システムの寿命分布

システムのそれぞれの要素部品に対して，ある寿命分布を与えたとき，構成されたシステム全体における寿命時間を評価することが目的である。いまシステムの構造関数は $\phi = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とし，n 個の要素部品の寿命時間 $F_i, i = 1, 2, \cdots, n$ は独立であると仮定する。このとき，システムの信頼性関数の期待値 $h(p_1, p_2, \cdots, p_n) = E[\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n)] = P(\phi(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 1), \quad (p_i := P(X_i = 1))$ をもちいる。

定理　システムの寿命時間を T とおくとき，その分布と期待値はつぎで表現される：

$$F_T(t) := P(T \le t) = 1 - h(\overline{F}(t)) \qquad E[\,T\,] = \int_0^\infty h(\overline{F}(t))\,dt$$

ここでそれぞれの故障時間 $T_i, i = 1, 2, \cdots, n$ として寿命分布は $F_i(t) := P(T_i \le t) = P(X_i(t) = 0) = 1 - P(X_i(t) = 1) = 1 - E[X_i(t)]$。
(証明）各部品の故障時刻を表す T_i から，ある時刻におけるその部品の状態（正常／故障）を対応させると，$X_i(t) := \begin{cases} 1; & T_i > t \\ 0; & T_i \le t \end{cases}$ である。またシステムの状態を $X(t) := (X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t))$ とおけば

$$\begin{aligned} \overline{F_T}(t) := 1 - F_T(t) = P\{T > t\} &= P\{\text{ システムの故障時刻 } T \text{ が time } t \text{ より後である }\} \\ &= P\{\text{ 時刻 } t \text{ ではシステムが稼動している }\} \\ &= P(\phi(X(t)) = 1) = E[\phi(X(t))] = E[\phi(X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t))] \\ &= h(\overline{F_1}(t), \overline{F_2}(t), \cdots, \overline{F_n}(t)) = h(\overline{F}(t)) \end{aligned}$$

であるから。また分布と期待値の関係式 $E[T] = \int_0^\infty P\{\,T > t\}dt$ から命題が示される。（終）

つぎに寿命時間の分布に関連して，加齢 の性質，すなわち時刻の変化に伴い，故障率がどのように変化するかを考えよう。たとえば，初期には故障しがちであるが，時刻とともに安定して故障しにくい場合や，逆に時刻が経てば経つほど故障が起こりやすくなる，などを議論する。

正の値をとる確率変数 T が分布関数 $G(t) := P(T \le t)$ とその密度関数 $g(t) := dG(t)/dt$ をもつとき，**ハザード関数（故障率）**$\lambda_G(t)$ とは次式で定める：

$$\lambda_G(t) := \frac{g(t)}{\overline{G}(t)} = \frac{g(t)}{\int_t^\infty g(s)\,ds} \qquad \Lambda_G(t) := \int_0^t \lambda_G(s)\,ds$$

分布 G が**増加故障率（ＩＦＲ）**とは，故障率 $\lambda_G(t)$ が t の増加関数であるときをいう。同様に分布 G が**減少故障率（ＤＦＲ）**とは，故障率 $\lambda_G(t)$ が t の減少関数であるときをいう。

例　パラメータ λ, α の**ワイブル分布**とは，$G(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}, \quad t \ge 0$ 　であり，このときの故障率関数は $\lambda_G(t) = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$ である。したがってこれから，ワイブル分布は $\alpha \ge 1$ ならば，ＩＦＲであり，$0 < \alpha \le 1$ ならば，ＤＦＲである。とくに $\alpha = 1$ のときは，指数分布であって，ハザード関数は一定で，ＩＦＲ，ＤＦＲの両者の性質をもっている。

平均増加故障率（ＩＦＲＡ）とは，

$$\frac{1}{t}\Lambda_G(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \lambda_G(s)\,ds$$

が t について，増加であるときをいう。

定理　独立な単調システムにおいて，各々の要素部品がＩＦＲＡ寿命時間をもつならば，システムの寿命時間もＩＦＲＡとなる。