

2024年度  
千葉大学大学院融合理工学府 博士前期課程  
学力検査問題  
(数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース)

専 門

令和5年8月3日(木)

検査時間 240分

「注意事項」

1. 問題はA0問題が1題，A問題が5題，B問題が12題ある。  
A0は全員が解答すること。  
A問題: A1,...,A5の中から任意に3題選んで解答すること。  
(4題以上解答することは認められない.)  
B問題: B1,...,B12の中から任意に1題選んで解答すること。  
(2題以上解答することは認められない.)
2. 解答用紙は5枚あるので，そのすべてにコース名と受験番号を記入のこと。
3. 各解答用紙には，解答しようとする問題番号を明記し，  
1枚に1題だけを解答すること。  
解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。
4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。
5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。



**A0**

集合  $A$  から集合  $B$  への全ての写像の集合を  $M(A, B)$  とし、 $\mathbb{N}$  を 1 以上の整数の集合とする。さらに、有限集合  $X$  の元の個数を  $|X|$  で表す。ただし、 $X = \emptyset$  のときは  $|X| = 0$  とする。

- (1)  $m$  と  $n$  が 1 以上の整数で  $|A| = m$  かつ  $|B| = n$  のとき、以下の間に答えよ（理由は記述しなくても良い）。
  - (i)  $|M(A, B)|$  を求めよ。
  - (ii)  $I(A, B) = \{f \in M(A, B) \mid f \text{ は単射}\}$  とする。  $|I(A, B)|$  を求めよ。
- (2)  $|A| = 2$  のとき、 $\mathbb{N}$  から  $M(A, \mathbb{N})$  への全射は存在するか。存在するならば、そのような写像の例を与え、存在しないならば、その証明を述べよ。
- (3)  $|B| = 2$  のとき、 $\mathbb{N}$  から  $M(\mathbb{N}, B)$  への全射は存在するか。存在するならば、そのような写像の例を与え、存在しないならば、その証明を述べよ。

**A1**

$A$  は  $n$  次実正方行列とし、その行列式と転置行列をそれぞれ  $\det A$  と  ${}^tA$  で表す。さらに、 $I$  は  $n$  次単位行列とし、 $\mathbb{C}$  は複素数体とする。

- (1)  $A$  が次の行列のとき、 $\det A$  を求め、さらに  $A$  の固有値を複素数のものも含めて全て求めよ。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (0 < \theta < \pi)$$

- (2) 複素列ベクトル  $v, w \in \mathbb{C}^n$  に対して  $(v, w)$  は標準内積を表すとする。すなわち、

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ のとき } (v, w) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i \quad (\bar{y}_i \text{ は } y_i \text{ の複素共役})$$

である。このとき、 $(Av, w) = (v, Bw)$  が任意の  $v, w \in \mathbb{C}^n$  に対して成り立つような実正方行列  $B$  を  $A$  を用いて表せ。

- (3)  $A$  は直交行列（すなわち  $A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = I$  が成り立つ）とし、 $\lambda \in \mathbb{C}$  は  $A$  の固有値とする。このとき  $\lambda$  の絶対値を求めよ。
- (4)  $A$  が直交行列で  $\det A = -1$  ならば、 $-1$  は  $A$  の固有値であることを証明せよ。

**A2**  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = x^3 + y^3 - 1$$

により定める.

- (1) 条件  $f(x, y) = 1$  の下で  $g(x, y)$  が最大値または最小値をとる点  $(x, y)$  を全て求めよ.
- (2) 条件  $g(x, y) = 0$  の下で  $f(x, y)$  が極大値または極小値をとる点  $(x, y)$  を全て求めよ.
- (3) (2) で求めたすべての点に対し、その点において  $f(x, y)$  が条件  $g(x, y) = 0$  の下で最大値または最小値をとるか答えよ.

**A3** 写像  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x, y) := y, \quad g(x, y) := x^2 + y^2$$

で定める.  $\mathbb{R}$  には通常位相を入れる.  $\mathbb{R}^2$  の位相  $\mathcal{O}$  に対する以下の条件  $(\star)$  を考える.

$(\star)$   $f, g$  がともに連続写像となる.

(1)  $\mathbb{R}$  の部分集合

$$A := \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

は閉集合かどうか, 証明をつけて答えよ.

(2) 条件  $(\star)$  を満たす位相  $\mathcal{O}$  であって、 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$  がハウスドルフ位相空間とならないようなものが存在することを証明せよ.

(3)  $\mathbb{R}^2$  の部分集合

$$B := \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

は条件  $(\star)$  を満たすどのような位相  $\mathcal{O}$  においても閉集合となるかどうか, 証明をつけて答えよ.

**A4**

正の整数  $n$  と  $0 < p < 1$  に対し, 二項分布  $\text{Bi}(n, p)$  に従う確率変数  $X$  の確率関数は

$$P(X = x) = \begin{cases} {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{その他の } x \end{cases}$$

で与えられる.

- (1) 二項分布の再生性について説明し, その証明を与えよ.
- (2) 二項分布  $\text{Bi}(n, p)$  に従う母集団から大きさ  $N$  の標本を抽出したとき, その標本平均の従う確率分布を求めよ. さらにその期待値と分散を求めよ.
- (3)  $m$  を正の実数とする.  $m = np$  を保ったまま  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$  の極限を考えたとき, (2) の標本平均の従う確率分布を求めよ.

**A5** 擬似コードで書かれた以下の関数について、下記の(1)~(3)に解答せよ。ただし、

- 擬似コード内のブロックはインデントで表現される
- 「`[True]*n`」は、`b[0] = True, b[1] = True, ..., b[n-1] = True`となる、 $n$ 個の要素からなる配列である
- 整数  $m, n$  に対して「`m%n`」は、 $m$ を $n$ で割った余りである

とする。

```
def f(n):
    b = [True]*n
    pos = -1
    m = 0
    while m < n-1:
        c = 0
        while c < 2:
            pos = ( pos+1 )%n
            if b[pos]:
                c = c+1
            b[pos] = False
            m = m+1
        i = 0
        while i < n:
            if b[i]:
                return i
            i = i+1
    return -1
```

- (1)  $f(15)$  および  $f(16)$  を求めよ。
- (2)  $n$  を正整数とする。このとき、 $f(2n)$  および  $f(2n+1)$  を  $f(n)$  で表せ。ただし、その導出過程も述べること。
- (3)  $k$  を正整数とするとき、 $f(2^k - 1)$  を求め、証明せよ。

**B1**  $A, B$  は加法群とする.  $f: A \rightarrow A, g: A \rightarrow B, h: B \rightarrow A$  は準同型写像で,

$$\text{Im } f = \text{Ker } g, \quad \text{Im } g = \text{Ker } h, \quad \text{Im } h = \text{Ker } f$$

を満たすとする.  $C := \text{Im } f$  とし,  $\varphi := g \circ h: B \rightarrow B$  と定める.

- (1)  $\text{Im } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi$  であることを示せ.
- (2)  $D := \text{Ker } \varphi / \text{Im } \varphi$  とおく.  $\pi: \text{Ker } \varphi \rightarrow D$  は自然な全射とする. このとき, 準同型写像  $G: C \rightarrow D$  で, 任意の  $a \in A$  に対して  $G(f(a)) = \pi(g(a))$  を満たすものが一意的に存在することを示せ.
- (3) 準同型写像  $H: D \rightarrow C$  で, 任意の  $b \in \text{Ker } \varphi$  に対して  $H(\pi(b)) = h(b)$  を満たすものが一意的に存在することを示せ. ただし,  $\pi$  は (2) で定めた写像である.
- (4)  $F$  は  $f: A \rightarrow A$  の定義域と終域を  $C$  に制限した写像, つまり  $F := f|_C: C \rightarrow C$  とおく. このとき,

$$\text{Im } F = \text{Ker } G, \quad \text{Im } G = \text{Ker } H, \quad \text{Im } H = \text{Ker } F$$

が成り立つことを示せ.

**B2** 単位元を持つ可換環  $R$  上の 1 変数多項式環  $R[x]$  の元

$$f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{Z}, a_i \in R)$$

に対して  $a_0, \dots, a_n$  で生成される  $R$  のイデアルを  $I(f)$  と定める.  $f, g \in R[x]$  に関する以下の問に答えよ.

- (1)  $I(fg) \subseteq I(f) \cdot I(g)$  を示せ.
- (2)  $R$  の素イデアル  $P$  に対して

$$I(fg) \subseteq P \Rightarrow I(f) \subseteq P \text{ または } I(g) \subseteq P$$

が成り立つことを示せ.

- (3)  $(I(f) \cdot I(g))^r \subseteq I(fg)$  となる正整数  $r$  が存在することを示せ.
- (4)  $R$  が体  $k$  上の多項式環  $k[s, t, u, v]$  で  $f = s + tx, g = u + vx$  のとき,

$$(I(f) \cdot I(g))^r \subseteq I(fg)$$

となる正整数  $r$  の最小値を求めよ.

**B3**  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  上の 1 次微分形式

$$\alpha = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx, \quad \beta = \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

を考える.

(1)  $d\beta$  を求めよ.

(2)  $S^1 := \{(x, y) \in M \mid x^2 + y^2 = 1\}$  に向きを入れ,

$$\int_{S^1} (\alpha + \beta)$$

を求めよ.

(3)  $\alpha + \beta$  が  $M$  の 1 次のド・ラームコホモロジー  $H_{DR}^1(M)$  の非自明な元を定めることを示せ. ただし Stokes の定理を使ってもよい.



**B4**  $S := \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$  を円周,  $I := [0, 1]$  を区間とする. 0でない整数  $k$  に対し,  $S \times I$  において  $S \times \{0\}$  を  $S \times \{1\}$  に写像  $(e^{i\theta}, 0) \mapsto (e^{ik\theta}, 1)$  で貼って得られる位相空間を  $\Sigma_k$  とする. すなわち,  $S \times I$  を次で与えられる同値関係  $(e^{i\theta}, t) \sim (e^{i\theta'}, t')$  で割って得られる商位相空間を  $\Sigma_k$  と定める.

$$\begin{aligned} &(t = t' \text{ かつ } e^{i\theta} = e^{i\theta'}), \\ &\text{または } (t = 0 \text{ かつ } t' = 1 \text{ かつ } e^{i\theta} = e^{ik\theta'}), \\ &\text{または } (t' = 0 \text{ かつ } t = 1 \text{ かつ } e^{i\theta'} = e^{ik\theta}). \end{aligned}$$

- (1)  $\Sigma_{-1}$  の  $\mathbb{R}$  係数ホモロジー群を求めよ.
- (2)  $\Sigma_{-1}$  と  $\Sigma_{-2}$  が同相であるかどうかを, 理由とともに述べよ.

**B5** 複素平面  $\mathbb{C}$  の領域  $D$  を

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

と定める.  $p$  を実数とする.  $D$  の点  $z = \rho e^{i\theta}$  ( $\rho > 0, -\pi < \theta < \pi$ ) に対して  $z^p = \rho^p e^{ip\theta}$  と定める. このとき, 複素関数

$$D \ni z \mapsto z^p \in \mathbb{C}$$

は正則となる.

(1)  $0 < r < 1 < R$  となる実数  $r$  と  $R$  に対して,  $\mathbb{C}$  の領域  $D_{r,R}$  を

$$D_{r,R} = \left\{ \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r < \rho < R \text{ かつ } 0 < \theta < \frac{2\pi}{3} \right\}$$

と定める. また,  $D_{r,R}$  の境界を反時計回りに回る単純閉曲線を  $C_{r,R}$  とおく. このとき, 次の積分を求めよ.

$$\oint_{C_{r,R}} \frac{z^p}{1+z^3} dz.$$

(2)  $q > 1$  とするとき, 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^q} dx.$$

**B6** 未知関数  $x(t), y(t)$  に関する次の連立常微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x^2 - y^2) - y, \\ \frac{dy}{dt} = y(1 - x^2 - y^2) + x. \end{cases}$$

また, 点  $P \in \mathbb{R}^2$  に対し,  $(x(0), y(0)) = P$  をみたす解を  $(x_P(t), y_P(t))$  と書く.

(1)  $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  のみたす微分方程式を求めよ.

(2)  $P = (1/\sqrt{2}, 0)$  のとき  $(x_P(t), y_P(t))$  を求めよ.

(3) 一般の  $P \in \mathbb{R}^2$  に対して, 次の集合  $L(P)$  を求めよ. ただし,  $\mathbb{R}^2$  の集合  $A$  に対してその閉包を  $\bar{A}$  で表す.

$$L(P) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{(x_P(t), y_P(t)) \mid t \geq s\}}.$$

**B7** 閉区間  $[0, 1]$  上の実数値連続関数の全体がなす線形空間を  $X$  とする.  $f \in X$  に対して

$$\|f\| := \int_0^1 x|f(x)| dx$$

とおく.

- (1)  $\|\cdot\|$  はノルムであることを示せ.
- (2)  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $g_n(x) := x^{1/n}$  とおく. 関数列  $(g_n)_n$  はノルム空間  $X$  における収束列か. 理由も付けて答えよ.
- (3)  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$$h_n(x) := \begin{cases} n & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1/x & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とおく. 関数列  $(h_n)_n$  はノルム空間  $X$  における収束列か. 理由も付けて答えよ.

- (4) 線形写像  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を,

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(x) \sin \pi x dx \quad \forall f \in X$$

によって定める.  $\varphi$  は有界か. 理由も付けて答えよ.

- (5) 線形写像  $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$  を,

$$\psi(f) := \int_0^1 \sqrt{x}f(x) dx \quad \forall f \in X$$

によって定める.  $\psi$  は有界か. 理由も付けて答えよ.

**B8** 次の問に答えよ.

- (1) 中心極限定理の主張を述べよ.
- (2) 「特性関数の各点収束は分布の法則収束と同値であること」と, 「標準正規分布の特性関数  $\varphi(t)$  が  $\exp(-t^2/2)$  であること」を用いて, 中心極限定理を証明せよ.

**B9** 2変量データ  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  に対し, 線形回帰モデル

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を考える. ここで,

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

であり,  $(x_1, \dots, x_n)$  の標本分散  $s_x^2$  は正とする. また,  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  は独立同一に正規分布  $N(0, \sigma^2)$  にしたがう確率変数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 対数尤度関数  $\ell(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$  を求めよ.
- (2)  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2]^T$  の最尤推定量  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2]^T$  を求め,  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{Y}$  を用いて表せ.
- (3)  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  の分布を求めよ.
- (4)  $x$  を固定したとき,  $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot x$  の分布を求めよ.
- (5) 残差ベクトル  $\mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  について,  $\mathbf{e}$  と  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  の共分散  $Cov(\mathbf{e}, \hat{\boldsymbol{\beta}})$  を求めよ.

**B10** 以下の(1)~(3)に解答せよ.

- (1)  $p$  を奇素数とし,  $a$  を,  $p$  と互いに素となる, 法  $p$  における平方剰余とする. このとき,  $a$  の法  $p$  における平方根が法  $p$  において2つ存在すること, および,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ならば, 平方根の1つが  $x \equiv a^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$  で与えられることを示せ.
- (2)  $p$  と  $q$  を  $p \neq q$  となる奇素数とし,  $n = pq$  とする. また,  $a$  を,  $n$  と互いに素となる, 法  $n$  における平方剰余とする. このとき,  $a$  の法  $n$  における平方根が4つ存在することを示せ.
- (3) 関数  $s$  は, 相異なる奇素数の積  $n$ , および,  $n$  と互いに素で法  $n$  における平方剰余  $a$  を入力として,  $a$  の法  $n$  における平方根  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  を出力するものとする ( $a$  が平方剰余でない場合は  $(0, 0, 0, 0)$  を出力するものとする). このとき, 関数  $s$  を計算する多項式時間アルゴリズム  $A$  が存在するならば, 異なる素数の積  $n$  を素因数分解できる多項式時間アルゴリズム  $B$  が存在することを示せ.

**B11** アルファベット  $\Sigma = \{a, b\}$  上の言語について, 次の問に答えよ. ただし語  $v, w \in \Sigma^*$  に対して, これらの連結を  $vw$ ,  $w$  の文字を逆順にしたものを  $w^{op}$  と書く. また言語  $L \subseteq \Sigma^*$  に対して,  $L^*$  で  $L$  の語を有限個連結して得られる語の集合  $\{w_1 w_2 \dots w_k \mid k \geq 0, w_1, \dots, w_k \in L\}$  を表すとする.

- (1) 言語  $L := \{ww^{op} \mid w \in \Sigma^*\}$  は次のオートマトンで受理可能か. 可能か否かを答え, 証明せよ.
  - (a) 非決定性有限状態オートマトン.
  - (b) 非決定性プッシュダウンオートマトン.
- (2) 言語  $L' := \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m\}^*$  は正規言語か. 正規言語であるか否かを答え, 証明せよ.
- (3) 言語  $L'' := (\{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m\} \cup \{b^n a^m \mid 0 \leq n \leq m\})^*$  は正規言語か. 正規言語であるか否かを答え, 証明せよ.

**B12** OCaml か Scheme のいずれかのプログラミング言語を用いて以下の間に答えよ。小問で定義した手続きや関数をその後の小問で用いてもよい。

- (1) 整数のリスト  $items_1$ ,  $items_2$  をとり,  $items_1$  が  $items_2$  の前半部分となっているとき (すなわち,  $items_2$  が長さ  $n (\geq 0)$  の列  $a_0, \dots, a_{n-1}$  を表すとして,  $items_1$  が列  $a_0, \dots, a_{m-1}$  ( $0 \leq m \leq n$ ) を表すとき) 真を, そうでなければ偽を返す関数または手続き `prefix` を定義せよ.  $items_1$ ,  $items_2$  のいずれについても, 要素を 2 回以上辿らないようにすること.

OCaml での実行例:

- `prefix [3; 1; 4] [3; 1; 4; 1; 5]`  
⇒ `true`
- `prefix [3; 1; 3] [3; 1; 4; 1; 5]`  
⇒ `false`

Scheme での実行例:

- `(prefix '(3 1 4) '(3 1 4 1 5))`  
⇒ `#t`
- `(prefix '(3 1 3) '(3 1 4 1 5))`  
⇒ `#f`

- (2) 1 引数関数または手続き  $f$  とリスト  $items$  を引数にとり,  $items$  が長さ  $n (\geq 0)$  の列  $a_0, \dots, a_{n-1}$  を表しているとき, 列  $(f a_0), \dots, (f a_{n-1})$  を表すリストを返す関数または手続き `map` を作成せよ.  $items$  の要素を 2 回以上辿らないようにすること. 処理系にもともと用意されている `map` を使用してはならない.
- (3) 整数のリスト  $items$  をとり,  $items$  の前半部分となっているようなリストを長さが短い順に全て並べてできるリストを返す手続きまたは関数 `prefixes` を定義せよ.  $items$  の要素を 2 回以上辿らないようにすること.

OCaml での実行例:

- `prefixes [3; 1; 4; 1; 5]`  
⇒ `[[]; [3]; [3; 1]; [3; 1; 4]; [3; 1; 4; 1]; [3; 1; 4; 1; 5]]`

Scheme での実行例:

- `(prefixes '(3 1 4 1 5))`  
⇒ `(() (3) (3 1) (3 1 4) (3 1 4 1) (3 1 4 1 5))`