力として n の素因数分解 (つまり p, q) を出力する多項式時間アルゴリズムが存在することを示せ。

(2 つの自然数の最大公約数が，ユークリッドのアルゴリズムにより，多項式時間で計算できることを用いてもよい。)