問題１ 2 項分布 $B(n,p)$ のモーメント母関数をもとめ、平均 μ と分散 σ^2 を計算しなさい。

（解）$X \sim B(n,p)$ のとき、モーメント母関数は

$$M(u) = E[e^{uX}] = (pe^u + 1 - p)^n$$

これから $\dfrac{dM(u)}{du} = npe^u(pe^u + 1 - p)^{n-1}$,

$\dfrac{d^2M(u)}{du^2} = \{npe^u(pe^u + 1 - p) + n(n-1)p^2e^{2u}\}(pe^u + 1 - p)^{n-1})$

平均 $\mu = \dfrac{dM(u)}{du}\Big|_{u=0} = np$

分散 $\sigma = \dfrac{d^2M(u)}{du^2}\Big|_{u=0} - \mu^2 = np(1-p) - (np)^2 = np(1-p)$

問題２　単位区間 $[0,1]$ 上の独立な一様分布 U_1, U_2 の和 $U_1 + U_2$ はどんな分布にしたがうか。この分布を求めよ。

（解）$U = U_1 + U_2$ とおくと,$U_i \sim$ 一様分布 $U[0,1]$ から $f_2(u) = 1,\ 0 < u < 1$

$$f_1(x-u) = \begin{cases} 1, & 0 < x - u < 1\ (x - 1 < u < x) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

よって

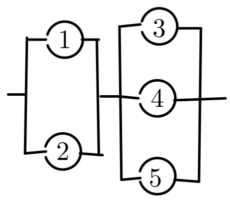
$$\begin{aligned} f_U(x) &= \textstyle\int_0^1 f_1(x-u)f_2(u)du \\ &= \begin{cases} \int_0^x 1 \cdot 1du = x & : 0 < x < 1 \\ \int_{x-1}^1 1 \cdot 1du = 1 - (1-x) = 2 - x & : 1 < x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

問題３　あるシステムの構造関数が

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \max\{x_1, x_2\} \max\{x_3, x_4, x_5\}$$

で与えられているとき、(1) このシステムの概形を図示せよ。また　(2) 最小切断集合と　(3) 最小経路集合を求めよ。

(解) (1) $\left.\begin{array}{l} x_1, x_2\text{は並列} \\ x_3, x_4, x_5\text{は並列} \end{array}\right\}$ 直列



(2) 最小切断集合 $\{1,2\}, \{3,4,5\}$

(3) 最小経路集合 $\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}$

問題４　２つの状態 $\{0,1\}$ からなる時間一様なマルコフ連鎖 $X_1, X_2, \cdots$ において、推移行列が $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ で与えられるとき、つぎの条件つき確率を求めよ。

(1) $P(X_2 = 1|X_1 = 0)$ (2) $P(X_3 = 1|X_1 = 0)$ (3) $P(X_4 = 1|X_1 = 0)$

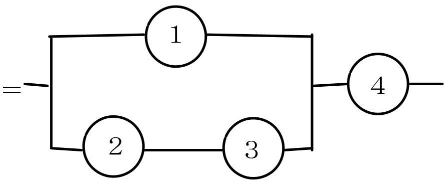
（解）(1) $P(X_2|X_1 = 0) = p_{01} = 0.3$
(2) $P(X_3|X_1 = 0) = p_{01}p_{11} + p_{00}p_{01} = 0.3 \times 0.5 + 0.7 \times 0.3 = 0.36$
(3) $P(X_4|X_1 = 0) = p_{01}p_{11}p_{11} + p_{01}p_{10}p_{01} + p_{00}p_{01}p_{11} + p_{00}p_{00}p_{01} = 0.3 \times 0.5 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5 \times 0.3 + 0.7 \times 0.3 \times 0.5 + 0.7 \times 0.7 \times 0.3 = 0.372$

問題５ パラメータ λ の指数分布のハザード関数は計算し、一定の値であることを示せ。

(解) 指数分布の分布関数は $G(t) = 1e^{-\lambda t}, t > 0$, 密度関数は $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$ である。したがってハザード関数の定義により $\dfrac{g(t)}{1 - G(t)} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t}} = \lambda$。つまりこの値は t によらない一定の値である。

問題６ システムのブロック図が次で与えられている。各部品の寿命分布が独立で同一の分布 $F(t), t > 0$ をもつとき、

システムの寿命分布を求めなさい。



(解) ブロックの構造関数は図より $\phi(x) = \max\{x_1, x_2x_3\} \cdot x_4 = \{1 - (1 - x_1)(1 - x_2x_3)\}x_4$ である。このとき $h(p) = E[\phi(X)] = \{1 - (1 - p_1)(1 - p_2p_3)\}p_4 = \{1 - (1 - p)(1 - p^2)\}p = (1 + p - p^2)p^2$
したがってシステムの寿命分布 $F_T(t), t > 0$ は

$$\overline{F}_T(t) = 1 - F_T(t) = h(F(t)) = \{1 + F(t) - F^2(t)\}F^2(t)$$