システムの寿命分布（加齢の問題），その2

システムの寿命を各 부품のそれから，どのように反映されるかを調べる。

与えられた故障時刻 T を表す分布 F から，ハザード率（故障率） $\lambda(t) := f(t)/\{1 - F(t)\}$ を定めたが， $F(t) = 1 - \exp\{-\int_0^t \lambda(s)ds\}$ が成立するから逆に与えられたハザード率から分布を定めることができる。前回のハザード率の性質として，増加ハザード率（IFR）つまり，時刻ともに故障しやすくなることを述べた。同様に減少ハザード率（DFR）とは，安定して故障しにくくなることである。しかし，この性質は，ある意味で強すぎるが起こる。

シン普森のパラドックス 2つの部品からなる並列システムで各 부품の寿命時間が減少ハザード率をもっているも，システムのハザード率が増加をする； $T = \max\{T_1, T_2\}$ において各 T_1, T_2 が独立同一分布 $F(t) = 1 - \exp\{-u(t)\}$, $u(t) := \gamma t + \alpha(1 - \exp\{-\beta t\})$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$ にしたがうとき， $2\alpha \exp\{\alpha\} < (\gamma/\beta)^2 < 1$ ならば， T の寿命分布のハザード率は， $T_i, i = 1, 2$ が減少ハザード率であっても増加ハザード率をもつ。

そこでもう少し緩やかな加齢の概念を考える必要があり，IFRA とか NBU, NBUE が知られている。

定義

$$(1) F : \text{IFRA}(\text{increasing failure rate average}) \iff -\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \nearrow (t \uparrow)$$

$$(2) F : \text{NBU}(\text{new better than used}) \iff \bar{F}(s+t) \leq \bar{F}(s)\bar{F}(t), s, t > 0$$

$$(3) F : \text{NBUE}(\text{new better than used in expectation}) \iff \mu(t) \leq \mu, 0 \leq t < t^*$$

ここで $t^* := \sup\{t; \bar{F}(t) > 0\}$, $\mu := E[T] < \infty$, $\mu(t) := E[T - t | T > t] = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_0^\infty \bar{F}(x+t)dx = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(t)dx$ とする。(1)の意味は，平均的な意味でハザード率が増加すること。(2)の意味は，時間が経てば残存確率が減少してくること，つまり $\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} \leq \bar{F}(s) = \frac{\bar{F}(0+s)}{\bar{F}(0)}$, $0 < t, s$ 。(3)の意味は，新品のほうが残存寿命時間の平均が時間の経過したものより大きい。

定理 つぎの関係式が成り立つ：

$$\text{IFR} \implies \text{IFRA} \implies \text{NBU} \implies \text{NBUE}$$

補題 IFRA ならば $(\bar{F}(t))^{1/t}$ は非増加で，さらにこれはつぎと同値

$$\bar{F}(\alpha t) \geq (\bar{F}(t))^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, t \geq 0.$$

補題 単調な構造の信頼性関数を h とするとき，

$$h(p^\alpha) \geq h^\alpha(p)$$

ここで $p^\alpha = (p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_n^\alpha)$, $h^\alpha(p) = \{h(p)\}^\alpha$

定理（前出） 単調な構造関数に対して，各部品要素の寿命時間分布が独立，IFRA であれば，システムの寿命時間は IFRA となる。

定理 2つの確率変数 X, Y が独立で IFR ならば，和 $X + Y$ も IFR である。