２０２３年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和４年８月４日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある．

A0 は全員が解答すること．

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで解答すること．
（４題以上解答することは認められない．）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで解答すること．
（２題以上解答することは認められない．）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてにコース名と受験番号を記入のこと．

3. 各解答用紙には，解答しようとする問題番号を明記し，

１枚に１題だけを解答すること．

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい．

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい．

$\boxed{\textbf{A0}}$ $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする。部分集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ について，次の条件 $(*)$ を考える。

$$\text{ある有限集合 } Y \subseteq \mathbb{Z} \text{ があって，} X \cup Y = \mathbb{Z} \qquad (*)$$

部分集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ について, X^c で X の補集合 $\{y \in \mathbb{Z} \mid y \notin X\}$ を表す。以下の命題について, その真偽を述べ, 正しい命題には証明を, 誤っている命題には反例を与えよ。

(1) $X \subseteq \mathbb{Z}$ が条件 $(*)$ を満足するならば, X は無限集合である。

(2) $X \subseteq \mathbb{Z}$ が無限集合ならば, X は条件 $(*)$ を満足する。

(3) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{Z}$ について, X_1 と X_2 が共に条件 $(*)$ を満足するならば, $X_1 \cup X_2$ も条件 $(*)$ を満足する。

(4) $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{Z}$ について, X_1 と X_2 が共に条件 $(*)$ を満足するならば, $X_1 \cap X_2$ も条件 $(*)$ を満足する。

(5) 任意の $X \subseteq \mathbb{Z}$ について, X と X^c が共に条件 $(*)$ を満足することはない。

(6) 任意の $X \subseteq \mathbb{Z}$ について, X と X^c の少なくとも一方が条件 $(*)$ を満足する。

$\boxed{\textbf{A1}}$ 実数係数 n 次正方行列全体を $M_n(\mathbb{R})$ と表し, $I \in M_n(\mathbb{R})$ を単位行列とする。行列 $X \in M_n(\mathbb{R})$ の固有多項式を $P_X(t) = \det(tI - X)$ と定める。行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ とベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ は $\{\mathbf{v}, A\mathbf{v}, \ldots, A^{n-1}\mathbf{v}\}$ が線形独立であるものとする。また, $P_A(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n$ $(a_i \in \mathbb{R})$ と表す。

(1) 行列 A^n を $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ の線形結合で表せ。

(2) 行列 $B \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, 写像 $f_B \colon \mathbb{R}^n \to M_n(\mathbb{R})$ を

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} & B\mathbf{x} & \cdots & B^{n-1}\mathbf{x} \end{bmatrix} = f_B(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{v} & A\mathbf{v} & \cdots & A^{n-1}\mathbf{v} \end{bmatrix}$$

によって定める。 このとき, f_B が線形かつ単射であることを示せ。

(3) 行列 B が $P_B(t) = P_A(t)$ を満たすとし, f_B は (2) のとおりとする。f_B の像 $\mathrm{Im}(f_B)$ の任意の元 X について $XA = BX$ となることを示せ。

(4) $n \geq 2$ のとき, $XA = AX$ を満たすスカラー行列でない $X \in M_n(\mathbb{R})$ が無数に存在することを示せ。

$\boxed{\textbf{A2}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = e^{-x}\sin x$ とする。 f は $[1,\infty)$ 上で一様連続であることを示せ。

(2) 関数 $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ は連続とする。 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が有限値 c に定まるとき, f は $[1,\infty)$ 上で一様連続であることを示せ。

(3) 関数列 $f_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ は $[1,\infty)$ 上で一様連続とする。$n \to \infty$ のとき f_n がある関数 f に $[1,\infty)$ 上で一様収束するとする。このとき, f も $[1,\infty)$ 上で一様連続であることを示せ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1+nx)^2}{e^{nx}}$ が $[1,\infty)$ 上で収束し, 一様連続であることを示せ。

$\boxed{\textbf{A3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) (X,d) を距離空間とし, A をその空でない部分集合とする。X 上の実数値関数 ρ を $\rho(x) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ で定める。このとき, ρ は連続関数になることを示せ。また, この ρ が一様連続になるかどうかを理由をつけて答えよ。

(2) ハウスドルフ空間 X の空でないコンパクト部分集合 A は閉集合であることを示せ。

(3) $\mathbb{R}$ の開区間 $(-\infty,s)$ $(s \in \mathbb{R})$ を U_s とおき, $\mathcal{U} = \{\emptyset,\mathbb{R}\} \cup \{U_s \mid s \in \mathbb{R}\}$ とすると $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ は位相空間となる。

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = x \text{ 以下の最大の整数},$$
$$g(x) = \lceil x \rceil = x \text{ 以上の最小の整数}$$

とおくとき, f, g は位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ からそれ自身への写像として連続か。理由をつけて答えよ。

A4 λ を正の実数とする。確率変数 X の確率密度関数が

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

で与えられるとき, X は指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ に従うという。正の整数 n に対し, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を $\mathrm{Exp}(\lambda)$ に従う独立な確率変数とする。

(1) $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく。Y_n の確率密度関数を求めよ。

(2) 正の実数 μ に対し, 確率変数 W はポアソン分布 $\mathrm{Po}(\mu)$ に従うとする。つまり W の確率分布は

$$P(W = k) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mu} \dfrac{\mu^k}{k!} & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる。W のとる値に応じて確率変数 Y_W を

$$Y_W = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_W & W = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

と定める。条件付き期待値 $E(Y_W \mid W = k)$ を求めよ。また, 期待値 $E(Y_W)$ を求めよ。

A5 次の Pascal のプログラムについて問いに答えよ。

```
program a5(output);
label 9999;
const size = 10;
var queue : record elements : array[1..size] of integer;
                   head, tail, count : integer end;

procedure clearqueue;
begin with queue do begin head := 1;  tail := 1;  count := 0 end end;

procedure enqueue(val : integer);
var i : integer;
begin with queue do begin
        if count >= size then goto 9999;
        if tail > size then begin
           for i := 1 to count do
              elements[i] := elements[head + i - 1];
           head := 1;  tail := 1 + count
        end;
        elements[tail] := val;  tail := tail + 1;  count := count + 1
     end
end;

function dequeue : integer;
begin with queue do begin
        if count <= 0 then goto 9999;
        dequeue := elements[head];  head := head + 1;  count := count - 1
     end
end;

function emptyqueue : boolean;
begin emptyqueue := (queue.count = 0) end;

procedure test;
var i : integer;
begin clearqueue;
     for i := 1 to size       do enqueue(i);
     for i := 1 to size div 2 do write(dequeue);
     for i := 1 to size div 2 do enqueue(size - i);
     for i := 1 to size       do write(dequeue);
     writeln(emptyqueue)
end;

begin test;  9999: end.
```

(1) このプログラムを実行した際の出力結果を記せ。

(2) 手続き enqueue 中の **for** ループは, 配列の最後の要素の次にデータを加えようとするときに, 配列内の有効なデータを前方に移動させるための処理である。しかし, 配列の最後までデータを入れたら次のデータは先頭に入れるようにすることで, この移動を回避できる。この考え方に基づき, clearqueue を 1 回呼び出した後, enqueue, dequeue,

emptyqueue を任意の順序・回数で呼び出すプログラムが上記の enqueue, dequeue を用いたものと関数の返り値の系列が同じになるように enqueue と dequeue の定義を書き換えよ。

B1 群 G に対し, G の自己同型全体が合成を演算としてなす群を $\mathrm{Aut}(G)$ と書く。$g \in G$ に対し, $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$ を $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ で定める。$x, y \in G$ に対し, $\varphi_g(x) = y$ なる $g \in G$ が存在するとき, x と y は共役であるという。ある $g \in G$ に対し φ_g と表せる自己同型を G の内部自己同型と呼ぶ。G の内部自己同型全体のなす $\mathrm{Aut}(G)$ の部分集合を $\mathrm{Inn}(G)$ と書く。

(1) $\mathrm{Inn}(G)$ が $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群であることを示せ。

(2) ψ を G の自己同型とする。G の元 x と y が共役なら $\psi(x)$ と $\psi(y)$ も共役であることを示せ。

(3) S_3 を 3 次対称群とするとき, $\mathrm{Inn}(S_3) = \mathrm{Aut}(S_3)$ であることを示せ。

(4) $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のとき, $\mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Inn}(G)$ はどのような群か。

B2 $\mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 係数 1 変数多項式環, K を標数が p $(p \geq 0)$ の可換体, $f\colon \mathbb{Z}[x] \to K$ を環準同型とする。このとき, 以下の主張を証明せよ。

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbb{Z}[x]$ の素イデアルである。

(2) p が素数ならば, $\mathrm{Ker}(f)$ は p とある $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ によって生成される。

(3) $p = 0$ ならば, $\mathrm{Im}(f)$ は体でない。

(4) f が全射ならば, K は有限体である。

$\boxed{\textbf{B3}}$ $\mathbb{R}^3$ の内積を $\cdot$ で表すものとし,

$$V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid u \cdot u = v \cdot v = 1,\ u \cdot v = 0\}$$

とおく。

(1) V は C^∞ 級多様体になることを示せ。

(2) V の次元を求めよ。

(3) V は向きづけ可能であることを示せ。

(4) V 上には, どの点でも零ベクトルにならない C^∞ 級ベクトル場が存在することを示せ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ K_i を四角形 $\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_i, y_i \leq 1\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とし, その境界を $\partial K_i = \bigcup_{j=1}^{4} \partial_j K_i$ とする。ただし,

$$\begin{aligned}
\partial_1 K_i &= \{(x_i, 0) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}, \\
\partial_2 K_i &= \{(1, y_i) \mid 0 \leq y_i \leq 1\}, \\
\partial_3 K_i &= \{(x_i, 1) \mid 0 \leq x_i \leq 1\}, \\
\partial_4 K_i &= \{(0, y_i) \mid 0 \leq y_i \leq 1\}
\end{aligned}$$

とする。また写像 f_1, f_2, f_3, f_4 を, それぞれ

$$\begin{aligned}
f_1 &\colon \partial_1 K_2 \to \partial_3 K_1;\ (x_2, 0) \mapsto \left(\frac{x_2}{7}, 1\right), \\
f_2 &\colon \partial_3 K_2 \to \partial_3 K_1;\ (x_2, 1) \mapsto \left(\frac{5}{7} - \frac{x_2}{7}, 1\right), \\
f_3 &\colon \partial_1 K_3 \to \partial_3 K_1;\ (x_3, 0) \mapsto \left(\frac{x_3}{7} + \frac{2}{7}, 1\right), \\
f_4 &\colon \partial_3 K_3 \to \partial_3 K_1;\ (x_3, 1) \mapsto \left(\frac{x_3}{7} + \frac{6}{7}, 1\right)
\end{aligned}$$

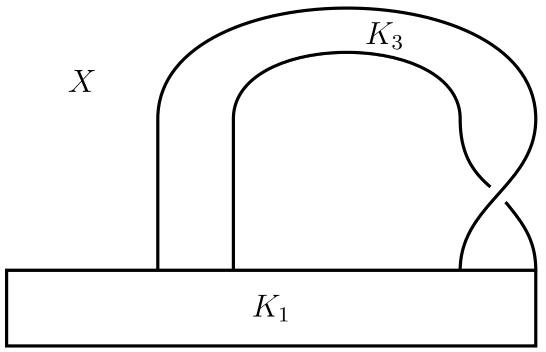
で定める。また位相空間 X を, K_1 と K_3 を f_3 と f_4 で貼り合わせたものとする。つまり,

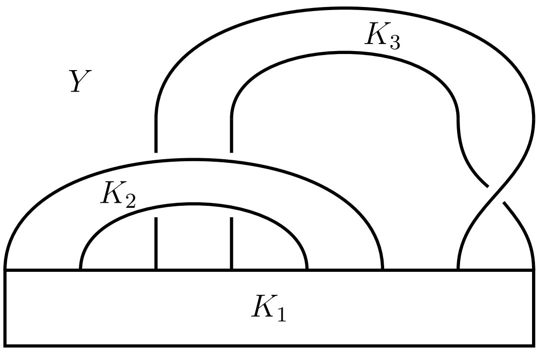
$$\begin{gathered}
X = K_1 \sqcup K_3 / \sim, \\
x \sim f_i(x)\ (x \in \partial_1 K_3 \cup \partial_3 K_3,\ i = 3, 4).
\end{gathered}$$

同様に位相空間 Y を, K_1 と K_2 と K_3 を f_1, f_2, f_3, f_4 で貼り合わせたものとする。つまり,

$$\begin{gathered}
Y = K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3 / \sim, \\
x \sim f_i(x)\ (i = 1, 2, 3, 4).
\end{gathered}$$

なお, 本問において同値関係による商集合の位相は常に商位相とする。





以下の問いに答えよ。

(1) X の $\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

(2) ∂X は S^1 に同相である。勝手な同相写像 $\psi\colon \partial K_4 \to \partial X$ を取り, 位相空間 $\widetilde{X}$ を

$$\widetilde{X} = X \sqcup K_4 / \sim,$$
$$x \sim \psi(x)\ (x \in \partial K_4)$$

と定める。 このとき, $\widetilde{X}$ の $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

(3) Y の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

(4) ∂Y は S^1 に同相である。勝手な同相写像 $\varphi\colon \partial K_4 \to \partial Y$ を取り, 位相空間 $\widetilde{Y}$ を

$$\widetilde{Y} = Y \sqcup K_4 / \sim,$$
$$x \sim \varphi(x)\ (x \in \partial K_4)$$

と定める。 このとき, $\widetilde{Y}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数ホモロジー群を求めよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 次の積分の値を計算せよ。

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$$

(2) 複素関数 $f(z)$ は $|z|<1$ で正則で, $|f(z)|\leq 1$, $f(0)=0$ を満たすとする。

(a) $\dfrac{f(z)}{z}$ は $0<|z|<1$ で正則であり, $z=0$ は除去可能特異点であることを示せ。

(b) $0<r<1$ なる実数に対して, $|z|\leq r$ ならば不等式

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{r}$$

が成り立つことを示せ。

(c) $|z|<1$ で

$$|f(z)| \leq |z|$$

が成立することを示せ。

$\boxed{\textbf{B6}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ で連続な関数を要素とする n 次正方行列 $A(x)$ に対して, n 次正方行列 $Y(x)$ が同次線形常微分方程式系

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A(x)Y(x) \qquad (x \in I)$$

を満たすならば, $Y(x)$ の行列式 $|Y(x)|$ は

$$\frac{d}{dx} |Y(x)| = \mathrm{tr}\, A(x) \cdot |Y(x)| \qquad (x \in I)$$

を満たすことを証明せよ。ただし $\mathrm{tr}\, A(x)$ は行列 $A(x)$ のトレース（対角成分の和）を表す。

(2) $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-2}(x)$ $(n \geq 2)$ はいずれも $0 < x < \infty$ で連続な関数とし, また $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ は定数とする。単独 n 階同次線形常微分方程式

$$y^{(n)}(x) + \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}\right) y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0 \qquad (0 < x < \infty)$$

に対し, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ がこの方程式の n 個の解であるならば, ある定数 c が存在して

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = c\, x^{-\alpha} e^{\beta/x} \qquad (0 < x < \infty)$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間, $f\colon X \to [0, \infty)$ を μ-可積分関数とする。$E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{A}$ が $\mu(E_n) > 0$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ を満たしているとする。以下の問いに答えよ。

(1) $A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq \mu(E_n)^{-\frac{1}{2}}\}\,(n \in \mathbb{N})$ とおくと, $A_n \in \mathcal{A}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0$ を示せ。

$\boxed{\textbf{B8}}$ $X_1,\, X_2,\, \cdots$ は独立同分布な実数値確率変数列で, $E[X_1] = \mu,\ E[X_1^4] < \infty$ をみたすとする。また, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく。

(1) $\mu = 0$ のとき, 任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対して, ある定数 C が存在して, $E[S_n^4] \leq Cn^2$ が成り立つことを示せ。

(2) $\mu = 0$ のとき, 任意の $\epsilon > 0$ および $n = 1, 2, \cdots$ に対して, ある定数 C が存在して, $\displaystyle P\left(\frac{|S_n|}{n} > \epsilon\right) \leq \frac{C}{n^2\epsilon^4}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\dfrac{S_n}{n}$ は μ に概収束することを示せ。

次に, $Y_1,\, Y_2,\, \cdots$ は区間 $(0, 1]$ の一様分布に従う独立な確率変数列とする。区間 $(0, 1]$ を分点 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$ によって m 個の小区間に分割し, 各小区間 $(x_{j-1}, x_j]$ の長さ $x_j - x_{j-1}$ を p_j と書く。$Z_n(j)$ を, $Y_1, \cdots, Y_n$ のうち小区間 $(x_{j-1}, x_j]$ 上に値をとるものの個数を表す確率変数とし, $R_n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{Z_n(j)}$ とする。

(4) $\dfrac{\log R_n}{n}$ はある値に概収束することを示せ。またその値も求めよ。

B9 2 変量データ $(x_1, Y_1), ..., (x_n, Y_n)$ に対し, 線形回帰モデル

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を考える。ここで,

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

であり, $(x_1, ..., x_n)$ の標本分散は正とする。また, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ は独立同一分布の確率変数で, $E[\varepsilon_1] = 0$, $0 < V[\varepsilon_1] = \sigma^2 < \infty$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2]^T$ の最小二乗推定量 $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = [\hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2]^T$ を求め, $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ を用いて表せ。

(2) (1) の $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の不偏推定量であることを示せ。

(3) (1) の $\hat{\beta}_1$ は β_1 の最良線形不偏推定量であることを示せ。

B10 p を素数とし, $p-1$ の素因数への標準分解を $\prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $g \in (\mathbb{Z}_p)^*$ が $(\mathbb{Z}_p)^*$ の生成元であることの必要十分条件が, 任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $g^{\frac{p-1}{p_i}} \not\equiv 1 \mod p$ となることであることを示せ。

(2) 素数 p, $g \in (\mathbb{Z}_p)^*$, および, $p-1$ の素因数分解が与えられたとき, g が $(\mathbb{Z}_p)^*$ の生成元であることが, p のサイズ（二進法表記の長さ）の多項式オーダーの計算時間で判定できることを示せ。

B11 Σ を記号の空でない有限集合とし, $L, L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ を Σ 上の正則言語とする。語 $v, w \in \Sigma^*$ に対して, これらの連結を vw と書く。

(1) L_1 と L_2 の対称差

$$\{w \in \Sigma^* \mid (w \in L_1 \land w \notin L_2) \lor (w \notin L_1 \land w \in L_2)\}$$

が正則言語であることを示せ。

(2) 次の言語が正則であることを示せ。

$$\{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*.\ v \in L_1 \land vw \in L_2\}$$

(3) 次の言語が正則であることを示せ。

$$\{w \in \Sigma^* \mid \exists n \geq 0.\ \exists w_0, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*.\ w = w_0 \ldots w_n \land w_0 v_1 w_1 \ldots v_n w_n \in L\}$$

B12 Scheme か OCaml のいずれかのプログラミング言語を用いて以下の問いに答えよ。ただし,「述語」とは真偽値を返す手続きまたは関数のことである。補助的な手続きや関数を定義してそれを使用しても構わない。また, 小問で定義した手続きや関数をその後の小問で用いてもよい。

(1) 1 引数の述語 p とリスト *items* をとり, *items* が長さ $n\,(\geq 0)$ の列 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ を表すとき, 述語 p を満たす $a_i\,(0 \leq i < n)$ があればそのような i のうち最小のものを, なければ -1 を返す手続きまたは関数 `index` を定義せよ。

Scheme での実行例: `(index odd? '(2 7 1 8 2))` $\Rightarrow$ `1`

OCaml での実行例: `index (fun n -> n mod 2 = 1) [2; 7; 1; 8; 2]` $\Rightarrow$ `1`

(2) 1 引数の述語 p とリスト *items* をとり, *items* が長さ $n\,(\geq 0)$ の列 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ を表すとき, 述語 p を満たす $a_i\,(0 \leq i < n)$ の添字 i 全てを昇順に並べてできるリスト (そのような a_i がなければ空リスト) を返す手続きまたは関数 `indices` を定義せよ。

Scheme での実行例: `(indices odd? '(2 7 1 8 2))` $\Rightarrow$ `(1 2)`

OCaml での実行例: `indices (fun n -> n mod 2 = 1) [2; 7; 1; 8; 2]` $\Rightarrow$ `[1; 2]`

(3) 2 引数の述語 p とリスト *items* をとり, *items* が長さ $n\,(\geq 0)$ の列 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ を表すとき, $0 \leq i < j < n$ を満たす i と j の対 (2 つ組) で, p を a_i と a_j に (この順で) 作用させた結果が真であるようなもの全てを, 辞書式順序で昇順に並べてできるリストを返す手続きまたは関数 `indices2` を定義せよ。

Scheme での実行例: `(indices2 < '(2 7 1 8 2))` $\Rightarrow$ `((0 . 1) (0 . 3) (1 . 3) (2 . 3) (2 . 4))`

OCaml での実行例: `indices2 (<) [2; 7; 1; 8; 2]` $\Rightarrow$ `[(0, 1); (0, 3); (1, 3); (2, 3); (2, 4)]`