# ヴィエトの多項式、ド・モルガンの公式からトリボナッチ数列の係数へ

安田正實（千葉大名誉教授）

## 1 はじめに

1593 年アドリアン・ファン・ルーメン（1561-1615）は Idea Mathematicae の序文につぎの 45 次の方程式の解を求める問題を「全世界のすべての数学者」への難問として提出したという。（MacTutor）これに対して、ヴィエト（Viéte(1540-1603)）は「解析術序説」1591 年に三角関数の倍角の関係式が解であることを示したという。45 次の方程式は 2 つの 3 次方程式と 1 つの 5 次方程式を組み合わせて（$3*3*5=45$）逐次的に解いた。この着想はラグランジュとガウスによる考察において中心的な役割を果たし、のちにアーベル、ガロアへと発展し、群論でのガロア理論の発展する。ここではそこに至る前に、まず 45 次方程式を述べて、その解を数式処理で計算し、ドモアブルの公式、複素数の指数関数と三角関数の関係:$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$ をみていこう。

## 2 Viet の解いた 45 次方程式

1593 年にラテン名でルーメン (Adriaan van Roomen（$1561-1615$）) の Ideae mathematicae に出した 45 次方程式とは

$$
\begin{aligned}
&45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11}\\
&+105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19}\\
&+483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27}\\
&+46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35}\\
&+111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

ここでルーメンの与えた例題とは左辺の多項式と右辺の値 $A$ から、それに対応する解 $x$ として, 次のように結果を示したという (Tignol の修正加筆を含む)。（(i) ～(iii) は 45 次方程式、(iv) は 8 次式?）

| 値 $A$=(三角関数の表示) | 解 $x$=(三角関数の表示) |
|---|---|
| (i) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 2\sin\dfrac{15\pi}{2^5}$ | $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 2\sin\dfrac{\pi}{2^5\cdot 3}$ |
| (ii) $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 2\sin\dfrac{15\pi}{2^6}$ | $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = 2\sin\dfrac{\pi}{2^6\cdot 3}$ |
| (iii) $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\sin\dfrac{3\pi}{2^3}$ | $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3/16}+\sqrt{15/16}+\sqrt{5/8-\sqrt{5/64}}}}$ $= 2\sin\dfrac{\pi}{2^3\cdot 3\cdot 5}$ |
| (iv) $\sqrt{7/4-\sqrt{5/16}-\sqrt{15/8}-\sqrt{45/64}}$ $= 2\sin\dfrac{\pi}{3\cdot 5}$ | $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3/16}+\sqrt{15/16}+\sqrt{5/8-\sqrt{5/64}}}}$ $= 2\sin\dfrac{\pi}{2^3\cdot 3\cdot 5}$ |

などをあげ、公式にて述べると、いわゆる半角の公式から、

$$\sin\alpha = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos 2\alpha},\ \cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\cos 2\alpha}$$

とくに具体的な値では、

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},\quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad \cos\frac{\pi}{15} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right),$$

また

$$2\sin(45\alpha) = 2\sin\left(45(\alpha+\frac{2\pi}{45})\right) = 2\sin\left(45(\alpha+2\frac{2\pi}{45})\right) = \cdots = 2\sin(45(\alpha+44\frac{2\pi}{45}))$$

より、

$$A = 2\sin(45\alpha) \Longrightarrow x = 2\sin\left(\alpha+\frac{k\pi}{45}\right), k = 0,1,2,\cdots,44$$

の解が得られることが、この問題提起の源泉に潜むと指摘している。

現代版では $n = 45$ として一般式を

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]}(-1)^i\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}x^{n-2i} \tag{2.2}$$

とするとき、方程式

$$f_n(2x) = 2a \tag{2.3}$$

を求めたもので、Viéte(1540-1603) は三角関数に習熟していたので、思いついたのであろうといわれる Tignol[7]。

この (2.3) の解は $x = \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$ で与えられる。もし $a<1$ であれば、$b = \sqrt{a^2-1}$ とおいて、$x = \sqrt[n]{a+bi} + \sqrt[n]{a-bi}$, $a^2+b^2 = 1$ となる。この形に書いたド・モアブルは”Miscellanea Analytica(1730)” にその発展として、有名なオイラーの公式

$$\cos(n\theta)+i(\sin n\theta) = (\cos\theta+i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$$

へとつながっていく。

ド・モアブルが示した解は

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}} \\ &= \sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \left(\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^{-1} \\ &= \left(\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^{-1} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}} \\ &= \left(\sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^{-1} + \left(\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

の 4 つの形でも表される。つまり 2 項の積が 1 に等しい。具体的に（2.2）の計算では

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \tfrac{2}{2}\tbinom{2}{0}x^2 - \tfrac{2}{1}\tbinom{1}{1}x^0 && = x^2 - 2x^0 = x^2 - 2 \\
f_3(x) &= \tfrac{3}{3}\tbinom{3}{0}x^3 - \tfrac{3}{2}\tbinom{2}{1}x^1 && = x^3 - 3x^1 \\
f_4(x) &= \tfrac{4}{4}\tbinom{4}{0}x^4 - \tfrac{4}{3}\tbinom{3}{1}x^2 + \tfrac{4}{2}\tbinom{2}{2}x^0 && = x^4 - 4x^2 + 2 \\
f_5(x) &= \tfrac{5}{5}\tbinom{5}{0}x^5 - \tfrac{5}{4}\tbinom{4}{1}x^3 + \tfrac{5}{3}\tbinom{3}{2}x^1 && = x^5 - 5x^3 + 5x \\
f_6(x) &= \tfrac{6}{6}\tbinom{6}{0}x^6 - \tfrac{6}{5}\tbinom{5}{1}x^4 + \tfrac{6}{4}\tbinom{4}{2}x^2 - \tfrac{6}{3}\tbinom{3}{3}x^0 && = x^6 - 6x^4 + 18x^2 - 2 \\
f_7(x) &= \tfrac{7}{7}\tbinom{7}{0}x^7 - \tfrac{7}{6}\tbinom{6}{1}x^5 + \tfrac{7}{5}\tbinom{5}{2}x^3 - \tfrac{7}{4}\tbinom{4}{3}x^1 && = x^7 - 7x^4 + 28x^2 - 7 \\
&\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

もし $n = 2$ では、

$$f_2(x) = x^2 - 2$$

となることは、$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$ で $x = 2\cos\theta$ とおくと、$x = 2\cos\theta \leftrightarrow 4\cos^2\theta - 2 = x^2 - 2 = f_2(2\cos\theta)$ である。あまりにも自明するが、ここで

$$x^2 - 2 = 2a$$

を解いてみる。大げさに過ぎるかも知れないが、ここで単に $x = \pm\sqrt{2a+2}$ とするのではなく、$\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\left(a - \sqrt{a^2-1}\right) = 1$ であることから、

$$2a = \left(a + \sqrt{a^2-1}\right) + \left(a - \sqrt{a^2-1}\right) = \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2-1}} \pm \sqrt{a - \sqrt{a^2-1}}\right)^2 - 2$$

正のほう $x > 0$ をとれば、

$$f_2(x) = 2a \implies x = \sqrt{2a+2} = \sqrt{a + \sqrt{a^2-1}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2-1}}$$

という形に変形できる。感嘆を覚える！この式変形と同様にして、一般的に繰り返して適用でき、特に 2 根の積が 1 になることが計算を簡単にしている。

もし $n = 3$ とすると、$x > 0$ の実数解は

$$f_3(x) = x^3 - 3x = 2a \quad \implies \quad x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2-1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2-1}}$$

が成りたつ。たとえば、$n = 5$ のときに、方程式 $f_5(x) = 2a$ の解は $x = \alpha^{1/5} + \beta^{1/5}$ であることを、5 乗の展開をすることで確かめてみる。ただし、ここで $\alpha = a + \sqrt{a^2-1}, \beta = a - \sqrt{a^2-1}$ とした。要点は $\alpha + \beta = 2a$, $\alpha \cdot \beta = 1$ であることに注意する。$f_5(x) = x^5 - 5x^3 + 5x$ を計算して確かめる。

(i) $x^5 = (\alpha^{1/5} + \beta^{1/5})^5 = \alpha + \beta + 5(\alpha^{3/5} + \beta^{3/5}) + 10(\alpha^{1/5} + \beta^{1/5}) = 2a + 5(\alpha^{3/5} + \beta^{3/5}) + x$,

(ii) $x^3 = (\alpha^{1/5} + \beta^{1/5})^3 = \alpha^{3/5} + \beta^{3/5} + 3(\alpha^{1/5} + \beta^{1/5}) = \alpha^{3/5} + \beta^{3/5} + 3x$

なる関係を順に代入すれば、$x^5 = 2a + 5x^3 - 5x$ となり、$x = \alpha^{1/5} + \beta^{1/5}$ が $f_5(x) = x^5 - 5x^3 - 5x = 2a$ を満たすことがわかる。

この関係式は

$$f_{n+1}(x) = x\,f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, 4, \cdots \tag{2.4}$$

で、いいかえると、三角関数の加法定理；

$$2\cos\left((n+1)\alpha\right) = (2\cos\alpha)(2\cos n\alpha) - 2\cos\left((n-1)\alpha\right)$$

であって、ルーメンの提示した方程式は $n = 45$ での関係式であり、$x = 2\cos\alpha$ として、上式の左辺は $f_{n+1}(x)$、右辺は $xf_n(x) - f_{n-1}(x)$ としたもので

$$f_n(2\cos\alpha) = 2\cos(n\alpha) \tag{2.5}$$

を解くものであった。

三角関数の倍角公式を繰り返して、適用することでつぎの表が得られる。$\cos(n\theta)$ と $\dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$ を展開する。

| | $\sin(n\theta)/\sin\theta$ | $\cos(n\theta)$ |
|---|---|---|
| $n=2$ | $2\cos\theta$ | $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ |
| $n=3$ | $3\cos^2\theta - \sin^2\theta$ | $\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^3\theta$ |
| $n=4$ | $4\cos^3\theta - 4\cos\theta\sin^2\theta$ | $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ |
| $n=5$ | $5\cos^4\theta - 10\cos^2\sin^2\theta + \sin^4\theta$ | $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

実際は、2 項の和のべき乗計算： $(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n$ の展開を行い、$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \cdots$ としてやれば、上記の式はパスカル三角形の展開式にほかならない。係数をみれば、想像できよう。ヴィエトが 45 次の方程式の係数から、三角関数の展開したものに. 他ならないと連想したことに近い、経験がこれである。さらに簡単に表現するため、$x = \cos\theta$ とおけば、つぎの表になる。ここでは $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いている。

| | $\sin(n\theta)/\sin\theta, x = \cos\theta$ | $\cos(n\theta), x = \cos\theta$ |
|---|---|---|
| $f_2(x)$ | $2x$ | $2x - 1$ |
| $f_3(x)$ | $4x^2 - 1$ | $4x^3 - 3x$ |
| $f_4(x)$ | $8x^3 - 4x$ | $8x^4 - 8x^2 + 1$ |
| $f_5(x)$ | $16x^4 - 12x^2 + 1$ | $16x^5 - 20x^3 + 5x$ |
| $\cdots$ | $\cdots$ | $\cdots$ |

これらに共通の性質；

$$f_n(x) = 2xf_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \cdots \tag{2.6}$$

が分かるであろう。

このような計算をフィボナッチ数列、トリボナッチ数列で考えてみる。フィボナッチ数列では生成母関数の解は 2 個であり、トリボナッチ数列の場合では 3 個の解に対して、これに対して基本対称式と解のベキ乗和の関係式を考える。いまある $k$ 次方程式の解 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を $k$ 乗したベキ乗和と $k$ 次の基本対称式とを次の記号とするとき

$$\begin{aligned}
&\sigma_k = x_1^k + x_2^k + \cdots x_n^k, \quad k = 1, 2, \cdots \\
&s_k = \textstyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}
\end{aligned}$$

このような計算は古典的にもよく知られていて、Waring の公式とは（E.Waring(1736-1798)）

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = s_1 \\
&\sigma_2 = s_1^2 - 2s_2 \\
&\sigma_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 \\
&\sigma_4 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4s_4 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

また、古典力学の Newton も論文に取り入れていて、Newton の公式とよばれ、

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = s_1 \\
&\sigma_2 = s_1\sigma_1 - 2s_2 \\
&\sigma_3 = s_1\sigma_2 - s_2\sigma_1 + 3s_3 \\
&\sigma_4 = s_1\sigma_3 - s_2\sigma_2 + s_3\sigma_1 - 4s_4 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{2.8}$$

という形が知られている。

とくに 3 変数 $a, b, c$ であれば、

$$\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac) \\ a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ac)(a+b+c)-3abc \\ a^4+b^4+c^4=(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)-(ab+bc+ac)(a^2+b^2+c^2)+3abc(a+b+c) \\ \cdots\cdots \end{array}$$

が得られる。

## 3 チェビシェフ多項式を連想するから

この方程式 (2.4), (2.5) から、第 1, 2 種Ｃｈｅｂｙｓｈｅｖ多項式が連想される。これらは、それぞれ $(n \geq 1)$ として (初期値の違いに注意！！)

$$\begin{cases} T_0(x)=1, T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=\ 2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} U_0(x)=1, U_1(x)=2x, \\ U_{n+1}(x)=\ 2x\,U_n(x)-U_{n-1}(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

で定める。つぎの関係もよく知られている。以前の秋田研究会での発表をおこなった。

$$T_n(x)=\frac{\omega(x)^n+\overline{\omega}(x)^n}{\omega(x)\cdot\overline{\omega}(x)}, \qquad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta) \tag{3.3}$$

$$U_n(x)=\frac{\omega(x)^{n+1}-\overline{\omega}(x)^{n+1}}{\omega(x)-\overline{\omega}(x)}, \qquad U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin(\theta)} \tag{3.4}$$

ただし $\omega(x)=x+\sqrt{x^2-1}, \overline{\omega}(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ とする。$\omega(x)\cdot\overline{\omega}(x)=1$, $\omega(x)-\overline{\omega}(x)=2\sqrt{x^2-1}$ が成り立つ。これらは三角法の加法定理から得られる。しかし複素数をもちいると不思議なことに、Lucas 数列と Fibonacci 数列が計算できる。Fibonacci Quartery 誌の多くの論文で述べられている。

$$L_n=2\,i^n\,T_n(-i/2) \tag{3.5}$$

$$F_n=i^n\,U_n(-i/2) \tag{3.6}$$

しかも (3.4), (3.6) 式から、分子がゼロとなる値、すなわち根が得られるから、それをもちいて、多項式を積の形に表して

$$F_n=\prod_{k=1}^{[(n-1)/2]}\left(1+4\cos^2\frac{k\pi}{n}\right) \tag{3.7}$$

となり、具体的に $n=7, 10$ では、

$$F_7=\left(1+4\cos^2\frac{\pi}{7}\right)\left(1+4\cos^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(1+4\cos^2\frac{3\pi}{7}\right)=29-32\left\{\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{14}-\sin\frac{3\pi}{14}\right\}=13$$

$$F_{10}=\left(1+4\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\left(1+\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}\right)\left(1+4\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(1+\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{4}\right)=55$$

などとなっている。([2])

このようにヴィエトの出題した三角法の方程式を調べていくと、根のべき乗が作る方程式を考えることで後に、ド・モアブル、オイラーさらには、ファンデルモンデ、ラグランジュなどの考察を経て、代数学の基本定理としてガロア理論へと続く。

## 4 根のべき乗が作る方程式

Lagrange[4](p.10) の論文には、根のベキ乗和を求める式がある。例題として２次、３次があるのでその方法にて計算してみると、２次方程式 $a-bx+cx^2=0$ における解を $p,q$ とおくならば、$m>0$ で

$$\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m-\frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}+\frac{m(m-3)c^2}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4}+\cdots$$

３次方程式では $a-bx+cx^2-dx^3=0$ における解を $p,q,r$ として、

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^m}+\frac{1}{q^m}+\frac{1}{r^m}&=\left(\frac{b}{a}\right)^m-\frac{mc}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-2}\\&+\frac{m(m-3)c^2}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-4}-\frac{m(m-4)2cd}{2\cdot 2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-5}+\frac{m(m-5)d^2}{2a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{m-6}-\cdots\end{aligned}$$

基本的には、いわゆる根と係数の関係でべき乗和を求めることで、前節の Waring, Newton の公式を考えればよい。

少し形が異なるが、方程式に対する式変形をその根によって表現することを考える。２次多項式の逆数を考えているが、これは数列の生成母関数から、その係数の一般式を求めるためである。Graham, Kunuth, Patashnik([3]) では一般論として取り扱われているが、ここではフィボナッチ数列とトリボナッチ数列の場合に限定してみる。

(I)　２次の場合

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x} \tag{4.1}$$

とおくと、未定係数法を定めるから、

$$\begin{cases}A+B=1\\A\beta+B\alpha=0\end{cases}$$

を解いて、$A=\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}$　$B=\dfrac{-\beta}{\alpha-\beta}$ から、Graham/Knuth/Patashnik による展開式での記号では

$$F_n=[z^n]\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

となる、いわゆるビネ公式が得られる。

(II) ３次の場合

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}+\frac{C}{1-\gamma x} \tag{4.2}$$

とおく。連立方程式は

$$\begin{cases}A+B+C=1\\A\{\beta+\gamma\}+B\{\alpha+\gamma\}+C\{\alpha+\beta\}=0\\A\{\beta\gamma\}+B\{\alpha\gamma\}+C\{\alpha\beta\}=0\end{cases}$$

から、逆行列

$$\mathrm{INV}\begin{pmatrix}1&1&1\\\beta+\gamma&\alpha+\gamma&\alpha+\beta\\\beta\gamma&\alpha\gamma&\alpha\beta\end{pmatrix}=\frac{-1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\begin{pmatrix}\alpha^2(\beta-\gamma)&-\alpha(\beta-\gamma)&\beta-\gamma\\\beta^2(\gamma-\alpha)&-\beta(\gamma-\alpha)&\gamma-\alpha\\\gamma^2(\alpha-\beta)&-\gamma(\alpha-\beta)&\alpha-\beta\end{pmatrix}$$

により、

$$\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{1}{1-\alpha x} + \frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\frac{1}{1-\beta x} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\frac{1}{1-\gamma x} \tag{4.3}$$

であるから、トリボナッチ数列 (OEIS:A000073): $T_0 = T_1 = 0, T_2 = 1, T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ での生成母関数

$$G.F. = \frac{x^2}{1-x-x^2-x^3}$$

から、Spikerman [6] による表現式: 級数における $z^n$ の係数を示すと、トリボナッチ数

$$T_n = [z^n]\frac{z^2}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)}$$

が得られる。ただし、３次方程式の解は、一つの実数解と２個の互いに共役な複素数解であり、明快ではないが、次数 $n$ を入れて展開すれば、整数の値として得られる。

# 参考文献

[1] 岩本誠一、木村寛、安田正實；ドモアブルが求めた生起継続の確率計算と動的計画法、RIＭＳ 2013.

[2] 安田正實；フィボナッチ数をバラバラに、—— 線形再帰数列と２項係数、チェビシェフ多項式、ＯＲ学会研究部会「確率モデルとその応用」、秋田研究集会　2017
`http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/2017Akita-cont.pdf`
`http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~yasuda/ippansug/fibo/2017Akita/beamer_03.pdf`

[3] Graham,R.L., Knuth, D.E., Patashnik,O.; “Concrete Mathematics”, 2nd Addison-Wesley (1994).

[4] Joseph-Louis Lagrange, OEUVRES III-vol.1, Mémores VII a XIII

[5] ON-LINE ENCYCLOPEDIA INTEGER SEQUENCES founded in 1964 by N.J.A.Sloane.

[6] Spikerman,W.; “Binet’s formula for the Tribonacci sequences”, FQ 20:2 pp.118-120, 1982.

[7] Tignol,J.P.; “Galois’s Theory of Algebraic Equation”, World Scientific Pub, 2001. 代数方程式のガロア理論、新妻弘訳、共立出版　2005.