

線形計画法 (Linear Programming) edit at 2009 年 11 月 18 日

目次		(4 頁)
1	出典と概要	1 頁
2	線形計画問題	1 頁
3	理論	2 頁
4	線形計画問題を解くアルゴリズム	3 頁
	4.1 シンプレックス法(4 頁) 4.2 アルゴリズム	
5	双対性定理	5 頁
6	連立方程式の解法	6 頁
7	具体的計算	7 頁
8	練習問題 I	8 頁
9	練習問題	9 頁

1 出典と概要

線形計画法: フリー百科事典『ウィキペディア (Wikipedia)』

T.S.Ferguson: Linear Programming, A Concise Introduction, UCLA Math webpage(2009)

D.P.Kennedy: Optimization, Cambridge Math webpage(2005)

線形計画法は最適化理論のなかでも最も重要な分野のひとつである。その理由はオペレーションズリサーチの多くの実際的な問題は線形計画問題として記述できるからである。またある特殊なケースのネットワークフロー問題や多品種流問題といった典型的な線形計画問題にはこれらを解くため特別なアルゴリズムが研究の対象に値するほど重要だと考えられていることもある。さらに他のいろいろなタイプの最適化問題に使われる多くのアルゴリズムは線形計画法を解くことで解決できることが挙げられる。歴史的には、線形計画法の考えによって双対性、分割、凸解析という数学の重要なテーマや一般化が研究発展され、この与えた派生的な理論展開が計画数学とよばれる最適化理論を引き起こしたことも理由である。

2 線形計画問題

数学的には線形計画問題は、目的関数と制約条件がすべて線形の最適化問題である。2 変数 x_1, x_2 の場合、与えられた定係数 a_{ij} と b_i, c_j および不等式制約

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

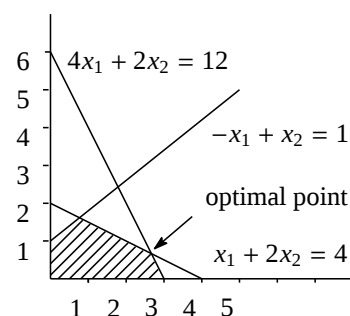
のもとで、次式

$$c_1x_1 + c_2x_2$$

の最大値およびそれを実現する x_1, x_2 を求める問題が、典型的な線形計画問題である。3 変数 x_1, x_2, x_3 の場合、3 次元座標空間上に描かれた立体図形を切るような平面のうち、切片 (平面と x 軸との交点) の値が最大あるいは最小となるような平面を求めることになる。最適解の取り得る範囲を整数に限定した線形計画法は、整数計画法と呼ばれる。

簡単な例題

$$\max x_1 + x_2 \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



線形計画問題の例として以下の問題を取りあげる。農業を営む人が、小麦と大麦のための A 平方キロメートルの農地を持っていると仮定する。農家は限度 F で肥料、限度 P で殺虫剤を使用することができる。これらはそれぞれ単位面積あたり小麦が (F_1, P_1) 、大麦が (F_2, P_2) を必要とする。小麦の販売価格を S_1 、大麦の販売価格を S_2 、小麦を育てる領域を x_1 、大麦を育てる領域を x_2 とすると、線形計画問題として大麦と小麦をどれだけ育てればいいのかを表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{最大化:} \quad & S_1x_1 + S_2x_2 && (\text{利益の最大化}) \\ \text{制約条件:} \quad & x_1 + x_2 \leq A && (\text{耕作地の制約}) \\ & F_1x_1 + F_2x_2 \leq F && (\text{肥料の制約}) \\ & P_1x_1 + P_2x_2 \leq P && (\text{殺虫剤の制約}) \\ & x_1, x_2 \geq 0 && (\text{非負制約}) \end{aligned}$$

3 理論

幾何学的には線形 (不) 等式制約は実行可能領域と呼ばれる凸多面体を定義する。目的関数も線形なので、全ての局所最適解はおのずと (大域的) 最適解になる。線形な目的関数であることによって、必然的に最適解は実行可能領域の境界上のみに現れる。最適解が見つからない状況が 2 つある。1 つは互いに矛盾のある制約 (例えば、 $x > 2$ と $x < 1$) ならば実行可能領域は空になり、最適解は存在しえない。最適解が得られないのでこの場合は LP は実行不能と呼ばれる。もう 1 つの状況は、多面体が目的関数の向きに境界を持たない場合 (例: 最大化: $x_1 + 3x_2$ 制約: $x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \geq 10$) である。この場合、目的関数はいくらでも大きい値を取り得る。これらの 2 つの正常ではない条件 (これらは多くの場合は上限を設けるなど問題の不可欠な制約によって除外される) がなければ、最適解は必ず多面体の頂点 (正確には最小次元フェイス) にある。しかしながら最適解は唯一とは限らない。多面体の辺や面が最適解の集合となる事があるし、最適解が多面体の全体となる (目的関数が一律に 0 に等しいときに現れる) ことすらある。

標準型最大化問題: 実数を要素とする m 次元ベクトル $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ と n 次元ベクトル $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ 、 $m \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ が与えられたとき、以下の問題を標準型最大値問題とよぶ。

つぎの制約を満たす n 次元ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{目的関数: } & c^T x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max \\ \text{制約: } & Ax \leq b, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \\ & x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \end{aligned}$$

標準型最小化問題: 以下の問題を標準型最小値問題とよぶ。

つぎの制約を満たす m 次元ベクトル $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
& \text{目的関数: } y^T b = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_n b_n \rightarrow \min \\
& \text{制約: } y^T A \leq c^T \iff \begin{cases} y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \cdots + y_m a_{1n} \geq c_1 \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{2n} \geq c_2 \\ \vdots \\ y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_m a_{mn} \geq c_n \end{cases} \\
& y \geq 0 \iff y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0.
\end{aligned}$$

例題 1 栄養食の問題 (略)

例題 2 輸送問題:ある商社の物流システムでは、 I 箇所の工場から、生産品 $P_1, P_2, \dots, P_I$ を出荷して、市場の J 拠点 $M_1, M_2, \dots, M_J$ へ配荷する。工場 P_i から産品 $s_i (i = 1, \dots, I)$ を、市場 M_j へ送り、そこでは利益 $r_j (j = 1, \dots, J)$ を得ている。この輸送には単位ユニットあたり費用 b_{ij} が必要である。このときには

輸送コスト : 各工場から各市場には、輸送量に応じた線形関数がコスト $y_{ij} b_{ij}$ としてかかる

出荷量の制約 : 工場 P_i での生産量 s_i を超えて生産はできない

最低限の必要量確保 : 市場 M_j には r_j 以上の供給量を与える

非負制約 : 供給量 y_{ij} は非負の値とする

出荷した量が必ず販売されるものとして、市場が求める必要な量できるを最小にする問題が輸送コスト最小化問題である。

例題 3 行動分析問題 (略)

例題 4 最適割り当て問題 (略)

「用語」関数 f を「目的関数 (objective function)」とよぶ。変数 x, y が「実行可能 (feasible)」であるとは、それぞれ対応する制約を満たすとき。「制約集合 (constraint set)」とは、ベクトル変数が実行可能となる集合という。計画問題が「実行可能 (feasible)」であるとは制約集合が空でないとき。そうでないならば、「非実行可能」あるいは「実行可能でない (infeasible)」という。変数を変化させることで、最大あるいは最小になることを「最適 (optimal)」という。

定理 3.1. すべての線形計画問題は標準型の形式に帰着される。

4 線形計画問題を解くアルゴリズム

ここでは、線形計画問題を解くアルゴリズムについて説明しておく。シンプレックス法 (単体法とも。どちらも和訳: simplex method) は、1947 年に G.B. Danzig が提案した、線形計画問題を解くアルゴリズムの中で最も広く使用されている方法である。シンプレックス法は、実行可能解 (超多面体の頂点) の 1 つから出発して目的関数の値をなるべく大きく (小さく) するようなところに移動させていく動作を繰り返して最適解を見つけ出す方法である。各ステップで必ず目的関数の値は改善される。このアルゴリズムは、実用上は高速。ほとんど常に、変数の数・条件式の数の大きな方のオーダーの回数だけ反復を繰り返せば解ける。そのことは、1982 年に Stephen Smale が証明した。しかし、Danzig が提唱したもの (ピボット規則) は多項式時間で終了しない問題例がある。常に多項式時間で解が得られるピボット規則の存在性は、現在も未解決問題である。単体法という名前は、Danzig が提案した特殊な図解法においては、アルゴリズムの進行に従って単体が下に落ちていくように見えることに由来する。

4.1 シンプレックス法

シンプレックス法 (単体法) では最適解が多面体の頂点に表れることを利用し、最適解に達するまで多面体の辺に沿って、より高い目的関数の値を次々にたどることで線形計画問題の最適解を求める。このアルゴリズムは実際にはかなり効率のいいもので、巡回していないか (巡回してしまうと最適解に到達することができない) に注意を払えば (大域的) 最適解を見つけることが保証される。シンプレックス法は、用いるピボット規則により性能が左右されるが、Dantzig の提案したピボット規則は問題の規模にたいして指数時間かかる問題例があることが知られている。現在のところ、線形計画問題を多項式時間で解くピボット規則の存在性は未解決問題である。線形計画問題を最悪の場合でも多項式時間で解くアルゴリズムが Leonid Khachiyan によって 1979 年に初めて提案された。そのアルゴリズムは Naum Shor の非線形最適化の橢円体法 (これは Arkadi Nemirovski と D. Yudin が一般化して、2003 年にジョン・フォン・ノイマン賞を受賞した凸最適化の橢円体法) をベースにしていた。しかし Khachiyan のアルゴリズムの実用性は期待はずれで、一般にシンプレックス法の方が効率的である。このアルゴリズムの主な重要性は、アルゴリズムの多項式性を示す証明手段を提供した事と、内点法の研究を促進したことにある。実行可能領域の辺のみを探索するシンプレックス法に対し、内点法は実行可能領域の内部を動くアルゴリズムとなっている。1984 年に N. Karmarkar は射影変換法を提案した。この方法は理論上でも実際でもいい結果の得られる最初のアルゴリズムで、最悪の場合でも多項式時間で解くことができ、実際の問題ではシンプレックス法と比べてかなり効率的に解くことができることが示されている。それ以降は多くの内点法が提案されて研究されている。よく使われる内点法には Mehrotra の予測子・修正子法と小島・水野・吉瀬の主双対内点法がある。すぐれた実装のシンプレックス法と内点法の効率は、線形計画法のアプリケーションとしてははっきりした優劣は無いというのが現在の見解である。しかしながら、目的関数や右辺項が僅かに変動した問題の最適化を繰り返し行う際は、シンプレックス法が優れている。LP のソルバーは、輸送におけるネットワークフロー問題 (線形計画問題として定式化できる) のような産業のさまざまな問題の最適化のために広く普及している。

キーワード: シンプレックス法 (単体法)、カーマーカー法 (内点法)

4.2 アルゴリズム

一般的な流れは以下のとおりである。(1) 線形計画問題を不等式制限のある形から「スラック変数」を加える。制約条件のうち、不等式を含むものがなくなり、全て等式となる。さらに「人工変数」を加えた標準型 (はじめの実行可能解が原点となるよう) に変形する。この等式化された問題の目的関数を z とおく。 z を最大化 (最小化) する線形計画問題にする。(2) ここまで行った作業をもとにシンプレックス表 (Simplex Tableau、線形計画問題の係数を表にまとめたもの) を作成する。(3) 式の数だけ基底変数を定める。 z は必ず基底変数に選ばなければならない。(4) 初期の基底変数から得られた連立方程式の解が最適かどうかを調べる。最適とみなすことができた場合は終了。終了しなかった場合は以下の作業をおこなう。(5) 基底変数と非基底変数の組合せを変更する。(5-1) 新たに基底変数にできそうな変数を非基底変数の中から選ぶ。複数存在する場合は、最も効果の高い変数を基底に選ぶ。(ピボット列の決定) (5-2) 基底から追い出す変数を決める。増加限界 (定数項の値から新たに基底に入れる変数の係数を割ったもの) によって変数を決めることが多い。(ピボット行の決定) (5-3) 新しい基底変数での連立方程式を解く。具体的にはピボットを中心に掃き出し法などで新たな実行可能解を求める。実行後は (4) に戻り、同様の処理を繰り返す。このアルゴリズムを解説した書籍は多数ある。またパソコンの表計算ソフトでも解けるので、解の確認ができる。

5 双対性定理

定義 5.1 (双対性 (そうついせい)). 標準型最大化問題

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ \text{subject to } Ax \leq b \quad \text{and} \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

の双対 (dual) とは、標準型最小化問題

$$\begin{aligned} \min y^T b \\ \text{subject to } y^T A \geq c \quad \text{and} \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

で定義される。

原問題とその双対問題を表にまとめて同時に記述すると、次の形になる。

$$\begin{array}{c|cccc|c} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline y_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \leq b_1 \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ y_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \leq b_m \\ \hline & \geq c_1 & \geq c_2 & \cdots & \geq c_n & \end{array} \quad (5.3)$$

定理 5.1. もし変数 x が標準最大化問題 (5.1) で実行可能であり、また変数 y が標準最小化問題 (5.2) で実行可能であるならば

$$c^T x \leq y^T b \quad (5.4)$$

が成り立つ。

系 5.1. 標準問題と双対問題がともに実行可能であるならば、両方とも有界な実行可能解をもつ。

系 5.2. ある変数 x^*, y^* がそれぞれ標準最大化問題 (5.1) と標準最小化問題 (5.2) における実行可能で、 $c^T x^* = y^{*T} b$ あるならば、各問題の最適解である。

定理 5.2. もし標準線形計画問題が有界な実行可能解をもつならば、その双対問題は、やはり有界な実行可能解をもち、その値は等しく、それぞれの問題の最適ベクトルが存在する。

関連のキーワード：ゲーム理論のミニマックス定理

線形計画問題の解の存在については、3つの場合 (i) 有界な実行可能解 (feasible bounded, FB)、(ii) 有界でない実行可能解 (feasible unbounded, FU)、(iii) 実行可能でない場合 (infeasible, I) に分かれる。原問題と双対問題を併せて9通りの場合になるが、線形計画問題としては、右図の5通り (x) を除いて、4通り (○) のことしかない。

		標準最大化		
		FB	FU	I
問題対双対問題	FB	○	×	×
	FU	×	×	○
	I	×	○	○

例題 (略)

双対定理の系として

系 5.3 (均衡 (equilibrium) 定理). 変数 x^*, y^* をそれぞれ標準問題と双対問題の実行可能ベクトルとする。

x^*, y^* が最適となるための必要かつ十分条件は、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* < b_j \text{ となるすべての } i \text{ について } y_i^* = 0 \quad (5.5)$$

同時に

$$\sum_{i=1}^m y_i^* a_{ij} > c_j \text{ となるすべての } j \text{ について } x_j^* = 0 \quad (5.6)$$

である。

(証明)(略)

上の関係式 (5.5)、(5.6) を満たすことを、相補性スラック条件 (complementary slackness condition) という。

6 連立方程式の解法

線形計画法を解くために、よく知られている方法は掃きだし法 (pivot 法) がある。これは連立方程式の解法と同じものである。念のために復習をしておく。

説明にはつぎの例を取り上げる。

方程式が下のように与えられたとする。

$$\begin{array}{rrcr} 3y_1 & +2y_2 & & = s_1 \\ y_1 & -3y_2 & +3y_3 & = s_2 \\ 5x_1 & +y_2 & +y_3 & = s_3 \end{array}$$

で与えられ、独立変数を y_1, y_2, y_3 とする。ここから y_2 を消去する。つまり左辺の式から y_2 を消す。

その手順は、第 1 番目の式から $y_2 = \frac{1}{2}s_1 - \frac{3}{2}y_1$ を求め、第 2 式、第 3 式に代入する。したがって

$$\begin{array}{rrcr} -\frac{3}{2}y_1 & +\frac{1}{2}s_1 & & = y_2 \\ \frac{11}{2}y_1 & -\frac{3}{2}s_1 & +3y_3 & = s_2 \\ \frac{7}{2}x_1 & +\frac{1}{2}s_1 & +y_3 & = s_3 \end{array}$$

となって y_2 が消去された。

もうすこし分かり易く編集をすると、係数行列とベクトルの転置とに注意して

$$\begin{array}{c|ccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & 3 & 1 & 5 \\ y_2 & \boxed{2} & -3 & 1 \\ y_3 & 0 & 3 & 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & y_2 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & -3/2 & 11/2 & 7/2 \\ \boxed{s_1} & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ y_3 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

つまり、最も簡単に式で表すと、ピボット p として

$$\begin{array}{|c|cc} \hline \boxed{p} & q & \\ \hline r & s & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|cc|c} \hline 1/p & q/p & \\ \hline -r/p & s - (qr/p) & \\ \hline \end{array}$$

上の例題をさらに続けて掃出し計算をおこなうと

$$\begin{array}{c|ccc} & y_2 & s_2 & s_3 \\ \hline y_1 & -3/2 & 11/2 & 7/2 \\ s_1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ y_3 & 0 & 3 & \boxed{1} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & y_2 & s_2 & y_3 \\ \hline y_1 & -3/2 & \boxed{-5} & -7/2 \\ s_1 & 1/2 & -3 & -1/2 \\ y_3 & 0 & 3 & 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc} & y_2 & y_1 & y_3 \\ \hline s_2 & -3/10 & -1/2 & 7/10 \\ s_1 & 7/5 & -3/5 & 8/5 \\ s_3 & -9/10 & 3/5 & 11/10 \end{array}$$

ここまでの手順は、行と列を並び替えることで

	y_1	y_2	y_3
s_1	$-3/5$	$7/5$	$8/5$
s_2	$-1/2$	$-3/10$	$7/10$
s_3	$3/5$	$-9/10$	$11/10$

であるから、すなわち $s = A^{-1}y = \begin{pmatrix} -3/5 & 7/5 & 8/5 \\ -1/2 & -3/10 & 7/10 \\ 3/5 & -9/10 & 11/10 \end{pmatrix} y$ という

逆行列の計算を行なったことを意味する。

7 具体的計算

まず標準最小化問題を考える。

制約: $y \geq 0, y^T A \geq c^T$ のもとで、目的関数: $y^T b$ を最小とする y を求めよ。

不等式を等式に帰着させるために、スラック変数 (slack variable) を導入する。 $s^T = y^T A - c^T \geq 0$ したがってもとの問題はつぎの問題と同値になる。

制約: $y \geq 0, s \geq 0, s^T = y^T A - c^T$ のもとで、目的関数: $y^T b$ を最小とする y, s を求めよ。

この問題をタブロー (表) 形式に書き表せば、

	s_1	s_2		s_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

となる。ここで末尾の行は y との内積で、これを最小化しようとするもの。

もし $-c \geq 0, b \geq 0$ ならば、明らかに変数値 $y = 0, s = -c$ で最小値 $y^T b = 0$ が得られている。なぜならば、これは制約: $y \geq 0, s \geq 0, s^T = y^T A - c^T$ を満たすから実行可能であり、しかし $y \geq 0, b \geq 0$ より、 $y^T b = \sum y_i b_i$ は 0 より小さくはできない。

最後の行を調べて、少なくとも一つの「負の要素」があったとする。一般性を失うことなく、それを a_{11} でピボット (掃出し計算) $\boxed{a_{11}}$ をする。

	y_1	s_2		s_n	
$\boxed{s_1}$	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	$\cdots$	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
y_2	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	$\cdots$	$\hat{a}_{2n}$	$\hat{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	$\cdots$	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$
1	$-\hat{c}_1$	$-\hat{c}_2$	$\cdots$	$-\hat{c}_n$	$\hat{v}$

最初の行変数を $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) = (y_1, s_2, \dots, s_n)$ 、左側の列変数を $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) = (s_1, y_2, \dots, y_n)$ とおけば、方程式は $s^T = y^T A - c^T$ から、 $r^T = t^T \hat{A} - c^T$ となり、目的関数 $y^T b$ は、 y_1 の代わりに s_1 を代入して

$$\begin{aligned} y^T b &= \sum_{i=1}^m y_i b_i = \frac{b_1}{a_{11}} s_1 + \left(b_2 - \frac{a_{21} b_1}{a_{11}} \right) y_2 + \cdots + \left(b_m - \frac{a_{m1} b_1}{a_{11}} \right) y_m + \frac{c_1 b_1}{a_{11}} \\ &= t^T \hat{b} + \hat{v} \end{aligned}$$

これは最後の行の等式を、新しい変数で表している。このシンプレックス表では、

制約: $y \geq 0, s \geq 0, r = t^T \hat{A} - \hat{c}$ (ただし $t^T = (s_1, y_2, \dots, y_n)$) のもとで、
目的関数: $t^T \hat{b}$ を最小とする y, s を求めよ

という問題に帰着された。したがって、もし $-\hat{c} \geq 0, \hat{b} \geq 0$ ならば、変数値が $t = 0, r = -\hat{c}$ のとき、値 $\hat{v}$ を得る。これを繰り返していけば、解を求める方法となる。

8 練習問題 I

1. つぎの制約を満たす y_1, y_2 を求めよ。

目的関数: $y_1 + y_2 \rightarrow \max$

$$\text{制約: } \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + y_2 \geq 5 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

またこの制約集合をグラフで表して解け。

2. つぎの制約を満たす $x_1, x_2 \geq 0$ を図示し、最適値を a の値で表せ。

目的関数: $ax_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\text{制約: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

3. 輸送問題: ある企業が、2 工場 S_1, S_2 で同じ製品を生産している。生産量、販売量、工場と販売店間の輸送コストが次のような条件のとき、全体の輸送コストを最小にする輸送計画を線形計画法で記述せよ。

生産量		販売量		輸送コスト (k 円/個)			
工場	生産量 (個/月)	販売店	販売量 (個/月)		T1	T2	T3
S1	200	T1	150	S1	8	4	6
S2	300	T1	150	S2	6	5	5
		T3	200				

4. つぎの線形計画法を標準形に書き直せ。

つぎを満たす変数 x_1, x_2, x_3, x_4 を求めよ。

目的関数: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5 \rightarrow \max$

$$\text{制約: } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

5. 次の形で表現されている表を、もとの標準問題と双対問題に書き表せ。

	x_1	x_2	
y_1	1	2	≤ 4
y_2	4	2	≤ 22
y_3	-1	1	≤ 1
	≥ 1	≥ 1	

6. つぎの標準最小化に対する双対問題を求めよ。変数 $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ を求めよ。

目的関数: $y_1 + 3y_2 + y_3 \rightarrow \min$

$$\text{制約: } \begin{cases} y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 10 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 + y_3 \geq 6 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \end{cases}$$

7. 最適解は $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{2}{3}, 0, \frac{14}{3})$ となることを示せ。またその双対問題の解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ となることを示せ。
8. つぎの問題について問いに答えよ。

目的関数: $3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\text{制約: } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \end{cases}$$

- (a) 最小化問題を求めよ。
- (b) 最大化問題の解として $(x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 0)$ が分かっているとして、均衡定理をもちいることで、双対問題を解け。またこれらの解は、それぞれの最適解であることを示せ。
9. 輸送問題についてつぎを考えよ。
- (a) その双対問題を述べよ。
- (b) この双対問題はどのような解釈ができるか考察せよ。
10. 線形連立方程式 $y^T A = s$ が

	s_1	s_2	s_3	s_4
y_1	1	1	0	2
y_2	0	2	-1	1
y_3	-1	1	0	3
y_4	1	-2	2	1

で与えられている。つぎのピボットを選んでから、この方程式を解け。

- (1) 第1行第1列 (囲ってあるピボット)
- (2) 第2行第3列 (ピボットは-1)
- (3) 第4行第2列 (ピボットは1)
- (4) 第3行第4列 (ピボットは3)

9 練習問題

つぎの線形計画問題について、(a) 双対問題を述べ、(b) シンプレックス (あるいは双対問題のシンプレックス) を行ない、(c) それぞれの解 (最適値とその対応変数値) を求めなさい。

1. $\max x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4$ sub. to $x_i \geq 0, \forall i$ and $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ 2x_1 + x_3 - 4x_4 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 \leq 1 \end{cases}$
2. $\max 3y_1 - y_2 + 2y_3$ sub. to $y_i \geq 0, \forall i$ and $\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \geq -1 \\ y_1 + 2y_3 \geq 2 \\ -7y_1 + 4y_2 - 6y_3 \geq 1 \end{cases}$
3. $\max -x_1 - x_2 - 2x_3$ sub. to $x_i \geq 0, \forall i$ and $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 1 \end{cases}$
4. $\max 5y_1 - 2y_2 - y_3$ sub. to $y_i \geq 0, \forall i$ and $\begin{cases} -2y_1 + 3y_3 \geq -1 \\ 2y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
5. & \max -2y_2 + y_3 \quad \text{sub. to } y_i \geq 0, \forall i \text{ and } \begin{cases} -y_1 - 2y_2 & \geq -3 \\ 4y_1 + y_2 + 7y_3 & \geq -1 \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 & \geq -5 \end{cases} \\
6. & \max 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad \text{sub. to } x_i \geq 0, \forall i \text{ and } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq 4 \\ -3x_1 + x_3 & \leq -1 \\ -2x_1 - x_2 & \leq -1 \end{cases}
\end{array}$$

参考文献

- [1] Hodges, S. M., "A Model for Bond Portfolio Improvement," Journal of Financial and Quantitative Analysis, June 1977, pp.243-260.
- [2] Ronn, E. I., "A New Linear Programming Approach to Bond Portfolio Management," Journal of Financial and Quantitative Analysis, December 1987, pp. 439-466.
- [3] V. Chvátal: Linear Programming, W. H. Freeman, New York, 1983.
- [4] G. B. Dantzig: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [5] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii: Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [6] A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley and Sons, New York, 1986.