

工学のための基礎数学

必要な基礎知識について概説します。いままでにも学習していますが、集合と写像、線形代数、微分積分、などを要約してみます。

1 集合

1.1 集合の定義

[定義] ある定まった範囲にある対象をひとまとめにしたものを集合 (set) といい、集合を構成する一つ一つの対象を集合の要素 (element) あるいは元という。要素は小文字、集合は大文字をもちいます。一般に、 x が集合 A の要素であるとき、 $x \in A$ と表す。また、 A の要素でないときは $x \notin A$ と表す。

集合の例として、以下のようなものが上げられます。

例 1.1: 集合 A は、1 から 5 までの整数の集まりとすれば、 $A = \{x|x \text{ は整数で、かつ、} 0 < x < 6\}$ この例のように、要素の数が有限の集合を有限集合といいます。また、要素の数が無限の集合を無限集合といいます。有限集合の場合、次のように、要素を羅列して集合を表すこともできます。 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

例 1.2: 以下の 2 つは、無限集合の例です。 $Z = \{x|x \text{ は } 1 \text{ 以上の整数}\}$ 自然数の集合、 $R = \{x|x \text{ は実数}\}$ 実数の集合。

集合にとって重要なのは、あるものが与えられたとき、それが集合の要素か否かを明確に判断できなくてはなりません。例えば、以下の示すものは、集合のように見えても集合ではありません。 $E = \{x|x \text{ は袋井に近い市町村}\}$, $F = \{x|x \text{ 小さい整数}\}$ 。

集合 X に含まれるすべての要素 x が、集合 Y に含まれるならば、また、そのときに限って、集合 X は、集合 Y に含まれる (集合 X は、集合 Y の部分集合 (subset) である) といいます。このことを形式的に記述すると、以下のようになります。

$$\{X \subset Y\} \iff \{\forall x \in X \Rightarrow x \in Y\}$$

ここで、記号「 $\forall$ 」は、「すべての (for all), 任意の (for arbitrary)」と読み、「 $\forall x \in X$ 」によって、「集合 X に含まれるすべての要素」を意味します。

同様に、2 つの集合が等しいことを、以下のようにして定義できます。

$$\{X = Y\} \iff X \subset Y, Y \subset X$$

$\{\forall x \in X \Rightarrow x \in Y\} \cap \{\forall y \in Y \Rightarrow y \in X\}$ つまり $X = Y \iff \forall x \in X \text{ ならば } x \in Y, \text{ かつ, } \forall y \in Y \text{ ならば } y \in X$ 。

例 1.3: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{1, 2, 3, 5\}$ とします。このとき、以下のようなことが成り立ちます。(i) $X = Y$ (X と Y は等しい), (ii) $X \subset Y, Y \supset X$; (X は Y の部分集合), (iii) $Y \subset X, X \supset Y$; (Y は X の部分集合), (iv) $X \subset Z, Z \supset X$; (X は Z の部分集合), (v) $Y \subset Z, Z \supset Y$; (Y は Z の部分集合)。

部分集合に対して、対象としているすべての要素を含む集合を全体集合 (whole set, universe set) といい、また、一つも要素を含まない集合を空集合 (empty set) と呼び、 $\emptyset$ あるいは ϕ で表します。

[定義] 2 つの集合 X, Y について、そのどちらかに含まれる要素からなる集合を X と Y の和集合 (合併集合) (union) といい、 $X \cup Y = \{x|x \in X \text{ or } x \in Y\}$ と表す。 X と Y の両方に含まれる要素からなる集合を X と Y の積集合 (共通集合、交わり集合) (intersection) といい、 $X \cap Y = \{x|x \in X \text{ and } x \in Y\}$ と表す。また、 X の部分集合 E について、 X の要素で E に含まれない要素の集合を E の補集合 (complement) といい、 E^c あるいは $\overline{E}$ で表す。差集合 (difference set) として $X \setminus E = X \cap E^c$ を使うこともある。

上の定義で述べた関係を図示すると、以下、図 1.1 のようになります。

また、以下の定義も重要です。

[定義] 集合 S_1 の要素 x と集合 S_2 の要素 y を、この順に順序づけた組 (x, y) 全体がつくる集合を S_1 と S_2 の直積といい、 $S_1 \times S_2$ とかく。

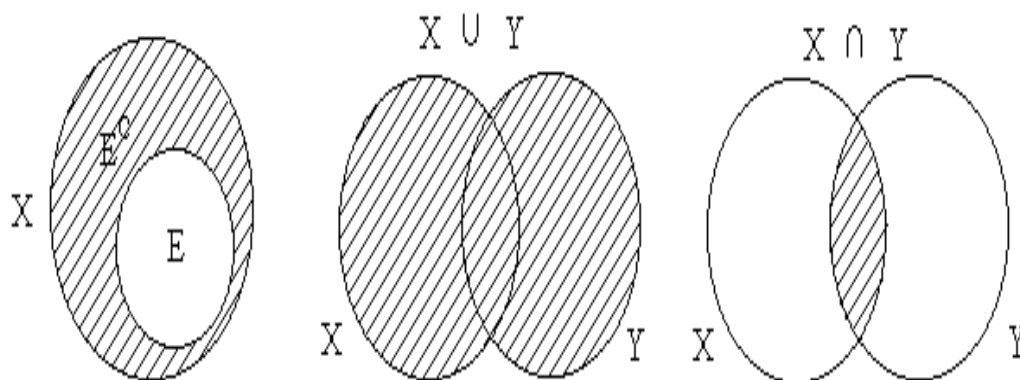


図 1.1 補集合（差集合）、和集合、積集合

1.2 集合の性質

以下に述べる集合の諸性質において、 X : 全体集合, E, F, G : X の任意の部分集合とします.

可換律: $E \cup F = F \cup E, E \cap F = F \cap E$

結合律: $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap G, E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup G$

分配律: $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G), E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$

二重否定律: $(E^c)^c = E$

排中律: $E \cup E^c = X$

矛盾律: $E \cap E^c = \phi$

ド・モルガン律: $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c, (E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

2 写像

【定義】 S_1, S_2 を集合とすると、 S_1 の任意の要素を S_2 の 1 つの要素に対応させる規則 φ を、 S_1 から S_2 への写像 (mapping) とよび、 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ と書く。関数 (function) とは写像のうちで実数や複素数を取り扱う特別な場合をいいます。このとき、 S_1 を φ の定義域、 S_2 を値域という。また、 S_1 の要素 x が S_2 の要素 y に対応することを $\varphi: x \rightarrow y$ と書く。 y は $\varphi(x)$ と書かれ、 $\varphi(x)$ を x の像 (image), x を y の原像または逆像 (inverse image) という。

たとえば、簡単な関数 $f(x) = x^2 + 1$ という関数について考えてみます。この関数において、変数 x に任意の実数を代入すれば、実数の結果 ($f(x)$ の値) が得られます。つまり、規則 f の定義域と値域は共に実数の集合 $\mathbb{R}$ となっています。従って、この関数を上の定義に従った書き方をすれば以下のようになります。

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

この関数においては、任意の $f(x)$ の値に対して、対応する x の値が決まります (必ずしも、一つではありませんが)。しかし、 $f(x) = \sin(x)$ という関数について考えてみてください。定義域と値域を同様に $\mathbb{R}$ としたとき、 x の任意の値に対して、 $f(x)$ の値は、 ± 1 以内の値しかとれません。従って、任意の $f(x)$ の値に対して、対応する x の値が決まるとは限りません。例えば、 $f(x)$ の値が 2 であれば、対応する x の値は存在しません。このように、関数 (写像) 毎に、定義域と値域との関係が異なってきます。この点に関する定義が、以下に示すものです。

【定義】 写像 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ について、任意の $x_1, x_2 \in S_1$ に対し、 $x_1 \neq x_2$ ならば、 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ であるとき、 φ は 1 対 1 の写像 (one-to-one mapping), または、単射 (injection) であるという。また、写像 $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ が、すべての $y \in S_2$ に対し、 $\varphi(x) = y$ となる $x \in S_1$ をもつとき、 φ は S_1 から S_2 の上への写像 (onto-mapping), または、全射 (surjection) という。写像 φ が全射で単射であるとき φ は全単射 (bijection) という。

3 線形代数

3.1 行列

[定義] 数値を以下に示すように、 n 行 m 列の形に並べたものを、 n 行 m 列行列 ($n \times m$ 型行列 (matrix)) という。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、 a_{ij} を行列 A の (i, j) 要素 (element), 元, (i, j) 成分, i 行 j 列の成分等という。特に、1 行 m 列の行列を m 次の行ベクトル、また、 n 行 1 列の行列を n 次の列ベクトル (単に、ベクトル (vector)) という。

行列の要素や形によって、以下のような行列 (言葉) をもちいます。

実行列 (実数行列) (real matrix): a_{ij} が実数 $\mathbb{R}$, ($\forall i, j, a_{ji} \in \mathbb{R}$), 複素行列 (複素数行列) (complex matrix): a_{ij} が複素数 $\mathbb{C}$, ($\forall i, j, a_{ji} \in \mathbb{C}$), 転置行列 (transposed): $B = A^T$, ($\forall i, j, b_{ij} = a_{ji}$), 正方行列 (square): n 行 n 列の行列 ($n = m$), 主対角線とは左上から右下に向かう対角線をいい、対角成分 (diagonal): $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$, トレース (trace): $\text{tr} A = \sum_i a_{ii}$ (対角成分の和), 対角行列 (diagonal): 対角成分以外の成分がすべて 0 である行列, 単位行列 (unit): 対角成分が 1 である対角行列 (I , または, E で表す), 三角行列とは上三角行列 (upper triangle): $i > j$ に対し, $a_{ij} = 0$ である行列, 下三角行列 (lower triangle): $i < j$ に対し, $a_{ij} = 0$ である行列, 対称行列 (symmetric): $A = A^T$, 交代行列 (alternative, skewsymmetric): $A = -A^T$ (対角成分はすべて 0), 直交行列 (orthogonal): $A^T A = A A^T = I$,

3.2 行列式

偶順列と奇順列: 行列式の定義に入る前に、まず、順列の定義を行っておきます。

[定義] 一つの順列において、2 要素の順序が、標準の順列における同じ 2 要素の順序と異なるときには、その 2 要素の間には一つの転位または転倒があるという。一つの順列において、転位をもつ 2 要素の組数をその順列の転位の数という。そして、偶数個の転位をもつ順列を偶 (even) 順列、奇数個の転位をもつ順列を奇 (odd) 順列という。

上記の定義に従い、例えば、標準の順列を $(1\ 2\ 3)$ とした場合、以下のようになります。 $(1\ 2\ 3)$: 偶順列、転位の数は 0, $(2\ 3\ 1)$: 偶順列、転位の数は 2, $(1\ 3\ 2)$: 奇順列、転位の数は 1, $(3\ 2\ 1)$: 奇順列、転位の数は 3。

[定義] $n \times n$ の正方行列 A の各行及び各列から必ず 1 個、そして、ただ 1 個の要素を取って、これを $a, b, \dots, k$ の順に並べて積を作ると、この積の中には、 n 個の文字 $a, b, \dots, k$, 及び、添え字 $1, 2, \dots, n$ は必ず一度、そして、ただ一度ずつ現れる。その積は、 $aab\beta \cdots k\kappa$ という形をもち、 $\alpha\beta \cdots \kappa$ は、 $1, 2, \dots, n$ の一つの順列とみなすことができる。そこで、順列 $\alpha\beta \cdots \kappa$ が偶順列の時には、積 $aab\beta \cdots k\kappa$ にプラスの符号数 +1 をかけ、奇順列の時にはマイナスの符号数 -1 をかけて作ったすべての積 ($n!$ 個存在する) の和を作ると多項式が得られる。この多項式を、行列 A の行列式 (determinant) といい、以下のように表す。

$$\det|A| = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

例 2.1: $n = 2$ の場合、標準の順列 $(1\ 2)$ に対し、積は、偶順列 $(1\ 2)$, 奇順列 $(2\ 1)$ であり、行列式は以下のようになります。

$$\det|A| = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (+1)a_1b_2 + (-1)a_2b_1 = a_1b_2 - b_1a_2$$

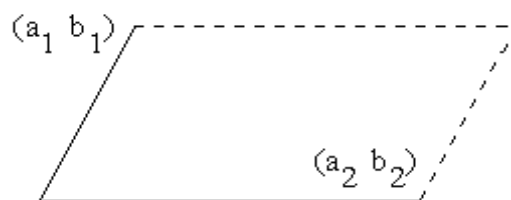


図 3.1 平行四辺形の面積

幾何学的には、図に示す平行四辺形の面積を表しています。

例 2.2 : $n=3$ の場合、標準の順列 $(1\ 2\ 3)$ に対し、積は、偶順列 $(1\ 2\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2)$, 奇順列 $(1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (3\ 2\ 1)$, であり、行列式は以下のようになります。

$$\det|A| = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

幾何学的には、図に示す平行六面体の体積を表しています。

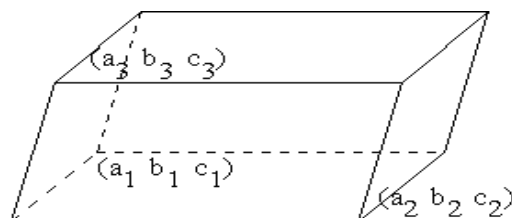


図 3.2 平行六面体の体積

3.3 行列式の性質

行列式には、以下のような性質があります。

- (i) 行と列を入れ換えても値は変わらない。
- (ii) 二つの行（列）を入れ換えると符号だけが変化する。
- (iii) ある行（列）のすべての要素が二つの数の和で表現できるときは、その行（列）の各要素を行（列）とし、他の行（列）の要素はすべて同じである二つの行列式の和として表現できる。
- (iv) ある行（列）を k 倍すると全体の値が k 倍になる。
- (v) ある行（列）の各要素に他の行（列）の対応する要素の k 倍を掛けて加えても行列式の値は変わらない。
- (vi) ある行（列）のすべての要素の値が 0 の時は、行列式の値も 0 になる。
- (vii) 二つの行（列）の対応する要素が比例関係にあるときは、行列式の値は 0 になる。
- (viii) ある行（列）のすべての要素が、他の行（列）の線形結合で表現可能なときは、行列式の値は 0 になる。

3.4 行列式の展開

【定義】 行列式において、一つの要素を含む行と列を除いた残りの要素で作った行列式をその要素の小行列式 (minorant) という。たとえば、 (i, j) 要素の小行列式を M_{ij} のように表す。また、 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ を、要素 (i, j) の余因数 (余因子) (cofactor) という。

n が 2 や 3 の場合は、例 2.1 や例 2.2 のようにして行列式の値を計算できますが、 n の値が大きくなると、可能な積の組み合わせ数が膨大になり、例のような方法で計算することはほとんど不可能になります。

行列式 $\det|A|$ は、余因子を使用して、任意の行 r (列 s) で以下のように展開可能です。この関係を利用し、できるだけ 0 である要素が多い行 (列) で展開することによって、大きな n に対する行列式の値を計算することができます (余因子の次数が 3 より大きければ、さらにそれを展開する)。

$$\begin{aligned}\det|A| &= a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn} && \text{第 } r \text{ 行で展開} \\ &= a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \cdots + a_{ns}A_{ns} && \text{第 } s \text{ 列で展開}\end{aligned}$$

3.5 行列の階数

[定義] $n \times m$ の行列 A から、任意に r 個の行と r 個の列をとって、その交わりの上にある要素をそのままとって作った r 次の行列式を A の r 次の小行列式 (r -th minorant) という。 r 次の小行列式の中には 0 でないものが少なくとも一つあって、 $(r+1)$ 次以上の小行列式はいずれも 0 であるときは、行列 A の階数 (ランク, または, 位) (rank) は r であるという。そして、 A の階数を $r = \text{Rank}A$ で表す。また、行列 A の階数は、行列 A の一次独立な行 (列) ベクトルの数に等しい。

[定義] 一次従属と一次独立な n 個のベクトル $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ の線形結合が 0 となる式,

$$c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = 0$$

において、同時には 0 でない実定数 c_i が存在する場合 (あるベクトルが、他のベクトルの線形結合で表現できる)、 n 個のベクトルは一次従属 (linearly dependent) であるという。また、同時には 0 でない実定数 c_i が存在しない場合、 n 個のベクトルは一次独立 (linearly independent) であるという。

例えば、2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

において、行列 A の場合は、1 列目と 2 列目からなる小行列式の値が 0 ではありません。従って、その階数は 2 となります。しかし、行列 B の場合、いずれの列を組み合わせても、2 次の小行列式は 0 となってしまいます。しかし、明らかに、1 次の小行列式 (各要素のみに相当) は 0 ではありません。従って、階数は 1 となります。

ベクトルの一次従属と一次独立については、幾何学的なイメージを浮かべると分かりやすいと思います。例えば、行列 B の 1 列目と 2 列目のベクトルを 2 次元平面上に描けば、2 つのベクトルは平行になります。従って、2 列目のベクトルは、1 列目のベクトルを 2 倍することによって表現できます。しかし、これらのベクトルと平行でない 2 次元平面上のベクトルを、これら 2 つのベクトルの線形結合によって表現することは不可能です。階数が 1 ですから、1 次元平面上 (直線上) の任意のベクトルを線形結合 (単に、0 でない要素を定数倍するだけ) によって表現することは可能です。

しかし、行列 A の 1 列目と 2 列目のベクトルを 2 次元平面上に描けば、2 つのベクトルは平行とはなりません。従って、2 次元平面上の任意のベクトルを、これら 2 つのベクトルの線形結合によって表現可能です。例えば、ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ は、

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

のように表せます。一次独立な 2 つのベクトル、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ をイメージしてもらえば、さらに明らかだと思います。

3.6 行列の演算

この節では、行列の演算について説明します。行列の演算には、以下のようなものがあります。

定数倍: 各要素の値が定数倍されます。 $B = kA, b_{ij} = ka_{ij}$ 加法と減法 同じ型の (行及び列の数が同じ) 行列に対してだけ定義されます。和: $C = A + B, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ 差: $C = A - B, c_{ij} =$

$a_{ij} - b_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ 積の演算については可換ではありません。つまり、それぞれ積 AB と BA が計算できたとしても、一般的に、 $AB = BA$ とはなりません。積の公式としては $C = A \times B = AB$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

ここで $A: r \times n, B: n \times s$ の場合だけ定義でき、 $C: r \times s$ の行列が定められます。行列のべき乗: $A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, A^3 = A^2 A, \dots$

3.7 逆行列

前節における行列の演算において、除算に関する説明をしましたが、除算に相当するものが、ここで説明する逆行列というものです。

[定義] A が $n \times n$ の正方行列のとき、 $AX = XA = I$ となるような正方行列 X が存在するとき、 X を A の逆行列といい、 A^{-1} で表す。このとき、正方行列 A は正則 (regular) であるといい、 A を正則行列 (regular matrix) という。逆行列が存在するための必要十分条件は、 $\det|A| \neq 0$ ($\text{Rank} A = n$) となる。

行列 A の逆行列は、以下のようにして計算できます。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det|A|} \text{adj} A$$

ただし、 $\text{adj} A$ は、 A の余因子行列 (cofactor matrix) といい、行列 A の (i, j) 成分の余因子 A_{ij} を (j, i) 要素とする行列です。

例えば、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の場合、その逆行列は、以下のようになります。

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3.8 固有値と固有ベクトル

[定義] n 次の正方行列 A に対して、0 でないベクトル x があって、

$$Ax = \lambda x$$

が成り立つとき ($x \neq 0$ の解をもつとき)、 λ を A の固有値 (characteristic value)、 x を固有ベクトル (characteristic vector) (一般的に、一意には決まらない。固有ベクトルをスカラー倍したのも固有ベクトルになる) という。したがって、固有値は、 $|A - \lambda I| = 0$ (固有方程式という) の解となる。

なお、実対称行列 (要素がすべて実数の対称行列) A には、以下のような性質があります。

定理:

- (1) 実対称行列にたいしては固有値はすべて実数となる。
- (2) 二つの異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。
- (3) ベクトルの直交: 2つのベクトルの内積が 0 (2つのベクトルのなす角が 90 度) 適当な直交行列 L によって、 $L^T A L$ が対角行列になるようにすることができる。

ところで、固有値と固有ベクトルとはどのようなものでしょうか。まず、行列をベクトルにかけるということについて、以下に示すような 2 次の正方行列を例にとりて考えてみます。ベクトル x に対して、下に示した各行列 A をかける、つまり、 $y = Ax$ という演算を行うと、ベクトル y はどのようになるでしょうか。

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

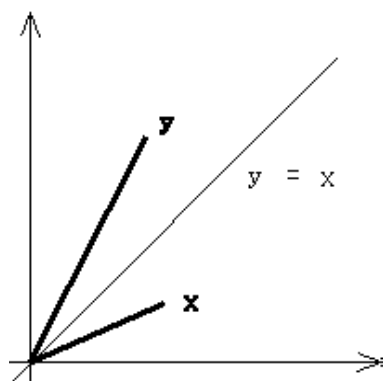


図 3.3 固有値と固有ベクトル

(1) の場合 (単位行列), x と y は全く同じものになります. (2) の場合, 下の図に示すように, y は, x の 2 倍の大きさになり, 方向は, $y = x$ という直線に対して対称な方向に変化します.

(3) は, 座標軸を θ だけ回転 (ベクトルの方向を $-\theta$ だけ回転) します. (4) は, ベクトルの大きさと方向を変えます. このように, 行列をベクトルにかけることは, ベクトルの大きさや方向を変化させることに相当します.

(1) から (4) までの行列に関しては, ベクトル x が 2 次元平面の全空間を動けば, ベクトル y も同様に全空間を動きます (x や y は, 2 次元空間を張るといいます). しかし, (5) や (6) の場合はどうでしょうか. x に (5) の行列をかけると, その x 成分だけが残し, y 成分は 0 になります. つまり, ベクトル x の x 軸への射影 (projection) (x 軸に映る影) になります (1 次元空間を張ることになります). したがって, ベクトル y は, x 軸上しか動くことができません. これは, 行列 (5) の階数が 1 である (一つの固有値が 0 である) ことによります. 同様に, 行列 (6) の場合は, すべてのベクトル x が, $y = x$ という線分上に射影されます.

次に, 別の面から固有値と固有ベクトルの意味について考えてみます. 行列としては, 2 次の実対称行列で, すべての固有値が正の場合 (多変量解析によく現れる分散共分散行列の場合は, このようになります) について検討します. そのような行列に対し, 次のような 2 次形式 (次節参照) を考えます.

$$(xy)A(xy)^T = (xy) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = c > 0$$

この式は, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ で, かつ, $a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)c > 0$ の場合, 楕円の方程式になります. 行列 A の固有値を, 大きい方から λ_1, λ_2 とすると, 楕円の長軸の方向が λ_1 に対する固有ベクトルの方向, また, 短軸の方向が λ_2 に対する固有ベクトルの方向になります. さらに, 長軸と短軸の長さの比が, $\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ となります.

例えば, 行列 (4) の場合, $c = 1$ とすると, 以下に示すような楕円の方程式になり, 長径及び短径の長さは, 2.828427 及び 1.632993 となります.

また, 固有値, 及び, 固有ベクトルは以下に示すようになります.

$$\begin{aligned} \text{固有値 } \lambda_1 = 1.5, \quad \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} -0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix} \\ \text{固有値 } \lambda_2 = 0.5, \quad \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} 0.707107 \\ 0.707107 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.9 二次形式

[定義] n 次の実対称行列 A と n 次元ベクトル x に対して,

$$Q_A(x) = x^T A x = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

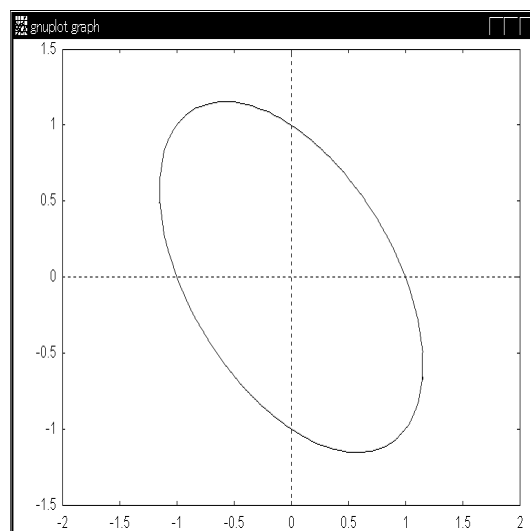


図 3.4 楕円方程式によるプロット図

を行列 A に対する二次形式 (quadratic form) という. すべての x に対して, 二次形式が非負であるとき, つまり, $x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}_n$ のとき, A は半正定値 (positive semidefinite), あるいは, 非負定値 (nonnegative definite) であるという. また, すべての $x \neq 0$ に対して二次形式が正であるとき, つまり, $x^T A x > 0, \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}_n$ のとき, A は正定値 (positive definite) であるという. 正定値, 及び, 半正定値は, 行列 A のすべての固有値が 0 より大きい, 及び, 0 以上であるということに対応する.

4 微分積分

微分や積分は様々な分野で利用され, 非常に重要な概念です. 非常に難しい概念のように思われがちですが, 決してそうではありません. 我々が生きていく上で常に利用し, また, 利用することなしでは生きていくことすら困難になるほど重要な概念です.

例えば, 山へ登っている途中で道に迷った場合について考えてみます. また, 霧のため, 周りほとんど見えないものとします. 尾根へたどり着けば道が存在すると思われるので, その方向 (高い方) へ登っていきたいものとします. このとき, どのような方向に向かえばよいでしょうか. 周りがほとんど見えなくても, 足下近傍の情報から, どちらの方向へ向かえば高い方へ向かうかの見当が付きまします. このとき使用している情報 ”傾斜” は, 正に, 位置を微分するという動作から得られたものです.

今, A という場所から B という目的地に向かって歩いていたいとします. A から B までの距離は分かっており, 1 時間程度で行ける場所だとします. 30 分程度歩いたとき, 「これで半分来たか. あと, 30 分程度で着くだろう」といったようなことを考えるはずですが, このような推論が可能であるためには, 歩く速度—位置を微分したもの—を知っている必要があります. また, 30 分歩いた時の移動距離—速度を 30 分間積分したもの—も知っている必要があります.

以上の例で述べたように, 微分は予測のために, また, 積分は過去の行動を積み重ねた結果を表すために使用されます. 我々は, 微分や積分を, 何の困難さもなく普段使用しているはずですが, ここでは, これらの概念について, もう少し精密に検討していきます.

4.1 微分法

[定義] 関数 $f(x)$ において, x が定数 a に限りなく近づくとき ($x \rightarrow a$ と表す), $f(x)$ の値がある定数 α に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

と表し, α を $x \rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限值という.

【定義】 曲線 $y = f(x)$ が与えられたとき、曲線上の点 $A(a, f(a))$ において

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

が存在する（有限）ならば、この値を $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい、

$$f'(a) \quad \frac{df}{dx}(a)$$

で表す。このとき、 $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるという。また、関数 $f(x)$ がある区間の任意の数 a に対して、 $x = a$ で微分可能であるとき、 $f(x)$ はその区間で微分可能であるという。

正に、この微分係数が、先に述べた例における山の傾斜に対応しています。 δx が、足下近傍ということになります。

微分係数 $f'(a)$ は、図 4.1 に示すように、 $x = a$ における接線の傾きに相当します。また、 $x = a$ において微分係数が存在することは、曲線 $y = f(x)$ が、 $x = a$ でなめらかに変化していることを意味しています。例えば、 $x = b$ のように、曲線が折れ曲がっているような点では、微分係数は存在しません。

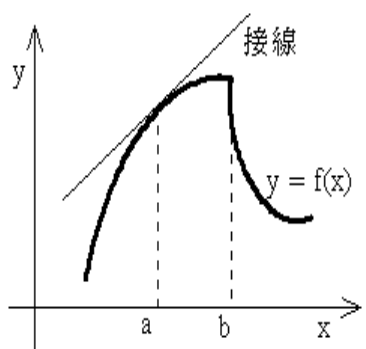


図 4.1 微分係数と接線

【定義】 関数 $f(x)$ がある区間で微分可能であるとき、微分係数を変数 x の関数と考えて、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

この $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数 (derivative function) といい、導関数 $f'(x)$ を求めることを、「 $f(x)$ を (x で) 微分する」という。 $f(x)$ の導関数を表すのに、 $f'(x)$ 、 y' 、 $\frac{df}{dx}(x)$ 等と書く。

導関数自身に対しても増減の変化を考えると、その導関数も、同様に定義可能です。

【定義】 導関数の導関数は 2 階の（または、2 次の）導関数と呼ばれ、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = f''(x)$$

と表す。一般に、 n 階の（または n 次の）導関数を

$$y^{(n)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y^{(n-1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} = f^{(n)}(x)$$

と表す。また、 $y^{(n)}$ 、 $\frac{d^n f}{dx^n}$ と表す。

以下、よく使用する微分法の公式を上げておきます。

- 1) $\frac{dC}{dx} = 0$ ただし C は定数
- 2) $\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$ ただし a は定数
- 3) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

$$4) \frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$$

$$5) \frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

$$6) \frac{d}{dx} \{f \pm g\} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

$$7) \frac{d}{dx} \{f \cdot g\} = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$8) \frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$9) y = F(t), t = g(x) \Rightarrow y = F(g(x)) = (F \circ g)(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dg}{dx}$$

$$10) y = F(t), x = G(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dt} / \frac{dG}{dt}$$

以下に述べる定理や定義は、関数の形を判別するためのものです。

[定理] (平均値の定理) 関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ ($a < b$) で微分可能ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

となる数 c が存在する。

[定理] 関数 $f(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ ($a < b$) で微分可能とする。(1) 閉区間 $a \leq x \leq b$ でつねに $f'(x) > 0$ ならば、 $f(x)$ は単調増加する。(2) 閉区間 $a \leq x \leq b$ でつねに $f'(x) < 0$ ならば、 $f(x)$ は単調減少する。(3) 閉区間 $a \leq x \leq b$ でつねに $f'(x) = 0$ ならば、 $f(x)$ は定数である。

[定義] $f(x)$ が $x = a$ の近傍で最大 (最小) であるとき、 $f(x)$ は $x = a$ で極大 (極小) (extremal maximum, minimum) になるといい、 $f(a)$ を極大値 (極小値) (extremal mximal value, minimum value) という。また、極大値と極小値をあわせて極値 (exremum) といい、微分可能な $f(x)$ が $x = a$ で極値をもつならば、 $f'(a) = 0$ である。

次は、平均値の定理の拡張であり、関数を多項式で近似するような場合に使用される定理です。

[定理] (テイラーの定理) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, x]$ で n 回微分可能ならば、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-a)^n$$

となる数 c ($a < c < x$) が存在する。ここで、最後の項 (R_n とする) を剰余項 (residual) という。 n を限りなく大きくするとき、 $\lim_n R_n = 0$ となるならば、 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \cdots$$

のように無限級数展開される。これを関数 $f(x)$ のテイラー展開という。特に、 $a = 0$ のとき、マクローリン展開と呼ばれる。級数が収束するようなある適当な x の範囲を収束半径とよぶ。

以下に示すのは、関数のマクローリン展開の例です。 x が小さな時、関数の線形近似 (x の 1 次の多項式で表す) をしたいようなときよく使用されます。

$$1) e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$4) (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

4.2 偏微分

[定義] 関数 $z = f(x, y)$ において, y を一定にして x を動かすと, $z = f(x, y)$ は x だけの関数となる. このとき, x の関数の導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

が存在するならば, これを x に関する偏導関数 (partial derivative) という. このとき, 関数 $f(x, y)$ は x に関して偏微分可能であるという. x に関する偏導関数を表すのに,

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad f_x(x, y)$$

等とも書く. また, y に関する偏導関数も同様に定義する.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

2 階, 3 階, さらに, n 階の偏導関数も定義できる. 2 変数関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ は x, y の関数であるから, これをさらに, x または y で偏微分することによって, 2 階の偏導関数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ができる.

5 積分法

5.1 不定積分

[定義] 関数 $f(x)$ に対して, $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数または不定積分という. $f(x)$ の不定積分を $\int f(x)dx$ と表し, $\int f(x)dx$ を求めることを $f(x)$ を積分するという. $F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の一つとすると, $f(x)$ と任意の不定積分は, $F(x)$ と定数の違いしかない. すなわち, $\int f(x)dx = F(x) + C$ で表される. このとき, 定数 C を積分定数という.

以下, 代表的な関数に対する積分法の公式を上げておきます.

$$1) \ n \neq -1, \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$2) \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

$$3) \quad \int e^x dx = e^x$$

$$4) \quad \int \sin x dx = -\cos x, \quad \int \cos x dx = \sin x$$

$$5) \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$6) \quad \int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

5.2 定積分

以下に述べるのが, 定積分の公式です. 図 5.2 を参考にしてください.

[定義] 閉区間 $a \leq x \leq b$ で定義されている関数 $f(x)$ を考える. 閉区間 $a \leq x \leq b$ を n 等分して, その分点を $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ とし, $\Delta x = (b-a)/n$ とすると, $S_n = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \Delta x = \{\sum_i f(x_i)\} \Delta x$ は, n 個の長方形の和となる (図の斜線部). n が限りなく大きくなれば, 数列 $\{S_n\}$ は, 曲線 $y = f(x)$,

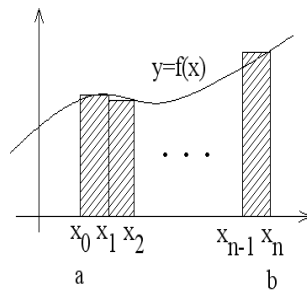


図 5.1 定積分

2 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸で囲まれた面積 S に限りなく近づく. 数列 $\{S_n\}$ の極限值 $\lim_n S_n$ を, $f(x)$ の a から b までの定積分といい,

$$\int_a^b f(x)dx$$

と表す. ここで $F(x)$ は $f(x)$ は原始関数とよぶが、一般には $f(x)$ が簡単であっても初等関数になるとは限らない.

以下, 代表的な定積分の公式を上げておきます.

$$1) \frac{d}{dx} \int_a^x f(x)dx = f(x)$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = \left[\int_a^x f(x)dx \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$4) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$5) \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$