

確率システムの信頼性

システムには n 個の部品があり、要素を $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ で表し、その構造関数は $\phi(x) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ で与えられているとする。いままでの議論では、 x_i は $0, 1$ のいずれかの値をとるものであった。以下では、これが互いに独立な確率変数であるとし、 $p_i := P(X_i = 1), q_i := P(X_i = 0), p_i + q_i = 1$ と仮定しよう。これをパラメータ p_i のベルヌーイ分布という。つまり $P(X_i = x) = p_i^x (1 - p_i)^{1-x}, x = 0, 1$ である。

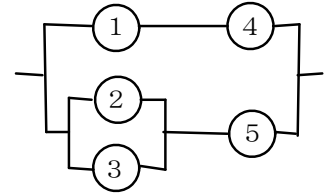
さらに $X := (X_1, X_2, \dots, X_n)$ とおき、構造関数からシステムの稼働/故障の確率を $h(p) := P(\phi(X) = 1), p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ とおく。よって $\bar{h}(p) := 1 - h(p) = P(\phi(X) = 0)$ となる。

例 1. 直列システムでは $h(p) = P(\phi(X) = 1) = P(\prod_{i=1}^n X_i = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 1) = \prod_{i=1}^n p_i$

例 2. 並列システムでは $h(p) = P(\phi(X) = 1) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = \prod_{i=1}^n p_i$

例 3. k アウトオブ n では $h(p) = P(\phi(X) = 1) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ ただし、 $p_i := p, i = 1, 2, \dots, n$ とする。

問 1. ブロック構造が右図のシステムで与えれば、システムの確率信頼性は $h(p_1, \dots, p_5) = 1 - \{1 - p_1 p_4\} \{1 - (1 - (1 - p_2)(1 - p_3)) p_5\}$ で与えられる。具体的な数値を代入してみると、 $q_1 = q_2 = q_3 = 0.02, q_4 = q_5 = 0.01$ ならば、 $h(p) = 0.9997$ となることを確かめよ。



問 2. 2 アウトオブ 3 のシステムで、 $p_i = p$ ならば、 $3p^2(1-p) + p^3$ となることを示せ。

事象 A_j を最小切断集合 K_j が機能しないこととすると、その確率は $P(A_j) = \prod_{i \in K_j} P(X_i = 0)$ 、で与えられ、これを評価することを考える。一般に $\bar{h}(p) := 1 - h(p) = P(\phi(X) = 0) = P(\cup_{j=1}^k A_j) = w_1 - w_2 + w_3 - \dots + (-1)^{k+1} w_k$ 。ただし $w_1 := \sum_j P(A_j), w_2 := \sum_{j_1 < j_2} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}), w_3 := \sum_{j_1 < j_2 < j_3} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) \dots$ で、

$$\begin{aligned} \bar{h}(p) &= P(\phi(X) = 0) \leq w_1 - w_2 + w_3 - \dots + w_r, r : \text{odd}, \\ \bar{h}(p) &= P(\phi(X) = 0) \geq w_1 - w_2 + w_3 - \dots - w_r, r : \text{even}, \end{aligned}$$

が成り立つ。

(1) 独立な要素部品の信頼性関数 $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ の非減少関数である。

(2)

$$\begin{aligned} h(p) &= E[\phi(X)] = E[\phi(X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ &= \sum_x \phi(x) P(X = x) \\ &= \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{\{x: \phi(x)=1\}} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i} (1 - p_i)^{1-x_i} \end{aligned}$$

(3) 単調なシステムでは

$$h(p) = p_i h(1_i; p) + q_i h(0_i; p), \quad \text{ただし } h(\cdot_i; p) = h(p_1, \dots, \cdot, \dots, p_n)$$

(4) 単調なシステムでは、 $\phi(x \amalg y) \geq \phi(x) \amalg \phi(y)$ だから、

$$h(p \amalg p') \geq h(p) \amalg h(p')$$

が成り立つ。ただし $x_1 \amalg x_2 = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2), x \amalg y = (x_1 \amalg y_1, \dots, x_n \amalg y_n)$

(注意) 並列システムならば等号が成り立っている。また整合的なシステムのもとでは等号が成り立っている場合は、並列システムに限る。