平成２０年度 問題と解答

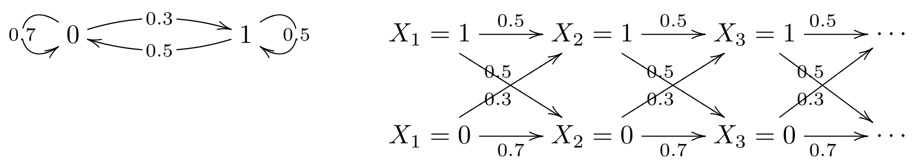
問題１ $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ の積分計算を、一様乱数 $U_1, U_2, \cdots,$ から近似値で求めるにはどうしたらよいか。

(解) 大数の法則をもちいて、確率変数の標本平均が平均に収束することをつかう。独立同一分布であるから、一様分布 $U_i, i=1,2,\cdots$ の密度関数は $f_U(x)=1,(0<x<1),=0$(その他) であるから、$E[\sqrt{1-U^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-x^2}\cdot f_U(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ が成り立つ。したがって確率変数列 $\sqrt{1-U_i^2}, i=1,2,\cdots$ に大数の法則を利用する。いま $S_1=0,\ S_n=S_{n-1}+\sqrt{1-U_n^2}, n=1,2,\cdots$ とおき、n を十分大きくして $\dfrac{S_n}{n}$ とおけば、これが近似値となる。

問題２

２つの状態からなるマルコフ連鎖 $X_1, X_2, \cdots,$ の推移行列が $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ で与えられている。つぎの条件つき確率を求めよ。(1) $P(X_2=1|X_1=0)$ (2) $P(X_3=1|X_1=0)$

(解) 状態は $\{0,1\}$ で推移図は下記のように移動する。



したがって

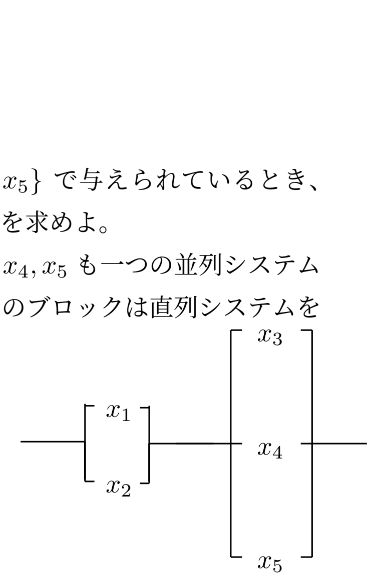
(1) $P(X_2=1|X_1=0)=0.3$

(2) $P(X_3=1|X_1=0)$
$= P(X_2=1|X_1=0)P(X_3=1|X_2=1)+P(X_2=0|X_1=0)P(X_3=1|X_2=0)$
$= 0.3\times 0.5+0.7\times 0.3$
$= 0.15+0.21=0.36$

問題３

あるシステムの構造関数が $\phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\max\{x_1,x_2\}\max\{x_3,x_4,x_5\}$ で与えられているとき、(1) このシステムの概形を図示せよ。また (2) 最小切断集合と (3) 最小経路集合を求めよ。

(解) (1) 構造関数の式から、要素 x_1, x_2 は並列システムであり、また要素 x_3,x_4,x_5 も一つの並列システムをなしている。さらに構造式はこの２つのブロックの積となっているから、２つのブロックは直列システムを構成している。したがってこの考察からつぎの図のようなシステムである。



(2) x を省略して番号のみを記すと、
最小切断集合 $\{1,2\},\{3,4,5\}$,
最小経路集合 $\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\}\{2,5\}$

問題４ (1) ハザード関数の定義式を述べよ。

(2) パラメータ λ の指数分布に対するハザード関数は一定であることを

示せ。

(解)

(1) ハザード関数（故障率関数）を $H(t)$ とすると、分布関数 $G(t)$ とその密度関数 $g(t)$ に対して

$$H(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$$

と定めるものである。

(2) 指数関数であれば、パラメータが λ であるから $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t > 0)$, $G(t) = 1 - e^{-\lambda t}, (t > 0)$ となる。これを代入すると

$$H(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

これは t によらない。時間パラメータによらない一定の値となるから、時刻には変化しない値である。

問題5

n 個の並列システムにおける各部品の寿命分布が独立で、同じパラメータ λ の指数分布であるとき、このシステムの寿命時間 T の分布を求めよ。

(解) n 個の並列システムの構造関数 $\phi(x)$ は $\phi(x) = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ である。また寿命時間 T に対する分布は

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \leq t) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \leq t)$$

ここで独立であることを用いた。また指数分布であるから各 i について、$P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ であるから
ゆえに

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n$$

問題6

パラメータ λ, α のワイブル分布 $G(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}$, $(t \geq 0)$ のハザード関数を求めよ。またどういう場合に IFR となるか。

(解) ハザード関数の定義式に分布の式を代入する。ワイブル分布の分布関数と $G(t) = 1 - \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}$ その密度関数

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} \exp\{-(\lambda t)^\alpha\} \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}$$

から、

$$H(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{\alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} \exp\{-(\lambda t)^\alpha\}}{\exp\{-(\lambda t)^\alpha\}} = \alpha\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}$$

となる。このとき、関数 $t^{\alpha-1}$ に対して、t の増減を考えればよい。もし $\alpha - 1 > 0$ ならば、増加関数であり、一方 $\alpha - 1 < 0$ ならば、減少関数である。$\alpha - 1 = 0$ ならば、一定の定数関数となる。したがってもし $\alpha > 1$ ならば、IFR であり、一方 $\alpha < 1$ ならば、DFR である。$\alpha = 1$ は指数分布の場合で、定数となる。