3

確率分布

3-1　確率変数

試行の結果に対応していろいろな値をとる変数を**確率変数**という．確率変数には整数などの値をとる**離散型確率変数**と，ある区間内の任意の実数値をとり得る**連続型確率変数**とがある．以下においては，確率変数を表すのに X，Y 等の大文字を用いる．

3-2　確率分布

離散型確率分布　　離散型確率変数 X のとる値を $x_1, x_2, \cdots, x_k$，X がこれらの値をとる確率を $p_1, p_2, \cdots, p_k$ とする．すなわち，

$$P(X=x_i)=p_i \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i=1$$

このとき，$x_1, x_2, \cdots, x_k$ と $p_1, p_2, \cdots, p_k$ との対応関係を X の**確率分布**（または**離散型確率分布**）という．確率分布は通常，次のような表で示すことが多い．

表 1　X の確率分布

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
$P(X=x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	1

連続型確率分布　　連続型確率変数 X が区間 $[a, b]$ 内の値をとる確率が

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

で表されるとき，$f(x)$ を X の**確率密度関数**または単に**密度関数**という．

$f(x)$ の性質　(i)　すべての x に対して　$f(x) \geqq 0$

(ii)　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

分布関数　$F(x) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

で定義される関数 $F(x)$ を確率変数 X の**累積分布関数**または単に**分布関数**という.

$F(x)$ の性質　(i)　$F(-\infty)=0,\quad F(+\infty)=1$

(ii)　$F(x)$ は非減少関数

(iii)　$\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$

3-3　結合確率分布

結合確率分布　2つの離散型確率変数 X, Y がそれぞれ x_i, y_j をとる確率を

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}\qquad (i=1, 2, \cdots, k\,;\, j=1, 2, \cdots, m)$$

とするとき, これを2次元確率変数 (X, Y) の**結合確率分布**（または**同時確率分布**）という.

結合確率分布も1次元の確率分布の場合と同じく, 次のような表で示すことが多い.

表 2　(X, Y) の結合確率分布

x \ y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$P(X=x)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\cdots$	p_{km}	$p_{k\cdot}$
$P(Y=y)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	1

周辺分布

$$P(X=x_i)=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

$$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{k} p_{ij}\qquad (j=1, 2, \cdots, m)$$

このとき, x_i と $p_{i\cdot}$ の対応を X の**周辺分布**, 同様に y_j と $p_{\cdot j}$ の対応を Y の**周辺分布**という.

確率変数の独立性　2つの離散型確率変数 X と Y が独立であるとは

すべての i, j に対して,

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

すなわち，

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$$

が成り立つときをいう．

3-4　確率変数の期待値と分散

期待値　確率変数 X の期待値を $E(X)$ で表し，次で定義する．

$$E(X)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i p_i & (X\text{ が離散型のとき})\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & (X\text{ が連続型のとき})\end{cases}$$

期待値は平均値ともいい，そのときは $E(X)$ の代りに μ で表す．$\mu\equiv E(X)$．

確率変数の関数の期待値　X の関数 $g(X)$ の期待値を次で定義する．

$$E[g(X)]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} g(x_i)p_i & (X\text{ が離散型のとき})\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx & (X\text{ が連続型のとき})\end{cases}$$

期待値に関する性質

（i）　$E(aX+b)=aE(X)+b$　　（a, b は定数）

（ii）　$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

　　　$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$

（iii）　X と Y が独立ならば

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

分散　確率変数 X の分散を $V(X)$ で表し，次で定義する．

$$V(X)=E[\{X-E(X)\}^2]$$

$$=E[(X-\mu)^2]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2 p_i & (X\text{ が離散型のとき})\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx & (X\text{ が連続型のとき})\end{cases}$$

分散はしばしば σ^2 で表される．$\sigma^2\equiv V(X)$．

分散に関する性質

（i）　$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

（ii）　$V(aX+b)=a^2V(X)$　　（$a,\ b$ は定数）

（iii）　X と Y が独立ならば

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)$$

標準偏差　分散の正の平方根

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

を**標準偏差**という．

標準化　X の平均値を μ，標準偏差を σ とするとき

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

を X の**標準化変量**という．Z の平均は 0 で，分散は 1 である．

$$E(Z)=0, \quad V(Z)=1$$

例　題

例題 1　**（期待値）**

昭和 55 年発行のジャンボ宝くじの賞金金額は 1 ユニット（1000 万本）当たり，次のようであった．

1 等		30,000,000 円	10 本
	組違い	150,000 円	90 本
2 等		10,000,000 円	10 本
	組違い	80,000 円	90 本
3 等		5,000,000 円	10 本
	組違い	50,000 円	90 本
4 等		1,000,000 円	300 本
5 等		100,000 円	100 本
6 等		10,000 円	1,000 本
7 等		300 円	2,000,000 本

宝くじ 1 本の獲得賞金額 X は離散型確率変数である．X の期待値を求めよ．

解　はずれくじの本数は

$$10{,}000{,}000-(10+90+10+90+10+90+300+100+1{,}000+2{,}000{,}000)$$
$$=7{,}998{,}300$$

よって，X の期待値の定義より

$$E(X)=30{,}000{,}000\times\frac{10}{10{,}000{,}000}+150{,}000\times\frac{90}{10{,}000{,}000}+\cdots$$
$$+300\times\frac{2{,}000{,}000}{10{,}000{,}000}+0\times\frac{7{,}998{,}300}{10{,}000{,}000}=\mathbf{139.52}\ （円）$$

例題 2 （離散型確率分布の平均と分散）

X の確率分布が

x	-1	1	2	4
$P(X=x)$	0.1	0.4	0.3	0.2

のとき，

（a） $E(X)$, $E(X^2)$, $V(X)$ を求めよ．

（b） $Y=2X-3$ のとき，$E(Y)$, $V(Y)$ を求めよ．

解 （a） $E(X)=(-1)\times0.1+1\times0.4+2\times0.3+4\times0.2=\mathbf{1.7}$

$E(X^2)=(-1)^2\times0.1+1^2\times0.4+2^2\times0.3+4^2\times0.2=\mathbf{4.9}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4.9-1.7^2=\mathbf{2.01}$

（b） $Y=2X-3$ の確率分布は

y	-5	-1	1	5
$P(Y=y)$	0.1	0.4	0.3	0.2

であるから

$E(Y)=(-5)\times0.1+(-1)\times0.4+1\times0.3+5\times0.2=\mathbf{0.4}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2$

$=(-5)^2\times0.1+(-1)^2\times0.4+1^2\times0.3+5^2\times0.2-0.4^2=\mathbf{8.04}$

例題 3 （確率変数の平均と分散）

X が平均 μ，分散 σ^2 をもつとき，次の値を μ または σ^2 によって表せ．

（a） $E(2X)$　（b） $E(3X+1)$　（c） $E(X^2)$

（d） $E(2X^2+5X+7)$　（e） $V(3X)$　（f） $V(2X-3)$

（g） $V(3X+1)$　（h） $E(X^2+4X)$

解 $E(X)=\mu$, $V(X)\equiv\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$ より

（a） $E(2X)=2E(X)=\boldsymbol{2\mu}$

（b） $E(3X+1)=3E(X)+1=\boldsymbol{3\mu+1}$

（c） $E(X^2)=\boldsymbol{\mu^2+\sigma^2}$

（d） $E(2X^2+5X+7)=2E(X^2)+5E(X)+7=2(\mu^2+\sigma^2)+5\mu+7$

$=\boldsymbol{2\mu^2+5\mu+2\sigma^2+7}$

（e） $V(3X)=9V(X)=\boldsymbol{9\sigma^2}$

(f) $V(2X-3)=4V(X)=\boldsymbol{4\sigma^2}$

(g) $V(3X+1)=9V(X)=\boldsymbol{9\sigma^2}$

(h) $E(X^2+4X)=E(X^2)+4E(X)=\boldsymbol{\mu^2+\sigma^2+4\mu}$

例題 4 (独立な確率変数の1次結合の平均と分散)

X は平均 μ, 分散 σ^2 をもち, Y は平均 μ, 分散 $2\sigma^2$ をもつ. X と Y が独立のとき, 次の値を μ と σ^2 によって表せ.

(a) $E(X-2)$ (b) $V(X+Y)$ (c) $V(X-Y)$

(d) $V(2X+3Y)$ (e) $V(X-3Y-5)$ (f) $V(aX-bY)$

解 題意より $E(X)=E(Y)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$, $V(Y)=2\sigma^2$ であることを用いる.

(a) $E(X-2)=E(X)-2=\boldsymbol{\mu-2}$

(b) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\sigma^2+2\sigma^2=\boldsymbol{3\sigma^2}$

(c) $V(X-Y)=V(X)+V(Y)=\boldsymbol{3\sigma^2}$

(d) $V(2X+3Y)=4V(X)+9V(Y)=4\sigma^2+9\times2\sigma^2=\boldsymbol{22\sigma^2}$

(e) $V(X-3Y-5)=V(X)+9V(Y)=\sigma^2+9\times2\sigma^2=\boldsymbol{19\sigma^2}$

(f) $V(aX-bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)=a^2\sigma^2+b^2\times2\sigma^2=\boldsymbol{(a^2+2b^2)\sigma^2}$

例題 5 (ある離散型確率分布の平均と分散)

箱の中に4個の赤球と3個の青球がある. この箱から, 非復元抽出で青球が出るまで球のとり出しを続ける. X を青球が出るまでの球のとり出し回数とするとき, X の確率分布を求めよ. また, X の平均と分散を求めよ.

解 赤球をR, 青球をBで表す. X の確率分布は X がとる値とそれに対する確率を求めればよい.

x	1	2	3	4	5
事象系列	B	RB	RRB	RRRB	RRRRB
確率	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot1$
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

よって，X の確率分布は

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

ゆえに，

$$E(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{6}{35}+4\times\frac{3}{35}+5\times\frac{1}{35}=\mathbf{2}\ (\text{回})$$

$$V(X)=E(X^2)-2^2$$

$$=1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{6}{35}+4^2\times\frac{3}{35}+5^2\times\frac{1}{35}-2^2=\mathbf{1.2}\ (\text{回})$$

例題 6 （**離散型確率分布の応用**）

バレーボールの試合は，どちらか一方のチームが先に 3 セットを勝てば試合は終了する．1 セットで A チームが B チームに勝つ確率を p，負ける確率を q とし，各セットの試合は独立で，p はゲームを通して一定とする．このとき，次を求めよ．

（a） 試合が 3 ゲームで終わる確率.

（b） 試合が 4 ゲームで終わる確率.

（c） 試合が終わるまでのセット数を X とするとき，X の確率分布.

（d） $p=\frac{1}{2}$ のとき，X の期待値と分散.

解　（a） 試合が 3 ゲームで終わるのは，A が 3 連勝するか B が 3 連勝するかのいずれかであるから，求める確率は $\boldsymbol{p^3+q^3}$.

（b） 試合が 4 ゲームで終わるのは，A が第 4 セットに勝ち，通算 3 勝して終わるか，B が第 4 セットに勝ち，通算 3 勝して終わるかのいずれかである．

A が勝つ場合は，A の勝を○，負を×で表すと

第 1 セット	第 2 セット	第 3 セット	第 4 セット	確率
×	○	○	○	qp^3
○	×	○	○	qp^3
○	○	×	○	qp^3

の 3 通りで，その確率は $3qp^3$ となる．p と q を入れ替えれば B が勝つ確率 $3qp^3$ が得られるから，試合が 4 ゲームで終わる確率は

$$3qp^3+3pq^3=\mathbf{3pq(p^2+q^2)}$$

（c）　(b)と同様に考えて，試合が5ゲームで終わるのは第1セットから第4セットまでにAが2回勝ち，第5セットでAが勝つか，第4セットまでにBが2回勝ち，第5セットでBが勝つかのいずれかである．前者の確率は ${}_4C_2p^2q^2\times p$ で，後者の確率は ${}_4C_2p^2q^2\times q$ であるから，試合が5ゲームで終わる確率は

$$ {}_4C_2p^2q^2\times p+{}_4C_2p^2q^2\times q={}_4C_2p^2q^2=6p^2q^2 $$

試合は5ゲームまでに必ず終わるので，試合が終わるまでに要したセット数を X とすれば，X の確率分布は

x	3	4	5
$P(X=x)$	p^3+q^3	$3pq(p^2+q^2)$	$6p^2q^2$

（d）　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，X の確率分布は

x	3	4	5
$P(X=x)$	$\dfrac{2}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$

よって，

$$ E(X)=3\times\frac{2}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{33}{8}} $$

$$ V(X)=3^2\times\frac{2}{8}+4^2\times\frac{3}{8}+5^2\times\frac{3}{8}-\left(\frac{33}{8}\right)^2=\mathbf{\frac{39}{64}} $$

例題 7　**（確率分布の応用）**

ある人は毎日車で会社に通い，会社の近くのA駐車場を利用している．A駐車場から会社までは歩いて8分である．彼の車がAに着いたとき，ここが空いておれば駐車するが，満杯のときはAから少し離れたB駐車場を利用することにしている．Bは十分なスペースをもつのでいつでも駐車できる．Bから会社までは歩いて15分，AからBまでは車で9分かかる．彼がA駐車場に着いたとき，そこが満杯である確率は常に1/4である．彼がA駐車場に着いてから彼の会社まで X 分かかるとき，X の平均と標準偏差を求めよ．

解　この人の会社への行き方は，車をAに駐車して行くか，Bに駐車して行くかの2通りで，Aからの所要時間は8分，Aに駐車する確率は $\dfrac{3}{4}$，Bからの

所要時間は $9+15=24$（分），B に駐車する確率は $\frac{1}{4}$ である．よって X の確率分布は

x	8	24
$P(X=x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

ゆえに，

$$\mu=E(X)=8\times\frac{3}{4}+24\times\frac{1}{4}=\mathbf{12}\ (\text{分})$$

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8^2\times\frac{3}{4}+24^2\times\frac{1}{4}-12^2}=\mathbf{6.9}\ (\text{分})$$

例題 8　**（結合確率分布）**

次の 2 元表は 2 つの離散型確率変数の結合確率分布を示す．

（a）　X の周辺分布と Y の周辺分布を求めよ．

（b）　$E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $V(X)$, $V(Y)$ を求めよ．

（c）　$E(XY)=E(X)E(Y)$ は成り立つが，X と Y は独立ではないことを示せ．

（d）　$Z=X+Y$ の分散を求めよ．

x \ y	1	2	3
0	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$
1	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$

解　（a）　2 元表でそれぞれの周辺和を求めれば，

X の周辺分布

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y の周辺分布

y	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

（b）（a）より

$$E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}=\mathbf{1}$$

$$E(Y)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=\mathbf{2}$$

$$V(X)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}-1^2=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$$V(Y)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}-2^2=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

$$E(XY)=1\times1\times\frac{1}{10}+1\times3\times\frac{1}{10}+2\times1\times\frac{3}{20}+2\times2\times\frac{1}{10}+2\times3\times\frac{3}{20}=\mathbf{2}$$

（c）（b）より

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

は成り立つ．しかし，たとえば

$$P(X=0,\ Y=1)=\frac{3}{20},\quad P(X=0)=\frac{2}{5},\quad P(Y=1)=\frac{2}{5}$$

より

$$P(X=0,\ Y=1)\neq P(X=0)P(Y=1)$$

であるから，X と Y は独立ではない．

（d）$Z=X+Y$ の確率分布は，2 元表よりの直接計算によって，

$z(=x+y)$	1	2	3	4	5
$P(Z=z)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$

であるから

$$E(Z)=\mathbf{3}\qquad（分布の対称性より）$$

$$V(Z)=1^2\times\frac{3}{20}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{3}{20}-3^2=\mathbf{1.6}$$

例題 9（確率密度関数）

関数

$$f(x)=\frac{5}{8}(1-x^4)\qquad(-1\leqq x\leqq 1)$$

は連続型確率変数の密度関数であることを示し，

（a）$P\left(X>\frac{1}{2}\right)$

（b）$P\left(X^2<\frac{1}{4}\right)$

を求めよ．

解　ある関数 $f(x)$ が密度関数であることを示すには

（i）　すべての x に対して $f(x) \geqq 0$

（ii）　$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

の 2 条件が成り立つことをいえばよい．

明らかに，$\frac{5}{8}(1-x^4) \geqq 0 \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ だから，（i）は成立．

$$\int_{-1}^{1} \frac{5}{8}(1-x^4)\,dx = \frac{5}{8}\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 1$$

より (ii) も成立．

よって，与えられた関数は密度関数である．

（a）　$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{5}{8}(1-x^4)\,dx = \frac{5}{8}\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \boldsymbol{\frac{49}{256}}$

（b）　$P\left(X^2 < \frac{1}{4}\right) = P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{5}{8}(1-x^4)\,dx = \frac{5}{8}\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{79}{128}}$$

例題 10　（密度関数の平均・分散・モード）

X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)(x-2) & (1 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，

（a）　c の値，

（b）　X の平均，

（c）　X の分散，

（d）　X のモード

を求めよ．

解　（a）　$\int_{1}^{2} c(1-x)(x-2)\,dx = 1$ より

$$c\int_{1}^{2} (-2+3x-x^2)\,dx = c\left[-2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \boldsymbol{6}$$

（b）　$E(X) = 6\int_{1}^{2} x(1-x)(x-2)\,dx$

$$=6\int_1^2(-2x+3x^2-x^3)\,dx$$

$$=6\left[-x^2+x^3-\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(c)　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=6\int_1^2 x^2(1-x)(x-2)\,dx-\frac{9}{4}$$

$$=6\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4-\frac{x^5}{5}\right]_1^2-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{23}{10}-\frac{9}{4}=\mathbf{\frac{1}{20}}$$

(d)　$f(x)=6(1-x)(x-2)$

$f'(x)=18-12x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{3}{2}$. よって，モードは $\mathbf{\frac{3}{2}}$.

例題 11　(密度関数のメジアン)

X の確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x^3} & (1\leqq x\leqq 2)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

のとき，

(a)　a の値，

(b)　$P(X\leqq y)=2P(X\geqq y)$ を満たす y，

(c)　X のメジアン，

を求めよ.

解　(a)　$\int_1^2 \frac{a}{x^3}\,dx=1$ より

$$a\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2=1 \;\Rightarrow\; a=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

(b)　$P(X\leqq y)=\frac{8}{3}\int_1^y\frac{dx}{x^3}=\frac{8}{3}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^y=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2y^2}\right)$

$$2P(X\geqq y)=\frac{16}{3}\int_y^2\frac{dx}{x^3}=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2y^2}\right)=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2y^2}-\frac{1}{8}\right)$$

より，$y=\mathbf{\sqrt{2}}$.

（c）　メジアンを M とすると

$$\frac{8}{3}\int_1^M \frac{dx}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2M^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$M^2=\frac{8}{5} \quad\Rightarrow\quad M=\mathbf{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$

例題 12　**（密度関数と分布関数）**

X の確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} ax(2-x) & (0\leqq x\leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，

（a）　a の値を求めよ．

（b）　$P(0\leqq X\leqq 1)$ を求めよ．

（c）　X の平均は 1 で，分散は $\frac{1}{5}$ であることを示せ．

（d）　X の累積分布関数を求めよ．

解　（a）

$$\int_0^2 ax(2-x)\,dx=1$$

$$a\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=1$$

$$a\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=1 \quad\Rightarrow\quad a=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

（b）　$P(0\leqq X\leqq 1)=\frac{3}{4}\int_0^1 x(2-x)\,dx$

$$=\frac{3}{4}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

（c）　$E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{3}{4}x(2-x)\,dx$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\mathbf{1}$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2 x^3(2-x)\,dx-1^2$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2-1=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

（d） $P(X<0)=0$ より，$x<0$ に対しては $F(x)=0$.

$P(X>2)=1$ より，$x>2$ に対しては $F(x)=1$.

$0\leqq x\leqq 2$ の範囲では，

$$F(x)=\int_0^x \frac{3}{4}x(2-x)\,dx$$
$$=\frac{3}{4}\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)+c$$

$x=0$ のとき，$F(x)=0$ だから，$c=0$.

よって，

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \dfrac{3}{4}\left(x^2-\dfrac{x^3}{3}\right) & (0\leqq x\leqq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$$

例題 13 （密度関数の応用問題）

列車がR駅に到着するときの誤差 X(分)の確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} c(16-x^2) & (-4\leqq x\leqq 4) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとき，c の値を定めよ．この列車が定刻より

（a） 少なくとも2分遅れる，

（b） 少なくとも1分早く着く，

（c） 1分から3分遅れる

確率を求めよ．

解 $1=\displaystyle\int_{-4}^4 c(16-x^2)\,dx=c\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^4=\frac{256}{3}c \quad\Rightarrow\quad c=\boldsymbol{\frac{3}{256}}$

列車が駅に到着するときの誤差を X とすると，題意より

（a） $P(X>2)=\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{256}(16-x^2)\,dx=\frac{3}{256}\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_2^4=\boldsymbol{\frac{5}{32}}$

（b） $P(X<-1)=\displaystyle\int_{-4}^{-1} \frac{3}{256}(16-x^2)\,dx=\frac{3}{256}\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{-4}=\boldsymbol{\frac{81}{256}}$

（c） $P(1<X<3)=\displaystyle\int_1^3 \frac{3}{256}(16-x^2)\,dx=\frac{3}{256}\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\boldsymbol{\frac{35}{128}}$

例題 14 (分布関数と密度関数)

X の累積分布関数が

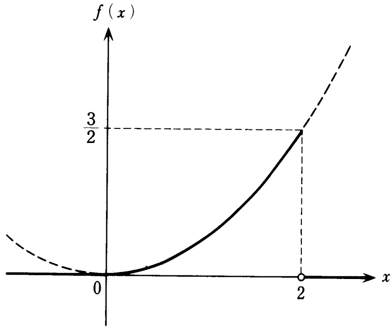
$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ kx^3 & (0<x\leqq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$$

のとき,

(a)　X の確率密度関数 $f(x)$,

(b)　X の平均と分散

を求め, $f(x)$ のグラフを示せ.



解　(a)　$f(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=3kx^2$

$F(2)=1$ より

$$8k=1 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{8}$$

よって,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & (0\leqq x\leqq 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(b)　$E(X)=\displaystyle\int_0^2 x\cdot\frac{3}{8}x^2\,dx=\frac{3}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

$$V(X)=\int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{8}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2-\frac{9}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{20}}$$

$f(x)$ のグラフは右上に図示したとおり.

例題 15

あるガソリンスタンドは毎週月曜日の朝, ガソリンの補給を受ける. このスタンドの週当たりガソリン販売量を X (1000 リットル単位) とする. 過去の経験から, X の確率密度関数は

$$f(x)=\frac{3}{125}(5-x)^2 \qquad (0\leqq x\leqq 5)$$

であることが知られている.

(a)　このスタンドのある週の販売量が 2000 リットル未満である確率を求めよ.

（b） このスタンドのガソリンタンクの容量は4000リットルであるとき，ある週に，このスタンドがガソリンの需要を満たせない確率を求めよ．

解 （a） 週販売量 X は1000リットル単位で測られているから

$$P(X<2)=\int_0^2 \frac{3}{125}(5-x)^2\,dx$$

$$=\frac{3}{125}\int_3^5 y^2\,dy \qquad (5-x=y \text{ とおく})$$

$$=\frac{3}{125}\left[\frac{y^3}{3}\right]_3^5=\frac{98}{125}=\mathbf{0.784}$$

（b） 需要を満たせないのは，X が4000リットルを超えるときであるから

$$P(X>4)=\int_4^5 \frac{3}{125}(5-x)^2\,dx \qquad (5-x=y \text{ とおく})$$

$$=\frac{3}{125}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{125}=\mathbf{0.008}$$

3章の問題

3.1 次の各確率分布の平均と分散を求めよ．

（a）

x	0	2	5	9
$P(X=x)$	0.4	0.1	0.2	0.3

（b）

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

（c）

x	-2	2	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

3.2 X の確率分布が

x	0	1	4	6	9
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

のとき，この確率分布のグラフを示せ．$E(X)$，$V(X)$ を求めよ．また，$Y=5X+2$ のとき，$E(Y)$，$V(Y)$ を求めよ．

3.3 X の確率分布が

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

のとき，

（a） X の期待値と分散を求めよ．

（b） X^2 の期待値と分散を求めよ．

3.4 X が確率分布

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	p	p^2	$2p^2$	p

をもつとき，X の平均と分散を求めよ．

3.5 X の平均が 2，分散が 5 のとき．

（a） $X-1$　（b） $3X$　（c） $2X+1$　（d） $\frac{1}{3}(X+3)$

（e） $5-3X$

の平均と分散を求めよ．

3.6 数 1, 2, 3, 4, 5, 6 が記入された 6 個の球の入った箱がある．この箱から，非復元抽出で 2 個の球をとり出す．とり出された球の数の和を X，積を Y とするとき，X と Y の確率分布をそれぞれ求めよ．

3.7 4 人で競うトランプゲームで，ある 1 人に配られた 13 枚の札の中の“エース”の数を X とするとき，確率変数 X の確率分布を求めよ．

3.8 次の式で正しくないのはどれか．その理由は．

（a） $E(X+X)=E(X)+E(X)=2E(X)$

（b） $V(X+X)=V(X)+V(X)=2V(X)$

（c） $V(X+X)=V(2X)=4V(X)$

3.9 サイコロを 2 回投げ，最初に出た目を X，2 回目に出た目を Y とするとき，

(a)　$Z=|X-Y|$

(b)　$W=\min(X,\ Y)$

の確率分布をそれぞれ求めよ．また，Z と W の平均と分散をそれぞれ求めよ．

3.10　X と Y の結合確率分布が

x \ y	0	1	2
0	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$
3	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

のとき，

(a)　X と Y の周辺分布をそれぞれ求めよ．

(b)　X と Y は独立かどうか．

(c)　$2X-Y$ の平均と分散を求めよ．

3.11　$(X,\ Y)$ の結合確率分布が

x \ y	-1	0	1	2
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	0
2	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

のとき，次を求めよ．

(a)　X の周辺分布と Y の周辺分布．

(b)　$E(Y)$ と $V(Y)$．

(c)　X と Y は独立かどうか．

(d)　$E(X+Y)$．

(e)　$E(XY)$．

3.12　赤球 2 個，青球 1 個，白球 5 個を含む袋から非復元抽出で 4 個の球をとり出すとき，赤球 1 個と白球 3 個がとり出される確率は $\frac{2}{7}$ になることを

示せ．この袋から非復元抽出で 4 個の球をとり出すとき，得られた赤球の数を X，青球の数を Y とする．そのとき，X と Y の結合確率分布を与える 2 元表を示せ．この表から X と Y は独立でないことを示せ．$Z=X+Y$ の確率分布を導き，その平均と分散を求めよ．

3.13　ある自動車セールスマンの基本給は月 12 万円で，新車を 1 台売るごとに 3 万円の歩合がもらえる．セールスマンの月間新車販売台数は確率変数で，その平均は 1.85 台，標準偏差は 1.24 台である．このセールスマンの月間収入の平均と標準偏差を求めよ．

3.14　X の密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，次を求めよ．

(a)　a の値．

(b)　$P\left(X>\dfrac{1}{2}\right)$.

(c)　X の平均と分散．

(d)　X の分布関数．

3.15　X の確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} a+bx+cx^2 & (0\leqq x\leqq 1) \\ \quad 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で，その平均は $\dfrac{1}{2}$，分散は $\dfrac{1}{20}$ のとき，

(a)　a, b, c の値を求めよ．

(b)　この分布のモードとメジアンを求めよ．

3.16　X の密度関数が

(a)　$f(x)=\dfrac{3}{10}x(3-x)\qquad(1\leqq x\leqq 3)$

(b)　$f(x)=\dfrac{3}{2}(1-x^2)\qquad(0\leqq x\leqq 1)$

(c)　$f(x)=\begin{cases} 1+x & (-1\leqq x\leqq 0) \\ 1-x & (0<x<1) \end{cases}$

で与えられるとき，各分布の平均と分散を求めよ．

3.17 次の密度関数から分布関数を求めよ.

(a) $f(x)=\dfrac{3}{4}(1-x^2) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(b) $f(x)=3(1-x)^2 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$

(c) $f(x)=\dfrac{3}{32}x(4-x) \qquad (0 \leqq x \leqq 4)$

3.18 シリコンチップの寿命 X の確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{200}{x^2} & (x \geqq 200) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとき，無作為に選ばれた2個のチップが両方とも500時間以内に取り替えねばならない確率を求めよ.

3.19 ある人が半径4 cmの円形の標的に向けてライフルを発射する．標的は中心の半径がそれぞれ1 cm，2 cm，3 cmの同心円からなる．標的の中心から着弾点までの距離 X は確率変数で，その確率密度関数が

$$f(x)=0.03(x^2+3) \qquad (0 \leqq x \leqq 4)$$

であるとき，

(a) 弾丸が小さい円に当たる確率を求めよ.

(b) 弾丸が小さい円に当たると5点，この円と中間の円の間に当たると3点，中間の円と大きい円の間に当たると1点，大きい円の外にはずれたら0点が与えられる．この場合，

(i) 確率が最も大きいのは何点のときか.

(ii) 1発当たりの得点の平均を求めよ.

3.20 X の確率密度関数が

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

のとき，$f(x)$ のグラフを図示し，X の平均と分散を求めよ.