Tribonacci 数列に対する 三項係数の和による表現

岩本誠一 [1]　木村寛 [2]　安田正實 [3]

Oct.18-19, 2017 at Gunma

[1]九州大名誉教授
[2]秋田県立大
[3]千葉大名誉教授

トリボナッチ数列の線形回帰式による表現

まとめ

フィボナッチ数列は 2 項係数（パスカル三角形）の表で、斜めに足し合わせると得られるという関係はよく知られている。トリボナッチ数列は三項関係による線形再帰関係であり、三項の和のべき乗展開で表されることが期待される。このメモの目的はこの性質について考察をするが、ステップとして 2 段階の数列定めていくことを要する。またフィボナッチ列でのビネ公式と同様なトリボナッチ列に対する表現も与える。

三項和の展開式

$(a+b+c)^2$ をメビウス座標で書くと

2 乗式を三角形で

$$
\boxed{\begin{array}{ccccc}
 & & b^2 & & \\
 & 2ab & & 2bc & \\
a^2 & & 2ac & & c^2
\end{array}}
$$

3 乗式では

$$
\boxed{\begin{array}{ccccccc}
 & & & b^3 & & & \\
 & & 3ab^2 & & 3b^2c & & \\
 & 3a^2b & & 6abc & & 3bc^2 & \\
a^3 & & 3a^2c & & 3ac^2 & & c^3
\end{array}}
$$

Feinberg, "New Slant" FQ 1964

	a	b	c		
$1st:$	1	1	1		
	a^2	ab	b^2, ac	bc	c^2
$2nd:$	1	2	$1+2=3$	2	1
	a^3	a^2b	ab^2, a^2c	b^3, abc	
$3rd:$	1	3	$3+3=6$	$1+6=7$	1

さらに続けると

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 4 & & 4 & & & \\
 & & 6 & & 12 & & 6 & & \\
 & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 5 & & 5 & & & & \\
 & & & 10 & & 20 & & 10 & & & \\
 & & 10 & & 30 & & 30 & & 10 & & \\
 & 5 & & 20 & & 30 & & 20 & & 5 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

4,5,6,7th $\cdots$ と続ければ

この中にはどんな関係が？

$4th:$	1	4	10	16	19	16	10	4	1		
$5th:$	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
$6th:$	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	$\cdots$
$7th:$	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266	$\cdots$

この和を式でまとめると

３つの項から

初期値

$$a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = a_{1,1} = a_{1,2} = 1$$

一般項

$$a_{n,j} = a_{n-1,j} + a_{n-1,j-1} + a_{n-1,j-2}, \quad n = 2, 3 \cdots$$

この縦列の和を考えた Feinberg の意味は

3 つの項から

$n=3$ として、$a=1, b=x, c=x^2$ とおいて、Möbius の三角座標と式の展開を対応させて $(a,b,c)=(1,x,x^2)$ であり、

$$a+b+c=1+x+x^2$$

から

係数の比較をすることで

$$\begin{aligned}&a^3=1, \quad 3a^2b=3x, \quad 3ab^2+3a^2c=6x^2,\\ &b^3+6abc=7x^3, \quad 3b^2c+3ac^2=6x^4,\\ &3bc^2=3x^5, \quad c^3=x^6\end{aligned}$$

トリボナッチ数列の生成

斜めの和（詳細は資料で）

左側から右斜め上に沿ってその和をカッコ数字で表す

Wong/Maddocks(1975)

$$
\begin{tikzcd}
 & (1) & & & & \\
1 \arrow[ur, Rightarrow] & (1) & (2) & (4) & & \\
1 \arrow[ur, Rightarrow] & 1 \arrow[ur, Rightarrow] & 1 \arrow[ur, Rightarrow] & (7) & (13) & (24) \\
1 \arrow[ur] & 2 \arrow[ur] & 3 \arrow[ur, Rightarrow] & 2 \arrow[ur, Rightarrow] & 1 \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

トリボナッチ数列との対応と一般項

対応

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1 = 1 && = a_{0,0} \\
T_1 &= 1 = 1 && = a_{1,0} \\
T_2 &= 2 = 1 + 1 && = a_{2,0} + a_{1,1} \\
T_3 &= 4 = 1 + 2 + 1 && = a_{3,0} + a_{2,1} + a_{1,2} \\
T_4 &= 7 = 1 + 3 + 3 && = a_{4,0} + a_{3,1} + a_{2,2} \\
T_5 &= 13 = 1 + 4 + 6 + 2 && = a_{5,0} + a_{4,1} + a_{3,2} + a_{2,3} \\
\cdots & \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$a_{n,j}$ の一般項は多項係数で

Anatielleo and Vincenzi

$$
a_{n,j} = \sum_{j_1+j_2+j_3=n, j_2+2j_3=j} \binom{n}{j_1, j_2, j_3}
$$

３方向に推移をする経路

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & 1 \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 7 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 9 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 13 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 25 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 41 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 7 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 25 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 63 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & 129 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \cdots \\
1 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 41 \arrow[r] & 129 \arrow[r] & 321 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

経路を行列で表して（1）

行列では

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & & \\
1 & 3 & 1 & & & & & & \\
1 & 5 & 5 & 1 & & & & & \\
1 & 7 & 13 & 7 & 1 & & & & \\
1 & 9 & 25 & 25 & 9 & 1 & & & \\
1 & 11 & 41 & 63 & 41 & 11 & 1 & & \\
1 & 13 & 61 & 129 & 129 & 61 & 13 & 1 & \\
1 & 15 & 85 & 231 & 321 & 231 & 85 & 15 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}
$$

経路を行列で表して (2)

斜めの和はトリボナッチ数列

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 1 &&= 1\\
T_1 &= 1 &&= 1\\
T_2 &= 1+1 &&= 2\\
T_3 &= 1+3 &&= 4\\
T_4 &= 1+5+1 &&= 7\\
T_5 &= 1+7+5 &&= 13\\
T_6 &= 1+9+13+1 &&= 24\\
T_7 &= 1+11+25+7 &&= 44\\
T_8 &= 1+13+41+25+1 &&= 81\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

行列からトリボナッチ数列へ

図式で表現すると

Alladi and Hogatt(1977)

$$g(n+1, r+1) = g(n+1, r) + g(n, r+1) + g(n, r)$$

ただし $g(n, 0) = g(0, r) = 1,\ n, r = 0, 1, 2, \cdots$

$$\begin{tikzcd}
g(n,r) \arrow[dr] & g(n,r+1) \arrow[d] \\
g(n+1,r) \arrow[r] & g(n+1,r+1)
\end{tikzcd}$$

トリボナッチ数列へ

トリボナッチ数列 $\{T_n\}$ は $\{g(s,t); s,t \geq 0\}$ より、つぎで計算される。

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{s+t=n, s,t\geq 0} g(s,t) \\ &= g(n,0) + g(n-1,1) + g(n-2,2) + \cdots \end{aligned}$$

ビネ公式は

ルカ数

定義

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ただし、$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1, (\alpha > \beta)$ の 2 次方程式の解。

ビネ公式

$$F_n = \frac{1}{5}L_n + \frac{2}{5}L_{n-1}$$

ビネ公式をまねると

ルカ数をまねて

定義

$$A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

ただし、$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \alpha\beta\gamma = 1$ (実数解と２つの互いに共役な複素数解)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
A_n	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	$\cdots$

$A_n = A_{n-3} + A_{n-2} + A_{n-1}, n = 3, 4, \cdots$ の関係をもつ。OEIS で検索すると、A001644 という結果で、４つの例が掲載。そのうちの一つは avoiding 列で IKY(2013) が含まれる。

トリボナッチ数列の場合

生成母関数からベキ乗和を計算し

トリボナッチ数列 $\{T_n; n = 3, 4, 5\cdots\}$ OEIS: A000073 はつぎの表現: 数列 A_n (OEIS: A001644) によりつぎの形をもつ。

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{22}\left[6\,A_n - 3\,A_{n-1} + A_{n-2} - 4\,A_{n-3}\right] \\
&= \frac{1}{22}\left[3\,A_{n-1} + 7\,A_{n-2} + 2\,A_{n-3}\right] \\
&= \frac{1}{22}\left[2\,A_n + A_{n-1} + 5\,A_{n-2}\right], \quad (n \geq 3)
\end{aligned}
$$

藤田先生、吉良先生
このような機会を与えていただきありがとうございました。
感謝申し上げます。