

平成 2 1 年度 問題

問題 1

独立で同じ単位区間 $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがう確率変数 $U_1, U_2, \dots$, を 12 個加えて、6 を引いた値 $X = U_1 + \dots + U_{12} - 6$ の (1) 平均 $\mu = E(X)$, (2) 分散 $\text{var}(X) = E(X - \mu)^2$ を求めよ。

(解) 単位区間上の一様分布について、平均は $E(U) = \int_0^1 x dx = 1/2$, 分散は $E(U - 1/2)^2 = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/3 - 1/4 = 1/12$ 。したがって和 $\sum_i U_i$ の平均は $E \sum_i U_i = 12 \times 1/2 = 6$ したがって $\mu = E(X) = E(U_1 + \dots + U_{12}) - 6 = 0$, また分散は定数を引いても同じ値であるから、 $\text{var}(X) = \text{var}(U_1) + \dots + \text{var}(U_{12}) = 12 \times 1/12 = 1$ となる。

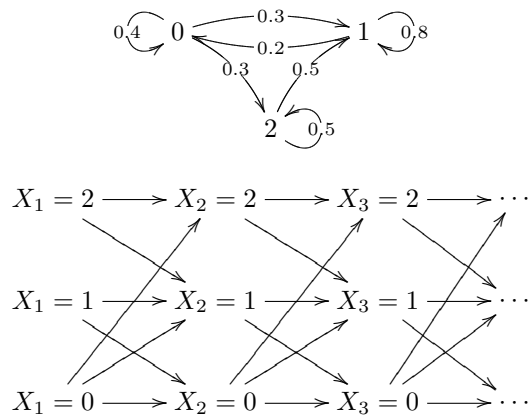
問題 2

3 つの状態 $\{0, 1, 2\}$ からなるマルコフ連鎖 $X_1, X_2, \dots$, の推移行列が $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ で与えられて

いる。つぎの条件つき確率を求めよ。

- (1) $P(X_2 = 1 | X_1 = 0)$ (2) $P(X_3 = 2 | X_1 = 0)$ (3) $P(X_3 = 2 | X_1 = 2)$

(解) 状態は $\{0, 1\}$ で推移図は下記のように移動する。



行列の積では

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.51 & 0.27 \\ 0.24 & 0.70 & 0.06 \\ 0.10 & 0.65 & 0.25 \end{pmatrix}$$

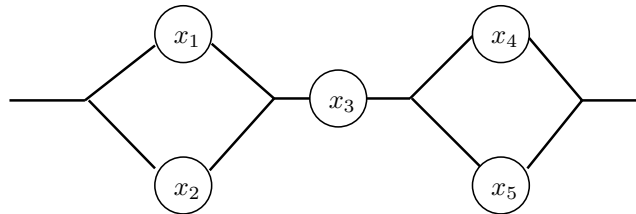
計算式で考えれば

- (1) $P(X_2 = 1 | X_1 = 0) = 0.3$
 (2) $P(X_3 = 2 | X_1 = 0) = P(X_2 = 0 | X_1 = 0)P(X_3 = 2 | X_2 = 0) + P(X_2 = 2 | X_1 = 0)P(X_3 = 2 | X_2 = 2) = 0.27$
 (3) $P(X_3 = 2 | X_1 = 2) = P(X_2 = 2 | X_1 = 2)P(X_3 = 2 | X_2 = 2) = 0.5$

問題 3 あるシステムの構造関数が $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \max\{x_1, x_2\} \cdot x_3 \cdot \max\{x_4, x_5\}$ で与えられている。3つの部分 $\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}$ からなっている。このとき、

- (1) このシステムの概形を図示せよ。
- (2) 最小切断集合を求めよ。
- (3) 最小経路集合を求めよ。
- (4-1) 変数 x, y が 0, 1 のいずれかであるとき、関係式 $\max\{x, y\} = 1 - (1 - x)(1 - y)$ を示せ。
- (4-2) また $\min\{x, y\} = x \cdot y$ を示せ。

(解) (1) 構造関数の式から、要素 x_1, x_2 は並列システムであり、また要素 x_4, x_5 も一つの並列システムをなしている。さらに構造式はこの3つのブロックの積となっているから、3つのブロックは直列システムを構成している。したがってこの考察からつぎの図のようなシステムである。



- (2) 最小切断集合は3個で、 $\{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_4, x_5\}$
- (3) 最小経路集合は4個で $\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_2, x_3, x_5\}$
- (4)

x	y	$\max\{x, y\}$	$1 - (1 - x)(1 - y)$	$\min\{x, y\}$	$x \cdot y$
0	0	0	$1 - (1 - 0)(1 - 0) = 0$	0	$0 \cdot 0 = 0$
0	1	1	$1 - (1 - 0)(1 - 1) = 1$	0	$0 \cdot 1 = 0$
1	0	1	$1 - (1 - 1)(1 - 0) = 1$	0	$1 \cdot 0 = 0$
1	1	1	$1 - (1 - 1)(1 - 1) = 1$	1	$1 \cdot 1 = 1$

補足の例題 最小経路集合が $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{5, 6\}$ で与えられている。このとき、最小切断集合を求めよ。

問題 4

- (1) ハザード関数の定義式を述べよ。
- (2) パラメータ λ の指数分布に対するハザード関数は一定であることを示せ。

(解)

- (1) ハザード関数（故障率関数）を $H(t)$ とすると、分布関数 $G(t)$ とその密度関数 $g(t)$ に対して

$$H(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)}$$

と定める。

(2) 指数関数であれば、パラメータが λ であるから $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, (t > 0), G(t) = 1 - e^{-\lambda t}, (t > 0)$ となる。これを代入すると

$$H(t) = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

これは t によらない。時間パラメータによらない一定の値となるから、時刻には変化しない値である。

問題 5

2 個の直列システムにおける各部品の寿命分布 X_1, X_2 が独立で、同じパラメータ λ の指数分布とする。このとき、

- (1) システムの寿命時間を T とするとき、 T を X_1, X_2 で表せ。
- (2) このシステムの寿命時間 T の分布を計算せよ。

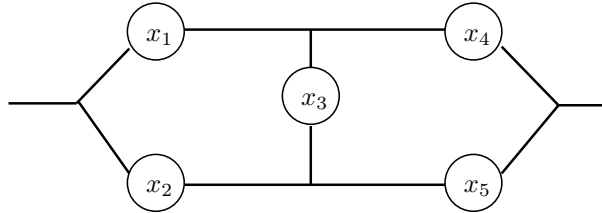
(解) 2 個の直列システムの構造関数 $\phi(x)$ は $\phi(x) = \min\{x_1, x_2\}$ である。また寿命時間 T に対する分布は

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(\min\{X_1, X_2\} \leq t) \\ &= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} \geq t) = 1 - P(X_1 \geq t)P(X_2 \geq t) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))^2 = 2F_X(t) - F_X(t)^2 \end{aligned}$$

ここで独立であることを用いた。また指数分布であるから各 i について、 $F_X(t) = P(X_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ であるからゆえに

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - (e^{-\lambda t})^2 = e^{-\lambda t}(2 - e^{-\lambda t})$$

問題 6 つぎのブリッジ形状におけるシステムにおいて (1) 4 個の最小経路集合を求め、これをもちいて (2) 構造関数を定めよ。



(解) (1) 最小経路集合は $\{x_1, x_4\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}$ の 4 個である。したがって

$$\phi(x) = \max\{x_1x_4, x_1x_3x_5, x_2x_5, x_2x_3x_4\} = 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_5)(1 - x_2x_3x_4)$$

また最小切断集合は $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}$