

1 2つの値 $\{0, 1\}$ をとる確率変数 X, Y があり、同時 (結合) 確率が、 $P(X = 1, Y = 0) = P(X = 1)P(Y = 0)$ を満たすとする。このとき、つぎの関係を示せ。

(1) 同時確率 $P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1)$

(2) 条件つき確率 $P(X = 1 | Y = 1) = P(X = 1)$

(解) (1) $\{0, 1\}$ のみしか値をとらないから、 $P(X = 0) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0)$ である。ここで仮定の式を右辺に代入すれば、 $P(X = 0) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 0, Y = 0)$ となるから、移項をして $P(X = 0)\{1 - P(Y = 1)\} = P(X = 0, Y = 0)$ が得られ、 $1 - P(Y = 1) = P(Y = 0)$ から、 $P(X = 0)P(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0)$ が得られる。

(2) については、 $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$ を示せばよい。 $P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 1, Y = 1)$ としてから、右辺の第 1 項を移項して $P(X = 1)\{1 - P(Y = 0)\} = P(X = 1)P(Y = 1) = P(X = 1, Y = 1)$ が得られ、条件つき確率の定義に戻せばよい。

2 (1) 単位区間 $[0, 1]$ 上の一様乱数 X から、区間 $[0, \pi]$ 上の一様乱数 Y をつくるにはどうしたらよいか。

(2) 積分 $\int_0^\pi \sin x \, dx$ の近似計算を、 n 個の乱数から大数の法則をもちいて作る方法を述べよ。

(解) (1) 一様乱数を作る表計算ソフト命令 `=RAND()` をもちい、 π の値を生成する `=PI()` との積を Y とすればよい。したがって `=RAND()*PI()` を n 回コピー、ペーストにより、区間 $[0, \pi]$ の乱数の値が生成される。

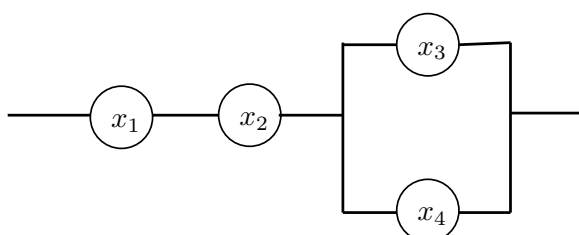
(2) この値を引き数にして、正弦関数 `=sin(引き数)` を計算させ、その和をとり、平均によって、積分値の近似がなされる。繰り返しのよって得られた平均の値が、もとの期待値に近づくことが大数の法則である。

3 線形計画法とはどのようなモデルを取り扱うか。さらにどのような応用問題が知られているか説明せよ。

(解) 授業の Webpage: <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/LP/LinearProgm02c.pdf> を参照のこと。(詳細略)

4 構造関数が $\phi(x) = \min\{x_1, x_2, \max\{x_3, x_4\}\}$ で与えられるとき、このシステム $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ のブロック図を描け。

(解)
構造関数の式において、 $\max\{x_3, x_4\}$ となっているから、要素 $\{x_3, x_4\}$ は並列システムの部分であり、この構成要素はそれ以外の要素とは、 $\min\{x_1, x_2, \dots\}$ の関係から、直列システムに結ばれている。



5 2つの部品寿命時間 T_1, T_2 が、独立で $F_i(x) = P(T_i \leq x)$, $i = 1, 2$ であるとき、つぎを求めよ。

(1) 並列システムの寿命時間 T_p の分布 $F_p(x) = P(T_p \leq x)$

(2) 直列システムの寿命時間 T_s の分布 $F_s(x) = P(T_s \leq x)$

(解) (1) 直列システム、並列システムの構造関数は $\phi_s(x) = \min\{x_1, x_2\}$ $\phi_p(x) = \max\{x_1, x_2\}$ で与えられ、各部品の寿命時間 $T_i, i = 1, 2$ からは $T_s = \min\{T_1, T_2\}$, $T_p = \max\{x_1, x_2\}$ となるから、これを計算する。確率の独立性から $P(T_s \leq x) = P(\{T_1 \leq x\} \cap \{T_2 \leq x\}) = P(T_1 \leq x)P(T_2 \leq x) = F_1(x)F_2(x)$

また $P(T_p \leq x) = P(\{T_1 \leq x\} \cup \{T_2 \leq x\}) = P(T_1 \leq x) + P(T_2 \leq x) - P(T_1 \leq x)P(T_2 \leq x) = F_1(x) + F_2(x) - F_1(x)F_2(x)$

6 (1) ハザード率の定義を述べよ。(2) この意味することを説明せよ。

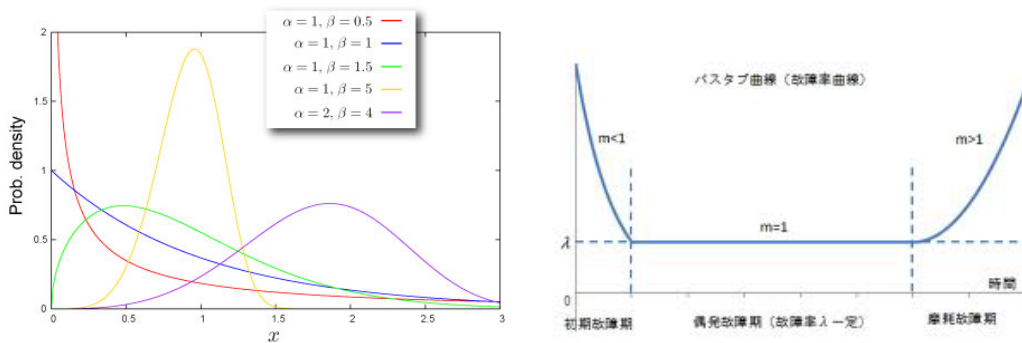
(解) (1) 寿命時間の分布に関連して、加齢の性質、すなわち時刻の変化に伴い、故障率がどのように変化するかを調べるためには、ハザード率を基準に考える。正の値をとる寿命時間分布の確率変数 T が分布関数 $G_T(t) := P(T \leq t)$ とその密度関数 $g_T(t) = \frac{dG_T(t)}{dt}$ をもつとき、ハザード関数（故障率）、 $\lambda_G(t) = \lambda_{G_T}(t)$ とは次式で定める：

$$\lambda_G(t) = \frac{g_T(t)}{\int_t^\infty g_T(s)ds}$$

(2) 故障時刻 T が、時刻 t までは正常に稼働していて、つまり、“ $T > t$ ”で、その後の $t+h$ ($h > 0$) までに故障してしまう”故障が $t < T < t+h$ ”で起るという条件つき確率は、 $P(t < T < t+h | T > t) = \frac{P(t < T < t+h, T > t)}{P(T > t)} = \frac{\int_t^{t+h} g_T(x)dx}{\int_t^\infty g_T(x)dx} = \frac{\int_t^{t+h} g_T(x)dx}{1 - G_T(t)}$ となる。 $h \rightarrow 0$ として、時刻 t での瞬時の変化を考えると、この値の分子は $g_T(t)$ に近づく。すなわちこれがハザード率で、時刻 t までは正常に稼働しているとき、その瞬時に故障が起る条件つき確率密度を意味する。

補足：ワイブル分布あるいはワイブル曲線は2つのパラメータ値を変化させるとさまざまな形状を表す。とくに指数分布の場合には、ハザード率が時刻に依存しない一定値である。初期故障、安定期（指数分布）、経年加齢の故障という風呂桶（バスタブ）を表すことでよく用いられる。分布グラフでは、 $\alpha = 1, \beta = 1$ が対応する。また指数分布はメモリーレスという重要な性質ももつ。参考：

<http://www.barringer1.com/wdbase.htm>



(以上)