8

検　定

8-1　仮説の検定

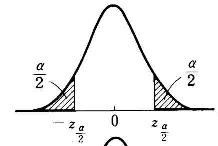
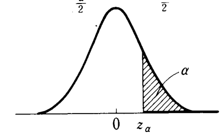
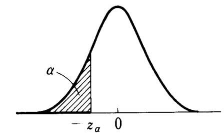
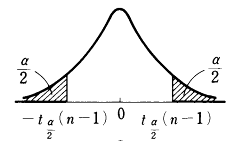
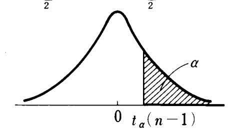
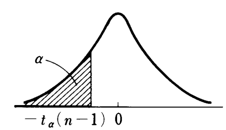
帰無仮説と対立仮説　母集団の母数に関するある主張または立言を**統計的仮説**または単に**仮説**という．母集団からとられた無作為標本の値によって母数に関する仮説の棄却か採択かを決めることを**仮説の検定**という．多くの場合，仮説は棄却されることを期待して設定する，たとえば，2つの方法が優劣に関して差があると予想される場合には，「差がない」という仮説を設け，標本値によってこれを棄却しようとする．このように仮説はそれの棄却を期待して設定されるという意味で，**帰無仮説**とよばれる．帰無仮説との比較のために設けられる仮説で，帰無仮説が棄却されると受け入れられることになる仮説を**対立仮説**という．

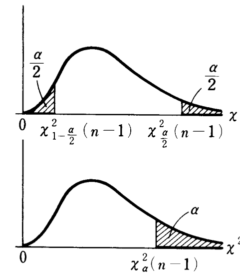
第1種の過誤と第2種の過誤　仮説の検定では2種類の誤りが考えられる．帰無仮説 H_0 が真のときこれを棄却する誤りを**第1種の過誤**といい，H_0 が偽のときこれを採択する誤りを**第2種の過誤**という．第1種の過誤を犯す確率を α，第2種の過誤を犯す確率を β で表す．α を**有意水準**，または**危険率**という．α の値としては，0.05，0.01などがよく用いられる．

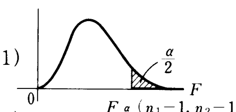
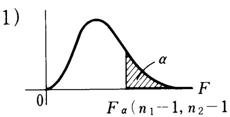
検定統計量と棄却域　実際の検定は，与えられた仮説に対して適当な統計量 T を選び，H_0 が真のときの T の標本分布を用いて行う．この T を**検定統計量**といい，H_0 が棄却されることになる T の実現値の範囲を**棄却域**という．

両側検定と片側検定　検定統計量 T の分布の左右の両裾を棄却域に選ぶ検定を**両側検定**．右側または左側の片裾を棄却域に選ぶ検定を**片側検定**といい，右裾のときを**右片側検定**，左裾のときを**左片側検定**という．ある仮説の検

標準的な検定の一覧表

仮　説	条　件	検定統計量	検定統計量の分布	棄却域
1. **平均の検定** (i) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$	母集団の分布は正規分布 σ^2 は既知	$z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 大標本($n\geqq 30$)のときは左記の2条件は必要でなく，上の z の代りに $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}}$ を使う．ここで，u^2 は標本不偏分散である．n が大きいときは，$u^2\fallingdotseq s^2$ だから，u の代りに s を用いてもよい．	標準正規分布	(i) $\lvert z\rvert>z_{\frac{\alpha}{2}}$ 
(ii) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu>\mu_0$				(ii) $z>z_\alpha$ 
(iii) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu<\mu_0$				(iii) $z<-z_\alpha$ 
2. **平均の検定** (小標本) (i) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu\neq\mu_0$	母集団の分布は正規分布 σ^2 は未知	$t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}}$	自由度 $n-1$ の t 分布	(i) $\lvert t\rvert>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 
(ii) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu>\mu_0$				(ii) $t>t_\alpha(n-1)$ 
(iii) $H_0: \mu=\mu_0$ $H_1: \mu<\mu_0$				(iii) $t<-t_\alpha(n-1)$ 

3. **分散の検定** (i) $H_0: \sigma^2=\sigma_0{}^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$ (ii) $H_0: \sigma^2=\sigma_0{}^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0{}^2$	母集団の分布は正規分布	$\chi^2=\dfrac{(n-1)u^2}{\sigma^2}=\dfrac{ns^2}{\sigma^2}$	自由度 $n-1$ の χ^2 分布	(i) $\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ または $\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (ii) $\chi^2>\chi^2_{\alpha}(n-1)$ 
4. **比率の検定** (i) $H_0: p=p_0$ $H_1: p \neq p_0$ (ii) $H_0: p=p_0$ $H_1: p>p_0$ (iii) $H_0: p=p_0$ $H_1: p<p_0$	大標本 $n>30$ $np>5$, $nq>5$	$z=\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ ここで，$\hat{p}=\dfrac{x}{n}$	標準正規分布	(i) $\lvert z\rvert>z_{\frac{\alpha}{2}}$ (ii) $z>z_\alpha$ (iii) $z<-z_\alpha$
5. **平均の差の検定** (i) $H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (ii) $H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1>\mu_2$ (iii) $H_0: \mu_1=\mu_2$ $H_1: \mu_1<\mu_2$	母集団の分布は正規分布 $\sigma_1{}^2$, $\sigma_2{}^2$ は既知	$z=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1{}^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2{}^2}{n_2}}}$ 大標本(n_1, $n_2 \geqq 30$)のときは，左記の条件は必要でなく，上の z の代りに $z=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{u_1{}^2}{n_1}+\dfrac{u_2{}^2}{n_2}}}$ を使う．n_1, n_2 が大きいときは，$u_1{}^2 \fallingdotseq s_1{}^2$, $u_2{}^2 \fallingdotseq s_2{}^2$ だから，$u_1{}^2$, $u_2{}^2$ の代りに $s_1{}^2$, $s_2{}^2$ を用いてもよい．	標準正規分布	(i) $\lvert z\rvert>z_{\frac{\alpha}{2}}$ (ii) $z>z_\alpha$ (iii) $z<-z_\alpha$

仮　説	条　件	検定統計量	検定統計量の分布	棄却域
6．平均の差の検定 （i）$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ （ii）$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 > \mu_2$ （iii）$H_0: \mu_1 = \mu_2$ $H_1: \mu_1 < \mu_2$	母集団の分布は正規分布 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$（等分散）で，$\sigma^2$ は未知	$t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{u\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ ここで， $u^2 = \dfrac{(n_1-1)u_1^2 + (n_2-1)u_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布	（i）$\lvert t\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$ （ii）$t > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$ （iii）$t < -t_\alpha(n_1 + n_2 - 2)$
7．平均の差の検定 （対応のある場合） （i）$H_0: \mu_d = 0$ $H_1: \mu_d \neq 0$ （ii）$H_0: \mu_d = 0$ $H_1: \mu_d > 0$ （iii）$H_0: \mu_d = 0$ $H_1: \mu_d < 0$	母集団の分布は正規分布	$t = \dfrac{\bar{d}\sqrt{n}}{u_d}$ ここで， $\bar{d} = \dfrac{1}{n}\sum d_i$ $u_d^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum (d_i - \bar{d})^2$	自由度 $n-1$ の t 分布	（i）$\lvert t\rvert > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ （ii）$t > t_\alpha(n-1)$ （iii）$t < -t_\alpha(n-1)$
8．比率の差の検定 （i）$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 \neq p_2$ （ii）$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 > p_2$ （iii）$H_0: p_1 = p_2$ $H_1: p_1 < p_2$	大標本 n_1，$n_2 > 30$ $n_1 p_1 > 5$，$n_1 q_1 > 5$ $n_2 p_2 > 5$，$n_2 q_2 > 5$	$z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$ ここで， $\hat{p} = \dfrac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$	標準正規分布	（i）$\lvert z\rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ （ii）$z > z_\alpha$ （ii）$z < -z_\alpha$
9．等分散の検定 （i）$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ （ii）$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	母集団の分布は正規分布	$F = \dfrac{u_1^2,\ u_2^2\ \text{の大きい方}}{u_1^2,\ u_2^2\ \text{の小さい方}}$ $F = \dfrac{u_1^2}{u_2^2}$	自由度（n_1-1，n_2-1）の F 分布，または自由度（n_2-1，n_2-1）の F 分布 自由度（n_1-1，n_2-1）の F 分布	有意水準 α で， （i）$u_1^2 > u_2^2$ ならば $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ $u_2^2 > u_1^2$ ならば $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)$  （ii）$F > F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$ 

定を両側検定で行うか，片側検定で行うかは，どんな対立仮説に関心をもつかによって決まる．たとえば，母集団比率 p の検定で，帰無仮説，$p=0.5$ に対して，対立仮説が $p\neq0.5$ ならば両側検定，$p>0.5$ ならば右側検定となる．

検定の一般的な手順

(i)　帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を定める．

(ii)　有意水準 α の値をきめる．

(iii)　検定統計量 T と棄却域 W を選ぶ．

(iv)　与えられたデータから T の実現値 T_0 を求めよ．

(v)　$T_0\in W$ ならば H_0 を棄却し，$T_0\notin W$ ならば H_0 を採択する．

例　題

例題 1　(平均値の検定)

正規母集団の平均値の検定において

(a)　$\bar{x}=38$, $\sigma=15$, $n=100$, $\alpha=0.05$ のとき，
$H_0:\mu=40$,　$H_1:\mu\neq40$　の検定をせよ．

(b)　$\bar{x}=240$, $\sigma=20$, $n=16$, $\alpha=0.05$ のとき，
$H_0:\mu=250$,　$H_1:\mu<250$　の検定をせよ．

(c)　$\bar{x}=51.52$, $s=2.13$, $n=14$, $\alpha=0.01$ のとき，
$H_0:\mu=50$,　$H_1:\mu>50$　の検定をせよ．

(d)　$\bar{x}=22.31$, $\bar{x}_2=21.54$, $s_1=3.8$, $s_2=3.2$, $n_1=50$, $n_2=40$, $\alpha=0.05$ のとき，
$H_0:\mu_1=\mu_2$,　$H_1:\mu_1\neq\mu_2$　の検定をせよ．

解　(a)　$z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{38-40}{\dfrac{15}{\sqrt{100}}}=-1.33$

両側検定だから，$z_{0.025}=1.96$ より棄却域は $|z|>1.96$.

$z=-1.33$ は棄却域に落ちないので，H_0 は**採択**.

(b)　$z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{240-250}{\dfrac{20}{\sqrt{16}}}=-2$

片側検定だから，$z_{0.05}=1.645$ より棄却域は $z<-1.645$

$z=-2$ は棄却域に落ちるから，H_0 は**棄却**.

（c）　$u=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}s^2}=\sqrt{\dfrac{14}{14-1}\times 2.13^2}=2.29$

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\dfrac{u}{\sqrt{n}}}=\frac{51.52-50}{\dfrac{2.29}{\sqrt{14}}}=2.48$$

$\alpha=0.01$, $\nu=14-1=13$. 片側検定だから，$t_{0.01}(13)=2.65$.
ゆえに棄却域は $t>2.65$. $t=2.48$ は棄却域に落ちないから H_0 は**採択**.

（d）　大標本の場合の 2 つの平均値の差の検定であるから

$$z=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1{}^2}{n_1}+\dfrac{s_2{}^2}{n_2}}}=\frac{22.31-21.54}{\sqrt{\dfrac{3.8^2}{50}+\dfrac{3.2^2}{40}}}=1.04$$

$\alpha=0.05$ の両側検定だから，棄却域は $|z|>1.96$.
$z=1.04$ は棄却域に落ちないから，H_0 は**採択**.

例題 2　**（平均値の検定（σ：既知））**

ある機械が袋に詰める砂糖の重さは，$\mu=100$ g, $\sigma=5$ g の正規分布に従うように調整される．機械が正しく調整されているかどうかを確かめるために，9 個の袋の無作為標本をとって砂糖の重さを測ったら，平均 $\bar{x}$ は 102.4 g であった．この機械は正しく調整されているか，5%有意水準で検定せよ．

解　この機械が詰める袋の中の砂糖の重さを X とすると，$X\sim N(\mu, 5^2)$.
調整されているという帰無仮説を調整はうまくいっていないという対立仮説に対して行う検定であるから，両側検定である．よって

$$H_0: \mu=100$$
$$H_1: \mu\neq 100 \qquad \text{(両側検定)}$$

$n=9$, $\sigma=5$ で，$\bar{x}=102.4$ であるから，

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\frac{102.4-100}{\dfrac{5}{\sqrt{9}}}=1.44$$

両側検定で，$\alpha=0.05$ であるから，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$.
よって，棄却域は

$$|z|>1.96$$

$z=1.44$ は棄却域に落らないから，仮説は採択される．
したがって，この機械は**正しく調整されている**と判断される．

例題 3 (平均値の検定 (小標本))

ある技師がニッケルの融点を 9 回測定して，次の値を得た (単位 : °C).

1475	1420	1433	1452	1441
1466	1432	1453	1414	

この結果はニッケルの真の融点とされている 1455 °C に矛盾しないという仮説を有意水準 5% で検定せよ.

解　題意より，この問題は両側検定が適当である.

$$H_0 : \mu = 1455$$

$$H_1 : \mu \neq 1455$$

$n=9$, $\sum x_i = 12986$, $\sum x_i^2 = 18740684$ より

$$\bar{x} = \frac{12986}{9} = 1442.9, \qquad u^2 = \frac{1}{8}\left\{18740684 - \frac{12986^2}{9}\right\} = 416.1$$

$\alpha = 0.05$, $\nu = 9-1 = 8$. t 分布表より，$t_{0.025}(8) = 2.306$ であるから，棄却域は

$$|t| > 2.306$$

与えられた標本値から検定統計量の値は

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{u^2}{n}}} = \frac{1442.9 - 1455}{\sqrt{\dfrac{416.1}{9}}} = -1.78$$

この値は棄却域に落ちないから，H_0 は採択される．したがって，この実験結果は公表されているニッケルの融点の値に**矛盾していない**.

例題 4 (2 つの平均値の差の検定 (大標本))

ある年行われたレスリング選手権大会のある重量クラス 36 試合での勝者の平均体重は 64.5 kg，標準偏差は 3.2 kg で，敗者の平均体重は 62.8 kg，標準偏差は 2.5 kg であった．選手の体重は試合の結果に影響するといえるか.「体重は試合の結果に影響しない」という帰無仮説を立て，選手の体重の分布は正規分布に従うと仮定して，5% 有意水準でこの仮説を検定せよ.

解　体重が試合の結果に影響しないということは，言い換えると「すべての勝者の平均体重 μ_1 とすべての敗者の平均体重 μ_2 との間に差がない」ということである．体重の多い方が有利であると考えられるので，ここでは右側検定で検定を行うことにする.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 > \mu_2$$

$n_1 = n_2 = 36$ であるから，これは大標本による 2 つの平均値の差の検定である．
$\bar{x}_1 = 64.5$, $s_1 = 3.2$, $\bar{x}_2 = 62.8$, $s_2 = 2.5$ より

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{64.5 - 62.8}{\sqrt{\dfrac{3.2^2}{36} + \dfrac{2.5^2}{36}}} = 2.51$$

$\alpha = 0.05$, 片側検定であるから，$z_{0.05} = 1.645$，よって，棄却域は $z > 1.645$, $z = 2.51 > 1.645$ だから，仮説 H_0 は棄却される．

したがって，体重はレスリングの試合の結果に**影響する**．

例題 5 （2 つの平均値の差の検定（小標本））

ある級は 20 人の男子生徒と 18 人の女子生徒からなる．男子生徒の数学のテストの得点は平均 65 点，標準偏差 15 点で，女子生徒の得点は平均 70 点，標準偏差 12 点であった．男女生徒の平均点の差は有意であるか．5% 有意水準で検定せよ．

解　男女の一方が特に成績がよいとは考えられないから，この問題は両側検定で行うのが適当である．よって，

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

ここで，μ_1 と μ_2 はそれぞれ男子と女子の得点の母平均である．
$\bar{x}_1 = 65$, $s_1 = 15$, $\bar{x}_2 = 70$, $s_2 = 12$, $n_1 = 20$, $n_2 = 18$ であるから

$$u^2 = \frac{(n_1 - 1)u_1^2 + (n_2 - 1)u_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$
$$= \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{20 \times 15^2 + 18 \times 12^2}{20 + 18 - 2} = 197$$
$$\therefore \quad u \fallingdotseq 14.0$$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{u\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} = \frac{65 - 70}{14.0\sqrt{\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{18}}} \fallingdotseq -1.10$$

$\alpha = 0.05$, $\nu = 20 + 18 - 2 = 36$, $t_{0.025}(36) \fallingdotseq 2.03$ より，棄却域は

$$|t| > 2.03$$

$t = -1.10$ は棄却域に落ちていないから，H_0 は採択される．
したがって，男女生徒の成績の差は**有意とは認められない**．

例題 6　(平均値の差の検定（対応のある場合))

あるダイエット法が体重の減量に効果があるかどうか調べる実験に，10人の女性が参加した．この療法に入る前と，2ヵ月間試みた後の体重(kg)を測定して次の結果を得た．

女性	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
前	51.0	55.2	52.6	61.2	55.4	57.1	58.6	61.4	57.8	67.6
後	51.8	55.6	50.9	59.6	54.5	56.4	58.0	60.3	56.9	66.0

体重は正規分布に従うとして，このダイエット法は減量に効果があるかどうかを5%有意水準で検定せよ．

解　ダイエットに入る前と後の体重の差 d は

$$-0.8 \quad -0.4 \quad 1.7 \quad 1.6 \quad 0.9 \quad 0.7 \quad 0.6 \quad 1.1 \quad 0.9 \quad 1.6$$

$n=10$, $\sum d_i=7.9$, $\sum d_i^2=12.49$ より

$$\text{標本平均}\quad \bar{d}=\frac{7.9}{10}=0.79$$

$$\text{標本不偏分散}\quad u_d^2=\frac{1}{10-1}\left\{12.49-\frac{7.9^2}{10}\right\}=0.69$$

ここでの仮説は，題意より，

$$H_0 : \mu_d=0$$

$$H_1 : \mu_d>0$$

の右片側検定である．検定統計量の値は，

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\dfrac{u^2}{n}}}=\frac{0.79-0}{\sqrt{\dfrac{0.69}{10}}}=3.01$$

$\alpha=0.05$, $\nu=10-1=9$ だから，t 分布表より $t_{0.05}(9)=1.833$．よって，棄却域は $t>1.833$．$t=3.01$ は棄却域に入るから，H_0 は棄却される．
したがって，この療法は減量の**効果があるといえる**．

例題 7　(分散の検定)

ガラスの仕切りから10個のガラスの標本をとり，ガラスの屈折率を測って次の値を得た．

1.77　1.79　1.78　1.79　1.79　1.76　1.80　1.76　1.79　1.80

ガラスの仕切りの受入れ検査では，屈折率の仕切り標準偏差が 0.008 を超えなければ，仕切りは合格で，超えれば不合格となる．このガラスの仕切りの合格，不合格を $\alpha=0.01$ で判定せよ．

解　データから

$$\sum x_i=1.77+1.79+\cdots+1.80=17.83$$

$$\sum x_i^2=1.77^2+1.79^2+\cdots+1.80^2=31.7929$$

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right\}=\frac{1}{10}\left\{31.7929-\frac{17.83^2}{10}\right\}=0.0002$$

仕切りでの屈折率の分散を σ^2 とすれば，題意より

$$H_0: \sigma^2=0.008^2$$

$$H_1: \sigma^2>0.008^2$$

$$\chi^2=\frac{ns^2}{\sigma^2}=\frac{10\times0.0002}{0.008^2}=31.25$$

χ^2 分布表より，$\chi^2_{0.01}(9)=21.67$ であるから，この検定の棄却域は $\chi^2>21.67$．χ^2 の値 31.25 は棄却域に落ちるから，H_0 は棄却される．よって，仕切りは**不合格**と判定される．

例題 8（等分散の検定）

機械 I で作った錠剤を 10 個，機械 II で作った錠剤を 12 個とり，その重さ (g) を測って次の値を得た．

機械 I	0.374	0.380	0.365	0.399	0.388	0.383	0.311	0.398	0.363	0.373
機械 II	0.313	0.320	0.304	0.332	0.328	0.355	0.348	0.351	0.323	0.307
	0.342	0.374								

錠剤の重さは正規分布に従うと仮定して，これら 2 台の機械で作られる錠剤の重さの分散は等しいかどうかを有意水準 5% で検定せよ．

解　機械 I，II が作る錠剤の重さの母分散を $\sigma_1{}^2$, $\sigma_2{}^2$ で表せば，検定すべき仮説は，題意により

$$H_0: \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$$

$$H_1: \sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$$

で，これは F 分布によって両側検定される．

データより

$$n_1=10,\quad \sum x_i=3.734,\quad \sum x_i{}^2=1.399958$$

$$n_2=12,\quad \sum y_i=3.997,\quad \sum y_i{}^2=1.336341$$

$$u_1{}^2=\frac{1}{n_1-1}\left\{\sum x_i{}^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right\}=\frac{1}{9}\left\{1.399958-\frac{3.734^2}{10}\right\}=0.000631$$

$$u_2{}^2=\frac{1}{n_2-1}\left\{\sum y_i{}^2-\frac{(\sum y_i)^2}{n}\right\}=\frac{1}{11}\left\{1.336341-\frac{3.997^2}{12}\right\}=0.000455$$

よって,

$$F=\frac{\max\{u_1{}^2,\ u_2{}^2\}}{\min\{u_1{}^2,\ u_2{}^2\}}=\frac{0.000631}{0.000455}=1.39$$

両側検定だから, $\alpha=0.05$ に対する自由度(9, 11)の F 分布の棄却限界値は, $F_{0.025}(9, 11)=3.60$(補間による)である. よって, $\alpha=0.05$ に対する両側検定の棄却域は

$$F>3.60$$

$F=1.39$ は棄却域に入らないから, H_0 は採択される. したがって, 2 つの母分散は等しいとみなされる.

例題 9　**(比率の検定（大標本))**

サイコロを 300 回投げたら 6 の目が 72 回出た. このサイコロは偏っていると判断してよいか. $\alpha=0.05$ で検定せよ.

解　偏っていないとすれば, 300 回のうち 6 の目の出る回数の平均は 50 回 $\left(=300\times\frac{1}{6}\right)$ のはずであるから, この場合の 72 回という結果は偶然にしては多過ぎないか, つまりこの結果は有意ではないのかというのが題意である. 当然この場合は片側検定が使われる. このサイコロが 6 の目を出す確率を p とすると

$$H_0: p=\frac{1}{6}$$

$$H_1: p>\frac{1}{6}$$

$n=300$, $\hat{p}=\frac{x}{n}=\frac{72}{300}=0.24$. $\alpha=0.05$ で, 片側検定だから, $z_{0.05}=1.645$. よって, 棄却域は $z>1.645$. 検定統計量の値は,

$$z=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}=\frac{0.24-\dfrac{1}{6}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}}{300}}}=3.41$$

この値は棄却域に入るから，H_0 は棄却される．したがってこのサイコロは**偏っている**．

例題 10　(比率の検定 (小標本))

スーパーマーケットで，6 人の客に，手作りハムと工場製ハムを試食して味を比べてもらったら，6 人中 5 人が手作りハムの方がおいしいと答えた．手作りハムは，工場製ハムより一般に好まれるといえるであろうか．消費者の両方のハムへの好みは同じであるという帰無仮説を 5% 有意水準で検定せよ．

解　消費者の母集団において，工場製より手作りのハムを好むという人の比率を p とする．題意より，この問題は比率 p の片側検定と考えられるから，仮説は

$$H_0 : p=\frac{1}{2}$$

$$H_1 : p>\frac{1}{2}$$

帰無仮説 H_0 が真のとき，6 人中 5 人以上が手作りハムを好む確率は，2 項分布 $B\left(6, \dfrac{1}{2}\right)$ より

$$P(X \geqq 5)=p(5)+p(6)=6\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^6=0.11$$

この確率は 0.05 より大きいから，5% 有意水準で H_0 は棄却できない．
よって，消費者は工場製ハムより手作りハムをとくに好むとは**いえない**．

例題 11　(2 つの比率の差の検定 (大標本))

548 人の男子高校生と 582 人の女子高校生に対し，どのような事柄について親と意見を異にするかの調査をした．以下の数値は，提示された項目

親と意見が一致しない項目	不一致の標本比率	
	男 : $\hat{p}_1$	女 : $\hat{p}_2$
友達の選択	0.243	0.272
大学への進学	0.375	0.298
洋服のスタイル	0.152	0.256
家事の手伝い	0.193	0.260
夜間の外出	0.458	0.486

に"イエス"と答えた男女生徒の標本比率である．ここにあげた項目のうち，どれが男女間で有意な差を示しているか．5%有意水準で，各項目ごとに比率の差の検定を行え．

解　各項目について，男子高校生と女子高校生の 2 つの母比率を比較する問題である．

項　目	$\lvert\hat{p}_1-\hat{p}_2\rvert$	$\lvert z\rvert=\dfrac{\lvert\hat{p}_1-\hat{p}_2\rvert}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\dfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$
友達の選択	0.029	1.115
大学への進学	0.077	2.745 *
洋服のスタイル	0.104	4.385 *
家事の手伝い	0.067	2.702 *
夜間の外出	0.028	0.943

題意より，両側検定で行うのが適当である．

$z_{0.025}=1.96$ であるから，棄却域は，

$$\lvert z\rvert>1.96$$

z の値が棄却域に落ちて有意となるのは，上の表で＊印をつけた 3 つである．よって，男女間で有意な差のある項目は，

大学への進学，洋服のスタイル，家事の手伝い

である．

例題 12　**（第 1 種の過誤と第 2 種の過誤の確率）**

袋の中の球の構成は

（a）　赤球 3 個と黒球 7 個

または

（b）　赤球 6 個と黒球 4 個

のどちらかである．

(a) を帰無仮説 H_0, (b) を対立仮説 H_1 に選ぶ．この袋から 2 個の球を非復元抽出でとるとき，少なくとも 1 個が黒球であれば H_0 を採択し，それ以外のときは H_0 を棄却する．この検定の第 1 種と第 2 種の過誤の確率を求めよ．

解　とり出した2個の球のうち，黒球の数を X とする．
第1種の過誤は，H_0 が真のときこれを棄却する誤りであるから，その確率は

$$P(H_0 \text{を棄却} | H_0 \text{が真}) = P(X=0 | \text{赤球 3 個, 黒球 7 個})$$
$$= \frac{{}_3C_2 \cdot {}_7C_0}{{}_{10}C_2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{45}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{15}}$$

一方，第2種の過誤は，H_1 が真のとき H_0 を採択する誤りであるから，その確率は

$$P(H_0 \text{を採択} | H_1 \text{が真}) = P(X \neq 0 | \text{赤球 6 個, 黒球 4 個})$$
$$= 1 - P(X=0 | \text{赤球 6 個, 黒球 4 個})$$
$$= 1 - \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_0}{{}_{10}C_2} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

8章の問題

8.1　比率の検定において

（a）　$n=120$，$x=90$，$\alpha=0.05$ のとき，
$H_0: p=0.7$，$H_1: p \neq 0.7$ の検定をせよ．

（b）　$n_1=420$，$x_1=118$，$n_2=530$，$x_2=121$，$\alpha=0.05$ のとき
$H_0: p_1=p_2$，$H_1: p_1>p_2$ の検定をせよ．

8.2　ある機械は重さ 15 g の鉛のおもりが作れるように設定されている．この機械が順調に作動しているかどうかを調べるため，12個のおもりの標本をとりその重さを測って，平均 17 g，標準偏差 2.1 g を得た．機械は順調に作動しているという仮説を 5%有意水準で検定せよ．

8.3　ある機械は，長さ 5.00 cm の部品を切りとるように調整されている．この機械を使って7個の部品を切りとり，その長さを測定して次の数値を得た（単位：cm）．

4.98　5.01　4.96　4.95　4.94　5.02　4.96

この機械は所定の長さの部品を切りとっている，つまり機械は正しく調整されていると判断してよいか．正しく調整されているという仮説を，有意水準 $\alpha=0.05$ で検定せよ．

8.4　ある工場で生産された新型タイヤの中から，100個の無作為標本をとり，寿命試験を行った．その結果，タイヤの寿命は平均 21000 km，標準偏差

1500 km であった．これから，このタイヤの真の平均寿命は20000 kmを超えると主張してよいか，有意水準 $\alpha=0.05$ で検定せよ．

8.5 A，B 2 台の機械により，粉乳を缶に詰める作業を行う．いま，両方の機械が詰めた 170 g 入り缶をそれぞれ 100 個ずつとり，中味の量を計って次の結果を得た．

機械	標本の大きさ	標本平均（g）	標本標準偏差（g）
A	100	173.2	1.1
B	100	174.1	1.4

A，B 2 台の機械が詰める粉乳の量の間に差があるといえるか．差がないという仮説を $\alpha=0.01$ で検定せよ．

8.6 2 通りの牛の飼育法を比較する実験で，一卵生の子牛 8 対をとり，各対ごとにそれぞれ別の飼育法を割り当て一定期間飼育した．その後，これら牛の肉の味の良さを点数化して，次の結果を得た．

子牛の対	1	2	3	4	5	6	7	8
飼育法 A	57	61	61	68	59	69	71	57
飼育法 B	53	58	63	62	58	65	66	60

（a） 対応のある場合と考えて，2 つの飼育法は味の良さについて異なるかどうか，を t 検定によって，5%有意水準で判定せよ．

（b） この検定に必要な仮定を述べよ．

8.7 ある母集団から 20 個のデータを抽出したら，標本分散が 5.8 であった．これから，もとの母集団の分散は 10.0 であるといえるだろうか．$\alpha=0.05$ で検定せよ．

8.8 2 つの正規母集団からそれぞれ大きさ 9 と 12 の標本をとり，$u_1=7.5$，$u_2=4.2$ を得た．有意水準 5%で次の仮説を検定せよ．

（a） $H_0 : \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$,　　$H_1 : \sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$

（b） $H_0 : \sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2$,　　$H_1 : \sigma_1{}^2>\sigma_2{}^2$

8.9　過去の経験によれば，ある高校から A 大学への合格率は 40%と考えられている．今年は 105 人受験して 36 人が合格した．今年の受験生は学力が劣っているといえるか．5%有意水準で検定せよ．

8.10　ある都市のテレビ視聴率調査で，ある番組を男性は 200 人中 48 人が見たと答えたのに対し，女性は 300 人中 105 人が見たと答えた．この番組の視聴率は男女で差があるといえるだろうか．5%有意水準で検定せよ．

8.11　1 枚の硬貨を 3 回投げるとき，おもての出る数を X とする．この硬貨がおもてを出す確率を p とし，X の値によって p に関する帰無仮説 $H_0: p=0.5$ を対立仮説 $H_1: p=0.8$ に対して検定するとき，検定の棄却域として，

（a）　$x=3$

または，

（b）　$x=0$

を選ぶ．そのとき，これら 2 つの検定に対する第 1 種の過誤の確率 α と第 2 種の過誤の確率 β をそれぞれ求めよ．

8.12　ある箱は

H_0 : 20 個の白球と 80 個の黒球を含む

H_1 : 50 個の白球と 50 個の黒球を含む

のいずれかである．仮説 H_0 を対立仮説 H_1 に対して検定するために，この箱から非復元抽出で 5 個の球を無作為にとり出す．このとき，5 個とも黒球が出たら，H_0 を採択し，それ以外ならば，H_1 を採択する．この検定の第 1 種の過誤と第 2 種の過誤の確率を求めよ．

8.13　つぼの中に多数の赤球と黒球が入っている．この中の赤球と黒球の割合は同じであるという仮説を検定するため，つぼから復元抽出で 25 個の球を無作為にとる．もし，その中の黒球の数が，15 個から 20 個の範囲内にあれば仮説を受け入れ，そうでないときは仮説を棄却する．仮説が実際正しいとき，この仮説を棄却する確率を求めよ．つぼの中の球の構成は，黒球が赤球より多いことが予想されているとする．このつぼから復元抽出で 64 個を無作為にとってその中の黒球の数を Y とするとき，Y を検定統計量とする有意水準 5%の棄却域を作れ．