

線形計画法

現在の情報化社会を直視すれば明らかなように、その根底には従来の枠を越えた数学の果たす極めて重要な役割が顕在化している。ここで述べる数理計画法は、生産工学、経営工学、管理工学のみならず、行動科学、心理学、社会学や数理経済学、数理生物学などと枚挙に限りない。

数理計画法とは英語で mathematical programming とよばれるものであるが、計画数学としての理論的な部分とオペレーションズ・リサーチという応用面をもっている。ここではまず2人ゼロ和ゲームの理論を述べ、それをもとに線形計画法を解説する。線形計画法には双対定理というものが知られている。これを述べるのが目的であり、さらに一般化した非線形計画法の場合にも触れる。

双対性といっても、ある理論の基本概念をより高度な角度として認識するメタ理論もあるが、個別の理論構造をより簡単に理解するために考えられた双対性の意味も含んでいる。射影幾何学はもっとも良く知られたものである。共通して、2つの問題（理論）には密接な相互関係をもち、補完しあう。数理計画法では、グラフ理論の双対構造、制御理論の可制御性と可観測性なども典型的な例であろう。

1 まず数理計画法から

はじめに数理計画法とはどんなものから説明しましょう。数学的最適化問題（ふつうの最大最小問題）の総称で、ある対象として考える空間全体を X として

最小化： $f(x) \rightarrow \min$
制約条件： $x \in M \subset X$

ここで f ：目的関数、 M ：実行可能領域（許容領域）、この M を既定する条件は制約とよぶ。制約は不等式あるいは等式で表現されることが多い。 $x \in M$ を実行可能解（許容解）、 $f(x)$ を最小にするものを最適解という。

制約が線形関数（1次式）で定まり、目的関数も線形関数のときを、線形計画法という。この代表的なものとしては、最短路問題、最大流問題、最小費用流問題は特別な解法をもつ。また変数の値を整数値に限定したものを整数計画法もよく用いられ、分枝限定法や平面切除法が解法として知られている。巡回セールスマン問題もよく知られ、計算機の典型例として、研究がなされている。一般的には、非線形計画法が数学的にすべてを包括することになるが、解法は特別な場合、たとえばとつ関数などに限定をしなければ実際に解くことは容易ではない。動的計画法は、最適性の原理をもちいて、与えられる問題のタイプが、自己相似の性質から関数方程式にもち込み、鮮やかな解法を提供する。さらに複数の評価基準を考えるときには、実数値関数ではなく、最適解とはどのような性質をもつべきか、にも答えなければならず、多目的計画法として研究されている。

数学の古典的な理論として、変分問題があるが、関数の関数、つまり汎関数を最大最小にする問題で、関数の積分が目的関数となる。首にかけたネックレスの形状が、懸垂曲線になるとか、これについてもオイラーなど多くの数学者が研究している。これに対して、現代ではいわゆる最適化問題として、制御理論におけるポントリヤーギンの最大原理とか、動的計画法のベルマンによる最適性の原理が知られている。

2 ゲーム理論とは

ゲーム理論は、E.Borel(1921)の論文に始まるといわれるが、J.von Neumann(1928)による min-max 定理の発見が今日の数学的理論の発展をもたらしている。1944年のO.Moregensternとの共著、Theory of Games and Economic Behavior は不朽の名著である。ゲーム理論とは、利害が必ずしも一致しない複数の行動主体の意志決定において、その行動選択の結果が相互に影響をおよぼすとき、各主体にとってはどのような行動指針をもつべきか、これに関した論理的、数理的な分析を行う理論である。

2.1 2人ゼロ和有限ゲームの定式化

2つの集合と関数から2人ゼロ和ゲームは記述される。

$A = \{a\}$ 集合；

$B = \{b\}$ 集合；

$M(a, b), a \in A, b \in B$ 実数値関数；

とし、これが与えられたとする。各プレーヤー (PL) について、PL I は $a \in A$ を、PL II は $b \in B$ を互いに相手の選択を知ることなく、独立に自分の選択をおこなう。その結果、PL II は、PL I に金額 $M(a, b)$ を支払う。したがって PL I はこの金額を最大となるよう $a \in A$ を選ばうとし、PL II はこれを最小となるように b を選ぶ。ゼロ和というのは、受け取り金額の「支払い」と「受け取り」が同じで加え合わせればゼロであるから。もし $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ なる有限集合であれば、行列ゲームという。

たとえば、じゃんけんで、勝てば10単位を獲得し、引き分けではゼロとすると、

		PL II		
		石	紙	はさみ
PL I	石	0	-10	10
	紙	10	0	-10
	はさみ	-10	10	0

2.2 ミニマックス解の存在

プレイヤーの取り得る戦略を、拡張して偶然機構にしたがい、確率的に選択可能であるとした、混合戦略を考える。すなわちプレイヤーの決定にこの有限集合上に確率測度を導入する。これを混合拡大とよぶ。

$$A(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

$$\sum x_i = 1, x_i \geq 0, \quad \sum y_i = 1, y_i \geq 0$$

この拡大が解の存在に重要である。従来のもの i, j を純戦略とよぶ。混合戦略 x, y では a_{ij} のかわりに $A(x, y)$ を考える。

いま戦略について、(a) PL I のとる純戦略が II にわかってしまうとする。このとき、もし PL I が純戦略 i をとるならば、PL II にはそれがわかるから a_{ij} を最小にする純戦略 j を出してくる。したがって PL I としては $\min_j a_{ij}$ を最大にする i を出すことになるから、 $v_1 = \max_i \min_j a_{ij}$ だけは確保することができる。同様に考えて、こんどは (b) PL II のとる戦略が I にわかるならば、 $v_2 = \min_j \max_i a_{ij}$ を確保することができる。 $v_1 \leq v_2$ であり、PL I は、(a) では不利、(b) では有利な立場にあるから、この関係は予想できる。もし等号が成り立つならば、この共通の値をゲーム値とよび、結着するという。結着する場合もあれば、そうでない場合もある。行列要素の値が、サドル点をもつならば、結着し、そのときに限ることがわかる。

混合戦略を取るとしても同様な関係

$$v'_1 \leq v'_2$$

で、一般に

$$v_1 \leq v'_1 \leq v'_2 \leq v_2$$

が成り立つ。

純戦略では結着しなくても、混合戦略を考えるならば、その中では結着する。つまり、もし $v_1 < v_2$ であっても、かならず $v'_1 = v'_2$ であることを主張することが Neumann (1928 年) の min-max 定理である。

[min-max 定理] 任意の行列に対して、 $v'_1 = v'_2$ が成り立つ。すなわち、2人ゼロ和ゲームは混合戦略のなかでかならず決着する

min-max 定理の証明は、Brouwer の不動点定理によるもの、とつ集合の分離定理にもとづくもの、微分方程式によるものなどが知られている。

非ゼロ和行列ゲームへの拡張は、Nash 均衡とよばれる均衡点の存在が示されている。またこれらの互いに相反する利得となる競合状態のプレーヤを考えるのではなく、協力することによって、得られる個人の利得が変わるならば、協力ゲームとよばれる。多人数の意志決定では、どのような均衡状態が存在するのか、しないのか。均衡解はどういう意味で合理的なのか、困難な問題であり、様々な解が議論され、その解概念のもつ行動基準を考えられている。上記の本 [NM] にもこれに関する記述が多くあり、むしろこちらが本論というべきかもしれない。非協力ゲームの典型は、「囚人のジレンマ」という有名なゲームが知られている。

3 線形計画法とは

非負変数の間の 1 次不等式体系で定めた制約条件のもとで、与えられた 1 次式の目的関数を、最大または最小にする問題が線形計画法である。数式で表すと

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

のもとで

$$\sum_j c_j x_j \rightarrow \max$$

実行可能解はとつ多面体の集合をつくり、1 次関数の最大だから最大点は、存在すれば、ただ 1 つの端点上か、境界面の無数に多くの点で与えられる。目的関数がいくらでも大きくなれるとき、無限大になるときは、解はもたないという。

1947 年 Dantzig は軍事研究の要請からもとづいた研究の成果として発表した。例題としては、

3.1 いくつかの例題

- 栄養食品の問題；数種の食品を組み合わせ、必要量の栄養素を満たし、食品の購入価格の費用を最小にすること。
- 輸送の問題；物品を起点から、目的地まで輸送し、供給量と需要量の関係を満たし、輸送にかかる費用を最小にすること。
- 倉庫の問題；ある倉庫に品物を保管し、販売する。倉庫の容量と各期間での需要をもとに利益が最大となるよう、販売計画を立てること。
- 活動分析の問題；いくつかの生産財をもとに、複数の製品をつくりだす。生産工程をいかに稼働させれば収益が最大となるかを策定する。現実の石油精製で利用され、これは極めて大規模な変数を取り扱い、計算機による解法で成功を治めた具体例として知られている。

3.2 線形計画法の解法

シンプレックス法（単体法）は 1947 年に Dantzig により発表され、ほとんど唯一の解法であったし、広く普及されていた。しかし 1984 年 Karmarkar が多項式オーダの解法（内点法とよばれる）を提案し、単体法より 50 倍の早いというふれ込みであるが、はっきりとこの内点法が単体法より優れているというデータはまだ結論にいたっていない。むしろこの解法すなわち、アルゴリズムは米国で特許を申請して大きな話題を呼んだ。数学の定理がいわゆる特許になるかどうかで論争が行われたのである。結局は現在特許が認可されたということである。

単体法は、計算機アルゴリズムにより、機械的に解くことができ、本質は連立線形方程式の解法であって、行列の応用として相応しい。また計算機アルゴリズムの練習問題としても、プログラミングの応用問題として、広く導入されている。いまではパソコンの表計算ソフトでも簡単に線形計画法を解くオプションが付属している。

与えられた不等式制約条件に、スラック変数という人為的な変数を考えることで等式の関係に帰着させ、この連立方程式に一つ一つ解を代入し、目的関数の値を調べ、その改良を行うことで、最終的に最大値に到達しようとするものである。

3.3 双対定理

線形計画法における2つの一般形式；

最小問題 (I)

$$c^T x \rightarrow \min$$

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0$$

最大問題 (II)

$$b^T y \rightarrow \max$$

$$A^T y \leq c, \quad y \geq 0$$

を互いに双対とよび、それぞれ主問題と双対問題とよぶ。ここではベクトル表示をもちい、行列の転置 T 、あるいは不等号の意味は成分ごととする。

主問題と双対問題の間には、つぎが成り立つ。

- (1) 主問題の変数は双対問題の制約条件に対応し、逆に主問題の制約条件は双対問題の変数に対応する。
- (2) 主と双対の関係は逆にもなる。最大問題を主問題と考えるとその双対は最小問題になる。つまり双対問題の双対は主問題である。

双対定理とは2問題の実行可能解と最適解の関係をいう。つまり主問題の任意の実行可能解 x と双対問題の任意の実行可能解 y に対して、

$$c^T x \geq (A^T y)^T x = y^T (Ax) \geq b^T y$$

が成立する。これを弱双対定理という。この定理から主問題あるいは双対問題のどちらか一方の最適値が非有界であれば、他方の実行可能解は存在しない。また主問題の実行可能解 x^* と双対問題の実行可能解 y^* が $c^T x^* = b^T y^*$ であれば、 x^*, y^* はそれぞれの問題の最適解である。

この逆が成立することが双対定理である。すなわち主問題あるいは双対問題のどちらか一方が最適解をもつならば、他方も最適解をもち、両方の最適解は一致する。さらに

- (1) とともに最適解が存在し、その最適値が一致する。
- (2) 一方の最適解が非有界であり、他方が実行可能でない、実行可能解は空集合となる。
- (3) とともに実行可能でない。

上の結果からさらに主問題と双対問題の実行可能解 x, y が

$$(c^T - y^T A)x = y^T (Ax - b) = 0$$

を満たすとき、またそのときに限り、この実行可能解はそれぞれの最適解となることが証明できる。これを（線形）相補性定理とよび、変分問題では重要な概念である。

いままでの線形制約、線形目的関数を一般の関数にした非線形計画では

最小化： $f(x)$

制約条件： $g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$

を主問題とよべば、その双対問題はつぎで表される：

最大化： $f(x) + \sum_{i=1}^m v_i g_i(x)$

制約条件： $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla g_i(x) = 0, \quad v_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m)$

ここで ∇ は多変数関数の微分を表すベクトルである。

一般の関数ではなく、とくに2次関数とした場合が、2次計画法とよばれ、その計算アルゴリズムは比較的簡便であり、よく研究されている。また凸関数の場合では、凸計画法とよばれる。

もし関数 $f, g_i (i = 1, \dots, n)$ が点 x^2 で凸であれば非線形の主問題，双対問題のそれぞれの実行可能解を x^1 , (x^2, v^2) とするとき

$$f(x^1) \geq f(x^2) + \sum_{i=1}^m v_i^2 g_i(x^2)$$

が成立する。これが非線形での弱双対定理である。

非線形の場合の双対定理は，つぎのようになる。

関数 $f, g_i (i = 1, \dots, n)$ がすべて凸のとき，主問題の最適解が Kuhn-Tucker 条件の制約想定を満たすとき，ある v^* が存在して (x^*, v^*) が双対問題の最適解となり，主問題の最適解と双対問題の最適値が一致する。