令和２年度

千葉大学大学院融合理工学府　博士前期課程

学力検査問題

（数学情報科学専攻　数学・情報数理学コース）

専 門

令和元年８月８日（木）

検査時間　２４０分

「注意事項」

1. 問題は **A0** 問題が１題，**A** 問題が５題，**B** 問題が１２題ある。

A0 は全員が解答すること。

A 問題: **A1,...,A5** の中から 任意に３題選んで 解答すること。
（４題以上解答することは認められない。）

B 問題: **B1,...,B12** の中から 任意に１題選んで 解答すること。
（２題以上解答することは認められない。）

2. 解答用紙は５枚あるので，そのすべてに コース名と受験番号 を記入のこと。

3. 各解答用紙には，解答しようとする 問題番号を明記 し，

１枚に１題だけ を解答すること。

解答不能の場合も，解答用紙を持ち帰ってはならない。

4. 解答用紙が不足のときには，用紙の裏面も使用してよい。

5. 問題冊子は持ち帰ってもよい。

$\boxed{\textbf{A0}}$

空でない集合 X に対し，X から X への写像の全体の集合を $M(X)$ とし，単射の全体からなる部分集合を $I(X)$，全単射の全体からなる部分集合を $B(X)$ とする．集合 $M(X)$ 上の 2 項関係 $\underset{B}{\sim}$，$\underset{I}{\sim}$，$\underset{M}{\sim}$ を次で定める：$f,\, g \in M(X)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f \underset{B}{\sim} g &\iff \exists p \in B(X),\ p \circ f = g, \\
f \underset{I}{\sim} g &\iff \exists p \in I(X),\ \ p \circ f = g, \\
f \underset{M}{\sim} g &\iff \exists p \in M(X), p \circ f = g.
\end{aligned}
$$

(1) 2 項関係 $\underset{B}{\sim}$ が $M(X)$ 上の同値関係になることを示せ．

(2) X が有限集合のとき，2 項関係 $\underset{I}{\sim}$ は $M(X)$ 上の同値関係になるか．また $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (自然数全体の集合) のときはどうか．それぞれ，理由をつけて答えよ．

(3) $f,\, g \in M(X)$ に対して，次を示せ．

$$
f \underset{I}{\sim} g \implies \Big(\forall x,\, \forall y \in X,\, \big(f(x) = f(y) \Longleftrightarrow g(x) = g(y)\big)\Big).
$$

(4) $f,\, g \in M(X)$ に対して，次を示せ．

$$
f \underset{M}{\sim} g \iff \Big(\forall x,\, \forall y \in X,\, \big(f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)\big)\Big).
$$

$\boxed{\textbf{A1}}$

nを正の整数とする．実行列 A，B および Q を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} A & A^n \\ A^n & A \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

ただし I_2 は2次の単位行列，O_2 は 2×2 の零行列を表す．

(1) Aの固有値，および固有空間の次元を求めよ．

(2) Aのジョルダン標準形 J，および $P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を一つ求めよ．

(3) $Q^{-1}BQ$ を A と n を用いて表せ．

(4) Bの固有値，および固有空間の次元を求めよ．

(5) Bのジョルダン標準形 G を求めよ．

$\boxed{\textbf{A2}}$

(1) 2変数関数 $(x+y)e^{-3x^2-2y^2}$ の $\mathbb{R}^2$ における極値を求めよ．

(2) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ の値を求めよ．

(3) 2重積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y)e^{-3x^2-2y^2} dxdy$ の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{A3}}$

実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ に通常の位相を入れる．その部分位相空間

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x| \leq 4\}$$

を考える．$A_- := [-4, 0)$, $A_+ := (0, 4]$ とおくと $A = A_- \cup A_+$ である．

(1) A の部分集合 A_+ は位相空間 A において開集合であるか否か，証明をつけて答えよ．

(2) A の部分集合 A_+ は位相空間 A において閉集合であるか否か，証明をつけて答えよ．

(3) 位相空間 A は連結であるか否か，証明をつけて答えよ．

実数値関数 $f : A \to \mathbb{R}$，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in A_+ \\ x+1 & x \in A_- \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} |x| & |x| > 2 \\ x & |x| \leq 2 \end{cases}$$

と定め，A における同値関係

$$x \sim y \iff g \circ f(x) = g \circ f(y)$$

を考える．これから得られる商位相空間を $B := A/\sim$ とする．つまり，$\pi : A \to B$ をこの構成から定まる自然な全射とすると，B における開集合 O とは $\pi^{-1}(O)$ が A の開集合となるもののことである．

(4) 位相空間 B はハウスドルフでないことを証明せよ．

(5) 位相空間 B はコンパクトであることを証明せよ．

$\boxed{\textbf{A4}}$

袋の中に赤い玉が N_1 個，白い玉が N_2 個，青い玉が N_3 個入っている．袋の中から無作為に玉を一つ取り出し，色を確認し，元に戻す．この試行を n 回行ったとき，赤い玉，白い玉，青い玉が出た回数をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とする．

(1) (X_1, X_2, X_3) の同時分布を求めよ．

(2) X_1 の周辺分布，および X_1 の期待値 $E[X_1]$ を求めよ．

(3) 共分散 $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$，$i, j = 1, 2, 3$ を求めよ．

A5

次の Pascal プログラムの断片を考える．なお，本問で対象とする Pascal 処理系においては，integer 型の値の最大値 maxint は $2^{31}-1$ であるものとする．

```
const MaxIndex = 999;
type bit    = 0..1;
     index  = 0..MaxIndex;
     bitseq = array [index] of bit;
```

bitseq 型の配列変数 b に対し，b[i] の値を b_i ($i = 0, \ldots, \mathrm{MaxIndex}$) としたとき，$\displaystyle\sum_{i=0}^{\mathrm{MaxIndex}} b_i 2^i$ のことを $v(\mathrm{b})$ と書くことにする．以下の問に答えよ．

(1) 次の頭部を持ち，$v(\mathrm{b}) = 0$ のとき true を，そうでないとき false を返す関数 iszero を定義せよ．

```
function iszero(b : bitseq) : boolean;
```

(2) d を maxint の半分未満の正整数とする．次の頭部を持ち，divmod(b, d, q) を呼び出した後に $v(\mathrm{q})$ が $v(\mathrm{b})$ を d で割った商になり，返り値が $v(\mathrm{b})$ を d で割った余りになるような関数 divmod を定義せよ．

```
function divmod(b : bitseq; d : integer; var q : bitseq) : integer;
```

(3) 次の頭部を持ち，$v(\mathrm{b})$ が 3 の倍数であるか $v(\mathrm{b})$ を 10 進表記した際に 3 が現れる場合 true を，そうでなければ false を返す関数 sna を定義せよ．補助的な関数や手続きを定義してそれらを使用しても構わない．また，上の小問の関数を使用しても構わない．

```
function sna(b : bitseq) : boolean;
```

$\boxed{\textbf{B1}}$

(1) H を群 G の部分群とする．G の部分群

$$N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\},$$
$$C_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}hg = h\ (\forall h \in H)\}$$

を考える．$C_G(H)$ は $N_G(H)$ の正規部分群であることを示せ．

以下，p は素数をあらわす．

(2) $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を位数 p の有限体とする．$\mathbb{F}_p$ 上の 2 次の一般線型群

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{F}_p,\ \det(g) \neq 0 \right\}$$

とその部分群 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\} \right\}$ を考える．

(i) $C_G(H)$ の位数を求めよ．

(ii) 商群 $N_G(H)/C_G(H)$ の位数を求めよ．

P を p 群とする．このとき P の部分群 H に対して

$$H \subsetneq P \Longrightarrow H \subsetneq N_P(H)$$

という事実が知られている．この事実は証明なしに用いてよい．

(3) G の位数は p で割り切れるとする．有限群 G の部分群 H が $N_G(H)$ の p シロー部分群であるとき，H は G の p シロー部分群であることを示せ．

$\boxed{\textbf{B2}}$

$L = \mathbb{Q}(X)$ を有理数係数の 1 変数有理関数体とし，$Y = X^2 + \dfrac{1}{X^2}$，$K = \mathbb{Q}(Y) \subset L$ とする．

(1) X の K 上の最小多項式を求めよ．

(2) L/K がガロア拡大であることを示し，そのガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ を求めよ．

(3) L/K の K，L 以外の中間体をすべて求めよ．

(4) $F = \mathbb{Q}\left(X^3 + \dfrac{1}{X^3}\right) \subset L$ とする．L/F がガロア拡大かどうかを理由とともに述べよ．

B3

$\mathbb{R}P^2$ を 2 次元実射影空間，$\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}P^2$ を射影とし，$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ に対し $\pi(x,y,z)$ を $[x:y:z]$ であらわす．

(1) $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$$

で定めると，$f = \widetilde{f} \circ \pi$ をみたす $\widetilde{f} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$ が存在することを示せ．

(2) $\widetilde{f}$ は最大値，最小値をとることを示し，最大値 M，最小値 m を求めよ．

(3) $N = \widetilde{f}^{-1}(M)$, $W = \widetilde{f}^{-1}(m)$ とおく．N, W は $\mathbb{R}P^2$ の部分多様体になるか．なる場合は，その次元およびそれらと微分同相となる多様体の例を与えよ．

B4

$\mathbb{R}^3$ の部分位相空間として

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq y \leq 1\}, \\ B &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}, \end{aligned}$$

および $X := A \cup B$ を考える．

(1) A の整数係数ホモロジー群 $H_q(A;\mathbb{Z})$ $(q = 0,\ 1)$ を求めよ．

(2) B の整数係数ホモロジー群 $H_q(B;\mathbb{Z})$ $(q = 0,\ 1,\ 2)$ を求めよ．

(3) X の整数係数ホモロジー群 $H_q(X;\mathbb{Z})$ $(q = 0,\ 1,\ 2)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{B5}}$

n を自然数とする.

(1) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z^{n+1}}dz$ を求めよ.

(2) $\displaystyle \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta - n\theta)d\theta$ を求めよ.

$\boxed{\textbf{B6}}$

$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数全体，$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 級関数全体とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_0 \in (0,1)$ とする．$x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2,\ x(0) = x_0,$$

の解とする．

(i) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ を示せ.

(ii) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} e^t x(t)$ が存在することを示せ.

(2) $g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(0) = g'(0) = 0$ とする．$y_0 > 0$ に対して，$y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を初期値問題

$$\frac{dy}{dt} = -y + g(y),\ y(0) = y_0,$$

の解とする．

(i) ある $\delta > 0$ が存在して，$y_0 \in (0,\delta)$ ならば，$\displaystyle \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ となることを示せ.

(ii) ある $\delta > 0$ が存在して，$y_0 \in (0,\delta)$ ならば，$\displaystyle \lim_{t\to\infty} e^t y(t)$ が存在することを示せ.

B7

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の全体を X とおく．X にノルムを

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$$

と定めることによって，X は実バナッハ空間となる．

$\varphi \in X$ に対し，線形作用素 $T : X \to X$ を

$$T(f)(t) = \varphi(t)f(t) \qquad t \in [0,1]$$

によって定める．また，

$$Y = \{f \in X \mid \text{列 } \{T^n(f)\}_{n=1}^{\infty} \text{ は } X \text{ において収束する }\}$$

とおく．

(1) ある $M > 0$ が存在して，任意の $f, g \in X$ に対して

$$\|T(f) - T(g)\| \leq M\|f - g\|$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\|\varphi\| < 1$ のとき，$Y = X$ となることを示せ．

(3) $\varphi(t) = t$ であるとき，$Y = \{f \in X \mid f(1) = 0\}$ となることを示せ．

(4) φ が

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で与えられるとき，Y は閉集合であることを示せ．

B8

正の実数値をとる連続型確率変数の増加列を $T_1 < T_2 < \cdots$ とする．$\{N(t) \mid t \geq 0\}$ を非負整数値をとる離散型確率変数の族で，$N(0) = 0$，$T_n \leq t < T_{n+1}$ のとき $N(t) = n$ と定まるものとする．任意の $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m$ に対し，$N(t_k) - N(t_{k-1})$ $(k = 2, \ldots, m)$ は独立でそれぞれポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda(t_k - t_{k-1}))$ に従う．ただし λ は正の定数である．なお，確率変数 X がポアソン分布 $\mathrm{Po}(\mu)$ に従うとき，その確率分布は

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

である．

(1) $t > 0$ に対し，$N(t)$ の期待値 E_t と分散 V_t を求めよ．

(2) $Z_t = \dfrac{N(t) - E_t}{\sqrt{V_t}}$ のモーメント母関数を求めよ．さらに Z_t の確率分布が $t \to \infty$ で標準正規分布に収束することを証明せよ．

(3) $P(T_n \geq t)$ を求めよ．さらに T_n の期待値を求めよ．

B9

$X_1, \ldots, X_n$ が独立同一に，確率関数

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

をもつ分布に従うとき，以下の問に答えよ．ここで，$\lambda > 0$ である．

(1) 対数尤度関数 $\ell(\lambda)$ を求めよ．

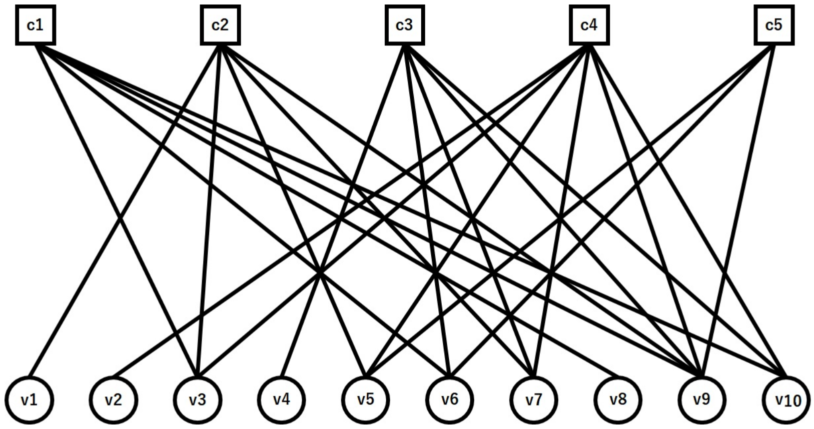
(2) λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求めよ．

(3) $(X_1, ..., X_n)$ の同時分布に関するフィッシャー情報量 $I_n(\lambda)$ を求めよ．

(4) (2) で求めた $\hat{\lambda}$ は λ の有効推定量かどうか調べ，結論を述べよ．

B10

次のタナーグラフに対応するパリティ検査行列が定める 2 元線形符号の符号長，情報ビット数，最小距離をそれぞれ求めよ．ただし，タナーグラフの○は変数ノードを，□は検査ノードをそれぞれ表している．



B11

アルファベット $\{0,1\}$ 上の言語に関して，以下の問に答えよ．

(1) $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$ は文脈自由言語であることを証明せよ．

(2) $\{0^n 1^m \mid n > 0,\, m > 0,\, n$ と m の最大公約数は $1\}$ は正則言語ではないことを証明せよ．

B12

次の Scheme のプログラムについて以下の問に答えよ．

```
(define (merge-sort-push s ss)
  (cond ((null? ss)
         (list s))
        ((null? (car ss))
         (cons s (cdr ss)))
        (else
         (cons '() (merge-sort-push (merge s (car ss)) (cdr ss))))))

(define (fold-left f c s)
  (if (null? s)
      c
      (fold-left f (f c (car s)) (cdr s))))

(define (merge-sort-sub s)
  (fold-left (lambda (ss x) (merge-sort-push (list x) ss)) '() s))

(define (merge-sort s)
  (fold-left merge '() (merge-sort-sub s)))
```

(1) 以下を満たす 2 引数手続き `merge` を定義せよ．

- `merge` は整数のリスト s_1 と s_2 を引数にとり，整数のリスト r を返す．
- s_1 と s_2 がともに昇順にソートされていれば，r も昇順にソートされている．
- 任意の整数 x に対し，x が s_1 中に現れる回数と x が s_2 中に現れる回数の和は，x が r 中に現れる回数に等しい．ただし，リスト中に x が現れない場合には，0 回現れると考えるものとする．
- 整数値の大小比較の総回数は，s_1 の長さと s_2 の長さの和を超えない．

なお，`merge` が定義されれば，手続き `merge-sort` は与えられた整数のリストに対し，マージソートによってそれを昇順にソートしたリストを返すようになる．

(2) 式 `(merge-sort-sub '(3 1 4))` と式 `(merge-sort-sub '(3 1 4 1 5 9))` のそれぞれの評価結果を記せ．

(3) s を長さ n の整数のリストとする．式 (`merge-sort-sub` s) の評価結果がリスト (s_1 $\ldots s_k$) であるとき，s_i の長さを n_i とおく ($k \geq 0,\ i = 1, \ldots, k$)．$n_i$ と k の値を，n を用いて特徴付けよ．