令和３年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和２年８月６日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある．

A0 は全員が解答すること．

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで 解答すること．
（４題以上解答することは認められない．）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで 解答すること．
（２題以上解答することは認められない．）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてに コース名と受験番号 を記入のこと．

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

１枚に１題だけ を解答すること．

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない．

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい．

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい．

$\boxed{\textbf{A0}}$

A, B は空でない集合, $f\colon A \to B$ は写像とする．一般に，A の部分集合 X に対し $f(X) = \bigl\{ f(x) \in B \bigm| x \in X \bigr\}$ と書き，B の部分集合 Y に対し，$f^{-1}(Y) = \bigl\{ x \in A \bigm| f(x) \in Y \bigr\}$ と書く．このとき，以下の条件 (1), (2), (3), (4) は同値であることを証明せよ．

(1) $f\colon A \to B$ は全射である．

(2) 任意の $Y \subseteq B$ に対し，$f(f^{-1}(Y)) = Y$ である．

(3) $Y_1, Y_2 \subseteq B$, $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$ ならば $Y_1 = Y_2$ である．

(4) C は空でない任意の集合, $g\colon C \to B$ は任意の写像とするとき，ある写像 $h\colon C \to A$ で $g = f \circ h$ をみたすものが存在する．

$\boxed{\textbf{A1}}$

体 K 上のベクトル空間 V に対して $V^* = \{\varphi : V \longrightarrow K \mid \varphi$ は線形写像$\}$ とする．$\varphi, \psi \in V^*$ および $a \in K$ に対して V から K への写像 $\varphi + \psi$ と $a\varphi$ を任意の $v \in V$ に対して

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v),\ (a\varphi)(v) = a \cdot \varphi(v)$$

として定めると $\varphi + \psi$ と $a\varphi$ は共に V^* の元となり，V^* はこれらの演算を和とスカラー倍とする K 上のベクトル空間になる．ここで W も K 上のベクトル空間とし $f : V \longrightarrow W$ は線形写像とする．さらに $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ は $\sigma \in W^*$ に対して

$$f^*(\sigma) = \sigma \circ f$$

なる写像とする．次の問に答えよ．

(1) f^* は線形写像であることを示せ．

(2) f が全射ならば f^* は単射であることを示せ．

(3) U も K 上のベクトル空間で $g : U \longrightarrow V$ は線形写像とし，$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, g$ と仮定する．さらに f は全射で

$$\dim V = m,\ \dim W = n \quad (m, n \text{ は正整数})$$

とする．このとき線形写像 $g^* : V^* \longrightarrow U^*$ の階数（$\mathrm{Im}\, g^*$ の次元）を求めよ．

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1)$ について以下の問いに答えよ．

(a) $|x| < 1$ に対し以下の等式が成立することを示せ．

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1.$$

(b) $f(x)$ のマクローリン展開を求め，その級数の収束半径を決定せよ．

(2) 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，数列

$$\alpha_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

は収束することを示せ．

$\boxed{\textbf{A3}}$

以下の問に理由をつけて答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}$ に通常の位相を入れ，$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) \geq 0\}$$

を考える．

(i) A が開集合となるような f についての条件を述べよ．

(ii) A が閉集合となるような f についての条件を述べよ．

(2) $\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}$ に通常の位相を入れ，写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(t) := \left(\frac{e^t}{e^t + 1} \cos t, \frac{e^t}{e^t + 1} \sin t \right)$$

で定める．また，$\mathbb{R}^2$ の部分位相空間

$$D := \{(0,0)\} \cup f(\mathbb{R}) \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

を考える．

(i) D は開集合かどうか述べよ．

(ii) D は閉集合かどうか述べよ．

(iii) D は連結かどうか述べよ．

$\boxed{\textbf{A4}}$

正の実数 μ に対し，確率変数 X の確率分布が

$$P(X=k)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\mu}\dfrac{\mu^k}{k!} & k=0,1,2,\ldots, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられるとき，X はパラメータ μ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\mu)$ に従うという．次の問いに答えよ．

(1) X が $\mathrm{Po}(\mu)$ に従うとき，X の積率母関数（モーメント母関数ともよぶ）を求めよ．さらに X の 3 次の中心積率 $E((X-E(X))^3)$ を求めよ．

(2) n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ がそれぞれ $\mathrm{Po}(\mu)$ に従っているとき，

$$Y(n)=\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とおく．$Y(n)$ の従う確率分布を求めよ．また，$Y(n)$ の期待値と分散を求めよ．

(3) n が大きいとき，$\dfrac{Y(n)-E(Y(n))}{\sqrt{n}}$ の従う確率分布はどのような確率分布に近づいていくか．確率分布の名称，期待値，分散を簡単な説明とともに答えよ．

A5

以下の Pascal プログラムについて問に答えよ.

```
program test(input, output);
const N = 4;
var s1, s2: packed array[1..N] of char;
    t: array[0..N,0..N] of integer;  i, j: integer;

begin
  s1 := 'abca'; s2 := 'bcba';

  for j := 0 to N do t[0,j] := 0;
  for i := 1 to N do t[i,0] := 0;
  for i := 1 to N do
    for j := 1 to N do
      if s1[i] = s2[j] then t[i,j] := t[i-1,j-1] + 1
      else if t[i-1,j] > t[i,j-1] then t[i,j] := t[i-1,j]
      else t[i,j] := t[i,j-1];

  writeln(t[N,N])
end.
```

(1) このプログラムを実行して出力をする時点で，配列 t はどのような内容になっているか記せ.

(2) このプログラムの 7 行目の 2 つの代入文の右辺を，それぞれ何らかの N 文字の文字列に変更したとき，それに応じてどのような出力があるか，理由と共に述べよ. (N はプログラム中の定数とするが，4 に限定しないで一般的に述べよ.)

$\boxed{\textbf{B1}}$

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を通常の加法についての群とみる．さらに整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ をその部分群とみて剰余群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を考える．

(1) 群の準同型写像 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で単射であるものは存在するか．存在すれば例示し，存在しないならそれを証明せよ．

(2) G は有限アーベル群とする．もし，単射の群準同型写像 $f\colon G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在すれば，G は巡回群であることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{B2}}$

R は可換環で任意の $x \in R$ に対して $x^3 = x$ が成り立つとする．R の単位元と零元をそれぞれ 1_R と 0_R で表す．このとき次の問に答えよ．

(1) 全ての極大イデアルに含まれる R の元は 0_R のみであることを示せ．

(2) R の任意の素イデアルは極大イデアルになることを示せ．

(3) 集合として R は有限で素イデアルは全部で n 個あるとする．さらに $1_R + 1_R$ は R の単元とする．このとき R の元の個数を求めよ．

$\boxed{\textbf{B3}}$

$\mathbb{R}^2$ を 2 つ用意し，それを U_1, U_2 とする．U_1 と U_2 の座標系をそれぞれ (x_1, y_1), (x_2, y_2) を表すことにする．

$$V_1 := U_1 \backslash \{(0,0)\}, \qquad V_2 := U_2 \backslash \{(0,0)\}$$

とし，C^∞ 写像 $\varphi : V_1 \to V_2$ を

$$x_2 = \frac{x_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2}, \qquad y_2 = \frac{-y_1}{(x_1)^2 + (y_1)^2}$$

と定める．また V_2 上の 2 次微分形式

$$\alpha = \frac{1}{((x_2)^2 + (y_2)^2 + 1)^2} dx_2 \wedge dy_2$$

を考える．

(1) V_2 上の 1 次微分形式 dx_2 の $\varphi : V_1 \to V_2$ による引き戻し $\varphi^*(dx_2)$ を求めよ．

(2) $\varphi^*(\alpha)$ を求めよ．

(3) $\varphi^*(\alpha)$ は U_1 上の微分形式に一意的に拡張できることを示せ．

(4) U_1 と U_2 の互いに素な和集合 $U_1 \sqcup U_2$ から V_1 と V_2 を φ によって同一視してできる空間は C^∞ 多様体として S^2 となる．α が S^2 上の微分形式 ω に一意的に拡張できることを示せ.（つまり，V_1 に制限すると α となる S^2 上の微分形式 ω が一意的に存在することを示せ.）

(5) S^2 に向きを適当に入れ，$\int_{S^2} \omega$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{B4}}$

(1) v, w をユークリッド空間内の相異なる 2 頂点とし，1 単体 $\alpha = [v, w]$ が定める単体的複体

$$0 \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

を C_* とおく．$C_1 = \mathbb{Z}\alpha, C_0 = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w, C_q = 0\ (q \neq 0, 1)$ である．ただし頂点を 0 単体とみなした．同様に，v_0, w_0, v_1, w_1 をユークリッド空間内の相異なる 4 頂点とし，辺 $v_0 w_1$ を共有する 2 つの 2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, w_1], \tau = [v_0, w_0, w_1]$ が定める単体的複体

$$0 \to C'_2 \xrightarrow{\partial'_2} C'_1 \xrightarrow{\partial'_1} C'_0 \to 0$$

を C'_* とおく．$f(v) = v_0, f(w) = w_0$ および $g(v) = v_1, g(w) = w_1$ によって定まる C_* から C'_* への 2 つの鎖写像をそれぞれ $f = \{f_q : C_q \to C'_q\}, g = \{g_q : C_q \to C'_q\}$ とする．このとき，各 q に対し，加群準同型写像 $D_q : C_q \to C'_{q+1}$ であって

$$\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = g_q - f_q \tag{$\sharp$}$$

をみたすものを具体的に与えよ．

(2) 次に $C_* = \{C_q, \partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$，$C'_* = \{C'_q, \partial'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ を一般の鎖複体，$f = \{f_q\}, g = \{g_q\} : C_* \to C'_*$ を一般の 2 つの鎖写像とするとき，加群準同型写像 $D_q : C_q \to C'_{q+1}$ であって全ての q に対して（$\sharp$）をみたすものが存在するならば，f と g が誘導するホモロジー群の準同型写像 $f_*, g_* : H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$ は一致することを示せ．

B5

(1) $u(x,y)$, $v(x,y)$ を点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ の近傍で定義された実数値 2 変数関数であって，いずれも (x_0,y_0) で全微分可能とする．$z=x+iy$ とおいて複素関数を

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

と定義し，また

$$f_x(z)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+i\frac{\partial}{\partial x}v(x,y),\quad f_y(z)=\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)+i\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)$$

と定める．このとき複素関数 $f(z)$ が点 $z_0=x_0+iy_0$ で正則であるとこと，以下の写像 $df_{z_0}\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ が $\mathbb{C}$ 上の線型写像であることが同値であることを示せ．

$$\begin{array}{cccc} df_{z_0}\colon & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a+ib & \longmapsto & f_x(z_0)a+f_y(z_0)b \end{array}$$

(2) (a) $R>1$ とし，複素数平面内の閉曲線 C を以下のように定める．

$$C\colon z(t)=\begin{cases}-R+2tR & (t\in[0,1])\\ Re^{i\pi(t-1)} & (t\in[1,2])\end{cases}$$

このとき以下の複素積分を計算せよ．

$$\int_C\frac{1}{(1+z^2)^n}\,dz$$

(b) 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_0^\infty\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

B6

n 次正方行列 $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \le i,j \le n}$ の各要素 $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ は $-\infty < t < \infty$ で連続な関数とする．いま，同次線形微分方程式系

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A(t)\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \text{ は } n \text{ 次元列ベクトル})$$

を考え，$X(t)$ をその解の基本系とする．

(1) n 次正方行列 Z に対する行列微分方程式

$$\frac{d}{dt}Z = A(t)Z - ZA(t) \tag{イ}$$

の任意の解 $Z = Z(t)$ は，ある定数行列 P を用いて

$$Z(t) = X(t)PX(t)^{-1} \tag{ロ}$$

の形に書かれ，逆に (ロ) の形に書かれる行列関数 $Z(t)$ はすべて微分方程式 (イ) の解となることを示せ．

(2) いま，さらに $A(t)$ の各要素 $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ は周期 T の周期関数であるとする．すなわち

$$A(t+T) = A(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

が成り立っているとする．このとき，行列微分方程式 (イ) の解の中に

$$Z(t+T) = Z(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

をみたすものが必ず存在することを証明せよ．

B7

開区間 $I = (0, 1)$ 上のルベーグ測度 m に関する可積分関数全体を m に関してほとんど至る所一致する関数を同一視して得られる空間 $\mathrm{L}^1(I, m)$ は，ノルム

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t, \;\; f \in \mathrm{L}^1(I, m)$$

に関してバナッハ空間である．

(1) $f \in \mathrm{L}^1(I, m)$ に対して，

$$[Tf](x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

とおくと，T は $\mathrm{L}^1(I, m)$ から $\mathrm{L}^1(I, m)$ 自身への有界線形作用素である事を示し，かつその作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．(T の線形性については証明を省略して良い)

(2) T が固有値を持つならば全て求め，持たないならばその事を示せ．

$\boxed{\textbf{B8}}$

$X_1,\ X_2, \cdots$ を正規分布に従う確率変数列で任意の $i \geq 1$ に対して，$E(X_i) = 0$，$E(X_i^2) = 1$ をみたすとする． なお, $X_1,\ X_2, \cdots$ には独立性を仮定しない．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x > 0$ に対して

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > \sqrt{2\log n}\right) = 0$$

(3) N は $\{0, 1, \cdots\}$-値確率変数で $E(N^2) \in (0, \infty)$ をみたすとする．このとき

$$P(N \geq 1) \geq \frac{E(N)^2}{E(N^2)}$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\epsilon \in (0, 1)$ を定数とする．また，$\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ をみたすある正数列 $(r_n)_{n\geq 2}$ が存在して，任意の $n \geq 2$ と $|i - j| \geq \log n$ をみたす任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して，

$$\begin{aligned} &P\left(X_i \geq (1-\epsilon)\sqrt{2\log n}, X_j \geq (1-\epsilon)\sqrt{2\log n}\right) \\ &\leq r_n P\left(X_i \geq (1-\epsilon)\sqrt{2\log n}\right) P\left(X_j \geq (1-\epsilon)\sqrt{2\log n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > (1-\epsilon)\sqrt{2\log n}\right) = 1$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\textbf{B9}}$

$X_1, \ldots, X_n$ は独立同一に，密度関数

$$f(x|\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

をもつ分布に従うとする．ここで，$-\infty < \mu < \infty$ はパラメータである．以下の問いに答えよ．

(1) 対数尤度関数を $\ell(\mu)$ とするとき，$\ell(\mu)$ を求めよ．

(2) μ の最尤推定量 $\hat{\mu}$ を求めよ．

(3) (2) で求めた $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量かどうか調べ，結論を述べよ．

(4) $(X_1, ..., X_n)$ の同時分布に関するフィッシャー情報量 $I_n(\mu)$ を求めよ．

(5) (2) で求めた $\hat{\mu}$ は μ の有効推定量かどうか調べ，結論を述べよ．

$\boxed{\textbf{B10}}$

一方向性関数 $f(x)$ に対して，任意の $x \in \{0,1\}^*$ に対して $|f(x)| \leqq p(|x|)$ となる多項式 p をとり，関数 $g(x)$ を以下のように定める．

$$g(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(x)||10^{p(|x|)-|f(x)|} = f(x)||1\,\underbrace{0\cdots\cdots0}_{p(|x|)-|f(x)|},$$

ただし，任意の $\alpha \in \{0,1\}^*$ に対して $|\alpha|$ は α のビット列としての長さを表し，$\alpha, \beta \in \{0,1\}^*$ に対して $\alpha||\beta$ は α と β のビット列としての連結を表す．このとき，以下の (1) および (2) に解答せよ．

(1) 関数 $g(x)$ が Length-Regular であることを示せ．ここで，関数 $g(x)$ が Length-Regular であるとは，任意の $x, x' \in \{0,1\}^*$ に対して「$|x| = |x'|$ ならば $|g(x)| = |g(x')|$」となることをいう．

(2) $g(x)$ が一方向性関数であることを示せ．

$\boxed{\textbf{B11}}$

初等関数とは以下により定義される自然数上の関数である．

- zero, succ, prj_i^n, sub は初等関数である．
- f が初等関数ならば，Σ_f, Π_f は初等関数である．
- 初等関数の合成は初等関数である．

ただし，自然数は 0 以上の整数でその全体を $\mathbb{N}$ と表記し，

- zero : $\mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ は $\mathsf{zero}() \stackrel{\text{def}}{=} 0$ により定義される関数
- succ : $\mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ は $\mathsf{succ}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x+1$ により定義される関数
- $\mathsf{prj}_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $(1 \le i \le n)$ は $\mathsf{prj}_i^n(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_i$ により定義される関数
- sub : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ は $\mathsf{sub}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max(x-y, 0)$ により定義される関数
- $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ が与えられたとき，$\Sigma_f, \Pi_f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ は以下により定義される関数

$$\Sigma_f(x, x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y<x} f(y, x_1, \ldots, x_n) \qquad \Pi_f(x, x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{y<x} f(y, x_1, \ldots, x_n)$$

とする．そしてさらに，初等述語とは特徴関数が初等関数である述語とし，n+1 引数述語 p が与えられたとき，関数 $\mu_< p : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ を

$$\mu_< p(x, x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \min(\{y \in \mathbb{N} \mid y < x \text{ かつ } p(y, x_1, \ldots, x_n)\} \cup \{x\})$$

により定義する．このとき以下の問に答えよ．

(1) 2 つの数の加算は初等関数であることを示せ．

(2) p が初等述語ならば $\mu_< p$ は初等関数であることを示せ．

B12

以下の問に従って，Scheme の手続きを定義せよ．補助的な手続きを定義してそれを使用しても構わない．

(1) 以下を満たす 2 引数手続き `mask` を定義せよ．

- `mask` はリスト s とリスト m を引数にとり，リスト r を返す．以下 s と m の長さは一致しているものとし，長さが一致しない場合の動作は問わないものとする．
- s を $(a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$ とし，m を $(b_1\, b_2\, \cdots\, b_n)$ としたとき，r は $(a_{i_1}\, a_{i_2}\, \cdots\, a_{i_\ell})$ であって，$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq n$ かつ，任意の $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ について，b_j が `#f` 以外であることと，$j = i_k$ となる $k \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ が存在することが同値である．

(2) 以下を満たす 2 引数手続き `subseq` を定義せよ．

- `subseq` はリスト s_1 とリスト s_2 を引数にとる．リスト s_2 の長さを n とおく．
- `(equal?` s_1 `(mask` s_2 m`))` の値が `#t` となるような長さ n のリスト m が存在しない場合は，`(subseq` s_1 s_2`)` は `#f` を返す．
- そうでなければ，`(subseq` s_1 s_2`)` は真偽値を要素とする長さ n のリスト m を返し，`(equal?` s_1 `(mask` s_2 m`))` の値は `#t` となる．