

# 5

## 正規分布

### 5-1 正規分布

正規分布  $X$  の確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

で与えられるとき、この分布を**正規分布**という。式の中の定数  $\mu$  と  $\sigma^2$  は正規分布の平均と分散である。平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  の正規分布を  $N(\mu, \sigma^2)$  で表し、 $X$  が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うことを

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

と書く。

**標準正規分布**  $\mu=0, \sigma=1$  の特別な正規分布  $N(0, 1)$  を**標準正規分布**という。その確率密度関数は

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

で与えられる。

**標準化**  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  のとき、

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う。 $X$  から  $Z$  へのこの変換を**標準化**といい、 $Z$  を**標準化変量**という。

**正規分布の平均と分散**

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

**正規分布表**  $Z$  が  $N(0, 1)$  に従うとき,  $Z$  の累積分布関数

$$\Phi(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

の値を  $z (> 0)$  の各値に対して表にしたものを**正規分布表**という (図1参照).

$-z$  に対する  $\Phi(z)$  の値は,

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

から求まる (図2参照).

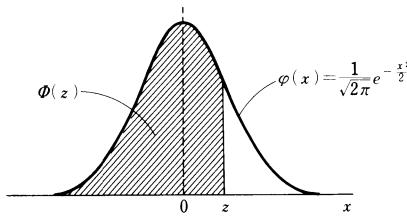


図 1

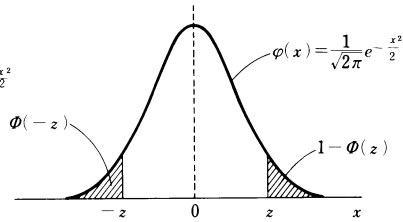


図 2

**2項分布の正規近似**  $X$  が2項分布  $B(n, p)$  に従うとき,  $n$  が十分大きいならば,  $X$  の分布は正規分布  $N(np, npq)$  で近似される. したがって,  $n$  が大きいならば

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

の分布は  $N(0, 1)$  で近似される.

実際には,  $n$  と  $p$  が

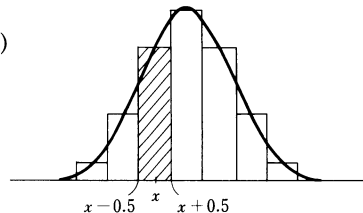
$$np > 5 \text{ かつ } nq > 5$$

を満たすとき, 2項分布の正規分布への近似は十分とされる.

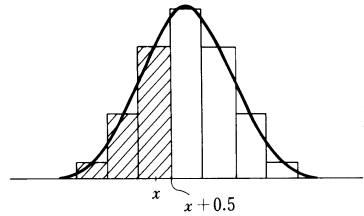
## 5-2 半整数補正

$X$  は整数値のみをとる離散型確率変数で,  $Y$  は連続型確率変数とする. 2項分布を正規分布で近似するときのように, 離散変量  $X$  の分布を連続変量  $Y$  の分布で近似して確率の計算をするとき,

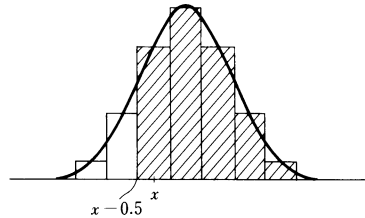
$$P(X=x) \cong P(x-0.5 < Y < x+0.5)$$



$$P(X \leq x) \cong P(Y < x + 0.5)$$



$$P(X \geq x) \cong P(Y > x - 0.5)$$

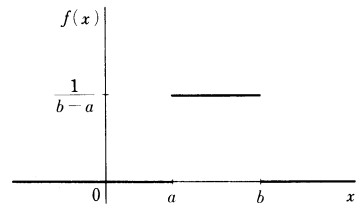


のように近似することを半整数補正（または連続性の補正）という。

### 5-3 その他の連続型分布

連続型一様分布  $X$  の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$



で与えられるとき、この分布を連続型一様分布(または矩形分布)という。

連続型一様分布の平均と分散

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

指数分布  $X$  の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x \geq 0, \theta > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとき、この分布を母数  $\theta$  の指数分布という。

指数分布の平均と分散

$$\mu = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

## 例題

## 例題 1 (正規分布表の使い方)

$Z$  が  $N(0, 1)$  に従うとき、正規分布表によって次の値を求めよ。

- (a)  $P(Z < 1)$
- (b)  $P(Z < 1.24)$
- (c)  $P(Z < -0.5)$
- (d)  $P(-1 < Z < 0.5)$
- (e)  $P(1.51 < Z < 2.16)$
- (f)  $P(-1.64 < Z < -0.8)$
- (g)  $P(Z < c) = 0.65$  を満たす  $c$  の値
- (h)  $P(Z > c) = 0.42$  を満たす  $c$  の値

解 正規分布表を正確に使うためには、必要に応じて図をかいてみるのがよい。

以下において  $\Phi(z)$  は  $Z$  の累積分布関数を表す。すなわち、

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = P(Z < z)$$

正規変数の確率計算では、不等式に等号があってもなくても同じ値となるので、本書では等号をつけていない。

- (a)  $P(Z < 1) = \Phi(1) = \mathbf{0.8413}$
- (b)  $P(Z < 1.24) = \Phi(1.24) = \mathbf{0.8925}$
- (c)  $P(Z < -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = \mathbf{0.3085}$
- (d)  $P(-1 < Z < 0.5) = P(Z < 0.5) - P(Z < -1)$   
 $= \Phi(0.5) - \{1 - \Phi(1)\}$   
 $= 0.6915 + 0.8413 - 1 = \mathbf{0.5328}$
- (e)  $P(1.51 < Z < 2.16) = \Phi(2.16) - \Phi(1.51)$   
 $= 0.9846 - 0.9345 = \mathbf{0.0501}$
- (f)  $P(-1.64 < Z < -0.8) = P(0.8 < Z < 1.64)$  (分布の対称性より)  
 $= \Phi(1.64) - \Phi(0.8)$   
 $= 0.9495 - 0.7881 = \mathbf{0.1614}$
- (g)  $P(Z < c) = 0.65$  を満たす  $c$  は、正規分布表より  
 $\Phi(0.38) = 0.6480$ ,  $\Phi(0.39) = 0.6517$

であるから、補間によって

$$c = 0.38 + \frac{0.65 - 0.6480}{0.6517 - 0.6480} (0.39 - 0.38)$$

$$= 0.38 + 0.005 = \mathbf{0.385}$$

$$(h) \quad P(Z > c) = 0.42$$

$$P(Z < c) = 0.58$$

表より

$$\Phi(0.20) = 0.5793, \quad \Phi(0.21) = 0.5832$$

であるから、補間によって、

$$c = 0.20 + \frac{0.58 - 0.5793}{0.5832 - 0.5793} (0.21 - 0.20)$$

$$= \mathbf{0.202}$$

**例題 2** (正規分布表の使い方)

$X$  が  $N(10, 2^2)$  に従うとき、次の値を求めよ。

$$(a) \quad P(X < 13)$$

$$(b) \quad P(X > 11)$$

$$(c) \quad P(X > 8)$$

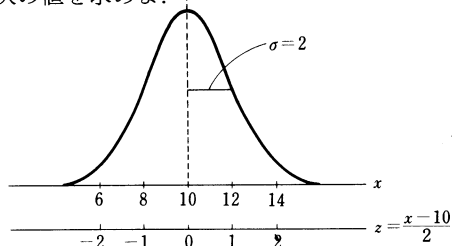
$$(d) \quad P(X < 7)$$

$$(e) \quad P(9 < X < 12)$$

$$(f) \quad P(7.8 < X < 9.6)$$

$$(g) \quad P(X < c) = 0.85 \text{ を満たす } c \text{ の値}$$

$$(h) \quad P(X < c) = 0.3 \text{ を満たす } c \text{ の値}$$



解  $X \sim N(10, 2^2)$  より

$$Z = \frac{X - 10}{2} \sim N(0, 1)$$

よって、

$$(a) \quad P(X < 13) = P\left(Z < \frac{13 - 10}{2}\right) = \Phi(1.5) = \mathbf{0.9332}$$

$$(b) \quad P(X > 11) = 1 - P(X < 11)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{11 - 10}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = \mathbf{0.3085}$$

$$(c) \quad P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8 - 10}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z > -1) \\
 &= 1 - P(Z < -1) = 1 - \phi(-1) = \phi(1) = \mathbf{0.8413}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad P(X < 7) &= P\left(Z < \frac{7-10}{2}\right) \\
 &= P(Z < -1.5) \\
 &= \Phi(-1.5) \\
 &= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = \mathbf{0.0668}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad P(9 < X < 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} < Z < \frac{12-10}{2}\right) \\
 &= P(-0.5 < Z < 1) \\
 &= P(Z < 1) - P(Z < -0.5) \\
 &= \Phi(1) - \Phi(-0.5) \\
 &= \Phi(1) + \Phi(0.5) - 1 \\
 &= 0.8413 + 0.6915 - 1 = \mathbf{0.5328}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad P(7.8 < X < 9.6) &= P\left(\frac{7.8-10}{2} < Z < \frac{9.6-10}{2}\right) \\
 &= P(-1.1 < Z < -0.2) \\
 &= P(0.2 < Z < 1.1) \quad (\text{分布の対称性より}) \\
 &= P(Z < 1.1) - P(Z < 0.2) \\
 &= \Phi(1.1) - \Phi(0.2) \\
 &= 0.8643 - 0.5793 = \mathbf{0.2850}
 \end{aligned}$$

$$\text{(g)} \quad P(X < c) = P\left(Z < \frac{c-10}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-10}{2}\right)$$

より

$$\Phi\left(\frac{c-10}{2}\right) = 0.85$$

を満たす  $c$  を求めればよい. 正規分布表より

$$\Phi(1.03) = 0.8485, \quad \Phi(1.04) = 0.8508$$

補間によって,

$$\frac{c-10}{2} = 1.03 + \frac{0.85 - 0.8485}{0.8508 - 0.8485} \times 0.01 \doteq 1.037$$

$$c = 10 + 2 \times 1.037 \doteq \mathbf{12.07}$$

$$\text{(h)} \quad P(X < c) = \Phi\left(\frac{c-10}{2}\right) \text{ より, } c \text{ は}$$

$$\Phi\left(\frac{c-10}{2}\right) = 0.3$$

の解である。しかし、右辺の 0.3 は 0.5 より小さいから、右図より  $\frac{c-10}{2}$  の値は負になる。よって、 $\Phi(z)$  ( $z > 0$ ) の表を使うには、図からわかるように、上の式に代って

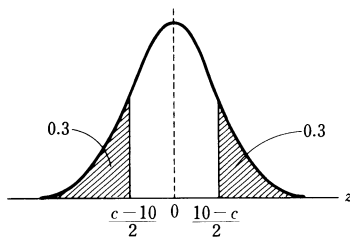
$$\Phi\left(\frac{10-c}{2}\right) = 0.7$$

から  $c$  を求めねばならない。

表より、 $\Phi(0.52) = 0.6985$ 、 $\Phi(0.53) = 0.7019$  であるから補間によって

$$\frac{10-c}{2} = 0.52 + \frac{0.7 - 0.6985}{0.7019 - 0.6985} \times 0.01 \doteq 0.5234$$

$$c = 10 - 2 \times 0.5234 \doteq 8.953$$



### 例題 3 (正規分布の応用)

測定器具である物の長さを測るときの誤差は、平均 0、標準偏差 0.2 mm の正規分布に従う。この器具による 1 回の測定の誤差が

(a) 0.5 mm 以上、

(b) 0.3 mm 以内

となる確率を求めよ。

解 測定値の誤差を  $X$  とすると

$$X \sim N(0, 0.2^2)$$

であるから、

$$(a) \quad P(|X| > 0.5)$$

$$= 2P(X > 0.5) \quad (\text{正規分布の対称性より})$$

$$= 2P\left(Z > \frac{0.5-0}{0.2}\right)$$

$$= 2P(Z > 2.5)$$

$$= 2(1 - P(Z < 2.5))$$

$$= 2(1 - \Phi(2.5)) = 2(1 - 0.9938) = 0.0124$$

$$(b) \quad P(|X| < 0.3)$$

$$= P(-0.3 < X < 0.3)$$

$$= P\left(\frac{-0.3-0}{0.2} < Z < \frac{0.3-0}{0.2}\right)$$

$$= P(-1.5 < Z < 1.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) \\
 &= 2\Phi(1.5) - 1 = 2 \times 0.9332 - 1 = \mathbf{0.8664}
 \end{aligned}$$

**例題 4** (正規分布の応用)

IQ が  $N(100, 225)$  に従うとき, IQ が

(a) 85 以下, (b) 90 から 120 の間, (c) 130 以上の人の割合を求めよ。また, 上位 10% にある IQ の最小値を求めよ。

**解** IQ を  $X$  とすると

$$X \sim N(100, 15^2)$$

よって

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad P(X < 85) &= P\left(Z < \frac{85-100}{15}\right) \\
 &= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \mathbf{0.1587}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad P(90 < X < 120) &= P\left(\frac{90-100}{15} < Z < \frac{120-100}{15}\right) \\
 &= \Phi(1.33) - \Phi(-0.67) \\
 &= \Phi(1.33) + \Phi(0.67) - 1 \\
 &= 0.9082 + 0.7486 - 1 = \mathbf{0.6568}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad P(X > 130) &= 1 - P(X < 130) \\
 &= 1 - P\left(Z < \frac{130-100}{15}\right) \\
 &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = \mathbf{0.0228}
 \end{aligned}$$

上位 10% の IQ の最小値は右の図の  $c$  の値を求めればよいから

$$\begin{aligned}
 0.10 &= P(X > c) \\
 &= P\left(Z > \frac{c-100}{15}\right) \\
 &= 1 - \Phi\left(\frac{c-100}{15}\right)
 \end{aligned}$$

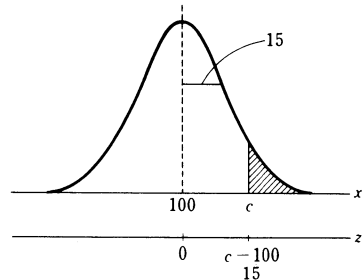
よって,

$$\Phi\left(\frac{c-100}{15}\right) = 0.90$$

正規分布表より

$$\Phi(1.28) = 0.8997, \quad \Phi(1.29) = 0.9015$$

であるから, 補間によって





$$\frac{c-100}{15} = 1.28 + \frac{0.90-0.8997}{0.9015-0.8997} \times 0.01 \approx 1.282$$

$$c = 100 + 15 \times 1.282 = 119.2$$

### 例題 5 (正規分布の応用)

高校3年生の男子の身長は正規分布に従うことが知られている。これら生徒の10%はその身長が176 cmを超え、15%は165 cm以下である。男子高校3年生の身長の平均と標準偏差を求めよ。

**解** 高校3年生の男子の身長を  $X$  とし、その平均と標準偏差を  $\mu$  と  $\sigma$  で表すと、

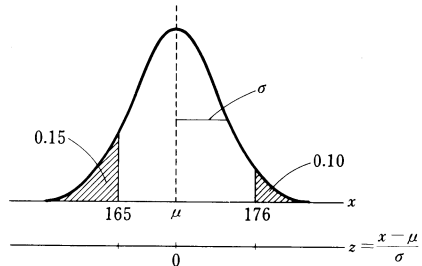
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

与えられた条件より

$$P(X > 176) = 0.10$$

$$P\left(Z > \frac{176 - \mu}{\sigma}\right) = 0.10$$

$$P\left(Z < \frac{176 - \mu}{\sigma}\right) = 0.90$$



正規分布表より

$$\frac{176 - \mu}{\sigma} = 1.282 \quad \dots (1)$$

もう1つの条件から

$$P(X < 165) = 0.15$$

$$P\left(Z < \frac{165 - \mu}{\sigma}\right) = 0.15$$

正規分布表より

$$\frac{165 - \mu}{\sigma} = -1.037 \quad \dots (2)$$

(1), (2) より

$$\mu + 1.282\sigma = 176$$

$$\mu - 1.037\sigma = 165$$

これを解いて

$$\mu = 169.9 \text{ (cm)}$$

$$\sigma = 4.7 \text{ (cm)}$$

例題 6 (正規分布の応用)

300人の学生の「統計学」の試験の結果から、その得点分布は近似的に平均55点、標準偏差10点の正規分布に従うとみなされた。

- (a) この試験で得点が60点から70点までの人数は約何人いるか。  
 (b) 成績が上位のもの20%に「優」をつけるとき、何点以上が優になるか。

解 得点を  $X$  とすると、 $X \sim N(55, 10^2)$ 。

よって

$$\begin{aligned} (a) \quad P(60 < X < 70) &= P\left(\frac{60-55}{10} < Z < \frac{70-55}{10}\right) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(0.5) = 0.9332 + 0.6915 = 0.2417 \end{aligned}$$

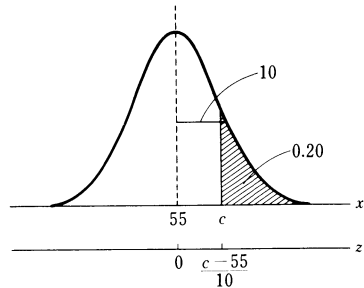
$300 \times 0.2417 = 72.51$ 。よって約 **73** 人。

(b) 求める点数を  $c$  とすると

$$P(X > c) = 0.2$$

$$P(X < c) = 0.8$$

$$P\left(Z < \frac{c-55}{10}\right) = 0.8$$



正規分布表より

$$\Phi(0.84) = 0.7995, \quad \Phi(0.85) = 0.8023$$

よって、補間により

$$\frac{c-55}{10} = 0.84 + \frac{0.8 - 0.7995}{0.8023 - 0.7995} \times 0.01 \doteq 0.842$$

$$c = 55 + 10 \times 0.842 = 63.42$$

ゆえに、**64** 点以上が優である。

例題 7 (正規分布の応用)

ある走り幅跳び選手の飛距離  $X$  は平均 6.5 m、標準偏差 0.2 m の正規分布に従う。(a) この選手の 1 回の飛距離が 6.9 m を超える確率を求めよ。(b) この選手が 3 回跳ぶとき、3 回中 1 回だけ飛距離が 6.9 m を超える確率を求めよ。(c) 100 回に 1 回、この選手が超えると期待される飛距離はいくらか。

解  $X \sim N(6.5, 0.2^2)$

$$(a) \quad P(X > 6.9) = 1 - P(X < 6.9)$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{6.9 - 6.5}{0.2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = \mathbf{0.0228}$$

$$(b) \quad P(3 \text{ 回中 } 1 \text{ 回, } X \text{ が } 6.9 \text{ を超える}) = {}_3C_1(0.0228)(0.9772)^2 = \mathbf{0.0653}$$

(c) 期待される値を  $c$  とすると

$$P(X > c) = 0.01$$

$$P(X < c) = 0.99$$

$$P\left(Z < \frac{c - 6.5}{0.2}\right) = 0.99$$

$$\Phi\left(\frac{c - 6.5}{0.2}\right) = 0.99$$

正規分布表より,

$$\Phi(2.32) = 0.9898, \quad \Phi(2.33) = 0.9901$$

よって, 補間により

$$\frac{c - 6.5}{0.2} = 2.32 + \frac{0.99 - 0.9898}{0.9901 - 0.9898} \times 0.01 \approx 2.327$$

$$c = 6.5 + 0.2 \times 2.327 \approx \mathbf{6.97} \text{ (m)}$$

### 例題 8 (正規分布の応用)

時刻表によると, 毎日ある駅に午前 9 時 30 分に到着する列車がある。延べ 10 日間にわたって, この列車の定刻からの遅れ (分) を調べ, 次の結果を得た。

$$3, 0, 10, -1, 6, 8, -2, 5, 0, 1$$

この列車の到着時刻の平均と標準偏差を求めよ。列車の到着時刻はこれと同じ平均, 同じ標準偏差の正規分布に従うと仮定して, ある日, 列車が

(a) 定刻より 10 分以上遅れる確率,

(b) 定刻より早く到着する確率

を求めよ。

解 到着時刻の平均を  $\bar{x}$ , 標準偏差を  $s$  とすると

$$\bar{x} = \frac{3+0+10-1+6+8-2+5+0+1}{10} = \mathbf{3} \text{ (分)}$$

$$s = \sqrt{\frac{3^2+0^2+10^2+(-1)^2+6^2+8^2+(-2)^2+5^2+0^2+1^2}{10} - 3^2} = \sqrt{15} \approx \mathbf{3.87} \text{ (分)}$$

この列車の駅への到着時刻を  $X$  とすると、仮定より

$$X \sim N(3, 15)$$

よって

(a)  $P$ (定刻より 10 分以上遅れる)

$$= P(X > 10)$$

$$= P\left(Z > \frac{10-3}{\sqrt{15}}\right)$$

$$= P(Z > 1.81)$$

$$= 1 - \Phi(1.81) = 1 - 0.9649 = \mathbf{0.0351}$$

(b)  $P$ (定刻より早く到着する)

$$= P(X < 0)$$

$$= P\left(X < \frac{0-3}{\sqrt{15}}\right)$$

$$= P(X < -0.77)$$

$$= \Phi(-0.77) = 1 - \Phi(0.77) = 1 - 0.7794 = \mathbf{0.2206}$$

**例題 9** (2 項分布の正規近似)

硬貨を 400 回投げるとき、おもてが 180 回から 210 回まで出る確率を求めよ。

**解**  $X$  をおもての出る数とすると、 $X \sim B\left(400, \frac{1}{2}\right)$

$$n = 400, \quad np = nq = 400 \times \frac{1}{2} = 200 \geq 5, \quad npq = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

$n = 400$  は十分大きいから、2 項分布  $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$  は正規分布  $N(200, 10^2)$  で

近似できる。

$Y$  を平均が 200 で、分散が  $10^2$  の正規変量とすると、

$$Z = \frac{Y - 200}{10} \sim N(0, 1)$$

よって求める確率は、半整数補正により

$$P(180 \leq X \leq 210) \doteq P(179.5 < Y < 210.5)$$

$$= P\left(\frac{179.5 - 200}{10} < Z < \frac{210.5 - 200}{10}\right)$$

$$= P(-2.05 < Z \leq 1.05)$$

$$\begin{aligned}
 &= \Phi(1.05) + \Phi(2.05) - 1 \\
 &= 0.8531 + 0.9798 - 1 = \mathbf{0.8329}
 \end{aligned}$$

**例題 10** (2項分布の正規近似)

ある人があるゲームに勝つ確率を  $\frac{1}{3}$ , 負ける確率を  $\frac{2}{3}$  とする. ゲームに勝てば 1000 円得をし, 負ければ 250 円損をする. この人がこのゲームを 20 回行うとき, 少なくとも 3000 円の得をする確率を求めよ.

**解** この人がゲームに勝つ回数を  $x$  とすると, 20 回のゲームによるこの人の利益は

$$1000x - 250(20 - x)$$

で, これが 3000 より大きいことから

$$1000x - 250(20 - x) \geq 3000$$

$$x \geq 6.4$$

よって, 少なくとも 3000 円の得をするには, 20 回中 7 回以上ゲームに勝たねばならない. その確率は  $n=20$ ,  $p=\frac{1}{3}$  の 2 項分布より

$$\sum_{x=7}^{20} {}_{20}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{20-x}$$

この確率の計算には 2 項分布の正規近似を使う.

$$\mu = np = 20 \times \frac{1}{3} \doteq 6.67,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} \doteq 2.11,$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 6.67}{2.11},$$

$$\frac{6.5 - 6.67}{2.11} = -0.08, \quad \frac{20.5 - 6.67}{2.11} = 6.55$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 7) &= \sum_{x=7}^{20} {}_{20}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{20-x} \\
 &\doteq \int_{-0.08}^{6.55} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \doteq \Phi(0.08) = \mathbf{0.532}
 \end{aligned}$$

**例題 11** (正規分布とポアソン分布)

郵便配達員が月曜日の朝、ある家に配達に行く時刻  $T$  は、平均午前9時50分、標準偏差10分の正規分布に従い、配達する郵便物の数  $X$  は平均3のポアソン分布に従う。このとき、次の確率を求めよ。

- (a) この家が月曜日の朝1通の郵便物を受け取る。  
 (b) この家の主人が午前10時に家を出た後に配達員がくる。  
 (c) 配達員が午前8時50分から午前9時55分の間に、その家に3通以上の郵便物を届ける。

解 与えられた情報から、

$$T \sim N(9:50, 10^2)$$

$$X \sim P(X=x) = \frac{3^x e^{-3}}{x!} \quad (x=0, 1, 2, \dots)$$

よって、

$$(a) \quad P(X=1) = 3e^{-3} = \mathbf{0.15}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad P(T > 10:00) &= P\left(Z > \frac{10:00 - 9:50}{10}\right) \\ &= P(Z > 1) \\ &= 1 - \Phi(1) \\ &= 1 - 0.8413 = \mathbf{0.1587} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c) \quad &P\{(8:50 < T < 9:55) \cap (X \geq 3)\} \\ &= P(8:50 < T < 9:55)P(X \geq 3) \quad (T \text{ と } X \text{ は独立だから}) \\ &= P\left(\frac{8:50 - 9:50}{10} < Z < \frac{9:55 - 9:50}{10}\right)(1 - P(0) - P(1) - P(2)) \\ &= P\left(-6 < Z < \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-3} - 3e^{-3} - 4.5e^{-3}) \\ &= 0.6915(1 - 0.423) = \mathbf{0.399} \end{aligned}$$

**例題 12** (指数分布の平均と分散)

指数分布

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & (x \geq 0, \theta > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

の平均と分散を求めよ。

$$\begin{aligned}
 \text{解 } E(X) &= \theta \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx \\
 &= \theta \left[ -\frac{x e^{-\theta x}}{\theta} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\theta x} dx \quad (\text{部分積分による}) \\
 &= 0 + \int_0^{\infty} e^{-\theta x} dx = \left[ -\frac{e^{-\theta x}}{\theta} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \theta \int_0^{\infty} x^2 e^{-\theta x} dx \\
 &= \theta \left[ -\frac{x^2 e^{-\theta x}}{\theta} \right]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\theta x} dx \quad (\text{部分積分による}) \\
 &= 0 + \frac{2}{\theta} E(X) = \frac{2}{\theta^2}
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
 &= \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}
 \end{aligned}$$

例題 13 (連続型一様分布)

長さ  $a$  の線分上でランダムに 1 点を選ぶ。短い方の線分と長い方の線分の長さの比が  $\frac{1}{3}$  より小さい確率を求めよ。

解 与えられた線分の左端から選ばれた点までの距離を  $X$  とすると、残りの部分の長さは  $a - X$  である。仮定より、 $X$  は一様分布

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (0 < x < a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従う。ところで

$$X < \frac{a}{2} \text{ のとき, } \frac{X}{a-X} < \frac{1}{3} \Rightarrow X < \frac{a}{4}$$

$$X > \frac{a}{2} \text{ のとき, } \frac{a-X}{X} < \frac{1}{3} \Rightarrow X > \frac{3}{4}a$$

となるから、短い方の線分と長い方の線分の長さの比を  $R$  とすると

$$P\left(R < \frac{1}{3}\right) = P\left(X < \frac{a}{2}\right)P\left(X < \frac{a}{4} \mid X < \frac{a}{2}\right) + P\left(X > \frac{a}{2}\right)P\left(X > \frac{3}{4}a \mid X > \frac{a}{2}\right)$$

ここで

$$P\left(X < \frac{a}{4} \mid X < \frac{a}{2}\right) = \frac{P\left\{\left(X < \frac{a}{4}\right) \cap \left(X < \frac{a}{2}\right)\right\}}{P\left(X < \frac{a}{2}\right)} = \frac{P\left(X < \frac{a}{4}\right)}{P\left(X < \frac{a}{2}\right)}$$

同様にして,

$$P\left(X > \frac{3}{4}a \mid X > \frac{a}{2}\right) = \frac{P\left(X > \frac{3}{4}a\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)}$$

よって,

$$\begin{aligned} P\left(R < \frac{1}{3}\right) &= P\left(X < \frac{a}{4}\right) + P\left(X > \frac{3}{4}a\right) \\ &= \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a} + \frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

## 5章の問題

**5.1**  $Z$  が  $N(0, 1)$  に従うとき, 正規分布表によって次の値を求めよ.

- (a)  $P(Z < 1.64)$ .
- (b)  $P(Z > 1.15)$ .
- (c)  $P(Z < -0.34)$ .
- (d)  $P(-1 < Z < 0.5)$ .
- (e)  $P(1.24 < Z < 2.16)$ .
- (f)  $P(Z > -2.19)$ .
- (g)  $P(Z > c) = 0.38$  を満たす  $c$  の値.
- (h)  $P(Z < c) = 0.19$  を満たす  $c$  の値.

**5.2**  $X$  が  $N(3, 1)$  に従うとき, 次の値を求めよ.

- (a)  $P(X < 3)$ .
- (b)  $P(X < 4.93)$ .
- (c)  $P(X > 3.06)$ .
- (d)  $P(1 < X < 4.2)$ .
- (e)  $P(1.5 < X < 2.5)$ .
- (f)  $P(|X - 2| < 1)$ .
- (g)  $P(X > c) = 0.1$  を満たす  $c$  の値.
- (h)  $P(X < c) = 0.2$  を満たす  $c$  の値.



**5.3** ある種の電球の寿命  $X$  は、過去の経験から平均 1500 時間、標準偏差 25 時間の正規分布に従うことが知られている。寿命  $X$  が

- (a) 1530 時間以上、
- (b) 1480 時間未満、
- (c) 1475 時間から 1550 時間の間

にある電球の割合を求めよ。

**5.4** 軍隊で使われる靴下の寿命は平均 55 日、標準偏差 8 日の正規分布に従うといわれている。ある日、5000 人の兵士に靴下を与えたとき、45 日以内には何足を補給しなければならないか。また、61 日以内ではどうか。

**5.5** ある機械が作る部品の長さは標準偏差が 2 cm の正規分布に従う。  
(a) これら部品の 97.5% はその長さが 7.5 cm 以下であるとき、部品の長さの平均を求めよ。また、(b) この機械が作る部品の長さが 5.4 cm から 5.5 cm の間にある確率を求めよ。

**5.6** 自動充填機によってある食品を正味 50 g 入りと書かれた袋に詰める。機械が 1 袋に詰める実際の重さは平均 52.5 g、標準偏差 1.6 g の正規分布に従うことがわかっているとき、(a) 袋の中の食品の重さが 50 g を下回る確率はいくらか。(b) この確率を 1% 以下にするには、機械が詰める食品の重さの平均をいくらに定めればよいか。

**5.7** 以下の数値はある生徒の 10 日間の通学時間 (分) を示したものである。

36 32 26 22 44 38 34 32 42 34

通学時間の平均と標準偏差を求めよ。

この生徒の通学時間はこれら平均と標準偏差をもつ正規分布に従うとして、(a) 生徒のある日の通学時間が 38 分以上となる確率を求めよ。(b) 通学時間がある時間を超えることは高々 10 回に 1 回にしたいとすれば、その時間は何分か。

**5.8** 正規分布の密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

の変曲点の  $x$  座標は  $\mu \pm \sigma$  であることを示せ。

**5.9** 硬貨を12回投げるとき、おもてが9回以上出る確率を

- (a) 2項分布を用いて,
- (b) 2項分布の正規近似を用いて

求めよ.

**5.10**  $X$  が  $B(50, 0.4)$  に従うとき, 次の確率を求めよ.

- (a)  $X=20$
- (b)  $15 \leq X \leq 25$

**5.11** 過去の経験から, あるレストランではテーブル予約客の8人に1人は当日現れないという. このレストランの収容定員は45人であるが, 毎晩50人までの予約を受けつけている. このレストランが当日現れた客のすべてを収容できる確率を求めよ.

**5.12**  $X$  が  $N(0, \sigma^2)$  に従うとき,  $|X|$  の平均と分散を求めよ.

**5.13**  $X$  が区間  $-1 \leq x \leq 1$  で一様分布をするとき, 次を求めよ.

- (a)  $P\left(X > \frac{2}{3} \mid |X| > \frac{1}{2}\right)$
- (b)  $P\left(X^2 \leq \frac{1}{4}\right)$