２０２５年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和６年８月１日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１１題ある．

   A0 は全員が解答すること．

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで解答すること．
   （４題以上解答することは認められない.）

   B 問題: B1,...,B11 の中から 任意に１題選んで 解答すること．
   （２題以上解答することは認められない.）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてにコース名と受験番号を記入のこと．

3. 各解答用紙には，解答しようとする問題番号を明記し，

   １枚に１題だけを解答すること．

   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい．

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい．

$\boxed{\textbf{A0}}$ X と Y を空でない集合とし，f を X から Y への写像とする．X の部分集合 A の f による像を $f(A)$ と表し，Y の部分集合 B の f による逆像を $f^{-1}(B)$ と表す．また部分集合 D の補集合を D^c と表す．

以下では $A_1, A_2 \subset X$ および $B_1, B_2 \subset Y$ とし，I_X を X 上の恒等写像とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) $g \circ f = I_X$ となるような $g : Y \to X$ が存在するならば f は単射であることを示せ．

(2) f が単射であるとき，$f(A_1 \cap A_2^c) = f(A_1) \cap \big(f(A_2)\big)^c$ が成り立つことを示せ．

(3) $f^{-1}(B_1 \cap B_2^c) = f^{-1}(B_1) \cap \big(f^{-1}(B_2)\big)^c$ が成り立つことを示せ．

(4) $X = Y = \mathbb{N}$ とする．

(i) 全射であり単射でないような f の例を挙げよ．

(ii) 単射であり全射でないような f の例を挙げよ．

$\boxed{\textbf{A1}}$ V を複素係数の 2 変数多項式で次数 2 以下のもの全体のなすベクトル空間とする．すなわち，V は

$$\mathbf{v}_1 = x^2, \qquad \mathbf{v}_2 = xy, \qquad \mathbf{v}_3 = y^2, \qquad \mathbf{v}_4 = x, \qquad \mathbf{v}_5 = y, \qquad \mathbf{v}_6 = 1$$

を基底とする複素ベクトル空間である．

(1) 3 つのベクトル

$$\mathbf{w}_1 = xy + y, \qquad \mathbf{w}_2 = 2x, \qquad \mathbf{w}_3 = xy + x + y$$

が一次従属であることを示せ．

(2) 線型写像 $f\colon V \to V$ を

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\Big((-4+\sqrt{-12}\,)x^2 - 3xy + 3y^2\Big)\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\Big(3x^2 + 3xy - \sqrt{-12}\,y^2\Big)\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + (2x+y)\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$$

で定める．基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_6$ に関する f の表現行列 A を次の形に表すとき，B と C を求めよ．

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} & & & 0 & 0 & 0 \\ & B & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ただし，f の表現行列 A とは，

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \mathbf{v}_i, \qquad f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{6} \beta_i \mathbf{v}_i$$

という関係にある複素数 α_i, β_i $(i = 1, \ldots, 6)$ に対して

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}$$

を満たす行列のことである．

(3) $P^{-1}CP$ がジョルダン標準形となる正則行列 P を求めよ．

(4) B の固有値をすべて求め，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(5) B は対角化可能か否かを答え，その理由を述べよ．

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) 次の数列の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{n}+1\right)$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{-4^k+k^k}{5^k+(k+1)^k}$

(2) 関数 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を，

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1}-3x_2-1 \\ \sin(x_2)+x_3 \\ x_1-x_2+x_3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

によって与える．また $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，点 $\mathbf{0}$ のある開近傍 U が存在して，写像 $g: U \ni x \mapsto f(x) \in f(U)$ は全単射となることを証明せよ．

さらに，h を g の逆写像 g^{-1} とし，

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{pmatrix}, \quad x \in f(U)$$

によって実数値 3 変数関数 h_k $(k=1,\,2,\,3)$ を与えるとき，偏微分係数

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{0}) \quad と \quad \frac{\partial h_3}{\partial x_3}(\mathbf{0})$$

の値を求めよ．

A3

(1) (X, d_1) を距離空間とする．$d_2\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を $d_2(x,y) = \dfrac{d_1(x,y)}{1 + d_1(x,y)}$ で定める．(X, d_2) は距離空間となることを示せ．

(2) X, d_1, d_2 を (1) のとおりとする．$f\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$, $g\colon (X, d_2) \to (X, d_1)$ を恒等写像，すなわち $f(x) = x$, $g(x) = x \quad (\forall x \in X)$ とする．f, g はそれぞれ連続か．

(3) $(Y, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間 ($\mathcal{O}$ は開集合族) とし，F を Y の閉部分空間とする．F はコンパクトになることを証明せよ．

A4

X と Y は独立同分布の実数値確率変数であり，確率密度関数は $\dfrac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$ で与えられる．また $Z = X + Y + 2$, $W = X - 2Y - 1$ とする．

(1) $|X|$ の期待値を求めよ．

(2) $P(Z < W)$ の小数点以下 3 桁目を四捨五入した近似値を求めよ．ただし $0.34134 < \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx < 0.34135$ を用いてもよい．

(3) W の確率密度関数を求めよ．

(4) Z と W の共分散を求めよ．

$\boxed{\textbf{A5}}$ 擬似コードで書かれた以下の関数について，下記の (1)〜(3) に解答せよ．ただし，

- 擬似コード内のブロックはインデントで表現される
- 長さ n の配列の添字は 0 から $n-1$ までとする
- 「zeros(n)」は大きさが n × n で要素がすべて 0 の 2 次元配列を返す
- 正整数 n に対して「for i in range(n)」は i に 0,1,2,...,n-1 を順次代入してループ本体を実行する

とする．

```
def f(a,n):
    b = zeros(n)
    for i in range(n):
        sum = 0
        for j in range(n):
            sum = sum + a[i][j]
            if i == 0:
                b[i][j] = sum
            else:
                b[i][j] = b[i - 1][j] + sum
    return b
```

(1) a=[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]] としたときの f(a,3) の返り値を求めよ．

n を正整数，a を整数を要素とする大きさ $n \times n$ の配列，b=f(a,n) とする．

(2) 各 $0 \leq k < n$, $0 \leq \ell < n$ について $\mathtt{b}[k][\ell]$ を $(\mathtt{a}[i][j])_{0 \leq i,j < n}$ を用いて表せ．

(3) $0 \leq k < k' < n$ および $0 \leq \ell < \ell' < n$ を満たす整数 k, k', ℓ, ℓ' に対して

$$\sum_{i=k+1}^{k'} \sum_{j=\ell+1}^{\ell'} \mathtt{a}[i][j]$$

を $\mathtt{b}[k][\ell]$, $\mathtt{b}[k][\ell']$, $\mathtt{b}[k'][\ell]$, $\mathtt{b}[k'][\ell']$ のみを用いて表せ．

$\boxed{\textbf{B1}}$ G を群とし,

$$\mathrm{Aut}(G) = \left\{ f\colon G \to G \;\middle|\; f \text{ は群の同型写像} \right\}$$

を G の自己同型写像のなす集合とする．$\mathrm{Aut}(G)$ は，写像の合成を演算と定めることで群になる．

(1) $f \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して逆写像 f^{-1} は群の準同型写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の間の群の同型写像を与えよ．

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が位数 3 以上の巡回群である n をひとつ答え，その n について $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が巡回群であることを示せ．

(4) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が巡回群ではない n をひとつ答え，その n について $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が巡回群ではないことを示せ．

$\boxed{\textbf{B2}}$ $\mathbb{Z}$ を有理整数環，$\mathbb{F}_3$ を位数 3 の有限体とする．$\mathbb{F}_3[t]$ を $\mathbb{F}_3$ 係数の多項式環とし，$\sigma : \mathbb{F}_3[t] \to \mathbb{F}_3[t]$ を t を $t+1$ に写す環同型とする．$\mathbb{F}_3[t]$ の環としての自己同型群の中で σ で生成される部分群を G とする．

(1) $P_0 = (t^2+1)$ を，t^2+1 で生成される $\mathbb{F}_3[t]$ の素イデアルとする．$S = \{\sigma^i(P_0) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ を求めよ．

(2) $\sigma(P) = P$ となる $\mathbb{F}_3[t]$ の極大イデアル P のうち，$\mathbb{F}_3[t]/P$ の位数が最小であるものをひとつ求めよ．

(3) G の作用で固定される元からなる $\mathbb{F}_3[t]$ の部分環 A を求めよ．

(4) (1) の P_0 および (2) で求めた P に対し，$A \cap P_0$, $A \cap P$ を求めよ．

B3 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において，xy 平面上の原点中心の単位円周

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2=1,\, z=0\right\}$$

を直線 $x=2$, $z=0$ を軸として回転させて得られる曲面を Σ, 原点中心で半径 ρ $(\rho>0)$ の球面

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=\rho^2\right\}$$

を S^2_ρ とし，それぞれ外向き法線により向きをつける．

$\mathbb{R}^3$ で定義された2次微分形式 ω および $\mathbb{R}^3$ の原点以外で定義された2次微分形式 η を,

$$\begin{aligned}\omega &= x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy,\\ \eta &= \frac{r^3-1}{r^3}\omega=\frac{r^3-1}{r^3}(x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy)\end{aligned}$$

で定める．ただし $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．

(1) 2次微分形式 ω を球面 S^2_ρ に制限したものを $\omega|_{S^2_\rho}$ とする．
$x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta<2\pi)$ の φ,θ を用いて $\omega|_{S^2_\rho}$ を表せ.

(2) $\displaystyle\int_{S^2_\rho}\omega$ を求めよ.

(3) $d\eta$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{\Sigma}\eta$ を求めよ.

B4 $K:=\{v_1,\,v_2,\,v_3,\,v_4\}$ の元を頂点とする単体の集合を

$$\Sigma_1:=\big\{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\}\big\},$$

$$\Sigma_2:=\big\{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\},\{v_1,v_2,v_3\}\big\},$$

$$\Sigma_3:=\left\{\begin{array}{l}\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\\ \{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_2,v_3\},\{v_2,v_4\},\{v_3,v_4\},\{v_1,v_2,v_3\},\{v_2,v_3,v_4\}\end{array}\right\}$$

とする．(K,Σ_i) $(i=1,2,3)$ は単体的集合を定める．

(1) (K,Σ_1) および (K,Σ_3) の $\mathbb{Z}$-係数ホモロジー群を計算せよ.

(2) (K,Σ_i) $(i=1,2,3)$ の間には，頂点の集合の間の恒等写像と単体の集合の間の包含関係 $\Sigma_1\subset\Sigma_2$, $\Sigma_2\subset\Sigma_3$ から定まる単体的集合の写像 $f\colon(K,\Sigma_1)\to(K,\Sigma_2)$, $g\colon(K,\Sigma_2)\to(K,\Sigma_3)$ が存在する．f,g が $\mathbb{Z}$-係数ホモロジー群に誘導する群準同型写像を f_*, g_* としたとき，$\ker g_*/\operatorname{im} f_*$ を求めよ.

B5 a を正の実数とし，複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) := \frac{e^{iaz}}{z-i}$$

と定める．R_1, R_2 を 1 より大きい実数とし，4 点 R_1, $R_1 + i(R_1 + R_2)$, $-R_2 + i(R_1 + R_2)$, $-R_2$ を頂点とする正方形の周を C とおく．ただし C の向きは反時計回りとする．

(1) 複素積分 $\displaystyle\oint_C f(z)\,dz$ の値を求めよ．

(2) R_1 を始点とし $R_1 + i(R_1 + R_2)$ を終点とする線分を I_1 とする．$R_1 \to \infty$ のとき $\displaystyle\int_{I_1} f(z)\,dz$ は 0 に収束することを示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ は収束することを示し，その値を求めよ．

B6

(1) c を正の実数とする．このとき以下の初期値問題の解を求め，その解の最大の定義域を決定せよ．

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}, \quad y(1) = c$$

(2) (a, b) を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < y < 1\right\}$ 内の点とする．このとき以下の初期値問題の解を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = 2y \log y, \quad y(a) = b$$

(3) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y \log(x^2+y^2)$ について以下の問いに答えよ．ただし関数 $y\log(x^2+y^2)$ は，$(x, y) = (0, 0)$ での値は 0 であるとして，$\mathbb{R}^2$ 上の関数とみなしておく．

(a) (a, b) を $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1,\, x < 0,\, y > 0\right\}$ 内の点とする．$y = \varphi(x)$ を $x = 0$ の近傍で定義された上の微分方程式の解とする．このとき $y = \varphi(x)$ が (a, b) を通るならば

$$\varphi(0) > 0$$

であることを示せ．

(b) 定数関数 $y(x) \equiv 0$ は以下の初期値問題のただひとつの解であることを示せ．

$$\frac{dy}{dx} = y \log(x^2 + y^2), \quad y(0) = 0$$

B7　絶対総和可能な複素数列全体

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \;\middle|\; \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty \right\}$$

に ℓ^1-ノルム

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|,\ x \in \ell^1(\mathbb{N})$$

を与え，Banach 空間とみなす．複素数列 $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ に対して，$\ell^1(\mathbb{N})$ の部分集合

$$E_a = \left\{ x \in \ell^1(\mathbb{N}) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}\,(|x_n| \le |a_n|) \right\} \subset \ell^1(\mathbb{N})$$

を考える．

(1) $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ のとき，E_a の点列 $(x^{(k)})_{k=1}^\infty$, $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n=1}^\infty$ $(k \in \mathbb{N})$ が $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in E_a$ に各点収束するとする．すなわち任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = x_n$ を満たす．このとき $\lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|_1 = 0$ となることを示せ．

(2) $a \in \ell^1(\mathbb{N})$ のとき，E_a はコンパクト集合であることを示せ．

(3) $a \notin \ell^1(\mathbb{N})$ のとき，E_a はコンパクト集合でないことを示せ．

B8

(1) X が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数であることと，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{X < a\} \in \mathcal{F}$ が成立することは同値であることを示せ．

(2) X と Y が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数のとき，$X + Y$ も実数値確率変数であることを示せ．

B9 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ を二元体とし，$\mathbb{F}_2$ 上の 7 次元列ベクトルから成るベクトル空間 $\mathbb{F}_2^7$ の部分集合 C を

$$C := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^7 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

によって定める．各 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{F}_2^7$ に対し，$\mathrm{wt}(\boldsymbol{v})$ で $\boldsymbol{v}$ のハミング重みを表し，$\boldsymbol{v}$ のハミング重みは $\boldsymbol{v}$ の非ゼロ成分の個数を意味する．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a} \in C$ がゼロベクトルでなければ，$\mathrm{wt}(\boldsymbol{a}) \geq 3$ であることを示せ．

(2) ハミング重みが 3 である C の元の個数を答えよ．答えだけでよい．

(3) $E := \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C^2 \;\middle|\; \mathrm{wt}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = 3 \right\}$ で定める．C を頂点集合，E を辺集合としたグラフ (C, E) は連結な無向グラフであることを示せ．

B10 2 つの整数 a, b $(a > b \geqq 0)$ を入力とする，以下のアルゴリズムを考える．

```
       入力：a, b
(L1)     while b > 0:
(L2)       r ← (a を b で割ったときのあまり);
(L3)       a ← b; b ← r
       出力：a.
```

(L1)〜(L3) からなるループが k 回実行された直後の変数 a の値を r_k とし，特に $r_0 = a$ とする．また，k 回目のループにおける (L2) の除算実行時において，そのときの商の値を q_k とする．さらに，入力が (a, b) であるとき，アルゴリズムが停止するまでに必要なループの実行回数を $N = N(a, b)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) r_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$ が単調に減少することを示せ．

(2) $1 \leqq k \leqq N - 1$ となる k に対して $q_k \geqq 1$ が成り立ち，さらに $q_N \geqq 2$ が成り立つことを示せ．

(3) a と b の最大公約数を d とする．このとき，$N(a/d, b/d) = N(a, b)$ となることを示せ．

(4) このアルゴリズムにおけるループ実行回数が $O(\log b)$ となることを示せ．

B11 以下の問いに答えよ．ただしプログラミング言語は OCaml である．小問で定義した手続きや関数をその後の小問で用いてもよい．

(1) 次のプログラム rev0 は何を計算するものであるか簡潔に説明せよ．なお rev0 の型は 'a list -> 'a list である．

```
let rec ins l x =
  match l with
  | [] -> [x]
  | y :: ys -> y :: (ins ys x)
let rec rev0 l =
  match l with
  | [] -> []
  | x :: xs -> ins (rev0 xs) x
```

(2) rev0 と同じ出力を返し，さらに次の条件も満足するプログラム rev1 を与えよ．

条件：rev1 は長さ n のリストが入力されたときの処理中に起こるパターンマッチの回数が $O(n)$．

小問 (3)(4) ではキューの実装を考える．「有効なキュー操作」とは式の列 $C_1; C_2; \ldots; C_n$ であって，(a) 各 C_i は push m (m は整数値) または pop ()，(b) 各 $1 \leq j \leq n$ について $C_1; \ldots; C_j$ 中の push の数は pop の数以上，という 2 条件を満足するものとする．また，n をその長さという．

(3) (1) のプログラムに加えて次のプログラムを考える．長さ n の有効なキュー操作の処理中に起こるパターンマッチの数の最大値を $f(n)$ とする．$f \in O(n^k)$ となる最小の整数 k を理由と共に答えよ．

```
let r : int list ref = ref []
let push x = (r := ins !r x)
let pop () = match !r with x :: xs -> (r := xs; x)
```

(4) 次のプログラム中の $\boxed{}$ を適切に埋め，長さ n の有効なキュー操作の処理中に起こるパターンマッチの数の最大値が $O(n)$ であるようにキューを実装せよ．

```
let r : int list ref = ref []
let s : int list ref = ref []
let push x = (s := x :: !s)
let pop () = match !r with
  | x :: xs -> (r := xs; x)
  | [] -> [          ]
```