Berkovich 空間

千葉大学大学院理学研究科　松田茂樹　(MATSUDA Shigeki)

目次

1 概要

この文章は Berkovich 空間についての基本事項をまとめたものである。数体上の代数多様体の問題を p 進解析的に扱う際に用いる多様体として, Tate の剛解析空間は非常に有用な空間である。が, 点が少ないため, トポスが conservative にならない, つまり層が茎で決まらないなどの欠点を持つ。このため, M. van der Put のフィルターを用いた空間や, 高階の付値を点にもつ adic 空間 (Huber 空間), 藤原一宏による Zariski-Riemann 空間など, より多くの点を持った空間が考えられている。Berkovich 空間もそのような空間の一つであり, セミノルムを点とみなすことで十分多く

の点を持つ空間を構成している。同様の他の空間と比較した場合の特徴としては, トポロジーが直観的にわかりやすいものになっていること, また $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ の解析化も有用な空間になっていることなどが挙げられる。Berkovich 空間では, 点が増えたおかげで, 十分広い範囲の層が茎で決定される。また空間は局所的に弧状連結になり, スムーズという仮定の下では局所的に可縮でさえある (定理 9.1.3 参照)。結果として昔ながらの道を用いた基本群の定義が可能になり, また道に沿った解析接続という言葉も意味を持つ。また, スムーズであれば普遍被覆が存在する。ただし, では (Berkovich の) 解析空間のトポロジーが全ての目的に合うものであるかというと, 実はそうではない。例えば

(1) $\mathbb{P}^1 \setminus \{$ 有限個の点 $\}$ は単連結である。アニュラスも同様。
(2) 同様に, 良還元を持つ曲線もまた単連結である。
(3) 道に沿った解析接続がうまく働くのは完全退化還元の時に限られるように見える。

といった問題がある。そのため, Berkovich 空間の上のエタールコホモロジーなどを考える必要ももちろんあり, 実際そのような理論が作られている [Ber93, 1.5].

2 Terminology

2.0.1. この紹介ではコンパクト, 局所コンパクト, パラコンパクトというときはハウスドルフを仮定する。単に被覆の中から有限部分被覆が取れるという条件は準コンパクトという。

2.0.2. 次に一般的な定義を復習しておく。A を単位元を持つ環とするとき, 写像 $|\ |: A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が**セミノルム** (**seminorm**) であるとは,

(SN1) $|0| = 0$.
(SN2) 任意の $f, g \in A$ に対し $|f - g| \leq |f| + |g|$.
(SN3) 任意の $f, g \in A$ に対し, $|fg| \leq |f||g|$.
(SN4) $|1| = 1$.

の 4 つが満たされることとする。更に $|f| = 0$ となるのが $f = 0$ のときに限られる場合が通常のノルムである。(SN3) が

(SN3′) 任意の $f, g \in A$ に対し, $|f - g| \leq \max\{|f|, |g|\}$

で置き換えられるときは**非アルキメデス的ノルム** (**non-Archimedean**) と呼ばれる。また, $|fg| = |f||g|$ を満たす場合, そのセミノルムは**乗法的** (**multiplicative**) であると言う。なお, (SN2) は, $|-f| = |f|$ かつ $|f + g| \leq |f| + |g|$ と同値であることに注意。

補足 2.0.3. 乗法的なノルムのうち, 非アルキメデス的なものは (高さ 1 の) **付値**[*1] とも呼ばれる。

[*1] A を可換環, Γ を全順序アーベル群とするとき, $v: A \to \Gamma_0 = \Gamma \cup \{0\}$ が付値とは, $\mathbb{R}_{\geq e}$ を Γ_0 に置き換えたとき

逆に言うと, セミノルムにはアルキメデス的なものも含まれているわけである。また, 付値を点とみなす Huber 空間では, 同値な付値[*2]は同一視するため, 後の例 3.1.3 で見るように, セミノルムとしては区別されるが, 付値としては同一視されるものがある。

2.0.4. **バナッハ環** (**Banach ring**) とは, 単位元を持つ環 A とその上のノルム $\| \ \|$ の組 $(A, \| \ \|)$ で, A が $\| \ \|$ 対して完備であるものを言う。バナッハ環 $(A, \| \ \|)$ の上のセミノルム $| \ |$ が**有界**であるとは, ある $C > 0$ が存在して, $|f| \leq C\|f\|$ が全ての $f \in A$ に対して成立することである。セミノルム $| \ |$ が乗法的であれば, この C は明らかに 1 に取れる。一般に, 全ての (単位元を持つ) 環は, 自明なノルムについてバナッハ環と見なせる。

2.0.5. 以下では簡単のために, **非アルキメデス的体** (**non-Archimedean field**) と言えば, 非アルキメデス的な付値を持つ完備な体を表すことにする。ただし, 必ずしも非自明な付値とは限らない。

3 Berkovich スペクトラム

3.0.6. ある意味 Berkovich による解析空間の構成は剛解析空間の構成に似ており, 多少乱暴な言い方をすると, 極大スペクトラム $\mathrm{Spm}(\mathcal{A})$ をゲルファント (Gelfand) スペクトラム $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ で取り換えれば解析空間が出来ると言えないこともない。そこでまずはゲルファントスペクトラムについて説明する。

3.1 スペクトラム

定義 3.1.1. $\mathcal{A}$ を可換バナッハ環とするとき, そのゲルファントスペクトラム $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ とは, 有界乗法的セミノルムのなす集合に, $| \ | \mapsto |f|$ が全ての $f \in \mathcal{A}$ に対して連続になるような最弱のトポロジーを入れたものである。

例 3.1.2. $\mathcal{A} = K$ が非アルキメデス的体である場合, 有界乗法的なセミノルムは明らかに元々のノルムに一致するしかないので, $\mathcal{M}(K)$ は一点からなる空間になる。

図 1　$\mathcal{M}(K)$

例 3.1.3. $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ を通常の絶対値 $| \ |_\infty$ が入った可換バナッハ環と見る。($\mathbb{Z}$ がこの絶対値について完備であることに注意。) このとき, $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ は次のような要素からなる。

の乗法的セミノルムの条件および (SN3′) を満たし, かつ Γ が $\mathrm{Im}(v) - \{0\}$ で生成されるものである。

[*2] 2 つの付値 $v : A \to \Gamma_0$, $w : A \to \Gamma'_0$ が同値であるとは, $\psi : \Gamma_0 \to \Gamma'_0$ という順序付きモノイドの同型で $v = \psi \circ w$ なるものが存在することをいう。これは, $v(x) < v(y) \Leftrightarrow w(x) < w(y)$ という性質とも同値。

(1) $|\ |_{\infty,\varepsilon} := |\ |_\infty^\varepsilon$, $(0 < \varepsilon \leq 1)$.

(2) $|\ |_{p,\varepsilon}$, $(0 < \varepsilon < 1)$. ただし, $|\ |_{p,\varepsilon}$ は $|p|_{p,\varepsilon} = \varepsilon$ となる p 進ノルム。

(3) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の自明なノルムから誘導されるセミノルム $|\ |_p$. $|\ |_{p,0} = |\ |_p$ と考えれば, これは (ii) に含まれると見なせる。

(4) 自明なノルム $|\ |_0$.

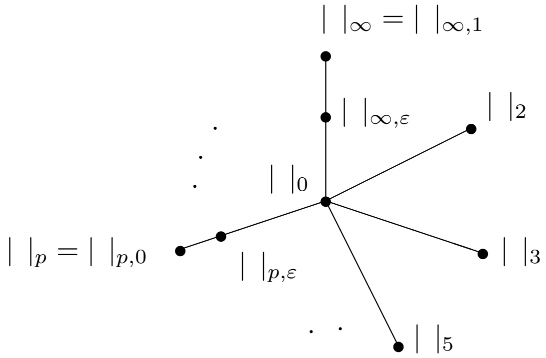
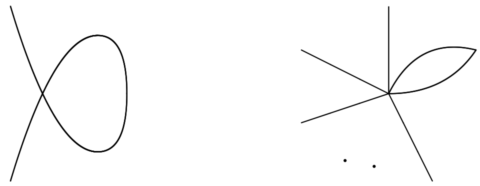


図 2　$\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

位相はどうなっているかというと, (i) の点からなる枝や, (ii), (iii) の点からなる枝は, $(0,1]$ 区間と同型になり, また, 自明なノルム $|\ |_0$ の近傍は, 有限個の枝からその枝の閉集合を取り去ったものになっている。このように $\mathbb{Z}$ に付随する Berkovich 空間は, 無限遠点を含めた全ての素点の情報を持ち, またその上で通常の微積分ができるような空間になっているということは特筆すべき点であろう。(例えば付値の同値類を用いて点を増やした adic 空間では, 無限遠点の情報がなく, また $|\ |_p$ と $|\ |_0$ を結ぶ道はない。)

補足 3.1.4. なお, $\mathbb{Z}$ に自明なノルムを入れた場合は, アルキメデス的な枝を取っぱらったものになる。

例 3.1.5. 一般に, (自明なノルムを入れた) デデキント環 $\mathcal{A}$ に対しては, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ の様子は上と似たようなものになる。より一般に $\mathcal{A}$ が一次元整域であれば, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ の整閉包 $\mathcal{A}'$ のゲルファントスペクトラム $\mathcal{M}(\mathcal{A}')$ において, 極大イデアルによる剰余体上の自明なノルムから誘導される点で $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ に行けば一致する点を同一視したものとなる。つまり, そのような点の数だけループができることになる。



$X = \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ $\mathcal{M}(\mathcal{A})$

図 3　特異点のある場合

非アルキメデス的な例は Affinoid の節 (§4) で述べる。

定理 3.1.6 ([Ber90, 1.2.1])**.** $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ は空集合にはならず, また準コンパクト, ハウスドルフである。

3.2　Spectral radius

3.2.1. $\mathcal{A}$ を単位元を持つ可換バナッハ環, x を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ の点とするとき, x に対応する乗法的セミノルムを $|\ |$ として, $\operatorname{Ker}|\ |$ は $\mathcal{A}$ の素イデアルになり, $|f|$ は $\mathcal{A}/\operatorname{Ker}|\ |$ での class にしか依らず, 商体 F の付値にまで延長できる。この付値についての F の完備化を $\mathcal{H}(x)$ で表し, x での剰余体と呼ぶ。このときの自然な射 $\mathcal{A} \to \mathcal{H}(x)$ を χ_x で表すことにする。χ_x による f の $\mathcal{H}(x)$ への像を $f(x)$ と書く。当然 $|f(x)|$ は $|f|$ と一致している。

定義 3.2.2. $f \in \mathcal{A}$ に対し, その**スペクトル半径** (**spectral radius**) を

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|f^n\|} = \inf_n \sqrt[n]{\|f^n\|} \tag{3.2.2.1}$$

で定める。

3.2.3. このとき,

$$\rho(f) = \max_{x\in\mathcal{M}(\mathcal{A})} |f(x)| \tag{3.2.3.1}$$

が成立する。([Ber90, 1.3.1]).

3.3　還元写像

3.3.1. $\mathcal{A}$ を単位元を持つ非アルキメデス的可換バナッハ環とするとき,

$$\mathcal{A}^\circ = \{f \in \mathcal{A} \mid \rho(f) \le 1\}$$
$$\mathcal{A}^{\circ\circ} = \{f \in \mathcal{A} \mid \rho(f) < 1\}$$

と定義すると, $\mathcal{A}^\circ$ は可換環, $\mathcal{A}^{\circ\circ}$ はそのイデアルになる。この剰余環 $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ を $\widetilde{\mathcal{A}}$ で表す。可換バナッハ環の射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, つまり連続準同型があれば, 自然に $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ が誘導される。

3.3.2. 特に, $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ にして $\widetilde{\chi}_x : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{H}(x)}$ が定まるが, この核は $\widetilde{\mathcal{A}}$ の素イデアルになる。これにより,

$$\pi : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Spec}(\widetilde{\mathcal{A}}); x \mapsto \mathrm{Ker}(\widetilde{\chi}_x)$$

が定まる。これを**還元写像 (reduction map)** という。

4 Affinoid

この節では, k は常に非アルキメデス的体を表すことにする。

4.1 Affinoid 代数

4.1.1. 剛解析空間で使われるテイト代数を少し一般化して, 実数 $r_1, r_2, \ldots, r_n > 0$ に対して,

$$k\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\} = \left\{ f = \sum_{\underline{\nu}=0}^{\infty} a_{\underline{\nu}} \underline{T}^{\underline{\nu}} \;\middle|\; a_{\underline{\nu}} \in k, |a_{\underline{\nu}}| \underline{r}^{\underline{\nu}} \to 0, \text{ as } |\underline{\nu}| \to \infty \right\}$$

と表記することにする。ただし, $\underline{T}$, $\underline{r}$, $\underline{\nu}$ などは多重添字を表す。これには, $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} \underline{T}^{\underline{i}}$ に対して

$$\|f\| = \max_{\underline{i}} |a_{\underline{i}}|^{\underline{i}} \underline{r}^{\underline{i}}$$

と定めることで, ノルムが定義でき, このノルムについてバナッハ k 代数になる。

定義 4.1.2. バナッハ k 代数 $\mathcal{A}$ が **k-affinoid 代数**であるとは,

$$k\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\} \to \mathcal{A}$$

という admissible な全射があることである。ただし一般にバナッハ環の間の射 $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が admissible であるとは, $\mathrm{Im}(\varphi)$ と $\mathcal{B}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ が (それぞれに部分空間及び商空間としてのノルム入れたときに) 位相環として自然に同型になることを言う。

特に r_i を全て 1 に取れるとき, $\mathcal{A}$ は **strictly k-affinoid 代数**と呼ばれる。

補足 4.1.3. 剛解析空間の定義で普通使われる意味での k-affinoid 代数は, この記事でいう strictly k-affinoid 代数である。k-affinoid 代数 $\mathcal{A}$ が strictly k-affinoid 代数であることは, 任意の $f \in \mathcal{A}$ に対して, $\rho(f) \in \sqrt{|k^\times|} \cup \{0\}$ であることと同値である。ただし, $\sqrt{|k^\times|} = \{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid r^n \in |k^\times|\}$.

補足 4.1.4. 同様にして, 一般の可換バナッハ k-代数 $\mathcal{A}$ に対しても, $\mathcal{A}$-affinoid 代数が定義できる。

命題 4.1.5. 全ての k-affinoid 代数はネーターであり, そのイデアルは閉イデアルになる。

例 4.1.6. $r > 0$ として, k の付値が非自明な場合に $\mathcal{A} = k\{r^{-1}T\}$ のゲルファントスペクトラムを見てみよう。(これは, 半径 r の閉円板と見なせる。) $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ の点は次のようなタイプに分類されることがわかる。ただし, 簡単のため, k は代数閉体と仮定している。(一般の場合は, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A} \hat{\otimes}_k \hat{k}^{\mathrm{alg}}) / \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{alg}}/k)$ より様子が分かる。これは代数多様体の場合と同様。)

I) t_a: $f \mapsto |f(a)|$, $a \in k$, $|a| \le r$.

II) $t_{a,\rho}$: $f \mapsto |f|_{D(a,\rho^+)} = \max |a_n|\rho^n$, $|a| \le r$, $0 < \rho \le r$, $\rho \in |k^\times|$. (ただし, $f(T) = \sum a_n(T-a)^n$. また $|k^\times|$ は $k^\times$ の値群を表す。)

III) 上と同様だが, $\rho \notin |k^\times|$

IV) $\mathcal{E} = \{D^{(\rho)}\}$ を閉円板の族とする。ただし, ρ は $D^{(\rho)}$ の半径を表し, $\rho > \rho'$ なら, $D^{(\rho)} \supset D^{(\rho')}$ であるとする (このような族を **embedded disks** という)。このとき, $t_{\mathcal{E}}$ というセミノルムを $|f|_{\mathcal{E}} = \inf |f|_{D^{(\rho)}}$ で定める。もし, $\bigcap D^{(\rho)} = \emptyset$ であれば, これは上のどのタイプとも異なる。

不正確を承知で図を描いたものが, 図 4 である。大体のイメージはつかめると思う。また位相だが,

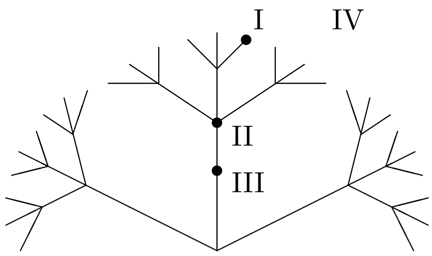


図 4　$\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$

絵が不正確なわけだから説明も不正確にならざるを得ないが, 枝という言葉で「ある点から葉の方向にある全ての部分」を表すことにすると, 大体「ある (根本なしの) 枝から, より細かい有限個の (根本ありの) 枝を取り去ったもの」が基本近傍系になっているような位相と言える。正確には,

(4.1.6.1) $$\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid |f_i(x)| < 1, |g_j(x)| > 1, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

$(f_i, g_j \in \mathcal{A})$ の形の部分集合全体を基本近傍系に取れる。

特に「根本の点」が閉点になる。この点は代数多様体の生成点とは正反対であるので注意。

補足 4.1.7. 上のことからわかるように, 円板が単連結なのはもちろん, アニュラスなども単連結になってしまう。

補足 4.1.8. embedded disks $\{D^{(\rho)}\}$ が必ず空でない共通部分を持つような付値体は, **球完備** (**spherically complete**) と呼ばれる。例えば完備離散付値体は, 球完備である。(これは, 付値が離散的なため, 円板の減少列の半径は, 0 に収束するのでなければ途中で一定になるためである。) この場合は, タイプ IV のケースは生じない。が, 一般の付値体では, 完備だからといって球完備とは限らない。剰余体と値群 $(\subset \mathbb{R}_{\ge 0})$ を変えない拡大を**隣接拡大** (**immediate extension**) という。付値体が非自明な隣接拡大を持たないとき, **極大完備** (**maximally complete**) という。非アルキメデス的な付値体においては, 極大完備であることは球完備であることと同値なので, そのような対象を扱う論文や本ではこれらの用語を区別せずに用いている場合がある。

4.2 Affinoid 領域

定義 4.2.1. $\mathcal{A}$ を k-affinoid 代数, $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ とする。X の閉部分集合 $V \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ が **affinoid 領域** (**affinoid domain** であるとは, ある k-affinoid 代数 $\mathcal{A}_V$ と, ある k-affinoid 代数の有界準同型 $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_V$ で, 任意の k-affinoid 代数の 有界準同型 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ で, $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ の X への像が V に含まれるようなものに対し, 次の図式を可換にするような 有界準同型 $\mathcal{A}_V \to \mathcal{B}$ が一意的に存在する, という普遍性を持つものがあることである。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{B} \\ & \mathcal{A}_V \arrow[ur, dotted, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

4.2.2. 別の言い方をすれば,

$$\{k\text{-affinoid 代数}\} \longrightarrow \mathrm{Sets};\ \mathcal{B} \mapsto \left\{\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \;\middle|\; \begin{tikzcd} \mathcal{M}(\mathcal{A}) & & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \arrow[ll] \arrow[dl, dotted] \\ & V \arrow[ul] & \end{tikzcd} \right\}$$

という関手が $\mathcal{A}_V$ で表現可能であるということであり, $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_V$ は普遍的な射である。明らかに $\mathcal{A}_V$ は一意的に決まり, $V = \mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ となることが証明され, V 自身が k-affinoid の スペクトラムになる。更に $\mathcal{A}_V$ は $\mathcal{A}$ 上平坦になる。

4.2.3. k や $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ はやはり上と同様として, U, V を affinoid 領域とするとき, $U \cap V$ も affinoid 領域になり, これは $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_U \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_V$ によって表現される。

4.2.4. $\mathcal{A}$ を k-affinoid 代数とし, $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ とする。$f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{A}$, $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{A}$, $p_1, \ldots, p_m$, $q_1, \ldots, q_n$ を実数とするとき,

$$X(p^{-1}f, qg^{-1}) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \le p_i,\ |g_j(x)| \ge q_j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\} \tag{4.2.4.1}$$

$$= \mathcal{M}(\mathcal{A}\{p^{-1}T, qS\}/(T - f, gS - 1)) \qquad (\text{多重添字表記}) \tag{4.2.4.2}$$

は X の affinoid 領域になる。これを**ローラン領域** (**Laurent domain**) という。特に $n = 1, g = 1$ の場合は, $X(p^{-1}f)$ と書いて, **ワイエルストラス領域** (**Weierstrass domain**) という。

同様に, g, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$ を共通零点を持たないような (つまり $\mathcal{A}$ を生成する) 要素とし, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ を正の実数の組とする。このとき,

$$X\Big(p^{-1}\frac{f}{g}\Big) = \{x \in X \mid |f_i(x)| \le p_i|g(x)|,\ 1 \le i \le n\} \tag{4.2.4.3}$$

$$= \mathcal{M}(\mathcal{A}\{p^{-1}T\}/(gT - f)) \tag{4.2.4.4}$$

はやはり affinoid 領域になる。これを**特殊領域** (**special domain**) という。

U, V がともにワイエルストラス領域, ローラン領域, 特殊領域なら, $U \cap V$ も同じタイプの領域になる。特にローラン領域は特殊領域になる。

4.2.5. X を上の通りとして, 任意の $x_0 \in X$ の基本近傍系として

$$U = \{x \in X \mid |f_i(x)| < p_i,\, |g_j(x)| > q_j,\, 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n\} \tag{4.2.5.1}$$

という形のものが取れる。これは $X(p^{-1}f, qg^{-1})$ に含まれ, 更に, $|f_i(x_0)| < r_i < p_i$, $|g_j(x_0)| > s_j > q_j$ なるように r, s を選べば, $V = \{x \in X \mid |f_i(x)| < r_i,\, |g_j(x)| > s_j,\, 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n\}$ として $V \subset X(p^{-1}f, qg^{-1}) \subset U$ となるので, affinoid 空間の中では, affinoid 領域からなる閉近傍の基本近傍系が存在する。なお, 後で述べるように, 一般の Berkovich 空間ではそうではない。

4.3 Affinoid 空間

4.3.1. k-affinoid 代数の間の射 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があると, そのゲルファントスペクトラムの間の射 $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ができる。これはすぐに確かめられるように連続なので, k-affinoid 代数の圏から位相空間の圏への自然な関手ができる。

定義 4.3.2. k-affinoid 空間の圏を, k-affinoid 代数の圏の双対として定義する。また, Strictly k-affinoid 代数に対する k-affinoid 空間を **strictly k-affinoid 空間**いう。

以降ではしばしば $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ で, 対応する affinoid 空間そのものを表す。区別のために底空間を $|X|$ と書くこともある。

4.3.3. $\mathcal{A}$ を k-affinoid 代数, $\{V_i\}_{i \in I}$ を $V = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ の k-affinoid 領域による有限被覆とする。次の二つの定理は, これらの空間に環付空間の構造を載せ, その性質を調べる際に極めて基本的である。

定理 4.3.4 (Tate's Acyclicity Theorem)**.** 任意の有限 $\mathcal{A}$ 加群 M に対し, 次の Čech 複体は完全かつ admissible である (*cf.* 4.1.2)。

$$0 \to M \to \prod_i M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i} \to \prod_{i,j} M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i \cap V_j} \to \cdots .$$

定理 4.3.5 (Kiehl)**.** 各 $i \in I$ に対し有限 $\mathcal{A}_{V_i}$ 加群 M_i が与えられ, 各 $i, j \in I$ に対し, $\mathcal{A}_{V_i \cap V_j}$ 加群の同型 $\alpha_{ij} : M_i \otimes_{\mathcal{A}_{V_i}} \mathcal{A}_{V_i \cap V_j} \simeq M_j \otimes_{\mathcal{A}_{V_j}} \mathcal{A}_{V_i \cap V_j}$ で, cocycle 条件 ($\alpha_{il|W} = \alpha_{jl|W} \circ \alpha_{ij|W}$, $W = V_i \cap V_j \cap V_l$, $i, j, l \in I$) が成立するなら, 有限 $\mathcal{A}$ 加群 M で $\mathcal{A}_{V_i}$ 加群 M_i と α_{ij} を与えるようなものが存在する。

4.3.6. $\mathcal{A}$ を strictly k-affinoid 代数とするとき, 極大スペクトラムの点 $x \in \mathrm{Spm}(\mathcal{A})$ に対して, $\mathcal{A}/x$ は k 上有限であるから, k の付値が一意的に伸びる。従って標準的に $\mathrm{Spm}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$ という単射が存在する。特に k の付値が非自明なら, これは到る所稠密な部分集合への同相写像になる。(稠密になることは, 基本近傍系が (4.2.5.1) の形に取れて, これが $\mathrm{Spm}(\mathcal{A})$ の点を含むことから自明。)

5 (Berkovich) 解析空間

5.0.7. Berkovich 空間を構成する部品となるゲルファントスペクトラムの位相は, いろいろな観点から好ましいものである。その一方で, ゲルファントスペクトラムを貼り合わせて一般の Berkovich 空間を構成しようとすると, ある問題が生じる。それは, 局所有限型な形式スキームに付随するような解析空間を扱おうとすると, 必ずしも任意の点がアフィノイド近傍を持つわけではないということである (*cf.* 5.3.13)。このことから, 通常の貼り合わせのテクニックが使えなくなるのである。このようなことが起きるのは, ゲルファントスペクトラムの位相では, 特殊領域は必ずしも開ではないことと, 剛解析空間よりも点が増えているためである。例えば, 半径 1 の閉円板 $\mathcal{M}(K\{T\})$ を考えよう。例 4.1.6 の記号で, $t_{0,1}$ という点は $\mathcal{M}(K\{T, 1/T\})$ に属するが, この点を含む開集合は決して $\mathcal{M}(K\{T, 1/T\})$ には含まれない。これは, 剛解析空間では生じなかった事象である。この問題を解決するために, Berkovich は net という概念を用いた [Ber93]。これによって閉集合でも貼り合わせが可能になる。

5.1 net

5.1.1. 最初に位相空間の被覆 (貼り合わせ) の概念を少し拡張する。

定義 5.1.2 (quasi-net)**.** 位相空間 X の部分集合の族 τ が **quasi-net** とは任意の $x \in X$ が x を含む有限個の $V_i \in \tau$ の和集合の形の近傍を持つことである。net τ の要素は **brick** と呼ばれる。

例 5.1.3. $\mathbb{R}$ に対し $\tau = \{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は quasi-net.

5.1.4. quasi-net τ に対し X の部分集合 V への τ の制限を $\tau|_V = \{W \in \tau \mid W \subset V\}$ で定める。$V \subset X$ が **τ-admissible** とは, $\tau|_V$ が V の (相対位相についての) quasi-net になることである。

定義 5.1.5 (net)**.** quasi-net τ が **net** とは, 有限個の brick の共通部分が τ-admissible であることである。さらに, 任意の $V \in \tau$ に対し $x \in V$ が $\tau|_V$ からなる基本近傍系を持つとき, τ は**稠密** (**dense**) であるという。

例 5.1.6.
(1) $\mathbb{R}$ に対し, $\tau = \{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は net ではない。(たとえば $\{0\} = [-1, 0] \cap [0, 1]$ に対し, $\tau|_{\{0\}} = \emptyset$ は quasi-net ではない。)
(2) X が位相空間のとき, X の開集合全体 $\mathcal{O}$ は net.
(3) X をアフィノイド, τ を X のアフィノイド領域全体とすると, τ は net.

5.1.7. すぐにわかるように τ が net なら, その τ-admissible な部分集合への制限は net になる。また, $\tau \subset \{\tau\text{-admissible 集合}\}$ である。

補題 5.1.8. τ が X の quasi-net のとき, $V \subset X$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\forall W \in \tau$, $V \cap W$ が W の開集合。

定義 5.1.9. τ-admissible な部分集合 V の τ-admissible な部分集合による被覆で, V の quasi-net にもなっているものを **τ-admissible 被覆** (**τ-admissible covering**) という。

5.1.10. X に net τ が与えられると, τ-admissible 部分集合と τ-admissible 被覆は τ を基とするような Grothendieck 位相を定める。それだけではなく, [BGR84, 9.1.2] にある条件 G_0, G_1, G_2 を満たす。

(G_0) $\emptyset$ と X は τ-admissible.

(G_1) $U \subset X$ が τ-admissible で $V \subset U$ を部分集合とする。U の τ-admissible 被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ で任意の $i \in I$ に対し $V \cap U_i$ が X 内で τ-admissible ならば, V も τ-admissible. (つまり, admissibility が局所的な条件ということ。)

(G_2) $\{U_i\}$ を $U \subset X$ の τ-admissible 被覆で, 任意の U_i が τ-admissible なものとする。更に $\{U_i\}$ が τ-admissible な細分を持つとするとき, $\{U_i\}$ は U の τ-admissible 被覆となる。

ゲルファントスペクトラムは通常の位相を持つ空間ではあるのだが, 解析空間を構成する際は Grothendieck 位相を持つ空間として貼り合わせるのが自然である。上の条件は, そのために大切になる *cf.* [BGR84, 9.1]。

5.2 Φ

次に解析空間を構成する部品としての k-affinoid 代数のクラスを考える。もっとも解析空間の定義だけなら, この節の内容はとばしても構わない。

5.2.1. K が k 上の勝手な非アルキメデス的体を動く時に, 次の条件を満たす K-affinoid 空間の系のクラス $\Phi = \{\Phi_k\}$ を考える。

(1) $\mathcal{M}(K) \in \Phi_K$

(2) Φ_K は同型と直積に対して閉じている。

(3) $\varphi : Y \to X$ を K-affinoid 空間の有限射とするとき, $X \in \Phi_K$ なら $Y \in \Phi_K$.

(4) $\{V_i\}_{i\in I}$ が $V_i \in \Phi_K$ となるような K-affinoid 空間 X の有限 affinoid 被覆とするとき, $X \in \Phi_K$.

(5) $K \subset L$ を非アルキメデス的な体 K 上の体の等長な埋め込みとするとき, 任意の $X \in \Phi_K$ に対し, $X \hat{\otimes}_K L \in \Phi_L$.

このようなクラス Φ (Φ_K) に属する affinoid は Φ (Φ_K)-affinoid と呼ばれる。(2), (3) より Φ_K はファイバー積について閉じていることがわかる。特に $\varphi : Y \to X$ が Φ_k-affinoid 空間の射で, $V \subset X$ が $V \in \Phi_k$ なら, $\varphi^{-1}(V) \in \Phi_k$ となる。

更に, 各 $X \in \Phi_k$ が $V \in \Phi_k$ からなる基本近傍系を持つ場合は, Φ_k は**稠密** (**dense**) と言われる。

補足 5.2.2. これらを使って一般の Φ 解析空間を構成するわけだが, 実際には, 大抵の場合 Φ_k と

しては全ての k-affinoid を考える。その場合は Φ は省略して単に解析空間と言う。上の性質を持つクラスとして,「全ての strictly k-affinoid 空間」がある。これは稠密でもある。この場合は, Φ 解析空間という代わりに **strictly 解析空間**といい, 古典的な剛空間との比較に使われる。§6 参照。

5.3 解析空間の定義

前節を跳ばした人は, Φ- などを無視して読んで下さい。

5.3.1. X を局所ハウスドルフ[*3]な位相空間, τ をコンパクトな部分集合からなる net とする。

定義 5.3.2 (アトラス)**.** X の net τ に関する Φ_K-affinoid 空間の**アトラス** (**atlas**) $\mathcal{A}$ とは, 各 $V \in \tau$ に対して Φ_K-affinoid 代数 $\mathcal{A}_V$ と同相写像 $V \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ を割り当て, $U, V \in \tau$ で $U \subset V$ なるものに対して k-affinoid の有界準同型の射 $\alpha_{V/U} : \mathcal{A}_V \to \mathcal{A}_U$ で, $(U, \mathcal{A}_U)$ を $(V, \mathcal{A}_V)$ の affinoid 領域と同一視させるようなものに割り当てる写像のことである。

Affinoid 領域の普遍性 (4.2.1) から, $U, V, W \in \tau$ を $U \subset V \subset W$ となる三つ組とするとき, $\alpha_{W/U} = \alpha_{V/U} \circ \alpha_{W/V}$ となることに注意。

結果的に, アトラス $\mathcal{A}$ から, τ の上の Φ_k-affinoid 代数の前層ができる。以下では $\mathcal{A}$ をこの前層と同一視することがある。

定義 5.3.3 (Φ_k 解析空間)**.** 上のような三つ組 $(X, \mathcal{A}, \tau)$ を Φ_k **解析空間** (**Φ_k-analytic space**) と呼ぶ。

5.3.4. X に対するアトラスには自然に順序が入る。即ち, $\tau \subset \tau'$ かつ $\mathcal{A}'|_\tau = \mathcal{A}$ であるとき, $(\mathcal{A}, \tau) \prec (\mathcal{A}', \tau')$ と定める。すると, アトラスの中で標準的に極大なものが存在する (ここの証明にも定理 4.3.4 が使われる)。これを $\hat{\mathcal{A}}, \hat{\tau}$ で表す。アトラスとしては常にこの極大なものを考えると, 射の合成や圏の定義に都合が良い。

補足 5.3.5. $\hat{\tau}$ は, 次のようにして定まる。

(5.3.5.1) $$\bar{\tau} = \{W \mid W \text{ はある } V \text{ の中の } \Phi\text{-affinoid 領域}\}$$

(5.3.5.2) $$\hat{\tau} = \left\{ W \;\middle|\; \begin{array}{l} W \text{ は } \bar{\tau}\text{-special, } \mathcal{A}_W \text{ は } k\text{-affinoid 代数, } W \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A}_W) \\ \text{更に } W \text{ の } \bar{\tau}\text{-special 被覆 } \{W_i\} \text{ で, } (W_i, \mathcal{A}_{W_i}) \text{ が } W \\ \text{の affinoid 領域であるものが存在} \end{array} \right\}$$

ただし, ここで, $W \subset X$ が τ-special とは, W がコンパクトかつ $W = \bigcup W_i$ という有限被覆で W_i, $W_i \cap W_j \in \tau$ かつ $\mathcal{A}_{W_i} \hat{\otimes} \mathcal{A}_{W_j} \to \mathcal{A}_{W_i \cap W_j}$ が admissible な全射であるようなものが存在すること。また, W の τ-special 被覆とは, 上のような被覆のこと。

定義 5.3.6. Φ 解析空間の圏は, 対象は極大アトラスを持つ解析空間とし, Φ 解析空間 $(X, \mathcal{A}, \tau)$, $(X', \mathcal{A}', \tau')$ 間の射は連続写像 $\varphi : X \to X'$ で任意の $V \in \tau$ に対して $V' \in \tau'$ で $\varphi(V) \subset V'$ と

[*3] 各点がハウスドルフな近傍を持つこと。

なるようなものが存在するようなものと, $\varphi(V) \subset V'$ となる $V \in \tau$, $V' \in \tau'$ の全ての組に対する k-affinoid の射 $\varphi_{V/V'} : (V, \mathcal{A}_V) \to (V', \mathcal{A}_{V'})$ の compatible な系 $\{\varphi_{V/V'}\}$ の組 $(\varphi, \{\varphi_{V/V'}\})$ のこととして定義できる。k 上の Φ_k 解析空間の圏を Φ_k-$\mathcal{A}n$ で表す。

特に Φ_k が全ての k-affinoid 代数の場合は, k-$\mathcal{A}n$, また全ての strictly k-affinoid 代数の場合は st-k-$\mathcal{A}n$ と書く。

Affinoid 空間の射が連続なことと 補題 5.1.8 から, 解析空間の間の射は常に連続写像になることがわかる。

補足 5.3.7. 対象としてアトラスが必ずしも極大アトラスではない解析空間も含めて考える場合, 上で考えた射は強型射 (**strong morphism**) と呼ばれる。この場合, 解析空間の圏は, $\mathrm{Hom}((X, \mathcal{A}, \tau), (X', \mathcal{A}', \tau'))$ を強型射の集合として定義した圏を, 極大アトラスで考えると同型になるような射の集合で局所化して得られる。

以下では, 必ずしも極大アトラスでない解析空間も考えるが, 圏としては常に上のようなものを考える。

補足 5.3.8. Φ_k-$\mathcal{A}n$ から k-$\mathcal{A}n$ への自然な関手がある。これは忠実ではあるが, 忠実充満かどうかはわかっていない。[*4]これに関しては次の結果がある。

定義 5.3.9. 任意の $x \in X$ が Φ-affinoid (閉) 近傍を持つような Φ 解析空間は, **good** であるという。

5.3.10. 4.2.5 より, affinoid な近傍が一つでもあれば affinoid な (閉近傍の) 基本近傍系が存在する。従って, good であることは各点に affinoid からなる (閉近傍の) 基本近傍系が取れることと同値になる。

例 5.3.11. affinoid 空間や, 代数多様体の解析化は good である (*cf.* 7.1.3)。また, 5.3.10 より, これらの開部分空間も good になる。

命題 5.3.12. 4.2.2 でも説明したように, A を k アフィノイド代数とするとき, 閉部分集合 $V \subset \mathcal{M}(A)$ がアフィノイド領域であれば, それに対してアフィノイド代数 $\mathcal{A}_V$ が決まり, $V \simeq \mathcal{M}(\mathcal{O}_V)$ となる。これは閉部分集合 V がアフィノイド領域であるための十分条件にもなっている。これに注意して good でない空間の例を作ろう。

例 5.3.13. $\mathcal{M}(k\{S, T\})$ の中の $X = \mathcal{M}(k\{S, S^{-1}, T\})$, $Y = \mathcal{M}(k\{S, T, T^{-1}\})$ という affinoid 領域を考えると, $X \cup Y$ は good ではない。実際, $X \cap Y = \mathcal{M}(k\{S, S^{-1}, T, T^{-1}\})$ の「生成点」($x_0 : \sum a_{ij} S^i T^j \mapsto \max |a_{ij}|$) を考えると, この点を含むような affinoid (閉) 近傍は存在しない。例えば $\mathrm{Ker}(k\{S, S^{-1}, T\} \times k\{S, T, T^{-1}\} \to k\{S, S^{-1}, T, T^{-1}\}) \simeq k\{S, T\})$ より, $X \cup Y$ 自体は affinoid でないことが分かるが, もし, 上のような近傍 V があれば, $V \cap X$ や $V \cap Y$ は x_0 の

[*4] 最近, ある学生によって証明されたと聞いた (19/Nov/2001)。

affinoid 近傍になるので, 同様の理由で $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \subset X \cap Y$ となることが分かり x_0 を含む開集合を含めなくなるからである。

上の空間は, k° を k の整数環として形式スキーム $\mathrm{Spf}(k^\circ\{S, S^{-1}, T\})$ と $\mathrm{Spf}(k^\circ\{S, T, T^{-1}\})$ を, その開部分形式スキーム $\mathrm{Spf}(k^\circ\{S, S^{-1}, T, T^{-1}\})$ に沿って貼り合わせたものなので, 形式スキームの生成ファイバーを考えると自然に出てくるものである。従って, 生成ファイバーを考えるには, good な多様体のみでは狭すぎるというわけである。

命題 5.3.14. X, Y を Φ_k 解析空間とし, Φ_k は稠密で X は good とする。このとき任意の k 解析空間の射 $\varphi : Y \to X$ は, Φ_k 解析空間の射になる。

補足 5.3.15. [Ber90] で定義した解析空間は, ここで定義した解析空間のうち good なものと一致する [Ber93, 1.5]。そのようなものに制限して考えれば, strictly k 解析空間の圏から k 解析空間の圏への自然な関手は忠実充満なので, 矛盾は起きていない。また, good という条件は, Grothendieck 位相と通常の位相との関係においても重要である。§5.5, 特に命題 5.5.9 や 命題 5.5.10 を参照。

補足 5.3.16. $\{\Phi_k\text{-affinoid 空間}\} \to \Phi_k\text{-}\mathcal{A}n;\ X = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mapsto (X, \mathcal{A}, \{X\})$ という関手は忠実充満.

補足 5.3.17. 次節以降で Φ 解析空間に構造層を定義する。すると $\Phi_k\text{-}\mathcal{A}n$ から局所環付空間の圏への関手ができるが, これは忠実充満ではない。が, 特に $k\text{-}\mathcal{A}n$ の場合は, 局所半付値付環付空間の圏へは忠実充満に埋め込める (*cf.* 5.6)。従って, この圏の充満部分圏としても解析空間の圏を定義できる。

$(X, \mathcal{A}, \tau)$ を Φ 解析空間, $\hat{\tau}$ を補足 5.3.5 で定義された極大アトラスの net とする。

定義 5.3.18. $\hat{\tau}$ の要素を **Φ-affinoid 領域** (**Φ-affinoid domain**) と言う。

定義 5.3.19. $\hat{\tau}$-admissible な部分集合 Y (*cf.* 定義 5.1.2) を **Φ 解析領域** (**Φ-analytic domain**) と呼ぶ 。

$\hat{\tau}|_Y$ は net になり, $\mathcal{A}|_Y$ という Φ_k アトラスも自然に定義でき, $(Y, \mathcal{A}|_Y, \tau|_Y)$ もまた Φ 解析空間と見なせ, $Y \to X$ という標準的な Φ_k 解析空間の射がある。

特に上の射が X の開集合への同型を誘導する場合を**開埋め込み** (**open immersion**) という。

もし Φ_k が稠密なら全ての開集合は Φ 解析領域になるが, 逆は必ずしもいえない。

定義 5.3.20 ($\mathbb{A}^n$)**.** n 次元**アファイン空間** (**affine space**) $\mathbb{A}^n_k$ を $k[T_1, \ldots, T_n]$ の全ての乗法的セミノルム全体の空間に, 3.1.1 と同様に位相を入れたものとして定義する。$E(0; r_1, \ldots, r_n) = \{x \in \mathbb{A}^n \mid |T_i(x)| \le r_i\}$ という閉円板がアトラスになる。これは, good な k 解析空間になる。

補足 5.3.21. 上のようにして定義した場合, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^n$ と同型になり, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{C}^n$ の複素共役による商空間になる。

5.4 貼り合わせ定理

5.4.1. 以上のように解析空間を定義すると, いくつかの解析空間を閉部分集合に沿って貼り合わせることができる。§8 で見るように, 形式スキームの生成ファイバーを構成するには, このような貼り合わせが必須になる。それが, [Ber93] で, [Ber90] での解析空間の定義をより一般化した理由である。

5.4.2. $\{X_i\}_{i\in I}$ を Φ_k 解析空間の族とし, 各 $i, j \in I$ に対して $X_{ij} \subset X_i$ という Φ 解析領域と $\nu_{ij} : X_{ij} \simeq X_{ji}$ という同型で, $X_{ii} = X_i$, $\nu_{ij}(X_{ij} \cap X_{ji}) = (X_{ji} \cap X_{ij})$ かつ $X_{ij} \cap X_{il}$ の上では $\nu_{il} = \nu_{jl} \circ \nu_{ij}$ となるものが与えられたとする。

もし Φ_k 解析空間と $\mu_i : X_i \to X$ という射の族で次の条件をみたすものが存在するなら, それは X_i を X_{ij} に沿って貼り合わせた空間であるという。

(1) μ_i は X_i から X の Φ 解析領域への同型。
(2) $\bigcup_i \mu_i(X_i) = X$。
(3) $\mu_i(X_{ij}) = \mu_i(X_i) \cap \mu(X_j)$。
(4) X_{ij} の上では $\mu_i = \mu_j \circ \nu_{ij}$。

定理 5.4.3. 次の場合に (同型の違いを除いて一意的に) 貼り合わせが存在する。

(a) X_{ij} は X_i の開集合。
(b) 任意の $i \in I$ に対し, $X_{ij} \subset X_i$ は閉でかつ $X_{ij} \neq \emptyset$ となる $j \in I$ は有限個。

更に, (a) の場合は $\mu_i(X_i)$ は X 内で開である。また (b) の場合は $\mu_i(X_i)$ は X 内で閉であり, X_i がハウスドルフ (*resp.* パラコンパクト) であれば, X もハウスドルフ (*resp.* パラコンパクト) になる。

5.5 Grothendieck 位相と連接層

この節では Φ_k は稠密と仮定する。

5.5.1. $(X, \mathcal{A}, \tau)$ を Φ_k 解析空間とする。定義 5.1.9 の後の注意にあるように, 極大アトラスの net $\hat{\tau}$ から X に Grothendieck 位相 (以下, G 位相) が入る。定義から admissible な部分集合とは Φ_k 解析領域のことで, また Φ_k 解析領域 V の admissible 被覆とは Φ_k 解析領域による被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ で quasi-net になっているもの, 即ち, 任意の $x \in V$ に対して $V_1, \ldots, V_n$ で, $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$ かつ $\bigcup_{i=1}^n V_i$ が開集合であるようなものが存在するようなものである。

この位相に対する site を X_G で表す。連接層を考えるには, これが自然な枠組になる。X が good でない場合には, 通常の X の位相での連接層は自然ではない (*cf.* 命題 5.5.10)。

5.5.2. Φ_k affinoid 空間の admissible 被覆は, 有限 affinoid 被覆で細分できる。これは定義と affinoid 空間のコンパクト性からすぐでる。

5.5.3. Φ_k は稠密と仮定したので, 5.3.19 の後の注意より, 開集合は Φ_k 解析領域になり, また開集合による被覆は admissible 被覆になるので, $\pi : X_G \to X$ という自然な連続写像がある。ここから, $(\pi^*, \pi_*) : \widetilde{X_G} \to \widetilde{X}$ というトポスの写像ができる。π_* は単なる制限写像である。π^* の方は X の層 F に対して, affinoid 領域 V においては

$$\pi^* F(V) = \varinjlim_{\mathcal{U} \supset V} F(\mathcal{U}); \qquad \mathcal{U} \text{ は } V \text{ の開近傍を動く}$$

となるものとして定まる。$F \simeq \pi_* \pi^* F$ となることがすぐ確かめられ, π^* は忠実充満になる。一方, π_* はそうではない (*cf.* 例 5.5.12)。

命題 5.5.4. X を Φ_k 解析空間, $\{Y_i\}$ を X の τ-admissible 被覆とするとき, 任意の Φ_k 解析空間 X' に対して次は完全。(即ち第 1 項が右の写像の核。)

$$\mathrm{Hom}(X, X') \to \prod_i \mathrm{Hom}(Y_i, X') \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathrm{Hom}(Y_i \cap Y_j, X').$$

上で X' が $\mathbb{A}^1$ (定義 5.3.20) である場合を考えると, X の τ-admissible な部分集合 U に対して $\mathcal{O}_{X_G}(U) = \mathrm{Hom}(U, \mathbb{A}^1)$ と定めることで, X_G 上の構造層が定義できる。($\mathbb{A}^1$ が good であることから, Hom は Φ によらないことに注意[*5]。) U が affinoid $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ である場合は, $\mathcal{O}_{X_G}(U) = \mathcal{A}_U$ となるので, $\mathcal{O}_{X_G}$ は前層と見なしたアトラス $\mathcal{A}$ の延長になっている。

定義 5.5.5. X の**構造層**を $\mathcal{O}_X = \pi_* \mathcal{O}_{X_G}$ で定義する。

5.5.6. $\mathcal{O}_{X_G}$-module は, ある Φ-affinoid 領域の quasi-net τ が存在して各 $V \in \tau$ に対して $\mathcal{O}_{X_G}|_{V_G}$ が階数有限の自由 $\mathcal{O}_{X_G}$ 加群の準同型の余核と同型なとき, **連接層 (coherent sheaf)** であるという。

同様に $\mathcal{O}_X$ 加群についても, (通常の位相に対して) 局所的に階数有限の自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の余核と同型になるとき, 連接層であるという。

5.5.7. $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ の時は勝手な有限 $\mathcal{A}$ 加群 M に対して, $\mathcal{O}_{X_G}(M)$ を $\tau \ni V \mapsto M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_V$ で定義すると, 連接層ができる。Kiehl の定理 (定理 4.3.5) より, X_G の全ての連接層はこのようにしてできるものと同型であることがわかる (5.5.2 にも注意)。Tate acyclicity (定理 4.3.4) より, このような M は同型を除いて一意に決まる。従って, 連接層 F に対して, その**台 (support)** $\mathrm{supp}(F)$ を $F = \mathcal{O}_{X_G}(M)$ なる M の annihilator として定義することができる。X が一般の解析空間の場合も, $x \in V$ なる affinoid 領域では $\mathrm{supp}(F|_{V_G})$ として定義できる。

定理 5.5.8 (Theorem B)**.** $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を affinoid 空間とする。$\mathcal{F}$ を X_G の連接層とすると, 任意の $q > 0$ に対して $\mathrm{H}^q(X_G, \mathcal{F}) = 0$.

[*5] 補足 5.3.8 の脚注により, この註は無駄になりそうだが。

命題 5.5.9. X が good Φ_k 解析空間のとき,

(1) $\mathcal{O}_X$ 加群 F に対し $F \simeq \pi_*(\pi^* F \otimes_{\pi^*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_G})$. 特に, $F \mapsto F_G := \pi^* F \otimes_{\pi^*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_G}$ は忠実充満.

(2) $F \mapsto F_G$ は $\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{Coh}(X_G)$ を誘導する。ここで, Coh( ) は連接層の圏を表す。

(3) F が局所自由 $\Leftrightarrow$ F_G が局所自由。

命題 5.5.10. (1) X 上の任意のアーベル加群の層 F に対し, $\mathrm{H}^q(X, F) \simeq \mathrm{H}^q(X_G, \pi^* F)$, $q \geq 0$.

(2) X が good なら任意の連接層 F に対し, $\mathrm{H}^q(X, F) \simeq \mathrm{H}^q(X_G, F_G)$, $q \geq 0$.

(3) X がパラコンパクトなら, 任意の群の層 F に対し $\check{\mathrm{H}}^1(X, F) \simeq \check{\mathrm{H}}^1(X_G, \pi^* F)$.

(証明). (i) 開被覆 $\{U_i\}$ を考えると, これは admissible 被覆にもなっているので,

$$\check{\mathrm{H}}^p(\{U_i\}, \mathcal{H}^q(F)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(F),$$
$$\check{\mathrm{H}}^p(\{U_i\}, \mathcal{H}^q(\pi^* F)) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(X_G, \pi^* F)$$

というスペクトル系列を考えれば, 問題を「局所的に」(*i.e.* $\mathcal{H}^q$ で) 考えることができる。特に X はパラコンパクトと仮定して良い。F が入射的として, $q > 0$ に対し $\mathrm{H}^q(X_G, \pi^* F) = 0$ を示せば良い。パラコンパクトの仮定より, チェックコホモロジーで確かめてよいが[*6], この場合, $\pi^* F(V) = \varinjlim_{V \subset \mathcal{U}} F(\mathcal{U})$ に注意すれば, これは F のチェックコホモロジーと一致する。

(ii) 上と同様の理由で, 更に good の仮定から X は affinoid 空間の中の開集合と仮定しても構わない。定理 5.5.8 より, $\{V_i\}$ という局所有限 affinoid 被覆に対して $\mathrm{H}^q(X_G, F_G) = \check{\mathrm{H}}^q(\{V_i\}, F_G)$ となる。(affinoid 空間の中では, affinoid 領域と affinoid 領域の共通部分はまた affinoid 領域になることに注意。) 後は, 一般に $\{\mathcal{U}_i\}$ という開被覆があった時に, その局所有限な affinoid $\{V_i\}$ 被覆による細分で, $\bigcup_i (V_i/X) = X$ となるものが取れることから明らか。

(iii) は自明なので略。 □

補足 5.5.11. たとえ X が good であってもトポスの射 $\widetilde{X_G} \to \widetilde{X}$ は同型とは限らない。これは π_* が忠実充満ではないことから分かる。次の例を参照。

例 5.5.12. $X = D(0, 1^+) \subset \mathbb{A}^1$ とするとき, x_0 を $D(0, 1^+)$ という円板に対応する点 (つまり $k\{T\}$ のノルムに対応する点) とするとき, X_G 上の層 F, F' を次のように定める。

$$F(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & x_0 \in Y \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{5.5.12.1}$$

$$F'(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \{x \in X \mid r < |T(x)| < 1\} \cup \{x_0\} \subset Y \text{ for } 0 < \exists r < 1 \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{5.5.12.2}$$

X_G の中では $\{x_0\}$ を含んでかつ $\{x \in X \mid r < |T(x)| < 1\}$ を含まないような affinoid 領域として $\mathcal{M}(k\{T, T^{-1}\}) \subset X$ などが取れるので, F と F' は同型ではない。一方, X では x_0 を含む開

[*6] パラコンパクトならチェックコホモロジーは通常のコホモロジーと一致する。

集合は全て $\{x \in X \mid r < |T(x)| < 1\}$ の形の集合を含むので (*cf.* (4.1.6.1)) $i : \{x_0\} \to X$ を埋め込み写像とすると, $\pi_* F \simeq \pi_* F' \simeq i_* \mathbb{Z}$ となる。

5.6 局所半付値付環付空間

定義 5.6.1. k 上の **局所半付値付環付空間** (**locally semi-valued ringed space**) とは, G 位相を持つ k 代数の環付空間であって, 各 $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ に半付値 (付値で, $\|x\| = 0$ なら $x = 0$ という条件を必ずしも仮定しないものを特に半付値という。もっともこの意味での半付値を付値と呼ぶことも多い) が付随しているものである。射は, G 環付空間の射で, 局所環の射が半付値を保つものとして定義する。

5.6.2. X を k 上の解析空間とするとき, X_G は局所半付値付 G 環付空間とみなせる。実際, $x \in X$ に対して,

$$\mathcal{O}_{X_G,x} = \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}(V) \qquad \text{ただし}, V \text{ は affinoid 部分領域を動く}$$

なので, $|f| = |f(x)|$ として半付値が定義できる。

5.6.3. 解析空間の間の射は, 局所半付値付 G 環付空間の中での射と同一視できる。[*7]従って, 解析空間を局所的に affinoid 空間と同型であるような局所半付値付 G 環付空間として定義することもできる。

5.7 ファイバー積と基礎体変換

定理 5.7.1. [Ber93, 1.4.1] Φ_k-$\mathcal{A}n$ にはファイバー積が存在する。

$f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ を Φ_k 解析空間の射とする。底空間をそれぞれ $|X|, |Y|, |Z|$ で表すことにすると, 自然な連続写像 $|X| \times_{|Z|} |Y| \to |X \times_Z Y|$ が存在する。この写像はコンパクト[*8]になる。

5.7.2. K を k 上の非アルキメデス的体とするとき, Φ_k-$\mathcal{A}n \to \Phi_K$-$\mathcal{A}n$; $X \mapsto X \hat{\otimes}_k K$ という自然な関手および, コンパクト射 $X \hat{\otimes}_k K \to X$ が存在する。

5.8 いくつかの射のクラス

定義 5.8.1. $\varphi : Y \to X$ を Φ 解析領域の間の射とする。任意の Φ-affinoid 領域 $V \subset X$ に対して $\varphi^{-1}(V) \to V$ が k-affinoid 空間の有限射 (*resp.* 閉埋め込み) のとき, φ を**有限射** (**finite morphism**) (*resp.* **閉埋め込み** (**closed immersion**)) という。

[*7] Bernard Le Stum 氏に教えていただいた。
[*8] コンパクト部分集合の逆像がコンパクト

これは, 任意の点 $x \in X$ に対し $\bigcup_{i=1}^r V_i$, V_i は Φ-affinoid 領域, という形の近傍で $x \in \bigcap V_i$ なるものがあって, $\varphi^{-1}(V_i) \to V_i$ が有限射ないしは閉埋め込みという条件と同値である。

定義 5.8.2. $\varphi : Y \to X$ が **G 局所 (*resp.* 局所) 閉埋め込み (G-locally immersion)** とは, Y の Φ_k 解析領域 (*resp.* 開 Φ_k 解析領域) の quasi-net τ が存在し, 任意の $W \in \tau$ に対して X の Φ_k 解析領域 (*resp.* 開 Φ_k 解析領域) V が存在し, φ が $V \to U$ という閉埋め込みを誘導すること。

補足 5.8.3. Φ_k が稠密なら明らかに G-局所閉埋め込みは局所閉埋め込みになる。また good な空間の間の射に関しては, 5.3.10 より逆も成立する。

定義 5.8.4. Φ_k 解析空間の射 $X \to Y$ がハウスドルフとは $\triangle_{|X|/|Y|} : |X| \to |X| \times_{|Y|} |X|$ の像が閉であることとして定める。特に $X \to \mathcal{M}(k)$ がハウスドルフのとき, X 自身がハウスドルフであるという。これはもちろん底空間 $|X|$ が通常の位相空間としてハウスドルフであることと同値である。

定義 5.8.5. Φ_k 解析空間の射 $X \to Y$ が**分離的 (separated)** とは $\triangle_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ が閉埋め込みであることとして定める。特に $X \to \mathcal{M}(k)$ が分離的のとき, X 自身が分離的であるという。

局所コンパクト空間へのコンパクト射は閉集合を閉集合に写すので, 定理 5.7.1 の後の注意から分離的な射はハウスドルフになる。(この文章ではコンパクトというときはハウスドルフも仮定していたことに注意)。が, 逆は必ずしも成立しない。これは, 一般には $\triangle_{X/Y}$ は G-局所閉埋め込みだが局所閉埋め込みではないので, $\triangle_{|X|/|Y|}$ の像が閉でも $\triangle_{X/Y}$ が閉埋め込みとは限らないからである (例 5.8.6)。しかし, X が good であれば, [Ber93, 1.4.2] とその上の注意にあるように, 補足 5.8.3 から分離性とハウスドルフが同値であることがでる。

例 5.8.6. 半径 1 の閉円板 $\mathcal{M}(k\{T\})$ を 2 枚, 半径 1 の閉アニュラス $\mathcal{M}(k\{T, T^{-1}\})$ に沿って貼り合せた空間は, ハウスドルフではあるが, 分離的ではない。

命題 5.8.7. 局所閉埋め込み, 有限射, 分離射, 局所分離という性質は, 合成, (任意の k 解析空間に関する) 基底変換, そして基礎体の基底変換に対して保存される。

これらの性質は簡単に確認できる。

5.9 内点, 境界

定義 5.9.1. $\mathcal{A}$ を k-affinoid 代数とする。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}$-affinoid 代数, $\mathcal{D}$ を $\mathcal{A}$ バナッハ代数として, $\mathcal{A}$ 準同型 $\mathcal{B} \to \mathcal{D}$ が $\mathcal{A}$ に関して **inner** であるとは, ある admissible epimorphism $\pi : \mathcal{A}\{T_1, \ldots, T_n\} \to \mathcal{B}$ で, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $\rho(\varphi(\pi(T_i))) < r_i$ となることである。

A と B が strictly K affinoid である場合, これは, $\tilde{\phi}(\widetilde{B})$ が $\tilde{\phi}(\widetilde{A})$ 上 integral であることと同値である。

定義 5.9.2. $\varphi : Y = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を k-affinoid 空間の射とする。φ の**相対内部** (**relative interior**) $y \in Y$ で, 対応する $\mathcal{B} \to \mathcal{H}(y)$ が $\mathcal{A}$ について inner であるものの全体とする。これを, $\mathrm{Int}(Y/X)$ と書く。また, その補集合を**相対境界** (**relative boundary**) と言い, $\partial(Y/X)$ と書く。特に $X = \mathcal{M}(k)$ で, φ が構造射の場合は, 単に $\mathrm{Int}(Y)$ とか, $\partial(Y)$ などと書く。

$\mathrm{Int}(Y/X)$ が開集合であることは簡単に分かる。

例 5.9.3. 例えば, $A = \mathbb{Q}_p\{T\}$, $X = \mathcal{M}(A)$ なら, $\mathrm{Int}(X) = X \setminus \{t_{0,1}\}$ である。ただし, $t_{0,1}$ は, 例 4.1.6 にあるように $|\ |_{D(0,1)}$ というセミノルムを表す。

例 5.9.4. $Y = D(0, r^+) \subset X = D(0, s^+)$, $r < s$ の時は, $\mathrm{Int}(Y/X) = Y \setminus \{t_{0,r}\}$ となる。一般に $\varphi : Y \to X$ を affinoid 領域間の射とするとき, $\mathrm{Int}(Y/X) = Y$ となるのは, φ が有限のときに限り, また Y が X の affinoid 領域であれば, $\mathrm{Int}(Y/X)$ は Y の X 内でのトポロジカルな内点の集合に一致する。

定義 5.9.5. $f : Y \to X$ を good な k 解析空間の射とする。定義 5.9.2 で定義した (相対) 内部や boundary の概念は局所的に affinoid 近傍で考えることで K 解析空間にも拡張される。これらも $\mathrm{Int}(Y/X)$, $\partial(Y/X)$ や $\mathrm{Int}(X)$, $\partial(X)$ などの記号で表す。

$\partial(Y/X) =$ のとき, f は **closed** であるという。特に $\partial(X) = \emptyset$ となるような K 解析空間は **closed** であるという。

これらの性質は good でない場合にも拡張されている。[Ber93, 1.5] 参照。この場合も, closed とは (相対) 境界がないことと同値になる。

定義 5.9.6. k 解析空間の射 $\varphi : X \to Y$ が **proper** とは, closed かつ底空間の射 $|X| \to |Y|$ がコンパクトであることを言う。特に $Y = \mathcal{M}(k)$ の場合は, これは X が closed かつ $|X|$ がコンパクトであることと同値。

命題 5.9.7 ([Ber90, 3.1.2])**.** k は非自明な付値を持つものとし, $f : Y \to X$ を good な k 解析空間の間の射とする。f が closed で, X が strictly k 解析空間なら, Y も strictly k 解析空間である。

(証明). $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ が strictly affinoid 空間, $Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ は affinoid 空間として構わない。closed の仮定から任意の $y \in Y$ は $\mathrm{Int}(Y/X)$ に入るので, $Y \hookrightarrow X \times E(0, r)$, $(E(0, r) = \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\}))$ で, $|T_i(y)| < r_i$ となる閉埋め込みがある。ここで, $p_i \in \sqrt{|k^*|}$ を $|T_i(y)| < p_i \leq r_i$ となるように取れば, $V = Y \cap (X \times E(0, p))$ は y の affinoid 近傍になる。そして, $X \times E(0, p)$ という strictly k-affinoid 空間の閉部分集合なので, strictly affinoid 空間になる。 □

5.10 いくつかの重要な性質

定理 5.10.1 ([Ber90, 3.2.1])**.** 全ての連結な k 解析空間は, 弧状連結である。

定理 5.10.2 ([Ber99, §9])**.** 全ての局所的に smooth な空間に埋め込めるような k 解析空間は, 局所的に可縮である。特に, このような空間で分離的なものは, 局所的に単連結である。更に, 連結ならば, 単連結かつ strict な普遍被覆を持つ。詳しくは, §9 参照。

さて, 一般に位相空間 X の次元とは, 次のようなものであった。まず, X の部分空間の族 F の **order** とは, $n+1$ 個の空でない共通部分を持つ部分集合が存在するような最大の整数 n のことである。このとき, $\dim(X)$ は, 任意の有限開被覆が, order $\leq n$ であるような細分を持つような n として定義される。次元について, 次が成立する。

定理 5.10.3 ([Ber90, 3.2.6])**.** $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を strictly k-affinoid 空間とするとき, $\dim|X|$ は $\mathcal{A}$ の Krull 次元 $\dim\mathcal{A}$ と一致する。また, $\dim(\partial(X)) = \dim\mathcal{A} - 1$ も成立する。

6　剛解析空間との関係

この節では, k は前節の通り非アルキメデス的体とし, 更に付値は常に非自明であるとする。

6.1　剛解析空間の Grothendieck 位相の復習

6.1.1. 以下 Grothendieck 位相を単に G 位相と呼ぶ。最初に, 剛 k 解析空間の強 G 位相を復習しておく。

定義 6.1.2 (アフィノイドの強 G 位相)**.** $\mathcal{A}$ を strictly k-affinoid 代数として, $\mathcal{X} = \mathrm{Spm}(\mathcal{A})$ の強 G 位相は次のようなものだった。

(1) $U \subset \mathcal{X}$ が admissible open とは, affinoid 部分領域による被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ で, 任意の affinoid の射 $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ で $\varphi(\mathcal{Y}) \subset U$ なるものに対して, $\{U_i\}_{i\in I}$ の有限個の部分被覆で $\varphi(\mathcal{Y})$ の被覆になるものが取れるようなものとする。

(2) $\{U_i\}_{i\in I}$ を $\mathcal{X}$ の admissible open set U の admissible open による被覆とするとき, これが **admissible 被覆** (**admissible covering**) とは, 任意の affinoid の射 $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ で $\varphi(\mathcal{Y}) \subset U$ なるものに対して, $\mathcal{Y}$ の affinoid 部分領域による有限被覆で, $\{\varphi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ の細分になっているようなものが取れるものとする。

このような G 位相の入った k-affinoid を局所 G 環付空間の中で貼り合わせて, 剛 k 解析空間を構成したのだった [BGR84, 9.3.1/4]。次の節も参照。

補足 6.1.3. 例えば [Ber96, (0.1.2)] では, affinoid 部分領域の代わりに特殊領域 ([BGR84] では有理領域) を使って定義しているが, Gerritzen-Grauert の定理 [BGR84, 7.3.5] により affinoid 領域は特殊領域の有限個の合併の形に書けるので, これらの定める G 位相に本質的な違いはない。

6.2 関手の構成

定義 6.2.1 (一般剛解析空間の強 G 位相)**.** 一般に strictly k 解析空間 Y に対して

$$Y_0 = \{x \in X \mid [\mathcal{H}(x) : k] < \infty\}$$

とおく。4.3.6 で見たように, これは到る所稠密な部分集合になる。

X をハウスドルフな strictly k 解析空間とする。$V \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ が X の strictly affinoid 部分領域なら, $V_0 = \mathrm{Spm}(\mathcal{A})$ は剛解析空間の構造を持つ。これを貼り合わせたい。

6.2.2. まず X_0 に次のようにして強 G 位相を定める。

(1) $\mathcal{U} \subset X_0$ が admissible open とは, 任意の strictly affinoid 領域 $V \subset X$ に対して $\mathcal{U} \cap V_0$ が V_0 の中で admissible open であることとする。

(2) $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ を X_0 の admissible open $\mathcal{U}$ の admissible open による被覆として, これが **admissible 被覆** (**admissible covering**) とは, 任意の strictly affinoid 領域 $V \subset X$ に対して $\{\mathcal{U}_i \cap V_0\}$ が $\mathcal{U} \cap V_0$ の admissible 被覆であることとする。

[BGR84, 9.1.3] より, これが各 V_0 の強 G 位相を貼り合せてできる G 位相の内で最強のものである。

6.2.3. V, W をともに X の strictly affinoid 部分領域とするとき, これらはコンパクトなので, ハウスドルフの仮定から $V \cap W$ もコンパクトになる。故に $V \cap W = \bigcup_{i=1}^r V_i$, V_i は strictly affinoid という形に書け, $V_0 \cap W_0$ は V_0 や W_0 の admissible open になる。さて, 一般に Y が strictly affinoid 空間 X の strictly affinoid 領域だとするとき, Y_0 が Y の中で稠密であることと定義より Y_0 が X_0 の (剛) affinoid 領域になることに注意する。このことと affinoid 空間が分離的であることから $V_{ij,0} = V_{i,0} \cap V_{j,0}$ は (剛) affinoid 領域になり, 標準射 $\mathcal{O}_{V_{i,0}}|_{V_{ij,0}} \simeq \mathcal{O}_{V_{ij,0}}$ によって $\mathcal{O}_{V_i}$ を貼り合わせて $\mathcal{O}_{\bigcup V_{i,0}} = \mathcal{O}_{V_0 \cap W_0}$ を構成し, 剛 k 解析空間の構造を入れることができる [BGR84, 9.3.2]。すると, $\mathcal{O}_{V_0}$ を貼り合わせて X_0 上の構造層 $\mathcal{O}_{X_0}$ を作り, $(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ という G 環付空間を構成できる。上で定義した G 位相が [BGR84, 9.1.2] の G_0, G_1, G_2 を満たすことに注意すると, これが [BGR84, 9.3.1, Def.4] の定義を満たし, 剛解析空間になることがわかる。

構成方法から明らかに X_0 は準分離 [*9]である。

[*9] 二つの affinoid 領域の共通部分が有限個の affinoid 領域の和になっていること。

6.3 比較定理

定理 6.3.1 ([Ber93, 1.6.2])**.**

$$\pi_0 : \left\{ \begin{array}{c} \text{ハウスドルフ} \\ \text{strictly } k \text{ 解析空間} \end{array} \right\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{準分離} \\ \text{剛 } k \text{ 解析空間} \end{array} \right\}$$
$$X \mapsto X_0$$

は忠実充満な関手であり, ファイバー積や ground field の基底変換を保つ。更に, この関手 π_0 は次の圏の同値を誘導する。

$$\pi_0 : \left\{ \begin{array}{c} \text{パラコンパクト} \\ \text{strictly } k \text{ 解析空間} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{準分離剛 } k \text{ 解析空間で} \\ \text{有限型の admissible affinoid} \\ \text{による被覆を持つもの} \end{array} \right\}$$

ただし, 被覆が有限型とは, その被覆をなす任意の部分集合が他の有限個の部分集合としか交わらないようなものを言う。証明は書かないが, 次の補題を使うことを注意しておく。

補題 6.3.2. X をハウスドルフ strictly k 解析空間とする。

(1) 任意の X_0 の (剛) affinoid 領域は, ある X の strictly affinoid 領域 $V \subset X$ に対する V_0 の形をしている。

(2) X の strictly affinoid 領域の系 $\{V_\lambda\}$ に対し,

$$\{V_{\lambda,0}\} \text{ が } X_0 \text{ の admissible 被覆 } \Leftrightarrow \{V_\lambda\} \text{ は } X \text{ の (quasi-net)}$$

6.3.3. X の strictly 解析領域 U の U_0 は X_0 の admissible open になる。実際, 定義から X が strictly affinoid の場合に帰着できて, その場合は net の性質と affinoid がコンパクトであることから明らか。また, U は U_0 の閉包として復元できる。すると, 上の補題の (2) は, $\{V_{\lambda,0}\}$ が X_0 の admissible 被覆であることと, $\{V_\lambda\}$ が X の admissible 被覆であることが同値であることを示している。故に, 次の定理が言える。

定理 6.3.4. π_0 は, トポスの同型

$$\pi_0 : \widetilde{X_0} \simeq \widetilde{X_G} \tag{6.3.4.1}$$

を誘導する。

これと, 5.5.3 から $\widetilde{X_0} \to \widetilde{X}$ というトポスの射ができるので, 次が自然に導かれる。

系 6.3.5. X がハウスドルフ strict k 解析空間の時, 命題 5.5.10 と同様の定理が X_G を X_0 に置き換えても成立する。即ち,

(1) X_0 上の任意のアーベル加群の層 F に対し, $\mathrm{H}^q(X, F) \simeq \mathrm{H}^q(X_0, \pi_0^* F)$, $q \geq 0$.

(2) X が good なら任意の連接層 F に対し, $\mathrm{H}^q(X,F) \simeq \mathrm{H}^q(X_0,F_0)$, $q \geq 0$. (ただし, $F_0 = \pi^*F \otimes \mathcal{O}_{X_0}$)

(3) X がパラコンパクトなら, 任意の群の層 F に対し $\check{\mathrm{H}}^1(X,F) \simeq \check{\mathrm{H}}^1(X_0,\pi_0^*F)$.

補足 6.3.6. ただし, $V \subset X$ が開埋め込みであったとしても, $V_0 \to X_0$ が剛解析空間の開埋め込みとは限らない。例えば,

$$V = D(0,1^+) \setminus \{\xi\} \subset X = D(0,1^+)$$

(ただし ξ は生成点) の場合を考える。このとき,

$$V_0 = \bigcup_a D(a,1^-) \subset X_0 = D(0,1^+)$$

であり, これは集合としては全単射である。が, 無限和なので, 開埋め込みにはなっていない。つまり, トポスの射としては連続でも G 位相については連続ではない。

7 GAGA

k は前節の通り非自明な付値を持つ非アルキメデス的体とする。(なお, この記事では述べないが, 自明な付値の場合にも GAGA はある。) $\mathbb{C}$ 上の GAGA [Ser56][Gro71, XII] の類似がかなり成立している。[Ber90, 3.4, 3.5] [Ber93, 2.6].

7.1 スキームの解析化

7.1.1. $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を k-affinoid 空間とする。$\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ とすると,

(7.1.1.1) $$\pi : S \to \mathcal{S}; \quad x \mapsto \pi(x) = \mathrm{Ker}(x : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+)$$

という射が定義できるが, これは局所環付空間の射になる。特に, $\mathcal{H}(x)$ は $\kappa(\pi(x))$ の完備化になっている。また, ネーターの正規化定理から π が全射であることもわかる [Ber93, 2.1.1]。

7.1.2. $\mathcal{X}$ を $\mathcal{S}$ 上局所有限型なスキームとする。

(7.1.2.1) $$F : \{S \text{ 上の good } k \text{ 解析空間 }\} \to \mathrm{Sets}; \quad Z \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(Z,\mathcal{X})$$

という関手を考える。ただし, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\ ,\ )$ は $\mathcal{S}$ 上の局所環付空間の射である。このとき, 次が成立する。

定理 7.1.3 ([Ber93, 2.6.1][Ber90, 3.4.1])**.** F はある closed 射 $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to S$ と局所環付空間の射 $\pi : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$ によって表現可能である。つまり, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(Z,\mathcal{X}) \simeq \mathrm{Hom}_S(Z,\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
& \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
& \mathcal{X} \arrow[r] & \mathcal{S}
\end{tikzcd}$$

(証明). $\mathcal{X} = \mathbb{A}^d_{\mathcal{S}}$ なら $X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$。これは

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(Z, \mathbb{A}^d_{\mathcal{S}}) \simeq \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)^d = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(k)}(Z, \mathbb{A}^d_{\mathcal{M}(k)}) \simeq \mathrm{Hom}_S(Z, \mathbb{A}^d_S)$$

からすぐに確かめられる。中央の等号は構造層の定義から。なおアファイン空間は good であることに注意。次に $\mathcal{X}$ に対して $X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ が存在すれば, その部分スキーム $\mathcal{Y}$ に対しても $Y = \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ が存在する。実際, 開部分スキームの場合は $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ は開集合なので, 解析空間の構造が入って必要な普遍性が満たされる。また, 閉部分スキームの場合は, $\mathcal{I}$ を定義イデアルとすると $\mathcal{I}\mathcal{O}_X$ も連接層で, Y を $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}\mathcal{O}_X$ の台とし, 構造層を $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}\mathcal{O}_X$ で入れると, これが求む普遍性を持つことが分かる。good な解析空間からこうして作られたものはやはり good になる。最後に一般の場合は, 局所的にアファインスキームで覆って貼り合わせる。貼り合うことは普遍性から自明。 □

命題 7.1.4. 普遍性から次の関手ができる。これはファイバー積と基礎体の拡大を保つ。

$$\{\mathcal{S} \text{ 上局所有限型なスキーム }\} \to \{S \text{ 上の good } k \text{ 解析空間 }\}; \quad \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$$

定義 7.1.5. $\mathcal{S}$ 上局所有限型なスキーム $\mathcal{X}$ に対し $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ を $\mathcal{X}$ の**解析化** (**analytification**) という。

補足 7.1.6. $\mathcal{A}$ が strictly k-affinoid 代数であれば, 命題 5.9.7 より $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ は strictly k 解析空間である。

命題 7.1.7. $\pi : X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$ は全射で,

(7.1.7.1) $$X_0 \simeq \mathcal{X}_0 \quad (\mathcal{X}_0 \text{ は } [\kappa(x) : k] < \infty \text{ なる点})$$

を誘導する。また任意の $x \in X$ に対し $\mathcal{O}_{X,x}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\pi(x)}$ 上忠実平坦。即ち X は $\mathcal{X}$ 上忠実平坦。更に, $x \in X_0$ の時は, 完備化の間で同型 $\widehat{\pi}_x : \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\pi(x)}} \simeq \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ を引き起こす。

(証明). まず全射だが, 可換図式を追えば, $s \in S$ に対して $\mathbf{s} = \pi(s)$ として, $(\mathcal{X}_{\mathbf{s}} \otimes_{\kappa(\mathbf{s})} \mathcal{H}(s))^{\mathrm{an}} \simeq X_s$ であることがわかる。すると $X_s \to \mathcal{X}_{\mathbf{s}}$ の場合に帰着できる。$\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ に対して $\mathcal{X}$ を $\overline{\{\mathbf{x}\}}$ で置き換えアファインに制限して考えれば, $\mathcal{X}$ がアファイン既約な場合にその生成点に移る点が X 内に取れれば良いことが分かる。ネーターの正規化定理を使うと, $X \to \mathbb{A}^d$ が全射なことと生成点に移るのは生成点だけなことから, $\mathbb{A}^d$ の場合に帰着できる。が, この場合は自明。

$\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ として, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{x}}$, $\mathcal{Z} = \mathrm{Spec}(\mathcal{B})$ とすると, $\mathcal{B}$ は k 上有限で底空間は一点 $\mathbf{z}$ だけからなる。よって解析化の定義に戻れば明らかに $Z = \mathcal{Z}^{\mathrm{an}} = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ で $|Z|$ は一点 z からなる。普遍

性から, z は $\mathbf{z}$ に移る唯一の点なので, このことから

$$X_0 \simeq \mathcal{X}_0 \tag{7.1.7.2}$$

が言える。更に $\mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ という閉埋め込みがあることから $Z \to X$ も閉埋め込みで, 故に, 構成法から $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{x}}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^n \simeq \mathcal{O}_{Z,z} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{\mathbf{x}}^n\mathcal{O}_{X,x}$ もわかる。特に $n=1$ の場合を考えると $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_{\mathbf{x}}\mathcal{O}_{X,x}$ となり, $\kappa(x)=\kappa(\mathbf{x})$ となる。これより, $\widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{x}}} \simeq \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$.

というわけで, 閉点については平坦性が言えた。一般の点の場合は, 基礎体の拡大を行って, この場合に帰着する。つまり, k 上の非アルキメデス的体 K を十分大きく取って, $x' \in X' = X\hat{\otimes}K$ が $x \in X$ に移り, かつ $x' \in X'(K)$ であるようにすることができる。実はこのとき, $\mathcal{O}_{X',x'}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ 上忠実平坦であることが言える。また, $\mathcal{S}' = \operatorname{Spec}\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}\hat{\otimes}K$ とするとき, $\mathcal{X}' = \mathcal{X}\times_{\mathcal{S}}\mathcal{S}'$ とすると, $\mathcal{X}'$ は $\mathcal{X}$ 上忠実平坦なことも分かる。特に, $\mathbf{x}'$ を x' の $\mathcal{X}'$ への像とするとき, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{x}'}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbf{x}}$ 上忠実平坦。更に, 上で証明したことから $\mathcal{O}_{X',x'}$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{X}',\mathbf{x}'}$ 上忠実平坦になる (局所環の準同型なので, 平坦なら忠実平坦)。 □

7.1.8. $\mathcal{X}$ についての多くの性質は, $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ で考えることができる。

P を被約, 正規, 正則, Complete intersection (C.I.), Gorenstein, Cohen-Macaulay (C.M.) のいずれかの性質とする。解析空間 X が点 x において, 性質 P を持つことを, $\mathcal{O}_{X,x}$ が性質 P を持つこととして定義する。また, 性質 P が成立する点全体を $P(X)$ と定める。スキームについても同様とする。

命題 7.1.9. $\mathcal{A}=k$ とする。即ち $\mathcal{S}=\operatorname{Spec}(k)$ とする。(実際には, $\mathcal{A}$ が strictly k-affinoid 代数であれば, よいと思われる。) P を上の通りとするとき, $\pi^{-1}(P(\mathcal{X})) = P(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$.

(証明). まず, 次の可換環論の定理を思い出しておく。P は上の性質のどれかとする。

(1) A をネーター環とするとき, A の各極大イデアルにおける局所化が性質 P をもてば, A 自身が (即ち A の各素イデアルにおける局所化が) 性質 P を持つ。
(2) A を可換環とするとき, A が excellent (あるいはより弱く G-ring でもよい) なら, $\operatorname{Spec}(A)$ の各点 $\mathfrak{p}$ において, $A_{\mathfrak{p}}$ が性質 P をもつことと, その完備化 $\widehat{A_{\mathfrak{p}}}$ が P を持つことは同値。
(3) $A \to B$ を局所環の準同型とするとき, B が A 上忠実平坦でかつ B が性質 P を持てば, A もその性質を持つ。
(4) 同様に $(A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ を局所環の準同型とし, B が A 上忠実平坦で A が性質 P (ただし, 被約と正規は覗く) を持ち, 更に $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ とする。このとき, B も性質 P を持つ。
(5) $A = \varinjlim A_i$ を filtered な順序集合の上の帰納的極限とする。もし A_i が被約 (*resp.* 正規) であれば, A も被約 (*resp.* 正規)。
(6) A が excellent であれば, $\operatorname{Spec}(A)$ の中で P をみたす点全体は開集合。

さて, 証明に戻る。$X=\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ は $\mathcal{X}$ 上忠実平坦だったので, (3) より $P(X) \subset \pi^{-1}(P(\mathcal{X}))$ となる。また, $\pi(x) \in P(X)$ とするとき, (6) より $P(\mathcal{X})$ は open なので, $\pi(x)$ の V で $\pi(V) \subset P(\mathcal{X})$ となるものを取れる。すると, 任意の $y \in V_0$ に対して $\widehat{\mathcal{O}_{X,y}} \simeq \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\pi(y)}}$ であることから, (2) より

$y \in P(X)$ であることが分かる。すると, もし V が strictly affinoid なら, V_0 が稠密に入っているので, $\mathcal{A}_V$ は性質 P を持つ ([BGR84, 7.3.2] より, 閉点では解析空間としての stalk とスキームとしての stalk は一致することに注意[*10])。補足 7.1.6 より X は strictly k 解析空間であり, 更に X は good なので, $\mathcal{O}_{X,x}$ はこのような形の V を動かした時の $\varinjlim \mathcal{A}_V$ の形に書けている。故に (4), (5) より性質 P を持つことが分かる。(適当な V の所で局所環を考えれば, 4 に帰着できる。) □

7.1.10. 射についても, $\mathcal{S}$ 上局所有限型スキーム間の射 $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ が分離的, 全射, 準有限, 平坦かつ準有限, 不分岐, エタール, スムーズ, dominant, 更に, (少くとも) $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(k)$ の場合は, 平坦, 単射, open immersion, isomorphism, monomorphism といった性質を持つことは, $\varphi^{\mathrm{an}} : \mathcal{Y}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ について同じ性質が成立することと同値である。また, 更に φ が有限型である場合には, 閉埋め込み, 固有射, 有限射といった性質についても同様である。

7.1.11. $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(k)$ の場合は, いくつかの $\mathcal{X}$ の性質は, $X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ のトポロジカルな性質に置き換えられる。例えば, 次の定理が成立する。

定理 7.1.12 ([Ber90, 3.4.8])**.** (1) $\mathcal{X}$ が分離的 $\Leftrightarrow$ $|X|$ がハウスドルフ。
(2) $\mathcal{X}$ が proper $\Leftrightarrow$ $|X|$ がコンパクト (即ち, ハウスドルフかつ準コンパクト)。
(3) $\mathcal{X}$ が連結 $\Leftrightarrow$ $|X|$ が弧状連結。
(4) $\mathcal{X}$ の次元は $|X|$ のトポロジカルな次元に一致。

7.2 層の解析化

前節に引き続き, $\mathcal{S} = \mathrm{Spec}(k)$ の場合を考える。

7.2.1. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 加群とするとき, $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}}$ 加群の層 $\pi^*(\mathcal{F}) = \pi^{-1}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}}$ を $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ と書く。命題 7.1.7 より, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ は忠実な完全関手になり, 連接層を連接層に写す。

以下の結果の基本的に [Gro71, XII] と同様に証明できる。

命題 7.2.2 ([Ber90, 3.4.9, 3.4.10])**.** $\varphi : Y \to \mathcal{X}$ を k 上局所有限型なスキームの proper な射とする。このとき, 任意の連接 $\mathcal{O}_Y$ 加群 $\mathcal{F}$ に対して, 標準的な同型

$$(R^p\varphi_*\mathcal{F})^{\mathrm{an}} \to R^p\varphi^{\mathrm{an}}_*(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}), \quad (p \geq 0)$$

が存在する。結果として特に $\mathcal{X}$ を proper k スキーム, $\mathcal{F}$ を連接な $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ 加群 とするとき, 任意の $p \geq 0$ に対し, 標準的な同型

$$\mathrm{H}^p(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{H}^p(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$$

が存在する。

[*10] ただし, 一般には $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, $x \in X$ として, $\mathfrak{p}_x$ で対応する $\mathcal{A}$ の素イデアルを表すことにすると, $\mathfrak{p}_x\mathcal{O}_{X,x}$ は $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ とは異なる [Ber93, 2.2.9]。

命題 7.2.3. $\mathcal{X}$ を proper k スキームとする。Coh( ) で連接層の圏を表すとき,

$$\mathrm{Coh}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}); \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$$

は圏同値である。

系 7.2.4. 次の関手は忠実充満になる。

$$(\text{proper } k \text{ スキーム}) \to (k \text{ 解析空間}); \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$$

系 7.2.5. 全ての被約 proper k 解析空間 X で次元が 1 のものは射影的である。即ち k 上の射影的代数曲線 $\mathcal{X}$ で $X \simeq \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ となるものが存在する。

実際は, 次のことも言える。

定理 7.2.6 ([dJ95, Prop. 3.2])**.** 任意のコンパクト, 既約, 分離的な k 解析空間 X で次元 1 のものは, affinoid か射影曲線かいずれかである。

証明は [FM86] における剛解析空間についての同様の定理と, 定理 6.3.1 から簡単に導かれる。

8 形式スキームの生成ファイバー

8.1 生成ファイバー

8.1.1. 3.3 と同様, 可換 k バナッハ代数 R に対し R° で $\{f \in R \mid \rho(f) \leq 1\}$ を $R^{\circ\circ}$ で $\{x \in R \mid \rho(f) < 1\}$ を表すことにする。また, $\widetilde{R} = R^\circ/R^{\circ\circ}$ とする。

k° 上の形式スキームが**局所有限表示 (locally of finite presentation)** であるとは, 局所的に**位相的有限表示 (topologically finitely presented)** な k° 代数, つまり $k^\circ\{T_1, \ldots, T_n\}/\mathfrak{a}$, ただし $\mathfrak{a}$ は有限生成なイデアル, という形の A に対し $\mathrm{Spf}\, A$ と書けていることであった。

8.1.2. k°-$\mathcal{F}sch$ で k° 上の局所有限表示な形式スキームの圏を表すことにする。

これらに対して **生成ファイバー (generic fiber)** を対応させる関手

$$k^\circ\text{-}\mathcal{F}sch \to \{\text{paracompact } k \text{ 解析空間 }\}; \quad \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_\eta.$$

を構成したい。

8.2 アファインの場合

8.2.1. A を有限表示 k° 代数, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}\, A$ とする。この場合は, $\mathcal{A} = A \otimes_{k^\circ} k$ として, $\mathfrak{X}_\eta = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ と定める。これは明らかに関手的である。

8.2.2. $A \subset \mathcal{A}^\circ$, $k^{\circ\circ}A \subset \mathcal{A}^{\circ\circ}$ より, $\widetilde{A} = A/k^{\circ\circ}A$ として還元写像を

$$\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s : \ x \mapsto \mathrm{Ker}(\widetilde{\chi} : \widetilde{A} \to \widetilde{\mathcal{H}(x)}) \tag{8.2.2.1}$$

のように定めることができる。このとき, $\mathrm{Im}(\pi)$ は閉集合になる。

8.2.3. $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X}_s$ が閉部分スキームの場合, これは $(\widetilde{f_i}, \ldots, \widetilde{f_n})$, $f_i \in A$ の形のイデアルで定義されている。このとき, $\pi^{-1}(\mathcal{Y}) = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x_i)| < 1,\ 1 \leq i \leq n\}$ となるので, $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ は open である。

8.2.4. 一方, $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X}_s$ が開部分スキームである場合は, 逆像は閉集合になる。例えば $\mathcal{Y} = \operatorname{Spec} \widetilde{A}[1/\widetilde{f}]$, $f \in A$ であれば, $\mathfrak{Y} = \operatorname{Spf} A_{\{f\}}$ であり, 故に $\mathfrak{Y}_\eta = \{x \in \mathfrak{X}_\eta \mid |f(x)| \leq 1\}$ となる。一般の場合, $\mathfrak{X}_s$ の開集合がこれらの形の有限和で書かれることから分かる。

8.3 一般の場合

8.3.1. $\mathfrak{X}$ が 一般の場合は, アファインの局所有限被覆 $\{\mathfrak{X}_i\}$ で覆っておいて, それを貼り合わせることになる。8.2.4 に注意すると, 定理 5.4.3 が使えて, $\mathfrak{X}_\eta$ を構成できる。実際, $\mathfrak{X}$ が分離的なら, $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$ もアファインなので, OK. そうでない場合は, $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j$ は分離的になるので, 上の場合より OK となる。これが被覆の取り方によらないことを示すのは簡単である。これも関手的になる。

8.3.2. 各アファインでの還元写像を貼り合わせて, 大局的な還元写像 $\pi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{X}_s$ を構成できる。

8.4 写像の比較

8.4.1. $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ に対し, $\varphi_s : \mathfrak{X}_s \to \mathfrak{Y}_s$, $\varphi : \mathfrak{X}_\eta \to \mathfrak{Y}_\eta$ が誘導される。φ が有限 (有限平坦) であれば, φ_s や φ_η もまた有限 (有限平坦) である。

8.4.2. $\mathfrak{X} \in k^\circ\text{-}\mathcal{F}sch$ とすると, $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}_s$ は

(8.4.2.1) $$\{\mathfrak{X} \text{ 上 étale な形式スキーム }\} \to \{\mathfrak{X}_s \text{ 上 étale なスキーム }\}$$

という圏同値を引き起こす。

8.4.3. $\varphi : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ を étale な射とするとき, 任意の $y \in \mathfrak{Y}_\eta$ に対し, affinoid 領域 $V_1, \ldots, V_n \subset \mathfrak{Y}_\eta$ で $y \in \bigcap_i V_i$ かつ $\bigcup_i V_i$ が y の近傍であり, 更に V_i が $\mathfrak{X}_\eta$ 上 étale な k 解析空間の解析領域と同一視できるようなものが存在する。

9 普遍被覆

9.1 定理

9.1.1. X を k 解析空間とするとき, X の $x \in X$ での次元 $\dim_x X$ を V が x の affinoid 近傍を動くときの $\dim \mathcal{A}_V$ の最小値として定める。X が **pure dimensional** とは, 任意の $x \in X$ に対して $\dim_x X = \dim X$ となることと定める。

9.1.2. k 解析空間 X が点 x で**スムーズ** (**smooth**) とは, ある k 上の非アルキメデス的体 k' に対して $X' = X\hat{\otimes}K$ が任意の x 上の点 $x' \in X'$ で**正則** (**regular**), 即ち x' での局所環が正則であることをいう。また, X が **smooth** であるとは, pure dimensional でかつ各点でスムーズであることとする。以上の言葉の準備のもと, 次が成立する。

定理 9.1.3 ([Ber99]). k は非自明な付値を持つ非アルキメデス的体とする。X が局所的にスムーズな k 解析空間の strictly k-analytic 領域に同型であるとき (これを **locally embeddable in a smooth space** という), X は局所的に可縮である。特に, このような空間は普遍被覆を持つ！

実際の普遍被覆の例は, この後の解析曲線の所で述べることにする。

10 解析曲線

10.1 射影直線

10.1.1. 射影直線 $\mathbb{P}^1_K$ は, 剛解析空間の場合と同様, 二つの閉円板を貼り合わせて作る (*cf.* 定理 5.4.3)。剛解析空間の場合と同様, 実際にはのりしろはずっと広い。あるいは, $\mathbb{A}^1$ を 2 枚貼り合わせても良い。(こうすればのりしろは開である。) 良いことかどうかは別として, 次のような感じでイメージできる。

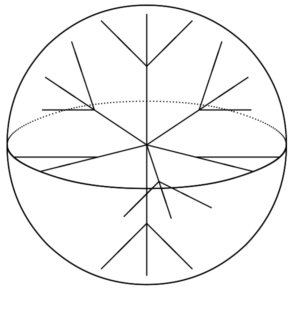


図 5 $\mathbb{P}^1_K$

この図から想像できるように, $\mathbb{P}^1_K$ が単連結なのは勿論, $\mathbb{P}^1_K$ から有限個の点を抜いてもやはり単連結のままである。例えば, $\mathbb{G}_m$ が単連結だったりする。(これは, 上から北極と南極の二点を除いたものである。) 従って, 例えば $n > 1$ の時は $\mathbb{G}_m$ から $\mathbb{G}_m$ への n 倍写像は局所同相にはなっていない。(剛解析空間の点からなる部分集合では n 対 1 の写像になっているが, 例えば上の図でいう地球の中心の点に写るのは, やはり地球の中心しかないので, n 対 1 の写像にはならない。つまりエタールな射であっても局所同相にはならないわけである (§13 参照)。

10.1.2. また, 定義 5.3.20 で定義した $\mathbb{A}^1_K$ は $\mathbb{P}^1_K$ から南極の点を抜いたものだが, $\mathbb{A}^1_K = \bigcup_{r>0} D(0, r^+)$ と書けていることも上の図で直観的に理解できる。

10.2 種数が 1 以上の曲線

10.2.1. この節では, 全ての解析空間や affinoid 部分領域は k strictly 解析空間であると仮定する。§3.3 で非アルキメデス的な可換バナッハ環の還元を定義したが, ここから k-affinoid 空間の還元はすぐに定義できる。しかし, k-affinoid 空間を affinoid 空間で覆ってもそれぞれの還元は必ずしもうまく貼り合わないので, 次のような言葉を用意する。(この辺りの事情は剛解析空間と同様である。)

定義 10.2.2. k-affinoid 空間 X の affinoid 領域 V はそこから誘導される還元写像 $\widetilde{V} \to \widetilde{X}$ が open immersion であるとき **formal** という。また, 分離的 k 解析空間の affinoid による被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が formal とは, 任意の $i, j \in I$ に対して $U_i \cap U_j$ が U_i の formal 部分領域になることとする。更に二つの formal covering $\{U_i\}_{i\in I}, \{V_j\}_{j\in J}$ が equivalent であるとは, 任意の $i \in I$, $j \in J$ に対して $U_i \cap V_j$ が U_i と V_j の両方の formal 部分領域になっていることを言う。

10.2.3. Formal な被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が与えられれば, 還元 $\widetilde{X}$ を作ることができる。これを $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ と書く。これは formal covering の同値類だけで決まる。誤解が生じないときは, 単に $\widetilde{X}$ と書く。(剛解析空間の formal model にも admissible blowing up の分だけ不定性があったことに注意。)

10.2.4. k-affinoid 代数 $\mathcal{A}$ が **distinguished** とは, $\mathcal{A}$ のスペクトルノルムがある全射 $f : K\{T_1, \ldots, T_n\} \to \mathcal{A}$ の剰余ノルム (即ち $k\{T_1, \ldots, T_n\}$ のノルムを $|\ |'$ とするなら $|f| = \inf_{f' \to f} |f|'$ というノルム) になっていることを言う。例えば k が離散付値環や代数閉体なら, $\mathcal{A}$ が distinguished であることは $\mathcal{A}$ が reduced でかつ $\mathcal{A}$ のスペクトルノルムの値が $|K|$ 内にあることと同値にある。分離的 k 解析空間の formal covering $\mathcal{U} = \{U_i\}$ は U_i が全て distinguished であるとき **distinguished** という。

10.2.5. さて, X を k 上のスムーズ幾何的連結射影的な種数 1 以上の曲線とする。更に, X^{an} が distinguished formal covering $\mathcal{U}$ で $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ が $\widetilde{K}$-split 半安定還元を持つものと仮定する。ただし, 体 k 上の代数曲線 C が k **分離** (k**-split**) とは,

(1) 全ての二重点は k 値点。
(2) 二重点 x でたった一つの成分にしか属していないものは, 全て k 分離, 即ち $\mathcal{H}(x)$ は k のその成分の関数体の中での代数閉包に一致する。
(3) $\mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_C) = k$.

の 3 つが成立することとする。このとき, $\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の細分になっているような distinguished formal covering で $\widetilde{X}_{\mathcal{V}}$ が $\widetilde{K}$ 分離安定還元を持つようなものが取れる。

10.2.6. $\widetilde{X} = \bigcup_i \widetilde{X}_i$ を還元の既約成分への分解とし, 一般に $g(Y)$ で代数曲線 Y の種数を表すことにする。$b_1(\triangle(\widetilde{X}))$ を $\widetilde{X}$ の incident graph (ないしは双対グラフ) $\triangle(\widetilde{X})$ (つまり, 既約成分が

点で, 互いに交わる時にそれらを結んだグラフ。ただし, その交点が一つの成分にしか含まれない場合は, その点が $\widetilde{K}$ 分離の時はループを加え, そうでない時は閉区間を加える) の第 1 ベッチ数とすると,

$$g(X) = b_1(\triangle(\widetilde{X})) + \sum_i g(\widetilde{X}_i)$$

が成立する。

10.2.7. 一般に, X を k 上のスムーズ幾何的連結射影的な種数 1 以上の曲線とするとき, k の有限次ガロア拡大 k' で $X^{\mathrm{an}} \otimes K'$ が distinguished formal covering を持ち, それに関する reduction が $\widetilde{K'}$-split stable reduction になるものが取れる。X^{an} と $\triangle(\widetilde{X})$ を比べることで次の定理が証明される。

定理 10.2.8. X をスムーズ幾何的連結射影的な種数 g が 1 以上の曲線とするとき, X^{an} の第 1 ベッチ数 $b_1(X^{\mathrm{an}})$ は g 以下である。更に両者が一致するのは X がテイト曲線上の torsor かマンフォード曲線になっているときに限る。逆に X が安定還元を持つときは, $b_1(X^{\mathrm{an}}) = 0$ となる。

また, マンフォード曲線は次のように特徴付けされる。(マンフォード曲線の正確な定義は次の節で復習する。)

定理 10.2.9. X を上の通りスムーズ幾何的連結射影的な種数 g が 1 以上の曲線とする。このとき次は同値。

(1) X はマンフォード曲線。
(2) X^{an} の普遍被覆 U は $\mathbb{P}^1_K$ の開部分集合で, その補集合は $\mathbb{P}^1(K)$ に含まれる。
(3) X^{an} は $\widetilde{K}$ 分離完全退化還元

ここで K **分離完全退化還元** (**$\widetilde{K}$-split totally degenerate reduction**) とは, 還元が $\widetilde{K}$ 分離で全ての成分が有理的であることである。

10.3 普遍被覆の例

例 10.3.1 (テイト曲線)**.** X が周期 $q \in K^*$, $|q| < 1$ のテイト曲線 E_q の torsor であるとき, 適当な k の巡回拡大体 L で, $q \in N_{L/K}(L^*)$ となるものが取れる。このとき, X^{an} の普遍被覆は $\mathbb{G}_{m,L}$ である。従って, $|X|$ の基本群を $\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ で表すと, $\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}) \simeq \mathbb{Z}$ である。また, 標準的な射 $(X \otimes L)^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ は局所同型になっている。

例 10.3.2 (一般のマンフォード曲線)**.** 最初にマンフォード曲線の復習をしておく。(ここでは解析空間を用いて定義するが, 剛解析空間を用いても同じである。[GvdP80] 参照。) $\Gamma \subset PGL_2(K)$ を部分群とする。$x \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{\mathrm{alg}}})$ が Γ の **limit point** であるとは, ある点 $y \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{alg}})$ と無限列 $\{\gamma_n\}_{n \geq 0} \subset \Gamma$ ($m \neq n$ なら $\gamma_m \neq \gamma_n$) で $\lim_{n \to \infty} \gamma_n(y) = x$ となるものがあることを言う。Γ の limit point 全体を Σ_Γ で表す。Γ が **discontinuous** であるとは, $\Sigma_\Gamma \neq \mathbb{P}^1(\widehat{K^{\mathrm{alg}}})$ かつ任意の

$x \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{\mathrm{alg}}})$ に対して x の orbit の閉包 $\overline{\Gamma x}$ がコンパクトであることである。

定義 10.3.3. $\Gamma \subset PGL_2(K)$ は, 有限生成で, 有限位数の非自明な元を持たず, かつ discontinuous であるとき **Schottky 群** (**Schottky group**) という。

Γ が Schottky 群なら, 全ての $\gamma \neq 1 \in \Gamma$ は hyperbolic (*i.e.* ある $q \in K$ で $0 < |q| < 1$ なる元に対する相似拡大 $x \mapsto qx$ と共役) であり, また Γ は自由群になる。更に Σ_Γ は $\mathbb{P}^1(K)$ に含まれる。特に Γ の階数が 1 なら, Σ_Γ は二点からなる。

Γ を階数 $g \geq 1$ の Schottky 群とするとき, 上のことから Γ は $\Omega_\Sigma := \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_\Gamma$ に自由に作用するから, Ω_Γ/Γ はコンパクトになる。従って Ω_Γ/Γ には自然に proper な k-解析空間の構造が入り, proper k 解析曲線になる。系 7.2.5 より, これはある k 上のスムーズ幾何的連結射影曲線 X_Γ に付随する k 解析空間になっているが, このようにして得られる X_Γ を **マンフォード曲線**というのだった。特に $g = 1$ の場合がテイト曲線である。

この時は, $\Omega_\Sigma \to X_\Gamma^{\mathrm{an}}$ が普遍被覆になっている。従って $\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\Gamma^{\mathrm{an}}) \simeq \Gamma$ である。

11 エタールコホモロジー

11.1 有限, 準有限, 準有限平坦

11.1.1. 以下では, $\varphi : Y \to X$ を k 解析空間の間の射とする。

まず復習だが, 定義 5.8.1 にあるように, φ が有限 (finite) であるとは, 任意の X の affinoid 領域 $V \subset X$ に対して $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to V$ が有限であることであった。このとき, $\varphi_* \mathcal{O}_Y$ は連接的 $\mathcal{O}_X$ 加群になる。

定義 11.1.2. φ が $y \in Y$ で**有限** (**finite**) とは, ある y の近傍 V と X の開集合 U で $\varphi : V \to U$ が有限であるようなものが存在することである。

これは y が $\varphi(y)$ のファイバーの中で孤立点であり, かつ y が $\mathrm{Int}(Y/X)$ に含まれることと同値である。

定義 11.1.3. φ が**準有限** (**quasifinite**) とは任意の $y \in Y$ において φ が有限であることとする。

11.1.4. 有限射や準有限射は合成やファイバー積による底変換について閉じている。

定義 11.1.5. X, Y が **good** であるときは, φ が $y \in Y$ で**平坦** (**flat**) とは, $\mathcal{O}_{Y,y}$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 上平坦なこととする。また, φ が**平坦**とは, 任意の $y \in Y$ において平坦であることとする。

11.1.6. 一般の k 解析空間の射に対しては, このような定義は良くない。しかし, 準有限な場合には定義できる。

命題 11.1.7. X, Y は一般の k 解析空間とし, φ を有限射とする。また $y \in Y$, $x = \varphi(y)$ とする。

このとき, 次は同値。

(1) $V_1, \ldots, V_n \subset X$ という affinoid 領域で, $x \in \bigcap_i V_i$ かつ $\bigcup_i V_i$ が x の近傍で, 任意の i に対して $\varphi^{-1}(V_i) \to V_i$ が y で平坦。
(2) 任意の affinoid 領域 $x \in V \subset X$ に対し, $\varphi^{-1}(V) \to V$ は y で平坦。

定義 11.1.8. φ が準有限であるとする。φ が $y \in Y$ で**準有限平坦** (**quasifinite flat**) とは, y の開近傍 V と $\varphi(y)$ の開近傍 U で φ が $V \to U$ という有限射を誘導し, かつ, 命題 11.1.7 の同値な条件をみたすようなものが存在することである。特に Y の任意の点で平坦であるとき, φ を準有限平坦という。

準有限平坦であれば, 開写像である。

11.2 微分加群

エタール射などの定義に入る前に, 微分加群について説明する。

定義 11.2.1. $\varphi : Y \to X$ を k 解析空間の射とする。$\triangle_{Y/X}$ は G-局所閉埋め込みだったので, その余接バンドルとして Ω_{Y_G/X_G} が定義できる。($\varphi : V \to U$ を $\triangle_{Y/X}$ が閉埋め込みになる解析領域, J をその場合の V の定義イデアルとして, V 上では $\triangle^*_{Y/X}(J/J^2)$ になる。)

もし, X, Y が good であれば, $\triangle$ は局所閉埋め込みでもあるので (補足 5.8.3), $\Omega_{Y/X}$ も同様に定義できる。このとき, $(\Omega_{Y/X})_G \simeq \Omega_{Y_G/X_G}$ である。[*11]

11.2.2. $\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ を k-affinoid 空間の射とする。この場合, $\Omega_{Y/X}$ という層は, 有限バナッハ $\mathcal{B}$ 加群 $\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = J/J^2$ (J は $\mu : \mathcal{B}\hat{\otimes}\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ の核) に付随する層である。

また, M をバナッハ $\mathcal{B}$ 加群とするとき, その $\mathcal{A}$ **導分** (**$\mathcal{A}$-derivation**) とは, $D : \mathcal{B} \to M$ という有界準同型で, $D(x+y) = Dx + Dy$, $D(xy) = xDy + yDx$, $D(\mathcal{A}) = 0$ をみたすものである。これらの全体は自明なノルムによってバナッハ $\mathcal{B}$ 加群になる。これを $\mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, M)$ で表す。

命題 11.2.3. (1) 有限 $\mathcal{B}$ 加群 $\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ は $dx, x \in \mathcal{B}$ で生成される。
(2) 任意のバナッハ $\mathcal{B}$ 加群 M に対し, バナッハ $\mathcal{B}$ 加群の標準的な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}, M) \simeq \mathrm{Der}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, M)$ がある。ただし, 左辺は全ての有界 B 準同型の集合。

命題 11.2.4. 次のような k 解析空間の図式があるとする。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

このとき,

[*11] 命題 5.5.9 で定義したように, $F_G := \pi^* F \otimes_{\pi^*\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_G}$.

(1) 次は完全系列になる。

$$\varphi_G^*(\Omega_{X_G/S_G}) \to \Omega_{Y_G/S_G} \to \Omega_{Y_G/X_G} \to 0 \tag{11.2.4.1}$$

(2) もし φ が閉埋め込みであり, $\mathcal{I}_G$ が Y に対応する $\mathcal{O}_{X_G}$ のイデアル層とすると, 次は完全系列。

$$\mathcal{I}_G/\mathcal{I}_G^2 \to \varphi_G^*(\Omega_{X_G/S_G}) \to \Omega_{Y_G/S_G} \to 0 \tag{11.2.4.2}$$

命題 11.2.5. $\varphi : Y \to X$ を k 解析空間の射とするとき,

(1) 任意の k 解析空間の射 $f : X' \to X$ に対し, $\Omega_{Y'_G/X'_G} = f'^*(\Omega_{Y_G/X_G})$. ここで, f' は f から誘導される $Y' = Y \times_X X'$ から X' への射。
(2) 同様のことが K/k という基礎体の拡大に対しても成立する。

11.3 不分岐, エタール, スムーズ

前節同様, $\varphi : Y \to X$ は k 解析空間の射とする。

定義 11.3.1. $\Omega_{Y_G/X_G} = 0$ のとき, φ を**不分岐** (**unramified**) という。また, 不分岐かつ平坦であるとき, **エタール** (**etale**) という。

φ が $y \in Y$ で不分岐 (*resp.* エタール) であるとは, y の開近傍 V で, $V \to X$ が不分岐 (*resp.* エタール) であることをいう。

定義 11.3.2. φ が $y \in Y$ で**スムーズ** (**smooth**) とは, ある y の開近傍 V があり, $\varphi|_V$ が X 上のアファイン空間 $\mathbb{A}_X^d$ へのエタール射を経由することをいう。

11.4 解析空間の Germ

11.4.1. X を k 解析空間, $S \subset X$ を底空間 $|X|$ の部分集合とする。(X, S) のようなペアを (k) **解析空間の germ** ないしは簡単に (k-**germ**) と呼ぶ。特に $S = \{x\}$ の場合は, (X, x) のように略記する。

k-germ (Y, T) と (X, S) に対し $\varphi : (Y, T) \to (X, S)$ で $\varphi : Y \to X$ で $\varphi(T) \subset S$ なるようなものを射とする圏を $\mathcal{C}$ とする。この中で

$$\mathrm{S} = \{\varphi : (X', S') \to (X, S) \mid \varphi \text{ は } Y \text{ と } S \text{ の開近傍との間の同型を誘導する。}\}$$

という系を考える。この系は明らかに right fraction を許す。k-**germ の圏**を $\mathcal{C}$ を S で局所化した圏として定義する。これを k-$\mathcal{G}erms$ で表す。つまり,

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathcal{G}erms}((Y, T), (X, S)) = \varinjlim_{\mathcal{V}:T \text{ の開近傍}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((\mathcal{V}, T), (X, S)).$$

11.4.2. (X,S) を k-$\mathcal{G}erms$ とするとき,

$$\text{Ét}(X,S)=\{\varphi:(Y,T)\to(X,S)\mid\varphi\ \text{はエタール射}\ \mathcal{V}\to X,\ T=\varphi^{-1}(S)\ \text{なる代表を持つ}\ \}$$

と定める。明らかに $\text{Ét}(X)\simeq\text{Ét}(X,|X|)$ という圏同値がある。

同様に, $\text{Fét}(X,x)$ を $\text{Ét}(X,x)$ の充満部分圏で, $\mathcal{V}\to\varphi(\mathcal{V})$ が有限射になるような代表を持つようなものとして定義する。

これは, $(Y,T)\to(X,x)$ で, T が有限集合でかつ代表として $\varphi:\mathcal{V}\to X$ が分離かつエタールになるようなものと同じになる。

更に, 体 K に対して $\text{Fét}(K)$ で K 上有限エタールなスキームの圏を表す。

命題 11.4.3. *X を k 解析空間とする。このとき, 任意の点 $x\in X$ に対し, $\text{Fét}(X,x)\simeq\text{Fét}(\mathcal{H}(x))$ という圏同値がある。*

11.4.4. 上で定義した圏に, (G) 位相を入れる。(X,S) を k-germ とするとき, $(U,T)\in\text{Ét}(X,S)$ に対し $\{(U_i,T_i)\xrightarrow{f_i}(U,T)\}$ で $\bigcup_i f_i(T_i)=T$ となるものを被覆として定まる前位相から定まる G 位相を考える。これに対応するサイトを $(X,S)_{\text{ét}}$, トポスを $\widetilde{(X,S)}_{\text{ét}}$ で表す。また, アーベル群の層 (*resp.* 前層) の全体を $S(X,S)$ (*resp.* $P(X,S)$) で表す。

$i_{(X,S)}:(X,S)_{\text{ét}}\to X_{\text{ét}}$ という自然な射がある。これは, $S=|X|$ なら同型である。X 上のエタール層 F に対し $F_{(X,S)}=i^*_{(X,S)}F$, $F(X,S)=F_{(X,S)}(X,S)$ と書くことにする。

命題 11.4.5. *k 解析空間 X の任意の点 $x\in X$ に対し, 圏同値 $\widetilde{\mathcal{H}(x)}_{\text{ét}}\simeq\widetilde{(X,x)}_{\text{ét}}$ がある。*

命題 11.4.6. *$(X,S)_{\text{ét}}$ 上の任意のアーベル群の層 F と任意の点 $x\in S$ に対し,*

$$F_x(\mathcal{H}(x))=\varinjlim_{x\in\mathcal{U}}F(\mathcal{U},S\cap\mathcal{U}).$$

ここで, $\mathcal{U}$ は x の X における開近傍を動く。

命題 11.4.7. *$(X,S)_{\text{ét}}$ 上の任意のアーベル群の層 F と任意の点 $x\in S$ に対し,*

$$(R^q\pi_*F)_x\simeq\mathrm{H}^q(G_{\mathcal{H}(x)},F_x),\quad q\geq 0.$$

ただし, $\pi:(X,S)_{\text{ét}}\to|S|$.

系 11.4.8. *$(X,S)_{\text{ét}}$ 上のアーベル群の層 F が flabby であることは, 次の (1), (2) が成立することと同値。*

(1) 任意の $x\in S$ に対し F_x は $G_{\mathcal{H}(x)}$ 加群として flabby.
(2) 任意の $((Y,T)\to(X,S))\in\text{Ét}(X,S)$ に対し, F の T の通常の位相への制限が flabby.

定理 11.4.9. *X をパラコンパクトな k 解析空間, l を素数とするとき,*

$$\mathrm{cd}_l(X)\leq\mathrm{cd}_l(k)+2\dim(X).$$

特に $l=\mathrm{char}(k)$ の時は, $\mathrm{cd}_l(X)\leq 1+\dim(X)$.

12　道に沿った解析接続とモノドロミー

この節でも, k は非自明な付値を持つ非アルキメデス的体とする。

12.1　うまく行かない例

12.1.1. 導入の所で述べたように, 道による解析接続がいつでもうまく行くわけではない。これは, Berkovich 空間では微分方程式の解がいつでも局所定数になるわけではないことによる。

例 12.1.2. $X = D(0, 1^+) = \mathcal{M}(K\{T\})$, $X^* = X \setminus \{0\}$ とする。ここで, $\mathcal{O}_{X^*}$ 加群としては $\mathcal{O}_{X^*}$ である M に接続 ∇ を

$$\nabla(1) = -1 \otimes \frac{dT}{T}$$

で接続を入れた接続付き加群を考えると, これは X^* では特異点を持たない。実際 $x \in X^* \cap \mathrm{Spm}(K\{T\})$ における局所環では $\nabla = 0$ は $\log T$ という解を持つ。しかし, 例 4.1.6 における type II, type III の点では解は存在しない。例えば $t_{0,1} = |\ |_{D(0,1^+)}$ における局所環は, $D(0, 1^+)$ から有限個の円板を除いた所で解析的な関数全体であるが, この中には当然 $\log T$ は含まれない。つまり, 解析接続は存在してもコーシーの定理が成立しないためにうまく行かないわけである。

12.2　コーシーの定理が成立する場合

しかし, 完全退化な場合にはうまく行く。

例 12.2.1. $q \in K^\times$, $|q| < 1$ として, 周期 q のテイト曲線 $E_q =$“$k^\times / q^{\mathbb{Z}}$” を考える。ここで ω を標準微分として, $M = \mathcal{O}_{E_q^{\mathrm{an}}}$ に $\nabla(1) = \omega$ で接続を入れる。普遍被覆 $\mathbb{G}_m \to E_q^{\mathrm{an}}$ の標準パラメータ t を取れば, これは $\nabla = 0$ の解になり, M の horizontal section は局所定数になる。つまりコーシーの定理が成立している。同様のことは一般のマンフォード曲線についても成立する。

13　基本群についての補足

13.1　様々な基本群

13.1.1. §10.1 で述べたように Berkovich 空間のトポロジーではエタールな射であっても局所同相ではない。そのため単純に基本群を取ると小さすぎるものしか得られない。[Ber93] では Berkovich 空間に対するエタール位相が定義され, それに対するコホモロジー理論が展開されている。また, 同じくその基本群が [dJ95] で考察されている。これは, 有限エタール被覆を使った代数的な基本群とも, Berkovich 空間の底空間に対して定義されるトポロジカルな基本群 π_1^{top} とも異なる。

13.1.2. この違いを示す典型的な例が, 次の log 写像による被覆である。($\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化を表す。)

$$\log : \{z \in \mathbb{C}_p; |z-1| < 1\} \to \mathbb{C}_p$$

$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ は代数的な基本群もトポロジカルな基本群も自明になるが, 上のエタール被覆は対応する群が $\bigcup_n \mu_{p^n}(\mathbb{C}_p)$ であるガロア被覆である。楕円曲線やより一般のアーベル多様体などの被覆も同じことが言えるが, このような被覆を自然に構成できることが (Tate の剛解析空間なども含めて), そもそも p 進解析的な空間を導入する動機になっている。

参考文献

[Ber90] V.G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, no. 33, A.M.S., 1990.

[Ber93] V.G. Berkovich, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 5–161.

[Ber96] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, preprint IRMAR 96-03 (1996).

[Ber99] V.G. Berkovich, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, Invent. Math. **137** (1999), no. 1, 1–84.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, 1984, Grundlehren der Math. Wiss.

[dJ95] A.J. de Jong, *Étale fundamental groups of non-archimedean analytic spaces*, Compositio Math. **97** (1995), 89–118.

[FM86] J. Fresnel and M. Matignon, *Sur les espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué complet ultramétrique*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 159–210.

[Gro71] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Lecture Notes in Math., vol. 224, Springer, 1971.

[GvdP80] L. Gerritzen and M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Math., vol. 817, Springer-Verlag, 1980.

[Ser56] J.-P. Serre, *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique*, Ann. Inst. Fourier **VI** (1956), 1–42.