

確率分布, 期待値

$$\text{確率分布; } F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{k \in (-\infty, x]} p_X(k) & \text{離散型} \\ \int_{(-\infty, x]} f_X(t) dt & \text{連続型} \end{cases}$$

$$\text{期待値; } EX = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t F_X(dt) = \begin{cases} \sum_{k \in (-\infty, \infty)} k p_X(k) & \text{離散型} \\ \int_{(-\infty, \infty)} t f_X(t) dt & \text{連続型} \end{cases}$$

$$\text{平均; } \mu = \mu_X = EX = E[X]$$

$$\begin{aligned} \text{分散; } \sigma^2 &= \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] \\ &= \begin{cases} \sum_{k \in (-\infty, \infty)} (k - \mu)^2 p_X(k) = \sum_{k \in (-\infty, \infty)} k^2 p_X(k) - \mu^2 \\ \int_{(-\infty, \infty)} (t - \mu)^2 f_X(t) dt = \int_{(-\infty, \infty)} t^2 f_X(t) dt - \mu^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{モーメント母関数; } M(u) = M_X(u) = E[e^{uX}] = \begin{cases} \sum_{k \in (-\infty, \infty)} e^{uk} p_X(k) & \text{離散型} \\ \int_{(-\infty, \infty)} e^{ut} f_X(t) dt & \text{連続型} \end{cases}$$

モーメント母関数から平均、分散を計算;

$$\mu = \left. \frac{dM(u)}{du} \right|_{u=0} = M'(0), \quad \sigma^2 = \left. \frac{d^2 M(u)}{du^2} \right|_{u=0} - \left\{ \left. \frac{dM(u)}{du} \right|_{u=0} \right\}^2 = M''(0) - \{M'(0)\}^2$$

いくつかの代表的な分布の例

一様分布 点集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上の場合; $p_X(k) = \frac{1}{N}$, $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

区間 $[a, b]$ 上の場合; $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a, b]$. 平均 $(a+b)/2$, 分散 $(b-a)^2/12$.

2 項分布 パラメータ $n = 1, 2, \dots, 0 < p < 1$; $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

平均 np , 分散 $np(1-p)$.

ポアソン分布 パラメータ $\lambda > 0$; $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. 平均 λ , 分散 λ .

幾何分布 パラメータ $0 < p < 1$; $p_X(k) = p(1-p)^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

平均 $(1-p)/p$, 分散 $(1-p)/p^2$. (注) $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots\}$ では平均 $1/p$, 分散 $(1-p)/p^2$ となる。

負の 2 項分布 パラメータ $0 < p < 1$, $r = 1, 2, \dots$;

$$p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k \in \{r, r+1, r+2, \dots\}$$

$$\text{あるいは } p_X(i) = \binom{r+i-1}{i} p^r (1-p)^i = \binom{-r}{i} p^r \{(-1)(1-p)\}^i, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

平均 r/p , 分散 $r(1-p)/p^2$.

指数分布 パラメータ $\lambda > 0$; $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \in [0, \infty)$. 平均 $1/\lambda$, 分散 $1/\lambda^2$.

ガンマ分布 パラメータ $k = 1, 2, \dots, \lambda > 0$; $f_X(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x}$, $x \in [0, \infty)$. 平均 k/λ , 分散 k/λ^2 .

(注) $k = 1$ はパラメータ λ の指数分布。

正規分布 パラメータ $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$;

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

平均 μ , 分散 σ^2 . (注) $N(\mu, \sigma^2)$ と表す。標準正規分布とは $N(0, 1)$ 。

コーシー分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

平均 や 分散 は存在しない。 y 軸で対象であるが、平均はゼロではない。裾の確率が大いからモーメントの積分をもたない。

ワイブル分布 パラメータ $\lambda > 0, \beta > 0$;

$$f_X(x) = \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} \exp\{-(\lambda x)^\beta\}, \quad x \in [0, \infty)$$

平均 $\frac{\Gamma(1+1/\beta)}{\lambda}$, 分散 $\frac{1}{\lambda^2} \{\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma(1+1/\beta)^2\}$. (注) $\beta = 1$ のときはパラメータ λ の指数分布。ここで $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}$ とは、ガンマ関数である。

演習問題

- 1 2項分布のモーメント母関数を求めなさい。またこれから2項分布の平均と分散を計算しなさい。
- 2 超幾何分布とは自然数のパラメータ $N, K, n (N \leq K < \infty, N \leq n)$ として

$$f(x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

で与えられ、非復元抽出での個数の数え上げに表れる。この分布の平均と分散を求めなさい。(注) 復元抽出は2項分布 $n, p = K/N$ が対応する。

- 3 独立な r 個のパラメータ p の幾何分布を加えたものは、パラメータ p, r の負の2項分布にしたがうことを示しなさい。

- 4 指数分布にはメモリーレス; $P(X > a+b | X > a) = P(X > b)$ とよばれる性質をもつ。故障時刻を表す変数として用いられる。この式を示し、この意味を考えなさい。また離散型確率変数について同様な性質をもつ分布は何か?

- 5 2項分布において $np = \lambda > 0$ を一定にして $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$ とするとポアソン分布に近づくことを計算しなさい。

- 6 対数正規分布とは、自然対数 $Y = \log X$ ($X > 0$) が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうような確率変数 X としたものである。平均 $E[X] = \exp\{\mu + \sigma^2/2\}$, 分散 $Var[X] = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\}$ を示しなさい。