２０２２年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和３年８月５日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は A0 問題が１題，A 問題が５題，B 問題が１２題ある．

   A0 は全員が解答すること．

   A 問題: A1,...,A5 の中から 任意に３題選んで解答すること．
   （４題以上解答することは認められない．）

   B 問題: B1,...,B12 の中から 任意に１題選んで解答すること．
   （２題以上解答することは認められない．）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてにコース名と受験番号を記入のこと．

3. 各解答用紙には，解答しようとする問題番号を明記し，

   １枚に１題だけを解答すること．

   解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい．

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい．

$\boxed{\textbf{A0}}$

(I) X と Y を空でない集合とし, f を X から Y への写像とする。X の部分集合 A の f による像を $f(A)$ とし, Y の部分集合 B の f による逆像を $f^{-1}(B)$ とする。即ち

$$f(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

である。次の命題 (a), (b), (c), (d) について正しいものには証明を, 誤っているものには反例を与えよ。

(a) X の任意の部分集合 A_1, A_2 に対して,

$$f^{-1}(f(A_1) \cup f(A_2)) \subset A_1 \cup A_2$$

が成り立つ。

(b) Y の任意の部分集合 B_1, B_2 に対して,

$$f(f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)) \subset B_1 \cap B_2$$

が成り立つ。

(c) X の任意の部分集合 A と, Y の任意の部分集合 B に対して,

$$f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$$

が成り立つ。

(d) X から Y への単射 f が存在するとき, Y から X への全射が存在する。

(II) 空でない集合 X に対し, X の冪集合を $\mathfrak{P}(X)$, X の濃度を $|X|$ で表わす。

(1) X から $\mathfrak{P}(X)$ への単射を一つ構成せよ。

(2) 濃度に関する不等式 $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$ を証明せよ。

$\boxed{\textbf{A1}}$ $V = \mathbb{R}^3$ とし，$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。V は $\mathbb{R}$ に値をとる対称な双線形形式 $(\ ,\ )$ を持つとする。すなわち $(\ ,\ )$ は $v, w \in V$ に対して実数 (v, w) を与え，次を満たすものである。

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と $u, v, w \in V$ に対して

$$(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w),\ (u, \alpha v + \beta w) = \alpha(u, v) + \beta(u, w)$$

- $v, w \in V$ に対して $(v, w) = (w, v)$

実数 $a_{i,j}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ を $a_{i,j} = (v_i, v_j)$ で定義し，3×3 行列 A を $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ で定義する。

V の零ベクトルを $\mathbf{0}$ で表す。

(1) $(\ ,\ )$ は非退化とする。すなわち次が成り立つとする。

- $v \in V$ とする。すべての $w \in V$ に対して $(v, w) = 0$ ならば，$v = \mathbf{0}$ である。

このとき $\det A \neq 0$ を示せ。

(2) $(\ ,\ )$ は正定値とする。すなわち次が成り立つとする。

- すべての $\mathbf{0}$ でない $v \in V$ に対して $(v, v) > 0$ である。

このとき A のすべての固有値は正の実数であることを示せ。

(3) n を整数とし，

$$A = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 \\ -1 & n & -1 \\ 0 & -1 & n \end{pmatrix}$$

の場合を考える。$(\ ,\ )$ が正定値となる最小の整数 n を求めよ。

(4) $(\ ,\ )$ は正定値とする。n を (3) で求めた整数とし，

$$A = \begin{pmatrix} n & -1 & 0 \\ -1 & n & -1 \\ 0 & -1 & n \end{pmatrix}$$

とする。w_1, w_2, w_3 を V の別の基底とし，$b_{i,j} = (w_i, w_j)$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ と定義する。B が対角行列となる w_1, w_2, w_3 を求めよ。

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) $\delta > 0$ とする。実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての $n \geq 1$ について $a_n \neq 0$, $a_{n+1} - a_n \geq \delta$ を満たすとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}$ が収束することを示せ。

(2) 実数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ が絶対収束することを示せ。

(3) 次の級数が収束することを示せ。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(\log n)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)$$

$\boxed{\textbf{A3}}$

(1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし，$\mathcal{O}$ を S の位相（開集合系）とする。位相空間 $(S, \mathcal{O})$ を単に S とかく。$\mathcal{O}$ が $\mathcal{O} \ni \{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$ という条件を満たすときに，必ず以下が成り立つかどうか，それぞれ理由とともに答えよ。

(i) $\{5\}$ は S の開集合である。

(ii) $\{5\}$ は S の閉集合である。

(iii) $\{1, 3\}$ は S の開集合である。

(iv) $\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする。$f \colon S \to \mathbb{R}$ が $f(i) \neq f(j)$ $(i \neq j)$ を満たすならば，f は連続である。

(2) $\mathcal{U} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ とする。$\mathcal{U}$ を含む $\mathbb{R}$ の位相（開集合系）で，包含関係に関して最小となるものを $\widetilde{\mathcal{U}}$ とする。

(i) $\widetilde{\mathcal{U}}$ を求めよ。

(ii) $(0, 1]$, $[0, 1)$ は $\left(\mathbb{R}, \widetilde{\mathcal{U}}\right)$ のコンパクト部分空間になるか。それぞれ理由とともに答えよ。

$\boxed{\textbf{A4}}$ X_1, X_2, X_3 は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う独立な確率変数とする。Y, Z を

$$Y = \min(X_1, X_2, X_3),\ Z = \max(X_1, X_2, X_3)$$

とする。

(1) $X_1 + X_2 - X_3$ の期待値と分散を求めよ。

(2) Y と Z の確率密度関数をそれぞれ求めよ。

(3) $0 < r < s < 1$ を満たす実数 r, s に対して，$r < Y$ かつ $s > Z$ である確率 $P(r < Y, s > Z)$ を求めよ。

(4) Y と Z の共分散を求めよ。

A5 次の Pascal のプログラムを実行して，自然数を入力したとする。

```
program mondai(input, output);
var p: array[1..100] of integer; n, i: integer;

procedure q(i: integer);
  var k, w, j: integer;
  begin
    if i = 0 then
      begin
        for j := 1 to n do write(p[j]:3);
        writeln
      end
    else
      for k := i downto 1 do
        begin
          w := p[i];  p[i] := p[k];  p[k] := w;
          q(i-1);
          w := p[i];  p[i] := p[k];  p[k] := w;
        end
      end
  end;

begin
  readln(n);
  for i := 1 to n do p[i] := i;
  q(n)
end.
```

(1) 自然数 3 を入力したときの出力を記せ。(答だけでよい。)

(2) 自然数 n (ただし $1 \leq n \leq 100$) を入力したとき，どのような出力があるのか理由と共に述べよ。

B1 $G = GL_3(\mathbb{C})$ を，複素数を成分とする可逆な３次正方行列全体のなす群とする。また，ω を１の原始３乗根とする。以下で定める G の部分群 H_1, H_2, H に対して問いに答えよ。

H_1: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ で生成される部分群

H_2: $\left\{ \begin{pmatrix} \omega^a & 0 & 0 \\ 0 & \omega^b & 0 \\ 0 & 0 & \omega^c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \{0, 1, 2\} \right\}$ で生成される部分群

H: H_1 と H_2 で生成される部分群

(1) H_1 の位数を求めよ。

(2) H_2 の位数を求めよ。

(3) H_2 は H の正規部分群であることを示せ。

(4) 剰余群 H/H_2 は H_1 と同型であることを示せ。

(5) H のシロー３部分群を一つ求めよ。その部分群の生成元を答えればよい。

B2 R を単位元を持つ可換環で，ただ一つの素イデアル $\mathfrak{p}$ を持つものとする。$x \in R$ が冪零元であるとは，$x^n = 0$ を満たす自然数 n が存在することを言う。以下の問いに答えよ。

(1) R の冪零元全体の集合を N とすると，N は R のイデアルであることを証明せよ。

(2) $x \in R, x \notin \mathfrak{p}$ ならば，x の逆元 x^{-1} が R の中に存在することを証明せよ。

(3) $N = \mathfrak{p}$ であることを証明せよ。

$\boxed{\textbf{B3}}$ U を $\mathbb{R}^2$ の原点 $\mathbf{0}$ を含む開集合，$f\colon U \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級の写像で $f(\mathbf{0}) = 0$ を満たすものとする。$M = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U\}$ を f のグラフとし，xy 平面は M の $\mathbf{0}$ における接平面になっていると仮定する。M の点 q における単位法ベクトル $\boldsymbol{n}(q)$ を上向きに，つまり z-座標が正になるようにとる。$\boldsymbol{p}\colon U \to M$ を $\boldsymbol{p}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ で，$\boldsymbol{e}\colon U \to S^2$ を $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{p}$ で定める。f, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{p}$ の x, y による偏導関数を，$f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\boldsymbol{e}_{xx} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{e}}{\partial x^2}$, $\boldsymbol{p}_{xy} = \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x \partial y}, \ldots$ のように表す。

(1) M の Gauss 曲率 K を，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{e}$ を偏微分してえられるベクトルの内積を用いて表せ。

(2) M の原点 $\mathbf{0}$ における Gauss 曲率 K を 原点における f の偏微分係数 $f_x(\mathbf{0}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{0})$, $f_{xx}(\mathbf{0}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{0}), \ldots$ を用いて表せ。

(3) $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = K(\boldsymbol{p}_x \times \boldsymbol{p}_y)$ を示せ。

$\boxed{\textbf{B4}}$ $\mathbb{C}^2$ 内の次の 2 つの部分集合 S, T を考え，部分位相空間としての位相を入れて考える。

$$S = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z|^2 + |w|^2 = 1 \right\}, \quad T = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; |z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

ただし z, w は複素数で，$|z|$, $|w|$ はそれぞれの絶対値を表している。
さらに S の部分空間 $J, K \subset S$ を

$$J = \left\{ (z, 0) \in S \;\middle|\; |z| = 1 \right\}, \quad K = \left\{ (0, w) \in S \;\middle|\; |w| = 1 \right\}$$

で定める。また S 上の点 $(0, \sqrt{-1}) \in \mathbb{C}^2$ を N とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) 包含写像 $J \subset S - K$ はホモトピー同値写像であることを示せ。

(2) 包含写像 $T \subset S - (J \cup K)$ はホモトピー同値写像であることを示せ。

(3) 整係数ホモロジー群 $H_q(S - (J \cup K); \mathbb{Z})$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

(4) 整係数ホモロジー群 $H_q(S - (J \cup N); \mathbb{Z})$ $(q = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

$\boxed{\textbf{B5}}$ 正の実数 r に対して，複素平面 $\mathbb{C}$ 内の向きのついた滑らかな曲線 (半円) C_r を C_r: $z = re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ で定める。

(1) $f(z)$ が $z = 0$ の近傍で正則かつ $f(0) = 1$ となる関数のとき，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z}dz$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ を示せ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ の値を求めよ。

$\boxed{\textbf{B6}}$ x, y を変数 t の実数値関数とし，

$$X = X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

とする。

(1) 微分方程式 $\dfrac{dX}{dt} = AX$ の一般解を求めよ。

(2) xy 平面上の 2 点 p, q に対して，「微分方程式 $\dfrac{dX}{dt} = AX$ の C^1 級解による軌跡のうち p, q を通るもの」が存在するとき，$p \sim q$ と定義する。但し解 $X(t)$ の軌跡とは，像 $X(\mathbb{R})(\subset \mathbb{R}^2)$ のことをいう。このとき，$\sim$ が同値関係となることを証明せよ。

(3) 微分方程式 $\dfrac{dX}{dt} = AX$ の相図を図示せよ。また，相図に基づき商集合 $\mathbb{R}^2/\sim$ の完全代表系を一つ挙げよ。

$\boxed{\textbf{B7}}$

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty \right\}$$

とおき，$\mathbb{C}$ 上の線形空間とみなす。さらに，$f \in \ell^1(\mathbb{N})$ に対して

$$\|f\| := \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$$

とおく。

(1) $\|\cdot\|$ は $\ell^1(\mathbb{N})$ 上のノルムであることを示せ。

(2) $\ell^1(\mathbb{N})$ はバナッハ空間であることを示せ。

(3) $\ell^1(\mathbb{N})$ の部分空間 Y を

$$Y := \{ f \in \ell^1(\mathbb{N}) \mid \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad f(n) = 0 \}$$

と定める。線形写像 $\Phi : Y \to \mathbb{C}$ が

$$\forall f \in Y, \quad |\Phi(f)| \leq \sup\{ |f(n)| \mid n \in \mathbb{N} \}$$

を満たすとき，ある $g \in \ell^1(\mathbb{N})$ が存在して

$$\forall f \in Y, \quad \Phi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) g(n)$$

となることを示せ。

$\boxed{\textbf{B8}}$ $X_1, X_2, \ldots$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立同分布な確率変数列とし, ある正の定数 C が存在して，任意の $\omega \in \Omega$ と任意の $k = 1, 2, \ldots$ に対して，$|X_k(\omega)| \leq C$ を満たすとする。さらに X_1 の期待値 $\mu = E(X_1)$ は $\mu \neq 0$ を満たすとする。また，$S_0 = 0$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ とおき, 各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ とおく。

(1) 各 $n = 0, 1, \ldots$ に対して，$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mu$ が成り立つことを示せ。

(2) $(S_n - n\mu)_{n\geq 0}$ は $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ に関してマルチンゲールであることを示せ。

(3) M を正の定数とし，$T = \inf\{n \geq 0 \mid |S_n| > M\}$ とおく。ただし，$\inf \varnothing = \infty$ とする。このとき，T が $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ に関して停止時刻であることを示せ。

(4) $P(T < \infty) = 1$ が成り立つことを示せ。

(5) $E(S_T) = \mu E(T)$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{\textbf{B9}}$ 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立同一に，確率関数

$$f(x, p) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

をもつ分布に従うとする。ここで，$0 < p < 1$ はパラメータである。以下の問いに答えよ。

(1) 対数尤度関数を $\ell(p)$ とするとき，$\ell(p)$ を求めよ。

(2) p の最尤推定量 $\widehat{p}$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $\widehat{p}$ は p の不偏推定量かどうか調べ，結論を述べよ。

(4) (2) で求めた $\widehat{p}$ は p の一致推定量かどうか調べ，結論を述べよ。

(5) $(X_1, ..., X_n)$ の同時分布に関するフィッシャー情報量 $I_n(p)$ を求めよ。

(6) (2) で求めた $\widehat{p}$ は p の有効推定量かどうか調べ，結論を述べよ。

$\boxed{\textbf{B10}}$ 以下の各問いが定める頂点集合 V と辺集合 E を持つグラフ (V, E) をそれぞれ図示せよ。その際に，各頂点が V のどの要素であるか明示すること。

(1) 頂点集合 V を有限体 $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ とする。辺集合 E を $E := \{(x, y) \in V \times V \mid y = ax, a \in \mathcal{E}\}$ とする。ただし，$\mathcal{E}$ を $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ の原始元全体とする。

(2) 頂点集合 V を有限体 $\mathbb{F}_2[X]/(X^4+X+1)$ とする。辺集合 E を $E := \{(x, y) \in V \times V \mid y = a+x, a \in \mathcal{E}\}$ とする。ただし $\mathbb{F}_2$ を二元体，X を多項式環 $\mathbb{F}_2[X]$ の不定元，(X^4+X+1) を X^4+X+1 が生成する $\mathbb{F}_2[X]$ 上のイデアル，そして $\mathcal{E}$ を $\mathbb{F}_2[X]/(X^4+X+1)$ の原始元全体とする。

$\boxed{\textbf{B11}}$ アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語について次の問いに答えよ。ただし語 $w \in \Sigma^*$ と自然数 $n \geq 0$ について，w^n は語 w を n 回繰り返した語（w^0 は空語）とする。

(1) $L_1 = \{a^n(ab)^m \mid n, m \geq 0\}$ を受理する非決定性有限オートマトンを与えよ。

(2) $L_2 = \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 0\}$ が正則言語でないことを示せ。

(3) 語 $w \in \Sigma^*$ に対して，w の文字を並べ替えて得られる語の集合を $\mathit{shuffle}(w)$ と書く。例えば $\mathit{shuffle}(aba) = \{aab, aba, baa\}$ である。言語 $L \subseteq \Sigma^*$ に対して，$\mathit{shuffle}(L)$ を

$$\mathit{shuffle}(L) \quad := \quad \bigcup_{w \in L} \mathit{shuffle}(w)$$

で定義する。$L \subseteq \Sigma^*$ が正則言語であっても $\mathit{shuffle}(L)$ が正則言語であるとは限らないことを示せ。

B12 次の Scheme のプログラムについて，以下の問に答えよ。ただし，手続き s1 と s2 については，第 1 引数は 0 以上の整数，第 2 引数は整数，第 3 引数は整数のリストとする。

```
(define (h n u)
  (if (= n 0) '()
      (cons (car u) (h (- n 1) (cdr u)))))

(define (d u v)
  (if (null? u) '()
      (if (member (car u) v) (d (cdr u) v)
          (cons (car u) (d (cdr u) v)))))

(define (s0 n x)
  (if (= n 0) '()
      (cons x (s0 (- n 1) (+ x 1)))))

(define (s1 n x v)
  (h n (d (s0 (+ n (length v)) x) v)))

(define (s2 n x v)
  (if (= n 0) '()
      (if (member x v) (s2 [イ] [ロ] v)
          (cons x (s2 [ハ] [ニ] v)))))
```

(1) (s1 4 1 '(2 4 8)) の評価結果を記せ。(答だけでよい。)

(2) s2 が s1 と同じ手続き，すなわち同じ引数に対しては同じ評価結果となるようにイ, ロ, ハ, ニの 4 つの空欄を式で埋めよ。(答だけでよい。)

(3) 手続き s2 に 3 つの引数を与えて評価したら停止すると仮定し，s1 と s2 が同じ手続きになる理由を述べよ。

(4) 手続き s2 に 3 つの引数を与えて評価したら停止する理由を述べよ。