信頼性理論

１．信頼性理論　信頼性理論とは，いくつかの要素部品から構成されるシステムがはたして機能するかどうかという確率を決定するものである。システムが機能するかどうか (the system is functioning or has failed) は，部品の状況の知識 (the component is functioning or has failed) から決まるものと仮定する。

たとえば部品の構成が直列にならんで作られている直列システムでは，要素部品のすべてが正常に機能しているときにのみ，システム全体が機能することになる。また並列システムでは，構成要素の少なくとも一つが機能することが，システムが機能するための必要十分条件となる。

２．構造関数　いまシステムは，n 個の要素部品からなり，各要素が機能しているかどうかの状態を表すために，要素 $i(I=1,2,\cdots,n)$ に対して変数 x_i を

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{the } i\text{-th component is functioning} \\ 0, & \text{the } i\text{-th component has failed} \end{cases}$$

これからつくられたベクトル $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を状態ベクトルという。システムが機能しているかどうかを表すために関数 $\phi(x)=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n):\quad \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{the system is functioning when the state vector is } x \\ 0, & \text{the system has failed when the state vector is } x \end{cases}$$

を構造関数 (structure function) とよぶ。

3．構造関数の具体例　例えば，つぎの場合は典型的な場合で

(1) 直列システムの構造関数：直列に要素が構成されているシステム

$$\phi(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \min_{i=1,\cdots,n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

(2) 並列システムの構造関数：並列に要素が構成されているシステム

$$\phi(x) = 1-(1-x_1)\cdot(1-x_2)\cdot\ldots\cdot(1-x_n) = \max_{i=1,\cdots,n} x_i = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \coprod_{i=1}^{n} x_i$$

(3) ｋアウトオブｎの構造関数：与えられたｎ個の要素部品のうち，少なくともｋ個が機能しているとき，システムが機能する場合

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

定義；**単調な構造関数** (monotone structure function) とは

$$\text{if } x_i \leq y_i, i=1,2,\cdots,n, \quad \text{then} \quad \phi(x) \leq \phi(y)$$

であって，$\phi(0,0,\ldots,0)=0, \phi(1,1,\ldots,1)=1$ となるもの。

定義；**整合的なシステム** (Coherent sustem) とは，単調な構造関数で，各成分が意味をもつ (relevant) とする。ここで意味をもつとは，少なくとも一つのベクトル $(\cdot_i,x)$ が $\phi(1_i,x)=1, \phi(0_i,x)=0$, ただし $(\cdot_i,x)=(x_1,\ldots,\overset{i}{\cdot},\ldots,x_n)$　とおく。

経路と切断

システムが機能するかどうかは，構成要素が機能するかどうかで定まってくる。ここでは構成要素がそのシステムにどのように影響をするか，考えよう。まず経路ベクトル（あるいは集合）をつぎで定義する。

経路ベクトル (path vector): 構成要素が機能することによって，システムの機能が保証できるとき，システムの状態が１の値をとるとき，これを経路ベクトルとよぶ。

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \text{ is called a path vector } \Leftrightarrow \phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$$

経路ベクトルは構成要素がすべて機能しているならば，システムは機能する。つまり，$\phi(1,1,\cdots,1)=1$ である。しかしこの機能しているベクトルが減っていくと $\phi(0,0,\cdots,0)=0$ であるから，中途の段階で入れ替わる時点がある。ある経路ベクトルでこれ以上減少する機能しなくなるばあい，すなわち入れ替わる閾値の状態をつぎで定める。

最小経路ベクトル (minimal path vector)： $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$; is a path vector $\&\, \phi(y)=0 \quad \forall y \leq x$.

ここでベクトル $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ の不等号の意味は，成分を比較して不等号が成り立つこと。

$$x \leqq y \Leftrightarrow \forall i,\, x_i \leqq y_i; \qquad x \leq y \Leftrightarrow x \leqq y \,\&\, x \neq y; \qquad x < y \Leftrightarrow \forall i,\, x_i < y_i$$

最小経路集合 (minimal path set): 最小経路ベクトルでその成分が機能しているものを取り出した集合を最小経路集合とよぶ。

$$A=\{i \,|\, x_i=1\, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \text{ is a minimal path vector}\}$$

与えられたシステムの最小経路集合を $A_1,A_2,\cdots,A_s$ とするとき，

$$\begin{aligned}\alpha_j(x) &= \begin{cases} 1, & \text{all the compomponent of } A_j \text{ are functioning} \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \\ &= \textstyle\prod_{i\in A_j} x_i\end{aligned}$$

システムが機能するための必要十分条件は，少なくとも一つの最小経路に対する要素部品が機能すること。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \begin{cases} 1, & \alpha_j(x)=1 \text{ for some } j \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \\ &= \max_j \alpha_j(x) \\ &= \max_j \textstyle\prod_{i\in A_j} x_i\end{aligned}$$

上で述べた「経路」とは逆に考えた概念が「切断」である。システムが機能しないベクトル（集合）を切断ベクトルとよぶ。最小切断ベクトルとは，切断ベクトルの要素が故障すると，システムが故障するばあいをいう。

切断ベクトル (cut vector): x is called a cut vector $\Leftrightarrow \phi(x)=0$

同様につぎの最小切断ベクトル，最小切断集合を定める。

最小切断ベクトル (minimal cut vector): x is a cut vector $\&\, \phi(y)=1 \quad$ for all $\quad y \geq x$

最小切断集合 (minimal cut set): $C=\{i : x_i=0\&$ for $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ is a minimal cut vector

与えられたシステムの最小切断集合を $C_1,C_2,\cdots,C_k$ とするとき，

$$\begin{aligned}\beta_j(x) &= \begin{cases} 1, & \text{at least one compomponent of } C_j \text{ is functioning} \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \\ &= \max_{i\in C_j} x_i\end{aligned}$$

先に定義したシステムが機能するための条件から，つぎを得る。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \textstyle\prod_{j=1}^k \beta_j(x) \\ &= \textstyle\prod_{j=1}^k \max_{i\in C_j} x_i\end{aligned}$$